Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра математического анализа

Л. П. Сметанина, О. В. Максимова

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2022

УДК 517.31(075.8)
ББК 22.161.12я73
С502

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: к. ф.-м. н., доцент К. И. Дизендорф

Сметанина Л. П., Максимова О. В.

С502 Неопределенный интеграл: учеб.-метод. пособие – Ижевск : Удмуртский университет, 2022. – 55 с.

ISBN 978-5-4312-0998-7

В учебно-методическом пособии приведены краткие теоретические сведения, изложена методика вычисления основных видов неопределенных интегралов и представлены индивидуальные работы.

Данное пособие предназначено для студентов уровня бакалавриата всех направлений и всех форм обучения Института нефти и газа им. М. С. Гуцериева, Института экономики и управления в Удмуртском государственном университете.

УДК 517.31(075.8)
ББК 22.161.12я73

ISBN 978-5-4312-0998-7

Содержание

Введение

Данное учебно-методическое пособие подготовлено преподавателями кафедры математического анализа и отражает многолетний опыт при проведении занятий и организации самостоятельной работы студентов Института нефти и газа им. М.С.Гуцириева и Института экономики и управления в Удмуртском государственном университете.

Пособие предназначено для методического обеспечения раздела «Теория интегрирования» курса «Высшая математика».

В пособии содержатся основные теоретические сведения и примеры, подробно изложена методика вычисления всех основных типов неопределенных интегралов. Пособие содержит тестовые задания и варианты индивидуальных заданий.

Индивидуальные задания могут быть использованы для организации работы на практических занятиях, а также как индивидуальные домашние задания.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения раздела:

— универсальные компетенции

УК-1 способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

— общепрофессиональные компетенции

ОПК-1 способность решать задачи, относящиеся к профессиональной деятельности, применяя методы моделирования, математического анализа, естественнонаучные и общеинженерные знания.

Пособие предназначено обеспечить студентов наглядным вспомогательным материалом и индивидуальными заданиями при изучении курса «Высшая математика» и может быть использовано для студентов других нематематических направлений УдГУ.

1 Вводные понятия

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на интервале $(a,\, b)$, если для всех $x \in (a,\, b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то $F(x) + C$ — тоже первообразная (при любом значении константы C).

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом от функции** $f(x)$ и обозначается $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Свойства неопределенных интегралов:

1. $\left(\displaystyle\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$;

2. $\displaystyle\int dF(x) = F(x) + C$;

3. $A\displaystyle\int f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$ (постоянный множитель можно выносить за знак интеграла);

4. $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ (интеграл от суммы или разности функций равен соответственно сумме или разности интегралов от этих функций).

Таблица интегралов

$$1) \quad \int dx = x + C$$

$$2) \quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$3) \quad \int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$$

$$4) \quad \int e^x\,dx = e^x + C$$

5) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (const\ a > 0,\ a \neq 1)$

6) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad a > 0$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$

Задачи.

1. Показать, что $F(x)$ является первообразной для $f(x)$:

а) $F(x) = \dfrac{x^{14}}{14}$, $f(x) = x^{13}$, $x \in \mathrm{R}$.

Действительно, $F'(x) = \left(\dfrac{x^{14}}{14}\right)' = \dfrac{1}{14}\cdot 14x^{13} = x^{13}$.

б) $F(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{25-x^2} + \dfrac{25}{2}\arcsin\dfrac{x}{5}$, $f(x) = \sqrt{25-x^2}$, $x \in [-5,\,5]$.

Находим

$$F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{25-x^2} + \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{25-x^2}}\cdot(-2x) + \frac{25}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}}\cdot\frac{1}{5} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{25-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{25-x^2}} + \frac{25}{2\sqrt{25-x^2}} = \frac{25-x^2-x^2+25}{2\sqrt{25-x^2}} =$$

$$= \frac{50-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}} = \sqrt{25-x^2} = f(x).$$

2 Методы интегрирования

2.1 Непосредственное интегрирование

Прием основан на применении свойств неопределенного интеграла и таблицы интегралов.

Примеры.

1. $I = \displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x^2}\,dx.$

Распишем $(\sqrt{x}+1)^3 = (\sqrt{x})^3 + 3(\sqrt{x})^2 + 3\sqrt{x} + 1 = x^{\frac{3}{2}} + 3x + 3x^{\frac{1}{2}} + 1.$

$$\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x^2}\,dx = \int \frac{x^{\frac{3}{2}} + 3x + 3x^{\frac{1}{2}} + 1}{x^2}\,dx =$$

$$\int (x^{-1/2} + \frac{3}{x} + 3x^{-\frac{3}{2}} + x^{-2})\,dx =$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx + \int \frac{3}{x}\,dx + \int 3x^{-\frac{3}{2}}\,dx + \int x^{-2}\,dx =$$

Каждый из интегралов найдем, воспользовавшись таблицей интегралов $\displaystyle\int x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C_1 = 2\sqrt{x} + C_1$

$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_2$

$$\int x^{-3/2}\,dx = \frac{x^{-1/2}}{-1/2} = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C_3$$
$$\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C_4 = -\frac{1}{x} + C_4$$
Обозначим $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.
$$I = 2\sqrt{x} + 3\ln|x| - \frac{6}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C.$$

В дальнейшем промежуточные вычисления с константами будем опускать, записывая сразу общую константу C.

2. $I = \displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^3} + 4\sqrt{x} + 3\right) dx.$
$$I = \int \left(x^{1/3} - x^{-3} + 4x^{1/2} + 3\right) dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} - \frac{x^{-2}}{-2} + 4\frac{x^{3/2}}{3/2} + 3x + C =$$
$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{2x^2} + \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + 3x + C.$$

3. $I = \displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

Воспользуемся формулой: $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

Тогда $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$

4. $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$
$$I = \int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$
$$= \arcsin x - \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C.$$

5. $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx.$

Преобразуем подынтегральную функцию:
$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}.$$
$$I = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

6. $I = \displaystyle\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx.$

$$I=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)\,dx=\int(1+\sin x)\,dx=$$
$$=-\cos x+C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $\displaystyle\int 3^x\cdot e^x\,dx.$
2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$
3. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx.$
4. $\displaystyle\int\frac{3-\sqrt{5+x^2}}{5+x^2}\,dx.$
5. $\displaystyle\int\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\,dx.$
6. $\displaystyle\int\frac{(x+2)^2}{\sqrt{x}}\,dx.$
7. $\displaystyle\int\left(2e^x+\frac{3}{1+x^2}\right)\,dx.$
8. $\displaystyle\int 2^x\cdot 3^x\,dx.$
9. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-16}.$
10. $\displaystyle\int\frac{x^3+2x^2-4}{x}\,dx.$

Ответы:

1. $\displaystyle\frac{(3e)^x}{1+\ln 3}+C$
2. $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}\right|+C$
3. $-\operatorname{ctg} x-x+C$
4. $\displaystyle\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}-\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+C$

5. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + x + C$
6. $\frac{}{5}\sqrt{x^5} + \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + 8\sqrt{x} + C$
7. $2e^x + 3\,\mathrm{arctg}\, x + C$
8. $\frac{6^x}{\ln 6} + C$
9. $-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+4}{x-4}\right| + C$
10. $\frac{x^3}{3} + x^2 - 4\ln|x| + C$

2.2 Метод подведения под знак дифференциала

Операция перехода от выражения $g'(x)\,dx$ к $dg(x)$ называется *подведением функции $g(x)$ под знак дифференциала.*

Этот прием используется для нахождения интегралов вида $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$ и привидения к виду $\int f(u)\,du$, где $\int f(u)\,du$ — табличный интеграл.

Метод базируется на свойстве инвариантности формы записи интеграла.

Форма записи любого табличного интеграла не меняется при замене x на любую дифференцируемую функцию от x, то есть если
$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ *, то*
$\int f(g(x))\,dg(x) = F(g(x)) + C$, $g(x)$ *— дифференцируемая функция.*

Таблица дифференциалов

$$dx = d(x+a)$$

$$dx = \frac{1}{b}\,d(bx)$$

$$x\,dx = \frac{1}{2}\,d(x^2)$$
$$x^2\,dx = \frac{1}{3}\,d(x^3)$$
$$x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\,d(x^n)$$
$$\cos x\,dx = d(\sin x)$$
$$\sin x\,dx = -d(\cos x)$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{x}\,dx = d(\ln x)$$
$$e^x\,dx = d(e^x)$$
$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = d(\arcsin x)$$
$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}\,dx = d(\operatorname{arctg} x)$$
$$\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = d(\operatorname{tg} x)$$
$$\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -d(\operatorname{ctg} x)$$

Напомним, что $du(x) = d(u(x)) = u'(x)\,dx$.

Метод подведения под знак дифференциалаявляется основным методом интегрирования, позволяющим освоить последующие методы интегрирования.

Примеры.

1. $$\int \frac{\ln^5 x}{x}\,dx = \left[\frac{dx}{x} = d(\ln x)\right] = \ln^5 x\,d(\ln x) = [\ln x = t] =$$
$$= \int t^5\,dt = \left[\begin{array}{c}\text{смотрим таблицу интегралов}\\ \int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\end{array}\right] = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\ln^6 x}{6} + C.$$

2. $$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = [\cos x\,dx = d(\sin x)] = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} =$$

$$= [\sin x = t] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^8+1} = \left[x^3 = \frac{1}{4}d(x^4)\right] = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2+1} = \left[x^4 = t\right] =$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^4 + C.$$

4. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^4}} = \left[x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2)\right] = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{16-(x^2)^2} = \left[x^2 = t\right] =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{4} + C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{4} + C.$$

5. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[\begin{array}{c}\text{представим интеграл}\\ \text{в виде суммы двух интегралов}\end{array}\right] =$

$$= \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{оба интеграла табличные:}\\ \text{1) при } x^2+1=t,\ \int \dfrac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C\\ \text{2) } \int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|\end{array}\right] = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+1} +$$

$$+2\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C = \sqrt{x^2+1} + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C.$$

6. $\displaystyle\int \frac{x\sqrt[7]{\ln(3x^2+1)}}{3x^2+1}\,dx = \left[x\,dx = \frac{1}{6}\,d(3x^2+1)\right] =$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{\sqrt[7]{\ln(3x^2+1)}\,d(3x^2+1)}{3x^2+1} = \left[t = 3x^2+1\right] = \frac{1}{6}\int \frac{\sqrt[7]{\ln t}}{t}\,dt =$$

$$= \left[\frac{dt}{t} = d(\ln t)\right] = \frac{1}{6}\int (\ln t)^{\frac{1}{7}}\,d(\ln t) = \frac{1}{6}\,\frac{(\ln t)^{\frac{8}{7}}}{\frac{8}{7}} + C =$$

$$= \frac{7}{48}\sqrt[7]{(\ln t)^8} + C = \frac{7}{48}\sqrt[7]{\ln^8(3x^2+1)} + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}.$

2. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}\,dx}{1+^{3x}}.$

3. $\displaystyle\int \frac{\sin 3x\,dx}{1+\cos^2 3x}.$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(1+\ln^2 x)}.$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{1-4x^6}$

6. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2(x^2+3)}.$

7. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{2\sqrt{1+\sin x}}.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{6x+5}.$

9. $\displaystyle\int \cos 3x\,\sin^2 3x\,dx.$

10. $\displaystyle\int x\cdot 3^{x^2}\,dx.$

11. $\displaystyle\int \frac{(x+5)\,dx}{x^2-9}.$

12. $\displaystyle\int \frac{3-4x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx.$

Ответы:

1.$\operatorname{arctg} e^x + C.$

2. $\dfrac{1}{3}\ln\left|1+e^{3x}\right| + C.$

3. $-\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\cos 3x + C.$

4. $\operatorname{arctg}\ln x + C.$

5. $\dfrac{1}{12}\ln\left|\dfrac{2x^3+1}{2x^3-1}\right| + C.$

6. $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(x^2+3)+C.$

7. $\sqrt{1+\sin x}+C.$

8. $\dfrac{1}{6}\ln|6x+5|+C.$

9. $\dfrac{1}{9}\sin^3 3x+C.$

10. $\dfrac{1}{2\ln 3}\cdot 3^{x^2}+C.$

11. $\dfrac{1}{2}\ln|x^2-9|+\dfrac{5}{6}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|+C.$

12. $\arcsin 3x+\dfrac{4}{9}\sqrt{1-9x^2}+C.$

2.3 Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

Интегрирование выражений $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$, $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ и частных случаев $\displaystyle\int\frac{B}{ax^2+bx+c}\,dx$, $\displaystyle\int\frac{B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$.

Интегралы от таких функций путем преобразований (выделения полного квадрата) приводятся к табличным

$$\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C;$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C;$$

$$\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C;$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|;$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C;$$

$$\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C.$$

Примеры.

$$1.\ \int\frac{dx}{x^2-6x+10}=\left[\begin{array}{c}\text{выделяем полный квадрат:}\\ x^2-6x+10=x^2-6x+9+1=\\ =(x-3)^2+1\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{dx}{(x-3)^2+1}=\big[dx=d(x-3)\big]=\int\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+1}=$$
$$=\operatorname{arctg}(x-3)+C.$$

$$2.\ \int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x+4}}=\left[\begin{array}{c}\text{выделяем полный квадрат:}\\ -x^2-4x+4=-(x^2+4x-4)=\\ =-(x^2+4x+4-8)=-(x+2)^2+8\end{array}\right]=$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{8-(x+2)^2}}=\big[dx=d(x+2)\big]=\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{8-(x+2)^2}}=$$
$$=\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{8}}+C.$$

$$3.\ \int\frac{5x-2}{x^2+2x+3}\,dx=\left[\begin{array}{c}\text{выделяем полный квадрат:}\\ x^2+2x+3=x^2+2x+1+2=\\ =(x+1)^2+2\\ \text{делаем замену } x+1=t\\ dx=dt\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{5(t-1)-2}{t^2+2}dt=5\int\frac{t\,dt}{t^2+2}-7\int\frac{dt}{t^2+2}=\left[tdt=\frac{1}{2}d(t^2+2)\right]=$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{d(t^2+2)}{t^2+2}-7\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{5}{2}\ln|t^2+2|-\frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=\frac{5}{2}\ln|x^2+2x+3|-\frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

$$4.\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2+x+2}} = \left[\begin{array}{c} \text{выделяем полный квадрат:} \\ 3x^2+x+2 = 3\left(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right) = \\ = 3\left(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}-\frac{1}{36}+\frac{2}{3}\right) = \\ = 3\left(\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{23}{36}\right) \\ \text{делаем замену } x+\frac{1}{6}=t, \quad dx=dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\left(t-\frac{1}{6}\right)dt}{3\left(t^2+\frac{23}{36}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{t\,dt}{t^2+\frac{23}{36}} - \frac{1}{6\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t^2+\frac{23}{36}} =$$

$$= \left[t\,dt = \frac{1}{2}d\left(t^2+\frac{23}{36}\right)\right] =$$

[пришли к двум табличным интегралам]

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{d\left(t^2+\frac{23}{36}\right)}{\sqrt{t^2+\frac{23}{36}}} - \frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|t+t\sqrt{t^2+\frac{23}{36}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{t^2+\frac{23}{36}} - \frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{23}{36}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{23}{36}} - \frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|\left(x+\frac{1}{6}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{23}{36}}\right| + C$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $\displaystyle\int \frac{(6x+5)\,dx}{x^2+4x+9}.$

2. $\displaystyle\int \frac{(3-4x)\,dx}{2x^2-3x+1}$.

3. $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{2+4x-x^2}}$.

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+6}}$.

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{3-2x-x^2}$.

6. $\displaystyle\int \frac{6x\,dx}{x^2-4x+9}$.

7. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

10. $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+7x+10}\,dx$.

11. $\displaystyle\int \frac{3-x}{2x^2+5x+2}\,dx$.

Ответы.

1. $3\ln|x^2+4x+9| - \dfrac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{\sqrt{5}} + C$.

2. $-\ln|2x^2-3x+1| + C$.

3. $-\sqrt{2+4x-x^2} + 5\arcsin\dfrac{x-2}{\sqrt{6}} + C$.

4. $\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+6}\right| + C$.

5. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+3}{x-1}\right| + C$.

6. $3\ln|x^2-4x+9| + \dfrac{12}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{\sqrt{5}} + C$.

7. $\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}} - \dfrac{1}{8}\ln\left|x+\dfrac{1}{4}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}}\right| + C$.

8. $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right| + C$.

9. $\arcsin \dfrac{x-2}{3} + C.$

10. $\dfrac{3}{2} \ln \left|x^2 + 7x + 10\right| - \dfrac{13}{6} \ln \left|\dfrac{x+2}{x+5}\right| + C.$

11. $\dfrac{17}{2} \ln \left|\dfrac{x+\frac{1}{2}}{x+2}\right| - \dfrac{1}{4} \ln \left|2x^2 + 5x + 2\right| + C.$

2.4 Метод интегрирования по частям

Применение метода основано на использовании формулы

$$\boxed{\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du,}$$

которая называется **формулой интегрирования по частям**.

В интегралах вида

$\displaystyle\int P_n(x)\, e^{ax}\, dx,$

$\displaystyle\int P_n(x)\, \cos ax\, dx,$

$\displaystyle\int P_n(x)\, \sin ax\, dx$

за u следует принимать многочлен n-ой степени $P_n(x)$.

В интегралах вида

$\displaystyle\int P_n(x)\, \ln ax\, dx,$

$\displaystyle\int P_n(x)\, \arcsin ax\, dx,$

$\displaystyle\int P_n(x)\, \arccos ax\, dx,$

$\displaystyle\int P_n(x)\, \mathrm{arctg}\, ax\, dx,$

$\displaystyle\int P_n(x)\, \mathrm{arcctg}\, ax\, dx$

за u берут $\ln ax$, $\arcsin ax$, $\arccos ax$, $\operatorname{arctg} ax$, $\operatorname{arcctg} ax$ (логарифм или обратные тригонометрические функции).

Замечание. При нахождении промежуточного интеграла произвольную постоянную можно не добавлять.

Примеры.

1. $$\int x\,\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = x; \quad dv = \cos x\,dx \\ du = u'\,dx = (x)'\,dx = dx \\ v = \int dv = \int \cos x\,dx = \sin x \end{bmatrix} =$$
$$= x \cdot \sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

2. $$I = \int x\,\ln^2 x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln^2 x; \quad dv = x\,dx \\ du = u'\,dx = (\ln^2 x)'\,dx = \dfrac{2\ln x}{x}dx \\ v = \int dv = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{x^2}{2}\,\ln^2 x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{2\ln x}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\,\ln^2 x - \int x\,\ln x\,dx.$$

Последний интеграл берем с помощью еще одного применения формулы интегрирования по частям.

$$\int x \cdot \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x; \quad dv = x\,dx \\ du = u'\,dx = (\ln x)'\,dx = \dfrac{dx}{x} \\ v = \int dv = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^2}{2}\,\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\,\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Ответ $I = \dfrac{x^2}{2}\,\ln^2 x - \dfrac{x^2}{2}\,\ln x + \dfrac{x^2}{4} + C.$

Замечание. Если в примере приходится применять интегрирование почастям несколько раз, то такое интегрирование называется **повторным** или **многократным**.

$$3.\ \int \arcsin x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = \arcsin x; \quad dv = dx \\ du = u'\,dx = (\arcsin x)'\,dx = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = \int dv = \int dx = x \end{array}\right] =$$

$$= x\cdot\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\ \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{используем формулу} \\ \int \dfrac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C \end{array}\right] = x\ \arcsin x + \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2} + C =$$

$$= x\ \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Возвратные интегралы

Так называются интегралы, которые находятся повторным интегрированием по частям. В результате приходят к первоначальному интегралу. Получается уравнение, из которого исходный интеграл находится.

Пример. Найти $\displaystyle\int e^x\,\sin x\,dx$.

$$A = \int e^x\,\sin x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = e^x; \quad dv = \sin x\,dx \\ du = e^x\,dx; \quad v = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{array}\right] =$$

$$= -e^x\,\cos x + \int e^x\cdot\cos x\,dx$$

Пусть $B = \displaystyle\int e^x\,\cos x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = e^x; \quad dv = \cos x\,dx \\ du = e^x\,dx; \quad v = \sin x \end{array}\right] =$

$$= e^x\,\sin x - \int e^x \sin x\,dx = e^x\,\sin x - A$$

Получаем $A = -e^x\,\cos x + e^x\,\sin x - A \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \dfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $\displaystyle\int x\,\sin 2x\,dx$.
2. $\displaystyle\int x^2\,\cos x\,dx$.
3. $\displaystyle\int x^2\,\ln x\,dx$.
4. $\displaystyle\int (5x^2-2x+1)\,e^x\,dx$.
5. $\displaystyle\int (x^2-2x+3)\,\sin x\,dx$.
6. $\displaystyle\int \arccos x\,dx$.
7. $\displaystyle\int \cos\ln x\,dx$.

Ответы.

1. $-\dfrac{1}{2}x\,\cos 2x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$.
2. $x^2\,\sin x+2x\,\cos x-\sin x+C$.
3. $\dfrac{1}{3}x^3\,\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+C$.
4. $(5x^2-12x+13)\,e^x+C$.
5. $-(x^2-2x+1)\,\cos x+2(x-1)\,\sin x+C$.
6. $x\,\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.
7. $\dfrac{1}{2}x\,(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$ (возвратный).

3 Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется выражение, заданное в виде отношения двух многочленов $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены.

Дробь называется правильной, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе. В противном случае (когда $n \geqslant m$) дробь называется неправиильной. Неправильную рациональную дробь всегда можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \underbrace{G(x)}_{\text{многочл.}} + \underbrace{\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}}_{\text{прав. рацю дробь}}$$

Примеры.

1. $\dfrac{x^4+5x^3+2x^2-4}{x^2-1}$ представить в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Степень многочлена числителя $n=4$, знаменателя $m=2$. Дробь неправильная.

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{rrrr} x^4 & +\,5x^3 & +\,2x^2 & -\,4 \\ x^4 & & -\,x^2 & \end{array} & \begin{array}{l} x^2-1 \\ \hline x^2+5x+3 \end{array} \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{rrr} 5x^3 & +\,3x^2 & -\,4 \\ 5x^3 & & -\,5x \end{array} & \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{rrr} 3x^2 & +\,5x & -\,4 \\ 3x^2 & & -\,3 \end{array} & \\
\cline{1-1}
5x-1 &
\end{array}$$

$$\frac{x^4+5x^3+2x^2-4}{x^2-1} = x^2+5x+3+\frac{5x-1}{x^2-1}.$$

2. $\dfrac{x^3+3}{x^3+1}$ представить в виде суммы многочлена и правильной дроби

$$\frac{x^3+3}{x^3+1} = \frac{x^3+1+2}{x^3+1} = 1 + \frac{2}{x^3+1}.$$

Простейшие правильные дроби и их интегрирование

Дробь I типа $\dfrac{A}{x-a}$

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\,\ln|x-a| + C.$$

Дробь II типа $\dfrac{A}{(x-a)^m}$

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m} = A\int (x-a)^{-m}\,d(x-a) = \frac{A\,(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C.$$

Дробь III типа $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $D = p^2 - 4q < 0$, то есть квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+pa+q}\,dx = \left[\begin{array}{c} x^2+px+q = x^2+px+\dfrac{p^2}{4}+q-\dfrac{p^2}{4} = \\ = \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\dfrac{p^2}{4}\right);\ \text{так как } D<0, \\ q-\dfrac{p^2}{4} > 0 \quad \text{обозначим} \quad q-\dfrac{p^2}{4} = a^2 \\ t = x+\dfrac{p}{2};\quad dx = dt;\quad x = t-\dfrac{p}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{A\left(t-\dfrac{p}{2}\right)+B}{t^2+a^2}\,dt = A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(t^2+a^2) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\dfrac{p}{2}}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}} + C$$

Дробь IV типа $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где $D = p^2 - 4q < 0$.

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} = \frac{A}{2}\cdot\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} +$$
$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+\left(q-\dfrac{p^2}{4}\right)\right)^n}, \qquad n>1$$

Последний интеграл подстановкой $x + \dfrac{p}{2} = t$, заменой $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4}$ приводится к интегралу

$I_n = \displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$, для которого получена рекуррентная формула

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{t}{t^2+a^2} + (2n-1)I_n\right),$$

где $I_1 = \displaystyle\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$.

Правильную дробь раскладывают в сумму простейших правильных дробей.

1 случай. $Q_m(x) = (x-a_1)(x-a_2)(\ldots)(x-a_m)$ — все корни действительные и различные.

Тогда каждому множителю $x - a_i$ соответствует одна дробь $\dfrac{A_i}{x-a_i}$.

Пример: $\dfrac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}=\dfrac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{A_1}{x}+\dfrac{A_2}{x-1}+\dfrac{A_3}{x+2}$.

2 случай. Все корни действительные, но среди них есть кратные. Тогда каждому корню кратности $\boxed{k}$ в разложении соответствует $\boxed{k}$ простых дробей вида

$$\frac{A_1}{x-b}+\frac{A_2}{(x-b)^2}+\frac{A_3}{(x-b)^3}+\ldots+\frac{A_k}{(x-b)^k}$$

т.е.

$$\frac{P_n(x)}{(x-b)^k}=\frac{A_1}{x-b}+\frac{A_2}{(x-b)^2}+\frac{A_3}{(x-b)^3}+\ldots+\frac{A_k}{(x-b)^k}$$

Пример.

Разложить дробь в сумму простейших дробей: $\dfrac{x+2}{(x-1)^2(x+4)^3x}$

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x+4)^3x}=\underbrace{\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}}_{\text{две дроби}}+\underbrace{\frac{C}{x+4}+\frac{D}{(x+4)^2}+\frac{E}{(x+4)^3}}_{\text{три дроби}}+$$

$$+\underbrace{\frac{F}{x}}_{\text{одна дробь}},\quad \text{так как } x=1 \text{ — корень кратности 2,}$$

$x=-4$ — корень кратности 3, $\quad x=0$ — корень кратности 1.

3 случай. Если в знаменателе в виде множителя есть квадратные трехчлен с $D<0$, то в разложении будет дробь III типа.

Пример:

$$\frac{x+3}{x(x^2-x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

для $\quad x^2-x+1 \quad D=-3<0.$

4 случай. Если в знаменателе есть множитель $(x^2+px+q)^k$, $D<0$, то в разложении будут участвовать $\boxed{k}$ дробей

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}$$

Алгоритм интегрирования рациональных дробей

1. Проверяем, дробь правильная или неправильная.

2. Если дробь неправильная, представляем в виде суммы многочлена и правильной дроби.

3. Раскладываем правильную дробь в сумму простейших дробей (4 случая в зависимости от корней многочлена в знаменателе).

4. Приводим простейшие дроби к общему знаменателю и приравниваем числители полученной дроби и данной дроби.

5. Находим неизвестные коэффициенты разложения методом частных значений или приравниванием коэффициентов многочлена при одинаковых степенях «x».

6. Подставляем найденные числовые значения коэффициентов в простейшие дроби и находим интегралы.

Примеры.

1. Найти $\displaystyle\int\frac{x+3}{x(x-1)}\,dx$.

Разложим правильную дробь $\dfrac{x+3}{x(x-1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}$.

Найдем коэффициенты разложения A и B методом частных значений:

$$\frac{x+3}{x(x-1)}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}$$

Приравниваем числители (так как знаменатели дробей одинаковы)

$$x+3=A(x-1)+Bx.$$

Положим $x = 0 \qquad 3 = -A.$

Положим $x = 1 \qquad 4 = B.$

Итак, $A = -3$, $B = 4$.

$$\int \frac{x+3}{x(x-1)}\,dx = \int \frac{-3}{x}\,dx + \int \frac{4}{x-1}\,dx = -3\ln|x| + 4\ln|x-1| + C.$$

2. $I = \displaystyle\int \frac{x}{x^3-1}\,dx.$

Дробь $\dfrac{x}{x^3-1}$ — правильная, причем $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$.

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1}^{\lfloor x^2+x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}^{\lfloor x-1} =$$
$$= \frac{Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$
$$= \frac{x^2(A+B) + x(A-B+C) + (A-C)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$x = x^2(A+B) + x(A-B+C) + (A-C)$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x. Заметим, что $x = 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0$

$x^2: \quad A + B = 0$

$x^1: \quad A - B + C = 1$

$x^0: \quad A - C = 0.$

Решаем систему $\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 1 \\ A - C = 0 \end{cases}$

Находим $A = \dfrac{1}{3}, \quad B = -\dfrac{1}{3}, \quad C = \dfrac{1}{3}.$

Тогда

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}\,dx}{x-1} + \int \frac{\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)dx}{x^2+x+1} =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Найдем

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \left[\begin{array}{c} x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \\ = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \\ t = x+\frac{1}{2}; \quad dx = dt \\ x = t-\frac{1}{2} \end{array}\right] =$$

$$\int \frac{t-\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right| - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно:
$I = \dfrac{1}{3}\ln|x-1| + \dfrac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

3. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{3x^5-6x^4+1}{x^3-2x^2+x}\,dx.$

Дробь неправильная, так как степень многочлена в числителе (5) больше степени многочлена в знаменателе (3). Делим числитель на знаменатель «уголком»

$$
\begin{array}{r|l}
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
- & 3x^5 & - & 6x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & + & 1 \\
 & 3x^5 & - & 6x^4 & + & 3x^3 & & & & & & \\
\hline
 & & & & - & -3x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & + & 1 \\
 & & & & & -3x^3 & + & 6x^2 & - & 3x & & \\
\cline{5-12}
 & & & & & & - & 6x^2 & + & 3x & + & 1
\end{array}
&
\begin{array}{l}
x^3 - 2x^2 + x \\
\hline
3x^2 - 3
\end{array}
\end{array}
$$

$$\frac{3x^5 - 6x^4 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = 3x^2 - 3 + \frac{-6x^2 + 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}.$$

Разложим полученную правильную дробь в сумму простейших дробей. Сначала разложим знаменатель на множители:

$$x^3 - 2x^2 + x = x\left(x^2 - 2x + 1\right) = x\left(x - 1\right)^2$$

Тогда

$$\frac{-6x^2 + 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{-6x^2 + 3x + 1}{x\left(x - 1\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2},$$

так как $x = 1$ корень кратности два, $x = 0$ — кратности один.

Приведем сумму дробей к общему знаменателю:

$$\frac{-6x^2 + 3x + 1}{x\left(x - 1\right)^2} = \frac{A(x - 1)^2 + Bx(x - 1) + Cx}{x\left(x - 1\right)^2}$$

приравняем числители

$-6x^2 + 3x + 1 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx$

$x^2: \quad A + B = -6$

$x^1: \quad -2A - B + C = 3$

$x^0: \quad A = 1.$

Итак: $A = 1, \quad B = -7, \quad C = -2.$

$$I = \int \left(3x^2 - 3 + \frac{1}{x} - \frac{7}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} \right) dx =$$
$$= x^3 - 3x + \ln|x| - 7\ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + C.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}\,dx.$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - x^2}.$
3. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx.$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}.$
5. $\displaystyle\int \frac{x^4+x-8}{x^3+4x}\,dx.$
6. $\displaystyle\int \frac{4x-4}{x^3+8}\,dx.$

Ответы.

1. $\displaystyle -\frac{7}{2(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} + C.$
2. $\displaystyle \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$
3. $\displaystyle x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + C.$
4. $\displaystyle \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$
5. $\displaystyle \frac{1}{2}x^2 - 2\ln|x| - \ln\left|x^2+4\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$
6. $\displaystyle -\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+4\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$

4 Интегралы от тригонометрических функций

Интегралы вида

$\int \cos\alpha x\, \cos\beta x\, dx$, $\int \sin\alpha x\, \sin\beta x\, dx$, $\int \sin\alpha x\, \cos\beta x\, dx$

легко находятся с использованием тригонометрических формул:

$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right)$$
$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x\right)$$
$$\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right)$$

Пример 1.

Найти $I = \int \cos 4x\, \cos 7x\, dx$

$\cos 4x\, \cos 7x = \frac{1}{2}\big(\cos(-3x) + \cos 11x\big)$

$$I = \int \frac{1}{2}\big(\cos(-3x) + \cos 11x\big)\, dx = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{11}\sin 11x\Big) + C =$$

$$= \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{22}\sin 11x + C.$$

4.1 Метод понижения степени подынтегральной функции.

На практике приходится часто вычислять интегралы $\int \sin^2 x\, dx$, $\int \cos^2 x\, dx$.

Воспользуемся тригонометрическими формулами

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Интегралы вида $\int \sin^m x\, \cos^n x\,dx$.

Если хотя бы одно из чисел m или n — нечетное, то интеграл берется методом подведения под знак дифференциала.

Если n, m оба четные, то интеграл берется методом понижения степеней подынтегральной функции.

Примеры.

1. $$\int \cos^5 x\, \sin^2 x\,dx = \int \cos^4 x\, \sin^2 x\,d(\sin x) =$$
$$= \int (1-\sin^2 x)^2 \cdot \sin^2 x\,d(\sin x) = \int (1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\cdot \sin^2 x\,d(\sin x) =$$
$$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x)\,d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

2. $$\int \sin^2 x\, \cos^2 x\,dx = \left[\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x\right] =$$
$$= \int \frac{1}{4}\sin^2 2x\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

4.2 Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим $\int R(\sin x,\, \cos x)\,dx$, где R — рациональная функция своих аргументов.

Подстановка $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ называется **универсальной**. С ее помощью интеграл от тригонометрических функций сводится к интегралу от рациональной дроби.

При этой подстановке

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad x = 2\operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Пример.

Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

$$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x} = \left[\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right] = \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{5-4\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+3\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{5+5t^2-8t+3-3t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2-8t+8} = \int \frac{dt}{t^2-4t+4} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t-2)^2} = -\frac{1}{t-2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-2} + C.$$

Несмотря на то, что с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ интеграл вила $\displaystyle\int R(\sin x,\, \cos x)\,dx$ всегда можно найти, на практике применение этой подстановки довольно часто приводит к громоздким рациональным дробям, и в этом случае лучше использовать частные подстановки:

1) Если $R(-\sin x,\, \cos x) = -R(\sin x,\, \cos x)$, то удобно применять подстановку $\cos x = t$, $x = \arccos t$, $\sin^2 x = 1-t^2$ $(\sin x = \sqrt{1-t^2})$, $dx = \dfrac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

2) Если $R(\sin x,\, -\cos x) = -R(\sin x,\, \cos x)$, то удобно применять подстановку $\sin x = t$, $x = \arcsin t$, $\cos^2 x = 1-t^2$ $(\cos x = \sqrt{1-t^2})$, $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

3) Если $R(-\sin x,\, -\cos x) = R(\sin x,\, \cos x)$, то удобно применять

подстановку $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ $\left(\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$,
$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$ $\left(\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

Примеры.

1. Найти $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\cos^2 x + 4\sin x\,\cos x}$.

$$R(-\sin x,\,-\cos x) = \frac{1}{(-\sin x)^2 - 5(-\cos x)^2 + 4(-\sin x)(-\cos x)} =$$
$$= \frac{1}{\sin^2 x - 5\cos^2 x + 4\sin x\,\cos x} = R(\sin x,\,\cos x)$$

Будем применять подстановку $\operatorname{tg} x = t$

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\cos^2 x + 4\sin x\,\cos x} = \left[\begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array}\right] =$$
$$= \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(\dfrac{t^2}{1+t^2} - \dfrac{5}{1+t^2} + \dfrac{4t}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2+4t-5} =$$
$$= \int \frac{dt}{t^2+4t+4-9} = \int \frac{dt}{(t+2)^2-9} = \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2-9} =$$
$$= \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{(t+2)-3}{(t+2)+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 5}\right| + C.$$

2. Найти $I = \displaystyle\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^4 x}$.

$$\int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^4 x} = [\operatorname{tg} x = t] =$$

$$= \int \frac{\dfrac{t^2}{1+t^2} \cdot \dfrac{dt}{1+t^2}}{\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)^2} = \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

3. Найти $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left[\begin{array}{c} \cos x = t \\ x = \arccos t \\ dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right] = \int \frac{-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C.$$

Можно взять интеграл проще (домножим и разделим на $\sin x$):

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{-d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C.$$

В дальнейшем при изучении дифференциальных уравнений этот интеграл будем использовать в качестве табличного.

Задачи для самостоятельного решения.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.
2. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin x}$.
3. $\displaystyle\int \sin 5x\cdot\sin 9x\,dx$.
4. $\displaystyle\int \cos^2 3x\,dx$.
5. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^4 x}$.
6. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$.
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin^2 x+4\sin x\cos x}$.
8. $\displaystyle\int \sin^6 x\,dx$.

Ответы.

1. $\displaystyle\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$.
2. $\displaystyle\ln|\sin x|-\frac{\sin^2 x}{2}+C$.
3. $\displaystyle\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 14x}{28}+C$.
4. $\displaystyle\frac{x}{2}+\frac{\sin 6x}{12}+C$.
5. $\displaystyle-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$.
6. $\displaystyle\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x+x+C$.
7. $\displaystyle\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+2}\right|+C$.
8. $\displaystyle\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x-2\sin 2x+\frac{3}{8}\sin 4x+\frac{1}{6}\sin^3 2x\right)+C$.

5 Интегрирование некоторых иррациональностей

Часто используется метод рационализации подынтегральной функции. Ищется подстановка, позволяющая преобразовать интеграл от иррациональной функции в интеграл от рациональной.

Интеграл вида $\displaystyle\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right) dx$, где $n \in \mathrm{N}$; $p_i \in \mathrm{Q}$, $i = \overline{1,\, n}$; $a, b, c, d, \in \mathrm{R}$, $ad - bc \neq 0$ приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k — общий знаменатель рациональных чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left[\begin{array}{c} \text{имеем} \quad x^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{1}{3}} \\ \text{подстановка} \quad x = t^6 \\ dx = 6t^5\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{6t^5\,dx}{t^3+t^2} = 6\int \underbrace{\frac{t^3}{t+1}}_{\text{неправ. дробь}} dt = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}\,dt =$$

$$= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C =$$

$$= 2t^3 - 3t^3 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$.

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$.

Ответы.

1. $x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C$.

2. $\ln|1+3\sqrt[3]{x}|+C$.

3. $2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C$.

5.1 Тригонометрические подстановки

Интегралы вида $\int R(x,\ \sqrt{a^2-x^2})\,dx$, $\int R(x,\ \sqrt{a^2+x^2})\,dx$, $\int R(x,\ \sqrt{x^2-a^2})\,dx$ с помощью тригонометрических подставновок сводятся к интегралам от рациональных функций от $\sin x$ и $\cos x$.

1) $\int R(x,\ \sqrt{a^2-x^2})\,dx$ и подстановка $x=a\sin t$ $(x=a\cos t)$.

2) $\int R(x,\ \sqrt{a^2+x^2})\,dx$ и подстановка $x=a\operatorname{tg} t$ $(x=a\operatorname{ctg} t)$.

3) $\int R(x,\ \sqrt{x^2-a^2})\,dx$ и подстановка $x=\dfrac{a}{\sin t}$ $\left(x=\dfrac{a}{\cos t}\right)$.

Примеры.

$$1.\quad \int\sqrt{25-x^2}\,dx\left[\begin{array}{l} x=5\sin t,\quad t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]\\ dx=5\cos t\,dt\\ 25-x^2=25-25\sin^2 t=25\cos^2 t\\ \sqrt{25-x^2}=\sqrt{25\cos^2 t}=5|\cos t|=5\cos t\end{array}\right]=$$

$$=\int 5\cos t\cdot 5\cot t\,dt=25\int\cos^2 t\,dt=\frac{25}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$= \frac{25}{2}t + \frac{25}{4}\sin 2t + C = \frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5} + \frac{25}{4}\sin\left(2\cdot\arcsin\frac{x}{5}\right) + C.$$

Учитывая формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, можем записать

$$\sin\left(2\arcsin\frac{x}{5}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{5}\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{x}{5}\cdot\frac{1}{5}\sqrt{25-x^2} = \frac{2x}{25}\sqrt{25-x^2}.$$

2. $$\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ x^2+1 = \operatorname{tg}^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{array}\right] =$$

$$= \int\frac{\left(\dfrac{1}{\cos^2 t} - \operatorname{tg} t\right)\cdot\dfrac{dt}{\cos^2 t}}{\dfrac{1}{\cos^2 t}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 t}} = \int\left(\frac{1}{\cos t} - \sin t\right)\,dt$$

рассмотрим $\displaystyle\int\frac{dt}{\cos t} = \frac{\cos t\,dt}{\cos^2 t} = \int\frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t - 1}{\sin t + 1}\right|.$

Тогда $\displaystyle\int\frac{(x^2-x+1)\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin\operatorname{arctg} x - 1}{\sin\operatorname{arctg} x + 1}\right| + \cos(\operatorname{arctg} x) + C.$

3) Найти $\displaystyle I = \int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}.$

$$I = \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sin t} \\ dx = -\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt \\ x^2 - 1 = \dfrac{1}{\sin^2 t} - 1 = \dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \end{array}\right] = \int\frac{-\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt}{\left(\dfrac{1}{\sin^2 t} + 1\right)\cdot\dfrac{\cos t}{\sin t}} =$$

$$= \int \frac{\sin t\,dt}{1+\sin^2 t} = \int \frac{d(\cos t)}{2-\cos^2 t} = [\cos t = u] = -\int \frac{du}{u^2-2} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}} \right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\cos t-\sqrt{2}}{\cos t+\sqrt{2}} \right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\sqrt{2}} \right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2}x} \right| + C$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\,dx.$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$
3. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}.$

Ответы.

1. $\displaystyle\frac{1}{4}\arccos\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2} + C.$
2. $\displaystyle\frac{x}{5\sqrt{5-x^2}} + C.$
3. $\displaystyle\ln\left|x+\sqrt{x^2+5} - \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\right| + C.$

6 Тестовые задания

1. Является ли функция $\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}$ первообразной для $f(x)=2x^2+x$

2. Указать первообразную для $f(x)=\sin(5x-3)$

1) $-\dfrac{1}{5}\cos(5x-3)$ 2) $5\cos(5x-3)$ 3) $-\sin(5x-3)$

3.Множество первообразных функции $f(x)=e^{-5x}$ имеет вид

1) $e^{-5x}+C$ 2) $5e^{-5x}+C$ 3) $\dfrac{1}{5}e^{-5x}+C$ 4) $-\dfrac{1}{5}e^{-5x}+C$

4. Какие из функций являются первообразными для $y=e^{7+4x}$

а) $\dfrac{1}{4}e^{7+4x}$ б) $\dfrac{1}{4}e^{7-4x}$

1) «а» 2) «б» 3) и «а», и «б» 4) ни «а», ни «б»

5. Найти первообразную $f(x)=x^2-3$, график которой проходит через точку $\left(1;-\dfrac{8}{3}\right)$

1) $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-3x$ 2) $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-3x+5$ 3) $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-3x+1$

6. Что называется интегрированием?

1) операция нахождения интеграла

2) преобразование выражения с интегралами

3) нахождение производной от подынтегральной функции

7. Чему равен неопределенный интеграл $\int x^3\,dx$?

1) $\dfrac{x^4}{4}+C$ 2) x^4+C 3) $3x^4+C$ 4) $\dfrac{x^3}{3}+C$

8. Чему равен неопределенный интеграл $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}$?

1) $-\operatorname{tg}x+C$ 2) $\operatorname{ctg}x+C$ 3) $-\operatorname{ctg}x+C$ 4) $\operatorname{tg}x+C$

9. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$?

1) $\ln\left|4+\sqrt{x^2+16}\right|+C$ 2) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + C$ 3) $\arcsin x + C$

4) $\ln\left|x+\sqrt{x^2+16}\right|+C$

10. Установить соответствие между интегралом

A) $\int \frac{dx}{x}$ B) $\int \sin x\,dx$ C) $\int \frac{dx}{1+x^2}$ D) $\int x^4\,dx$

и его значением

a) $-\cos x+C$ b) $\ln|x|+C$ c) $\cos x+C$ d) $\frac{x^5}{5}+C$ e) $\operatorname{arctg} x+C$

1) $A \to b$, $B \to a$, $C \to e$

2) $A \to b$, $B \to c$, $D \to d$

3) $A \to b$, $C \to c$, $D \to d$

11. Чему равно «a» в равенстве $\int \frac{dx}{4x^2-a} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right|+C$

1) 4 2) $\frac{1}{4}$ 3) $2\frac{1}{4}$ 4) 1

12. Чему равна величина «a» в равенстве $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{1}{a}x^a + C$

1) $0,2$ 2) $0,4$ 3) $1,4$ 4) $1,6$

13. $\int \cos(3x-7)\,dx$ равен

1) $\cos(3x-7)+C$ 2) $\frac{1}{3}\sin(3x-7)+C$ 3) $-\frac{1}{3}\sin(3x-7)+C$

4) $7\sin(3x-7)+C$

14. $\int \left(3x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$ равен

1) $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$ 2) $6x+\frac{1}{x}+C$ 3) $x^3-\ln\frac{1}{x}+C$ 4) $x^3+\frac{1}{x}+C$

15. Дополнить выражение, чтобы выполнялось равенство

$$\int \cos^3 x\, d(\ldots) = \frac{\cos^4 x}{4} + C$$

1) $d(\sin x)$ 2) $d(\cos x)$ 3) $d(\operatorname{tg} x)$

16. Дополнить выражение, чтобы выполнялось равенство

$$\int \cos 2x\ \ldots\ dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

1) 1 2) 2 3) 4

17. Дробь $\dfrac{x+3}{(x+1)\,x^2}$ можно представить в виде суммы дробей

1) $\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x}$ 2) $\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{x^2}$ 3) $\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+3} + \dfrac{C}{x}$

18. Дробь $\dfrac{3x+1}{(x+2)^2\,(x^2+2x+1)^2}$ представить в виде суммы дробей

1) $\dfrac{A}{(x+2)^2} + \dfrac{B}{(x+1)^2}$ 2) $\dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{(x+2)^2} + \dfrac{C}{(x^2+2x+1)^2}$

3) $\dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{(x+2)^2} + \dfrac{C}{x+1} + \dfrac{D}{(x+1)^2} + \dfrac{E}{(x+1)^3} + \dfrac{F}{(x+1)^4}$

19. Выделить целую часть неправильной дроби $\dfrac{x^4-2}{x^4-1}$

1) 2 2) 1 3) x

20. Выделить целую часть неправильной дроби $\dfrac{x^3}{x-2}$

1) x^2 2) x^2+2x+4 3) x^2+4

21. Дополнить левую часть, чтобы выполнялось равенство

$$x^2 + 4x + \ldots = (x+2)^2$$

1) 1 2) 4 3) 6

22. Дополнить левую часть, чтобы выполнялось равенство

$$5x^2 + 4x + \ldots = 5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2$$

1) -2 2) 1 3) 2

23. Дополнить левую часть, чтобы выполнялось равенство

$-5x^2 + 20x + \ldots = -5(x-2)^2$

1) 5 2) 10 3) -20

24. В интеграле $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$ сделана замена $t = \sqrt[3]{x}$. Тогда интеграл примет вид:

1) $\displaystyle\int \frac{t^3}{t^2-1}\,dt$ 2) $\displaystyle\int \frac{3t}{t-1}\,dt$ 3) $\displaystyle\int \frac{3t^5}{t-1}\,dt$

25. Найти неопределенные коэффициенты в равенстве

$x = A(x+2) + B(x-1)$

1) $A = \dfrac{1}{3}$, $B = \dfrac{2}{3}$ 2) $A = \dfrac{2}{3}$, $B = \dfrac{1}{3}$ 3) $A = 1$, $B = 0$

26. Найти неопределенные коэффициенты в равенстве

$x^2 - 9x + 11 = A(x-3)(x+2) + B(x+2) + C(x-3)^2$

1) $A = 5$, $B = 2$, $C = -1$ 2) $A = 2$, $B = 5$, $C = -1$

3) $A = 1$, $B = -9$, $C = 11$

27. Чему равен $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

1) $-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x + C$ 2) $\ln\left|\operatorname{tg} x\right| + C$ 3) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$

28. Выбрать метод интегрирования $\displaystyle\int \sin^2 5x\,dx$

1) применить формулу понижения степени

2) подведение функции $\sin 5x$ под знак дифференциала

3) записать как интеграл от произведения функций

29. Выбрать метод интегрирования $\int \sin^4 x \cos x \, dx$

1) записать как интеграл от произведения функций

2) переход от произведения к сумме функций

3) подведение функции $\cos x$ под знак дифференциала

4) применить формулу понижения степени

30. Записать степени с дробным показателем с помощью корня

$$\frac{x^{\frac{2}{5}}}{x + x^{\frac{1}{2}} - 5}$$

1) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{x + \sqrt{x} - 5}$ 2) $\dfrac{\sqrt{x^5}}{x + x^2 - 5}$ 3) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{x + \frac{1}{2}x - 5}$

31. Разбить подынтегральное выражение в интеграле $\int x \cos 3x \, dx$ на u и dv

1) $u = \cos 3x$, $dv = x \, dx$ 2) $u = x$, $dv = \cos 3x \, dx$

3) $u = x \cos 3x$, $dv = dx$

32. С помощью какой подстановки рационализируется подынтегральная функция $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

1) $\sin 2x = t$ 2) $\cos(x + 3) = t$ 3) $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$

33. Формула интегрирования по частям имеет вид

1) $\int u \, dv = uv + \int v \, du$

2) $\int u \, dv = uv + \int u \, dv$

3) $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

7 Индивидуальные задания

Номер варианта совпадает с последенй цифрой в зачетке.

Вариант 1

В заданиях 1-5 найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

1. $\displaystyle\int \frac{3-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx$
2. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)^2 dx$
3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\cdot e^x+\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}}\,dx$
4. $\displaystyle\int x\cdot 2^{x^2}\,dx$
5. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} 2x\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x^2-6x+25}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{x-7}{x^3-4x^2+4x}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx$

В задании 9 применить для нахождения интеграла тригонометрическую подстановку

9. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$
10. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx$

Вариант 2

В заданиях 1-5 найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

1. $\displaystyle\int \frac{4x\sin^2 x - 3}{\sin^2 x}\,dx$

2. $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x} + 2\right)^3 dx$

3. $\displaystyle\int \frac{3^x \cdot e^x - 5^x}{2^x}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 4}}\,dx$

5. $\displaystyle\int x \cdot 2^{3x+4}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 10}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x^3 + x}{x^4 - 4x^2 + 4}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x}$

В задании 9 применить для нахождения интеграла тригонометрическую подстановку

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}\,dx$

Вариант 3

В заданиях 1-5 найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

1. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{x}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{arctg} x\cdot(1+x^2)}$
5. $\displaystyle\int \arcsin x\cdot(x+1)\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{-x^2+4x-10}}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+8}{(x-1)\cdot(x^2+1)}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{1-2\cos x}{\sin x-2}\,dx$

В задании 9 применить для нахождения интеграла тригонометрическую подстановку

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx$
10. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{x-2}}\,dx$

Вариант 4

В заданиях 1-5 найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

1. $\int \frac{2x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\,dx$
2. $\int \frac{3^x+5^x}{4^x}\,dx$
3. $\int \frac{3\sin x \cdot e^x - 4e^{2x}}{e^x}\,dx$
4. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg} x}}{cos^2 x}\,dx$
5. $\int \frac{2x+1}{2^x}\,dx$
6. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-10x+29}}\,dx$
7. $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+1)\cdot(x^2+9)}\,dx$
8. $\int \frac{1}{3-2\sin x+\cos x}\,dx$

В задании 9 применить для нахождения интеграла тригонометрическую подстановку

9. $\int \frac{\sqrt{x^2-144}}{x}\,dx$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}+1}\,dx$

Вариант 5

В заданиях 1-5 найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

1. $\displaystyle\int 5^{3x-1}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[5]{x}}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{5^x-2^{2x}}{3^x}\,dx$
4. $\displaystyle\int e^x\ \sin e^x\,dx$
5. $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(x+3)\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{4x-1}{x^2+x+1}\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+5}{x^3+x^2}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{1-5\cos^2 x}$

В задании 9 применить для нахождения интеграла тригонометрическую подстановку

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-100}}{x}\,dx$
10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{4+\sqrt[3]{x-2}}\,dx$

Вариант 6

В заданиях 1-5 найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

1. $\displaystyle\int \frac{x^2 \cdot \sqrt{x^2-4} - 5}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \sin^2 x + 3}{\sin^2 x}\, dx$

3. $\displaystyle\int (1-5x)^{\frac{1}{5}}\, dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x}\, dx$

5. $\displaystyle\int (1-3x) \cdot \cos 3x\, dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\, dx$

7. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x^2+3)(x-1)}\, dx$

8. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{5+\sin x}\, dx$

В задании 9 применить для нахождения интеграла тригонометрическую подстановку

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\, dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-10}\, dx$

Вариант 7

В заданиях 1-5 найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(1-2x)}\,dx$

3. $\displaystyle\int \sqrt[8]{1-x}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt[4]{\sin^3 x}}\,dx$

5. $\displaystyle\int \ln(1-4x)\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{5x+1}{4x^2+4x+10}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+x+3)\cdot(x+1)}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{5}{\cos^2 x+\sin 2x}\,dx$

В задании 9 применить для нахождения интеграла тригонометрическую подстановку

9. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x+1}-10}{\sqrt{x+1}+7}\,dx$

Вариант 8

В заданиях 1-5 найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

1. $\displaystyle\int e^{\frac{x-4}{5}}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[7]{x}-3}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$

3. $\displaystyle\int \cos\left(\frac{x}{2}+1\right)\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+1}}\,dx$

5. $\displaystyle\int \arcsin 2x\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{x^2-6x+13}}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+10}{x^3-5x^2-x+5}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{1-\sin x+\cos x}$

В задании 9 применить для нахождения интеграла тригонометрическую подстановку

9. $\displaystyle\int \sqrt{36-x^2}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x+1}+2}{1+\sqrt{x+1}}\,dx$

Вариант 9

В заданиях 1-5 найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

1. $\displaystyle\int \sqrt[4]{5x-2}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt[7]{x}-1\right)^3}{x}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x\cdot e^x-\sqrt{x}}{x}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cdot \ln^2 x}$

5. $\displaystyle\int 4x\cdot 5^{1-2x}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x+17}}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^3+4x}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(3\operatorname{tg}x+5)\cdot\sin 2x}$

В задании 9 применить для нахождения интеграла тригонометрическую подстановку

9. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{5-\sqrt[3]{x}}\,dx$

Вариант 10

В заданиях 1-5 найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

1. $\displaystyle\int \left(3\sqrt{x} - \sqrt[7]{x^2}\right) dx$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{4}}\, dx$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{(2x-1)^3}\, dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}\, dx$

5. $\displaystyle\int (1-x)\cdot \ln x\, dx$

6. $\displaystyle\int \frac{1-x}{5x^2-4x+1}\, dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+8}\, dx$

8. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{3\cos 2x - 4}\, dx$

В задании 9 применить для нахождения интеграла тригонометрическую подстановку

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-121}}{x}\, dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}+1}\, dx$

Учебное издание

Сметанина Людмила Петровна
Максимова Ольга Васильевна

Неопределенный интеграл

учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 29.04.2022 . Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 3,26. Уч. изд. л. 2,48.
Тираж 69 экз. Заказ № 885.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426004, Ижевск, Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел. : + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18