

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова  
Российской академии наук

**УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ  
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ**  
(конференция Пятницкого)

*Материалы  
XVI Международной научной конференции  
(1-3 июня 2022 г., Москва)*

*Под общей редакцией д.ф.-м.н. В. Н. Тхай*

НАУЧНОЕ ЭЛЕКТРОННОЕ ИЗДАНИЕ

Москва  
ИПУ РАН  
2022

**УДК 681.51**  
**ББК 32.96**  
**У81**

**Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)** : Материалы XVI Междунар. научн. конфер. (1-3 июн. 2022 г., Москва) / под общ. ред. В. Н. Тхай ; Ин-т проблем упр. им. В. А. Трапезникова Рос. акад. наук. – Электрон. текстовые дан. (1 файл: 10,3 Мб). – Москва : ИПУ РАН, 2022. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования: Pentium 4; 1,3 ГГц и выше; Internet Explorer ; Acrobat Reader 4.0 или выше. – Загл. с экрана. – ISBN 978-5-91450-260-4. – № госрегистрации 0322202297. – Текст: электронный.

В научное электронное издание включены материалы XVI Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). Рассматриваются вопросы устойчивости, стабилизации, управления, колебаний, нелинейной динамики в различных областях.

Сборник материалов конференции предназначен для научных работников и специалистов в области фундаментальной теории управления, теории устойчивости, теории колебаний, прикладных задач управления.

**Утверждено к изданию Программным комитетом конференции**

**Программный комитет конференции:**

А. Ю. Александров, И. М. Ананьевский, А. С. Андреев,  
И. Н. Барабанов, Н. Н. Болотник, С. Н. Васильев, А. А. Галаев,  
А. П. Крищенко, А. Б. Куржанский, А. А. Мартынюк, Б. Т. Поляк,  
Л. Б. Рапопорт, Е. Я. Рубинович, А. А. Тихонов, В. Н. Тхай,  
Т. Ф. Филиппова, Ф. Л. Черноусько, А. Ширяев

**ISBN 978-5-91450-260-4**

**© ИПУ РАН, 2022**

XVI Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) проводится Федеральным государственным бюджетным учреждением науки Институтом проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук при поддержке Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (ОЭММПУ РАН). Конференция проводится при информационной поддержке IEEE Russia Section.

Основные научные направления XV Конференции: общие вопросы теории устойчивости и стабилизации движения; общие вопросы и методы теории нелинейных колебаний; методы функций Ляпунова; гладкая и негладкая динамика; вопросы управляемости и наблюдаемости; проблемы робастного управления; управление в механических и электромеханических системах; управление роботами и мехатронными системами; колебания, устойчивость и стабилизация в сетевых и взаимосвязанных системах, устойчивость и управление гибридными системами и системами с переключениями.

Конференция проводится один раз в два года. Ранее конференция проходила (до 2004 г. — в формате Международного семинара): в Таллине (1987), в Москве (1992), в Самаре (1994), в Москве (1996, 1998, 2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2016, 2018, 2020).



## Содержание

<i>Морозов М. В.</i> О Всесоюзном семинаре «Динамика нелинейных процессов управления» . . . . .	14
<i>Агаев Р. П., Хомутов Д. К.</i> Исследование асимптотического поведения многоагентной системы с несвязной структурой . . . . .	16
<i>Александров А. Ю.</i> Об устойчивости линейных механических систем с запаздыванием при синхронных и асинхронных переключениях позиционных сил . . . . .	19
<i>Александров А. Ю., Тихонов А. А.</i> Об использовании регулятора типа PID для электродинамической стабилизации программного вращения ИСЗ . . . . .	23
<i>Александров В. А.</i> Оптимизация размещения полюсов для подавления возмущения в дискретной системе . . . . .	26
<i>Александров В. А., Резков И. Г.</i> Линейно-квадратичный регулятор высоты полета квадрокоптера с фильтрацией управления . . . . .	29
<i>Алферов Г. В., Ефимова П. А., Курочкин В. Ю., Шиманчук Д. В.</i> Управляемое движение космического робота с гибкими шарнирами и адаптацией к изменениям рабочей среды . . . . .	33
<i>Ананьевский И. М.</i> Управление одной механической системой при смешанных ограничениях в присутствии возмущений . . . . .	36
<i>Ананьев Б. И., Юровских П. А.</i> Усредненное оценивание стаи систем с неопределенностью . . . . .	38
<i>Андреев А. С., Перегудова О. А.</i> Об управлении манипуляторами с вязко-упругими шарнирами . . . . .	42
<i>Андреев А. С., Перегудова О. А.</i> Об устойчивости установившихся движений эрдитарных механических систем . . . . .	46
<i>Антипов А. С., Краснова С. А.</i> Применение сигмовидных функций в системе управления ходовой тележкой транспортно-кранового крана . . . . .	50
<i>Антоновская О. Г.</i> О выборе квадратичных функций Ляпунова в случае кратных корней характеристического уравнения . . . . .	53
<i>Арутюнов А. В., Жуковская З. Т., Жуковский С. Е.</i> О существовании допустимых позиционных управлений в задачах со смешанными ограничениями . . . . .	57

<i>Баландин Д. В., Бирюков Р. С., Коган М. М.</i> Оптимальное гашение колебаний гибкого ротора в электромагнитных подшипниках . . . . .	61
<i>Барабанов И. Н., Тхай В. Н.</i> Притягивающий цикл в связанных консервативных системах с периодическими движениями разного типа . . . . .	64
<i>Барсегян В. Р.</i> О задачах граничного управления колебаниями струны с условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени . . . . .	67
<i>Барсегян В. Р., Солодуша С. В.</i> Об оптимальном управлении колебаниями струны смещением левого конца при закреплённом правом конце с заданной формой прогиба и скоростью точек в разные промежуточные моменты времени . . . . .	71
<i>Беличенко М. В.</i> Об устойчивости положений равновесия твёрдого тела с вибрирующим вдоль вертикального эллипса подвесом . . . . .	75
<i>Беляков Д. В.</i> Задача о геометрическом анализе при исследовании автоколебаний аэродинамического маятника в потоке среды . . . . .	79
<i>Беляков Д. В., Костиков Ю. А.</i> Устойчивость малых колебаний аэродинамического маятника в потоке квазистатической среды . . . . .	82
<i>Берлин Л. М., Галаев А. А., Лысенко П. В.</i> О задаче быстрого действия системы из двух несинхронных осцилляторов . . . . .	86
<i>Бирюков Р. С., Бубнова Е. С.</i> Обобщённая $\mathcal{H}_2$ -норма линейных импульсных систем . . . . .	90
<i>Бойченко В. А.</i> К вопросу о стохастической норме дискретной системы . . . . .	93
<i>Бойченко В. А., Белов А. А.</i> Спектральный метод анализа дискретных детерминированных систем управления . . . . .	96
<i>Болотник Н. Н., Корнеев В. А.</i> Управление временем включения противоударного изолятора для защиты объекта на подвижном основании от ударных воздействий ограниченной величины . . . . .	101
<i>Буй Т. В.</i> Синтез регулятора методом разделения движений для подавления вибраций упругого подвеса . . . . .	105
<i>Буркин И. М., Кузнецов Н. В., Мокаев Т. Н.</i> Сосуществующие хаотические и периодические аттракторы в контрпримере к гипотезе Калмана . . . . .	109

<i>Волковицкий А. К., Гаракоев А. М.</i> Алгоритмы управления движением по фрагментарной траектории . . . . .	112
<i>Е. А. Гаврилина, В. Н. Честнов.</i> Синтез сепаратного канала управления высокоманевренным необитаемым подводным аппаратом на основе $H_\infty$ подхода . . . . .	117
<i>Гаджиев М. М., Кулешов А. С.</i> Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц . . . . .	122
<i>Гарбуз М. А., Самсонов В. А., Климов К. В., Рогачев А. А.</i> Бифуркации ротационных режимов в задаче о движении шагающего механизма в стационарном потоке . . . . .	126
<i>Глумов В. М., Ермилов А. С.</i> Управление космической конструкцией при ее сборке в космосе . . . . .	129
<i>Глумов В. М., Пучков А. М., Соловьев А. С.</i> Особенности синтеза многочастотной цифровой системы управления динамическим объектом . . . . .	133
<i>Глуценко А. И., Ласточкин К. А.</i> Адаптивное управление квадрокоптером на основе эталонной модели . . . . .	136
<i>Голованов С. А., Климина Л. А., Досаев М. З., Семочуцкий Ю. Д., Голуб А. П.</i> Робот-тримаран, управляемый движением внутреннего маховика . . . . .	139
<i>Голуб А. П., Зубков А. Ф., Мастерова А. А., Семочуцкий Ю. Д.</i> Особенности поведения колесной тележки с ротором Савониуса при изменении направления набегающего потока	143
<i>Голубев А. Е.</i> Моделирование авторегулирования мозгового кровотока с использованием методов математической теории управления . . . . .	147
<i>Голубев А. Е., Пирогова А. Д.</i> Оптимальное планирование траектории движения механической системы с двумя степенями свободы с учетом динамических препятствий	150
<i>Голубев Ю. Ф., Корянов В. В., Мелкумова Е. В.</i> Спасение шестиногого шагающего робота из аварийной ситуации на неровной поверхности . . . . .	153
<i>Голубев Ю. Ф., Мелкумова Е. В.</i> Метод аналогии в задачах о контакте шагающего робота и схвата с пятью точками опоры с цилиндром . . . . .	157
<i>Грибцова А. Д.</i> Об устойчивости периодических движений двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса . . .	160
<i>Гусев М. И., Осипов И. О.</i> О локальном синтезе управления для нелинейных систем с интегральными ограничениями	164

<i>Даник Ю. Э., Дмитриев М. Г., Мурзабеков З. Н.</i> О стабилизации квазилинейной дискретной SDC системы с ограничениями на управление . . . . .	168
<i>Девяткин Д. Д.</i> Распознавание образов на видео с помощью предобученной нейронной сети в режиме реального времени . . . . .	171
<i>Дмитриев М. Г., Макаров Д. А.</i> Итерационный метод построения регулятора в слабо нелинейной сингулярно возмущенной задаче управления . . . . .	175
<i>Долгий Ю. Ф.</i> Аппроксимация задачи оптимальной импульсной стабилизации для автономной линейной системы с запаздыванием . . . . .	179
<i>Долгий Ю. Ф., Чутин И. А.</i> Импульсное управление инерционным манипуляционным роботом . . . . .	183
<i>Досаев М. З.</i> Плоское скольжение тела на двух упругих опорах под действием малой боковой силы . . . . .	186
<i>Ерёмин Е. Л., Никифорова Л. В., Шеленок Е. А.</i> Комбинированное нелинейное управление многосвязным структурно-функционально-параметрически неопределенным объектом с неаффинностью и запаздываниями . . . . .	190
<i>Завалищин Д. С.</i> Задача управления системой состоящей из переменного количества объектов . . . . .	194
<i>Зайцев В. А.</i> Об управлении верхним показателем Боля линейных периодических управляемых систем в гильбертовом пространстве посредством динамической обратной связи по выходу . . . . .	197
<i>Зайцев В. А., Ким И. Г.</i> О назначении конечного спектра библинейной системы с сосредоточенным и распределенным запаздыванием . . . . .	201
<i>Зубенко В. А., Кугушев Е. И., Шахова Т. В.</i> Стабилизация периодических движений некоторых механических систем, расположенных на подвижном основании . . . . .	204
<i>Зыков И. В.</i> Аппроксимация множеств достижимости линейных управляемых систем при разнотипных ограничениях на управление . . . . .	208
<i>Ибрагимов Д. Н., Осокин А. В., Сиротин А. Н., Сытало К. И.</i> О свойствах предельных множеств 0-управляемости для класса неустойчивых линейных систем с дискретным временем и ограничениями . . . . .	212

<i>Иванов Г. Г., Алферов Г. В., Королев В. С.</i> Об устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений	216
<i>Игульников Л. А., Метрикин В. С., Никифорова И. В.</i> Привлекательная устойчивость периодических движений частицы под действием импульсной силы	219
<i>Изместьев И. В., Ухоботов В. И.</i> Однотипная задача импульсного преследования объекта с изменяющейся динамикой	222
<i>Калашникова М. А., Курина Г. А.</i> Прямая схема построения асимптотики решения слабо возмущенной линейно-квадратичной задачи управления с трехтепловыми переменными	225
<i>Каменецкий В. А.</i> Новые применения теоремы Пятницкого о свертывании к матричным неравенствам в теории устойчивости	228
<i>Канатников А. Н., Ткачева О. С.</i> Поведение траекторий в четырехмерной модели ВИЧ-инфекции	232
<i>Каюмов О. Р.</i> О свойствах оптимального по быстродействию перемещения платформы с осцилляторами	235
<i>Климина Л. А., Формальский А. М.</i> Управление раскачиванием качелей	238
<i>Коган М. М.</i> Адаптивное $H_\infty$ -оптимальное управление	241
<i>Кокунько Ю. Г., Краснова С. А., Пивнева С. В.</i> Динамический генератор допустимых траекторий для БПЛА	244
<i>Корнеев В. А.</i> Применение постоянного управления для защиты объекта от удара на подвижном основании при ограниченных возмущениях	248
<i>Костин Г. В.</i> Оптимизация термодинамических процессов в теплопроводящих стержнях, управляемых элементом Пельтье	252
<i>Костин Г. В., Гавриков А. А.</i> Оптимальное движение упругого стержня, управляемого пьезоэлектрическими актюаторами и граничными силами	257
<i>Костоусова Е. К.</i> О полиэдральном методе решения задачи усиленного уклонения для линейных многошаговых систем	261
<i>Котлюков А. М., Павлова Н. Г.</i> Положение равновесия в моделях рынка с известной эластичностью	265
<i>Кочетков С. А.</i> Управление процессом генерации энергии транспортного средства	269

<i>Красинский А. Я., Магомедов М. Х.</i> Математическое моделирование динамики мехатронной системы с электромагнитным приводом . . . . .	273
<i>Красинский А. Я., Юлдашев А. А.</i> О некоторых критериях выбора планируемых траекторий многозвенных манипуляторов с геометрическими связями . . . . .	276
<i>Краснов Д. В.</i> Методы построения наблюдателей для одноканальных систем слежения в условиях неопределенности	279
<i>Крищенко А. П.</i> Локализирующие множества и существование аттракторов . . . . .	282
<i>Кумакшев С. А.</i> Оптимизация параметров двузвенной ноги шагающего робота . . . . .	285
<i>Маликов А. И.</i> Оценивание состояния по результатам дискретных измерений выхода непрерывной системы . . . .	288
<i>Масаев С. Н.</i> Бионические принципы этапов стресса и адаптации при оптимальном управлении моделью цифрового двойника системы . . . . .	293
<i>Митришкин Ю. В., Коньков А. Е., Корнев П. С.</i> Цифровой моделирующий стенд реального времени для управления плазмой в токамаках . . . . .	297
<i>Морозов В. М., Каленова В. И.</i> О стабилизации стационарных движений спутника в геомагнитном поле . . . . .	301
<i>Морозов М. В.</i> Об устойчивости периодических разностных включений . . . . .	305
<i>Окунев Ю. М., Привалова О. Г., Самсонов В. А.</i> Изолированные режимы планирования тяжелого оперенного тела . .	308
<i>Оморев Р. О.</i> Грубость и бифуркации синергетических систем	312
<i>Павленко В. С., Сесекин А. Н.</i> Устойчивость по Уламу–Хайерсу решений дифференциальных уравнений первого и второго порядка с разрывными траекториями . . . .	315
<i>Пальшин Г. П.</i> Устойчивость критических траекторий в одной задаче вихревой динамики . . . . .	318
<i>Пащенко А. Ф., Рассадин Ю. М.</i> Параметрическая идентификация в задачах управления микроклиматом . . . . .	322
<i>Перепелкин В. В., Румянцев Д. С.</i> О зависимости колебаний мгновенной оси вращения Земли от прецессии лунной орбиты . . . . .	325
<i>Перепелкин В. В., Скоробогатых И. В., Крылов С. С., Аунг М. З.</i> Оценка параметров модели полюсного прилива и установившегося колебания земного полюса . . .	329

<i>Пестерев А. В., Морозов Ю. В.</i> Исследование устойчивости аффинной системы четвертого порядка с переключениями	333
<i>Пестерев А. В., Морозов Ю. В.</i> Стабилизация колеса с обратным маятником . . . . .	336
<i>Петров А. А., Дружинина О. В., Масина О. Н.</i> Интеллектуальные алгоритмы переключений для моделей управляемых динамических систем . . . . .	340
<i>Петров Н. Н., Мачтакова А. И.</i> Многократная поимка убегающего в задаче с дробными производными в классе позиционных стратегий с поводьрем . . . . .	344
<i>Подобряев А. В.</i> Множества достижимости управляемых систем на свободных группах Карно . . . . .	348
<i>Поляков В. Ю., Саурин В. В., Демидов И. М.</i> Об экстремумах функционала качества балочных мостов со стационарным оптимальным управлением . . . . .	352
<i>Поляк Б. Т., Хлебников М. В.</i> Выбор обратной связи в задачах управления как задача оптимизации . . . . .	355
<i>Полякова Е. Н., Королев В. С.</i> Структура задач фотогравитационной небесной механики и основы теории космического полета с солнечным парусом . . . . .	359
<i>Попова С. Н., Федорова М. В.</i> Об условиях пропорциональной локальной управляемости спектра показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем . . . . .	363
<i>Рапопорт Л. Б., Генералов А. А.</i> О стабилизации перевернутого маятника с точкой подвеса на колесе . . . . .	366
<i>Расина И. В., Даниленко О. В.</i> Об одном классе квазилинейных дискретно-непрерывных систем . . . . .	371
<i>Родников А. В.</i> О стабилизации ограниченных траекторий космического аппарата с солнечным парусом в окрестности неустойчивой точки либрации . . . . .	374
<i>Рожнов А. В.</i> Исследование новых возможностей совершенствования способа передачи сообщений без этапности установления соединений . . . . .	378
<i>Рябов П. Е., Соколов С. В.</i> Бифуркационная диаграмма одной модели волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса	381
<i>Самсонок О. Н.</i> Импульсное управление процессом выметания	385
<i>Сафонов А. И.</i> Исследование положений равновесия модельной гамильтоновой системы в случае двойного резонанса третьего порядка . . . . .	388

<i>Сачкова Е. Ф.</i> Приложение субримановой задачи с вектором роста (2, 3, 5, 8) к исследованию упругости однородной балки . . . . .	392
<i>Седова Н. О., Дружинина О. В.</i> Стабилизация при наличии ограничений на состояние для систем с запаздыванием на основе управляющих функций . . . . .	396
<i>Семион А. А., Преснова А. П.</i> Оптимальное управление активной подвеской автомобиля при наличии задержек . .	399
<i>Смирнова В. Б., Проскурников А. В., Утина Н. В.</i> Новые критерии самосинхронизации двух дебалансных вибровозбудителей . . . . .	403
<i>Соболев В. А.</i> Метод редукции в задачах оптимального слежения с заданной эталонной траекторией . . . . .	407
<i>Соболев В. А., Щепакина Е. А.</i> Метод декомпозиции в задачах управления манипуляционными роботами . . . . .	410
<i>Соколов В. Ф.</i> Адаптивная субоптимальная стабилизация дискретного объекта при операторных возмущениях и смещенном ограниченном внешнем возмущении . . . . .	414
<i>Солодуша С. В.</i> Об идентификации ядер Вольтерра с использованием тестовых сигналов кусочно-линейного вида . .	417
<i>Сомов Е. И., Бутырин С. А., Сомов С. Е.</i> Управление космическим роботом-манипулятором при смене топливных баков геостационарного спутника . . . . .	420
<i>Сомов Е. И., Бутырин С. А., Сомова Т. Е.</i> Автономное управление ориентацией геостационарного спутника при подготовке к длительной консервации . . . . .	423
<i>Тимофеева Г. А.</i> Оценивание распределения случайных параметров в задаче стохастического оптимизации по наблюдению за вероятностными решениями . . . . .	426
<i>Ткачева О. С., Уткин А. В., Виноградова М. С.</i> Исследование возможности применения разрывного управления для математической модели лекарственной терапии глиомы .	430
<i>Тормагов Т. А., Рапопорт Л. Б.</i> Построение покрывающих путей с ограничением на нормальную кривизну для трехмерного ландшафта с препятствиями . . . . .	433
<i>Тремба А. А.</i> Вычисление множества достижимости линейных стационарных систем с помощью опорной функции и опорных элементов . . . . .	437

<i>Тренёв И. С.</i> Синтез субоптимального закона управления с $H_2/H_\infty$ -критерием для стабилизации движения квадрокоптера вдоль заданной траектории . . . . .	441
<i>Трубин М. В., Юркевич В. Д.</i> Адаптивное управление с идентификацией для электрогидравлического стенда прочностных испытаний . . . . .	446
<i>Турешбаев А. Т., Поляхова Е. Н., Мырзаев Р. С.</i> Устойчивость коллинеарных точек либрации в пространственной фотогравитационной задаче трех тел при внутреннем резонансе . . . . .	450
<i>Тхай В. Н.</i> Пространственные колебания физического маятника	453
<i>Тхоренко М. Ю.</i> Использование неравенства Рао-Крамера для оценки точности навигации по геомагнитному полю . . .	457
<i>Уткин В. А., Гулюкина С. И.</i> Автономное управление частотой вращения синхронного генератора по напряжению на обмотке возбуждения . . . . .	461
<i>Ушаков В. Н., Ершов А. А., Ушаков А. В., Кувшинов О. А.</i> Управляемые системы, зависящие от параметра . . . . .	466
<i>Фетисов Д. А.</i> Об $A$ -орбитальной линеаризации трехмерных аффинных систем . . . . .	470
<i>Филиппова Т. Ф.</i> Неравенства Гамильтона–Якоби–Беллмана в оценивании состояний управляемой системы с неопределенностью . . . . .	475
<i>Финогенко И. А.</i> Стабилизация управляемых систем с использованием функции Ляпунова со знакопостоянной производной . . . . .	478
<i>Холостова О. В.</i> Исследование движений близкой к автономной гамильтоновой системы при резонансе 2:1:1 . . . . .	482
<i>Хрусталёв М. М., Румянцев Д. С.</i> Синтез систем уравнений Ито с заданным спектром выхода . . . . .	485
<i>Хрусталеv М. М., Царьков К. А.</i> Методы локального и глобального улучшения программ управления линейными по состоянию динамическими системами . . . . .	490
<i>Хрящев С. М.</i> О применении многокомпонентных цепных дробей к задачам управления динамическими системами . .	493
<i>Хусанов Д. Х., Каххаров А. Э.</i> Устойчивость нелинейной модели Лотки–Вольтерра с переменным запаздыванием . .	497
<i>Хусанов Д. Х., Юсупова З. С., Ахматов А. А.</i> Об управлении движениями пятизвенного манипулятора . . . . .	501

<i>Чаирез-Ориа И. Х., Эрнандес-Санчес А., Мирелес-Перес М. К., Позняк А. С., Андрианова О. Г., Чертополохов В. А., Бузрий Г. С.</i> Адаптивное управление динамическим стендом на базе робота-манипулятора с учетом фазовых ограничений . . . . .	506
<i>Чичканов И. А., Шавин М. Ю.</i> Алгоритм для объезда препятствий, возникающих при движении колесного робота вдоль целевой траектории . . . . .	510
<i>Шатов Д. В.</i> Анализ устойчивости и времени выдержки одного класса систем второго порядка с переключениями .	514
<i>Шиманчук Д. В., Шмыров А. С., Шмыров В. А.</i> Использование изменения отражательной способности солнечного паруса для удержания космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации . . . . .	518
<i>Шульпин С. М.</i> Нейро-нечеткое управление вращающейся платформой . . . . .	521
<i>Щепакина Е. А.</i> Управление процессом горения . . . . .	524
<i>Югай Л. П.</i> Задача о раскачке маятника при интегральных ограничениях на управление и разреженном терминальном множестве . . . . .	528
<i>Юркевич В. Д., Буй Т. В.</i> ПИД резонансный регулятор для подавления колебаний упругого подвеса . . . . .	532
<i>Юрченков А. В.</i> Оценка компонент вектора состояния химического реактора при наличии сбоев в измерительных приборах . . . . .	536
<i>Юрченков А. В., Кустов А. Ю., Тимин В. Н.</i> Анизотропное оценивание сетевой системы при нецентрированном возмущении . . . . .	540
<b>Алфавитный указатель . . . . .</b>	<b>545</b>

**Об условиях пропорциональной локальной управляемости  
спектра показателей Ляпунова линейных  
дифференциальных систем**

*С. Н. Попова, М. В. Федорова*

УдГУ, Ижевск, Россия

udsu.popova.sn@gmail.com, fedoro.masha2013@yandex.ru

Получены необходимые и достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова линейной дифференциальной системы.

*Ключевые слова:* показатели Ляпунова, равномерная полная управляемость, оболочка Бебутова

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

с равномерно непрерывными и ограниченными на  $\mathbb{R}$  матрицами коэффициентов  $A(\cdot)$  и  $B(\cdot)$ . Полный спектр показателей Ляпунова [1] свободной системы

$$(2) \quad \dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

обозначим через  $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ .

Управление  $u(\cdot)$  в системе (1) выберем в виде линейной обратной связи  $u = U(t)x$ , получим замкнутую систему вида

$$(3) \quad \dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Будем называть  $U(\cdot)$  *матричным управлением* для системы (3). Будем говорить, что матричное управление  $U(\cdot)$  *допустимо* для системы (3), если матрица  $U(\cdot)$  кусочно непрерывна и ограничена на  $\mathbb{R}$ .

Пусть зафиксировано некоторое допустимое для системы (3) матричное управление  $U(\cdot)$ . Тогда для замкнутой системы (3) с выбранным управлением  $U(\cdot)$  определен полный спектр показателей Ляпунова  $\lambda_1(A + BU) \leq \dots \leq \lambda_n(A + BU)$ .

**Определение 1** ([2]). Будем говорить, что система (3) обладает свойством *пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова*, если найдутся такие  $\ell > 0$  и  $\delta > 0$ , что

для любого набора чисел  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ , удовлетворяющих неравенству  $\max_{i=1, \dots, n} |\mu_i - \lambda_i(A)| \leq \delta$ , существует допустимое для системы (3) матричное управление  $U(\cdot)$  такое, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|U(t)\| \leq \ell \max_{i=1, \dots, n} |\mu_i - \lambda_i(A)|$$

и

$$\lambda_i(A + BU) = \mu_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Определение 2** ([3]). Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие  $\alpha > 0$  и  $\vartheta > 0$ , что матрица Калмана

$$W(t, t + \vartheta) \doteq \int_t^{t+\vartheta} X(t, s)B(s)B^T(s)X^T(t, s) ds$$

системы (1) удовлетворяет неравенству  $W(t, t + \vartheta) \geq \alpha E$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ ; здесь  $X(t, s)$  — матрица Коши свободной системы (2),  $E$  — единичная матрица.

**Определение 3** ([4]). Показатели Ляпунова системы (2) называются *устойчивыми*, если для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для всякой кусочно непрерывной функции  $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ , удовлетворяющей условию  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|Q(t)\| < \delta$ , выполнено неравенство

$$\max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i(A) - \lambda_i(A + Q)| < \varepsilon;$$

здесь  $\lambda_1(A + Q) \leq \dots \leq \lambda_n(A + Q)$  — полный спектр показателей Ляпунова возмущенной системы  $\dot{y} = (A(t) + Q(t))y$ .

В работе [5] установлено, что если система (1) равномерно вполне управляема, а показатели Ляпунова системы (1) устойчивы, то полный спектр показателей Ляпунова системы (3) пропорционально локально управляем. Для нахождения необходимых и достаточных условий пропорциональной локальной управляемости спектра применим концепцию оболочки Бebutова линейной управляемой системы.

Систему (1) отождествим с функцией  $t \mapsto \sigma(t) \doteq (A(t), B(t)) \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$ . Обозначим  $\sigma_s(t) \doteq \sigma(t + s)$  — сдвиг  $\sigma$  на  $s \in \mathbb{R}$  и рассмотрим множество  $\mathfrak{R}(\sigma)$  — замыкание множества  $\{\sigma_s(\cdot) : s \in \mathbb{N}\}$  в топологии равномерной сходимости на отрезках. Метрика в  $\mathfrak{R}(\sigma)$  может быть задана равенством

$$\rho(\tilde{\sigma}, \hat{\sigma}) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \min\{\|\tilde{\sigma}(t) - \hat{\sigma}(t)\|, |t|^{-1}\}.$$

Пространство  $(\mathfrak{R}(\sigma), \rho)$  компактно. Оно называется *оболочкой Бебутова* системы  $\sigma$ .

Каждую функцию  $\hat{\sigma}(\cdot) = (\hat{A}(\cdot), \hat{B}(\cdot)) \in \mathfrak{R}(\sigma)$  отождествим с линейной управляемой системой

$$\dot{x} = \hat{A}(t)x + \hat{B}(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

**Теорема 1.** Пусть показатели Ляпунова системы (2) устойчивы. Система (1) равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда для каждой системы из оболочки Бебутова системы (1) соответствующая замкнутая система обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Проект № 20–01–00293) и Министерства науки и высшего образования в рамках государственного задания № 075-00928-21-01 (Проект FEWS-2020-0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем»).

#### Список литературы

1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
2. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларуская навука, 2012.
3. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119.
4. Адрианова Л.Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. С.-Петербург: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1992.
5. Попова С.Н. К свойству пропорциональной управляемости ляпуновских инвариантов линейных систем с дискретным временем // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 1578–1579.

### On Conditions for Proportional Local Assignability of the Lyapunov Spectrum of Linear Differential Systems

*S. N. Popova, M. V. Fedorova*

Udmurt State University, Izhevsk, Russia  
udsu.popova.sn@gmail.com, fedoro.masha2013@yandex.ru

Necessary and sufficient conditions for proportional local assignability of the Lyapunov spectrum of a linear differential system are obtained.