

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS  
Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS  
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS  
Irkutsk State University  
Mathematical center in Akademgorodok

Proceedings of the 7th International Conference on  
Nonlinear Analysis and Extremal Problems  
(NLA-2022)  
Irkutsk, Russia, July 15–22, 2022

Irkutsk  
ISDCT SB RAS  
2022

UDC 517.9

Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2022). Irkutsk : ISDCT SB RAS, 2022, 160 p.  
ISBN 978-5-6041814-2-3

This volume contains proceedings of the 7th International Conference “Nonlinear Analysis and Extremal Problems” (NLA-2022). The conference talks present recent developments in various fields of nonlinear analysis, partial differential equations, dynamical systems, calculus of variations, mathematical control theory, and optimization.

This volume is intended for researchers specializing in the corresponding fields of mathematics.

NLA-2022 is a satellite of the International Congress of Mathematicians 2022 (ICM 2022)

Scientific Editor: Prof. A. A. Tolstonogov

Editors: E. Yu. Baturina, O. N. Samsonyuk

Computer layout by E. A. Cherkashin

©ISDCT SB RAS, 2022

# Preface

This volume contains proceedings of the 7th International Conference “Nonlinear Analysis and Extremal Problems” (NLA-2022) that takes place in Irkutsk, Russia. NLA-2022 is a satellite of the International Congress of Mathematicians 2022 (ICM 2022) and is held on 15-22 July 2022. NLA-2022 aims at sharing recent advances in various areas of modern nonlinear analysis and exposing young researchers to some fast-paced topics in the field.

The main topics of the conference are

- Nonlinear analysis and its applications,
- Partial differential equations,
- Dynamical systems,
- Calculus of variations,
- Mathematical control theory,
- Optimization

The conference featured six lecture courses devoted to various aspects of theoretical and applied nonlinear analysis and control theory:

- *“Geometry and topology of the spaces of measures”*  
by **Vladimir I. Bogachev** (Lomonosov Moscow State University, Russia),
- *“Variational analysis and optimization theory: selected topics”*  
by **Alexander Y. Kruger** (Federation University Australia, Australia),
- *“Introduction to sub-Riemannian and sub-Finsler geometries from the optimal control viewpoint”*  
by **Lev V. Lokutsievskiy** (Steklov Mathematical Institute of RAS, Russia),
- *“Controllability and optimality”*  
by **Georgii G. Magaril-II’yaev** (Lomonosov Moscow State University, Russia),
- *“Optimal control of sweeping processes”*  
by **Boris Sh. Mordukhovich** (Wayne State University, USA),
- *“Nonlinear Fokker-Planck-Kolmogorov equations”*  
by **Stanislav V. Shaposhnikov** (Lomonosov Moscow State University, Russia).

# Organization

NLA-2022 is organized by Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS in cooperation with Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS, Irkutsk State University, and Mathematical center in Akademgorodok (Novosibirsk).

## Program Committee

### Chairs:

Alexander A. Tolstonogov      Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS (Russia)

Igor V. Bychkov      Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS (Russia)

### Committee members:

Vladimir I. Bogachev      Lomonosov Moscow State University (Russia)

Alexander G. Chentsov      Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS (Russia)

Gennadii V. Demidenko      Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS (Russia)

Ivan A. Finogenko      Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS (Russia) (Russia)

Alexander L. Kazakov      Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS (Russia) (Russia)

Yuri S. Ledyaeв      Western Michigan University (USA)

Nikolai Yu. Lukoyanov      Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS (Russia)

Georgii G. Magaril-II'yaev      Lomonosov Moscow State University (Russia)

Manuel D.P. Monteiro Marques      University of Lisbon (Portugal)

Boris Sh. Mordukhovich      Wayne State University (USA)

Alla A. Shcheglova      Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS (Russia)

Vladimir N. Ushakov      Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS (Russia)

## Organizing Committee

**Chair:** Vladimir A. Dykhta

**Secretary:** Nikolay I. Pogodaev

### Committee members:

Anton S. Anikin

Elena V. Chistyakova

Alexey A. Kumachev

Anna A. Lempert

Taras I. Madzhara

Nadezhda S. Maltugueva

Pavel S. Petrenko

Olga N. Samsonyuk

Stepan P. Sorokin

Pavel S. Sorokovikov

Maxim V. Staritsyn

Tatiana S. Zarodnyuk

# Contents

<b>Estimation Problem for Discrete Systems with Information Delays</b> .....	<b>1</b>
<i>Boris Ananyev, Polina Yurovskikh</i>	
Задача оценивания дискретных систем с запаздыванием в измерении	
<i>Б. И. Ананьев, П. А. Юровских</i>	
<b>About one Modification of Broyden-family Quasi-Newton Methods</b> .....	<b>3</b>
<i>Anton Anikin</i>	
<b>Block Integral Methods for the Numerical Solution of the Volterra Equation of the First Kind</b> .....	<b>4</b>
<i>E.D. Antipina, M. V. Bulatov, V. V. Biryukov</i>	
Блочные методы для численного решения интегрального уравнения Вольтерра I рода	
<i>Е. Д. Антипина, М. В. Булатов, В. В. Бирюков</i>	
<b>Variational Optimality Condition in Control of Hyperbolic Systems with Boundary Delay Parameters</b> .....	<b>7</b>
<i>Alexander Arguchintsev, Vasilisa Poplevko</i>	
<b>Exact Solutions of a Nonclassical Nonlinear Partial Equation</b> .....	<b>10</b>
<i>Anatoly Aristov</i>	
Точные решения неклассического нелинейного уравнения в частных производных	
<i>А. И. Аристов</i>	
<b>Blow up of Solutions and Local Solvability of an Abstract Cauchy Problem for Second-order Differential Equation with a Non-coercive Source</b>	<b>12</b>
<i>M. V. Artemeva, M. O. Korpusov</i>	
Разрушение решений и локальная разрешимость абстрактной задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка с некоэрцитивным источником	
<i>М. В. Артемьева, М. О. Корпусов,</i>	
<b>Necessary Optimality Condition for Deterministic Mean Field Type Control Problem</b> .....	<b>14</b>
<i>Yurii Averboukh, Dmitry Khlopin</i>	
<b>A Sequential Approach to a Minimum Norm Partial Pole Assignment Problem</b> .....	<b>16</b>
<i>Bazaragchaа Barsbold, Balkhuu Batbayasgalan, Dovdon Batsuuri, Dorjkhuu Enkhtaivan</i>	
<b>Optimal Object Trajectories under Unfriendly Observation</b> .....	<b>17</b>
<i>V.I. Berdyshev, V.B. Kostousov, A.A. Popov</i>	
Оптимальные траектории при недружественных наблюдателях	
<i>В. И. Бердышев, В. Б. Костусов, А. А. Попов</i>	

<b>On Solvability of the Cauchy Problem for one Pseudohyperbolic System..</b>	<b>19</b>
<i>Lina Bondar, Sanzhar Mingnarov</i>	
О разрешимости задачи Коши для одной псевдогиперболической системы	
<i>Л. Н. Бондарь, С. Б. Мингнарлов,</i>	
<b>Solving a Heat Mass Transfer Problem Using Differential Algebraic Equations.....</b>	<b>21</b>
<i>Elena Chistyakova</i>	
<b>On the Reduction of a Singular Linear-quadratic Control Problem to the Problem of Calculus of Variations .....</b>	<b>22</b>
<i>V.F. Chistyakov</i>	
О сведении вырожденной линейно-квадратичной задачи управления к задачам вариационного исчисления	
<i>В. Ф. Чистяков</i>	
<b>On Multidimensional Oscillations of a Cold Plasma with Account for Electron-ion Collisions .....</b>	<b>24</b>
<i>M. I. Delova, O. S. Rozanova</i>	
О многомерных колебаниях холодной плазмы с учетом электрон-ионных соударений	
<i>М. И. Делова, О. С. Розанова</i>	
<b>Existence of Periodic Solutions for One Class of Systems of Differential Equations.....</b>	<b>26</b>
<i>Gennadii Demidenko</i>	
Существование периодических решений для одного класса систем дифференциальных уравнений	
<i>Г. В. Демиденко</i>	
<b>Planar Flows with Minimal Ratio of the Extremal Values of the Pressure on the Free Boundary .....</b>	<b>28</b>
<i>Alexandre Demidov</i>	
Плоские течения с минимальным отношением экстремальных значений давления на свободной границе	
<i>А. С. Демидов</i>	
<b>Optimal Control of Manipulator .....</b>	<b>31</b>
<i>Jury Dolgy, Ilya Churin</i>	
Оптимальное управление манипулятором	
<i>Ю. Ф. Долгий, И. А. Чурин</i>	
<b>On the Right Invertibility of the Differential for the Equality Constraint Operator and the Implicit Function Theorem in a General Optimal Control Problem .....</b>	<b>34</b>
<i>Vladimir A. Dubovitskij</i>	
О правой обратимости дифференциала для оператора равенственных ограничений и теорема о неявной функции в общей задаче оптимального управления	
<i>В. А. Дубовицкий</i>	

<b>Method of Limiting Differential Inclusions for Discontinuous Systems</b> . . . .	<b>36</b>
<i>Ivan A. Finogenko</i>	
<b>Catastrophe Theory and Global Bifurcations of Limit Cycles</b> . . . . .	<b>38</b>
<i>Valery Gaiko</i>	
<b>Separation of Convex Sets by Halfspaces with Applications to Convex Optimization Problems</b> . . . . .	<b>40</b>
<i>Valentin Gorokhovik</i>	
<b>On an Analytical Solution of a Nonlinear Partial Differential Equation</b> . . .	<b>42</b>
<i>E.Yu. Grazhdantseva, S.V. Solodusha</i>	
Об одном аналитическом решении нелинейного дифференциального уравнения в частных производных	
<i>E. Ю. Гражданцева, С. В. Солодуша</i>	
<b>On Generalized Solutions of the Second Boundary Value Problem for Differential-difference Equations with Variable Coefficients</b> . . . . .	<b>44</b>
<i>Nikita O. Ivanov</i>	
<b>Grid Algorithm for Computing Reachability Sets with a Modified Reduction Procedure</b> . . . . .	<b>45</b>
<i>Igor' Izmet'sev</i>	
Сеточный алгоритм вычисления множеств достижимости с модифицированной процедурой прореживания	
<i>И. В. Изместьев</i>	
<b>On the Issue of Normality in State-constrained Optimal Control Problems</b>	<b>47</b>
<i>Dmitry Karamzin, Fernando Lobo Pereira</i>	
<b>On Analytical Solvability of the Problem with a Given Zero Front for the Nonlinear Parabolic Predator-Prey System</b> . . . . .	<b>48</b>
<i>A. L. Kazakov, P. A. Kuznetsov</i>	
<b>On Necessary Conditions if Limits are Minimized</b> . . . . .	<b>50</b>
<i>Dmitry Khlopin</i>	
О необходимых условиях при минимизации пределов	
<i>Д. В. Хлопин</i>	
<b>The First Initial-boundary Value Problem for Oskolkov System of Nonzero Order</b> . . . . .	<b>52</b>
<i>A.O. Kondyukov</i>	
Первая начально-краевая задача для системы Осколкова ненулевого порядка	
<i>A. O. Кондюков</i>	
<b>On the Weak Solution of the Electro-Hydrodynamical Boundary Value Problem for the Unit Cell of Cation-exchange Membrane</b> . . . . .	<b>54</b>
<i>Yulia O. Koroleva</i>	
<b>On Exact Solutions of Equations Used in Modeling the Motion of Distributed Formations</b> . . . . .	<b>56</b>
<i>Alexander Kosov, Edward Semenov</i>	
О точных решениях уравнений, используемых при моделировании движения распределенных формаций	

*A. A. Косов, Э. И. Семенов*

<b>On Controllability of a Highly Degenerate Four-level Quantum System with a “Chained” Coupling Hamiltonian</b> .....	<b>58</b>
<i>Sergey Kuznetsov, Alexander Pechen</i>	
<b>Time-optimal Problem on a Three-dimensional Heisenberg Group</b> .....	<b>60</b>
<i>E. Ladeyshchikov, L. Lokutsievskiy</i>	
Задача быстрогодействия на трёхмерной группе Гейзенберга с управлением из выпуклого множества	
<i>E. A. Ладейщиков, Л. В. Локуцкий,</i>	
<b>Optimal Location of Rigid Inclusions in Contact Problems for Inhomogeneous Two-dimensional Bodies</b> .....	<b>63</b>
<i>Nyurgun Lazarev</i>	
<b>On the Theory of Game Problems with Connected Variables</b> .....	<b>64</b>
<i>Akmal Mamatov</i>	
К теории игровых задач со связанными переменными	
<i>A. P. Маматов</i>	
<b>Algorithm for Solving one Maximin Problem with Connected Variables</b> ..	<b>66</b>
<i>Akmal Mamatov, Islom Ravshanov</i>	
Алгоритм решения одной максиминной задачи со связанными переменными	
<i>A. P. Маматов, И. А. Равшанов</i>	
<b>Estimates for Solutions to Some Classes of Nonautonomous Nonlinear Time-Delay Systems</b> .....	<b>68</b>
<i>Inessa Matveeva</i>	
Оценки решений некоторых классов неавтономных нелинейных систем с запаздыванием	
<i>И. И. Матвеева</i>	
<b>On Optimizing Coherent and Incoherent Controls in Some Open Quantum Systems</b> .....	<b>70</b>
<i>Oleg V. Morzhin</i>	
<b>Spectral Analysis of the Stability of Fluid Flow in an Annular Channel</b> ...	<b>72</b>
<i>A. A. Mukhutdinova, A. D. Nizamova, V. N. Kireev, S. F. Urmancheev</i>	
Спектральный анализ устойчивости течения жидкости в кольцевом канале	
<i>A. A. Мухутдинова, А. Д. Низамова, В. Н. Киреев, С. Ф. Урманчиев</i>	
<b>Qualitative Theory of Equations and Inequalities with KPZ-nonlinearities</b>	<b>74</b>
<i>Andrey Muravnik</i>	
<b>Analysis of the Controllability Criteria for Some Degenerate Four-level Quantum Systems</b> .....	<b>75</b>
<i>Anastasia A. Myachkova and Alexander N. Pechen</i>	
<b>On the Solvability of a Nonlocal Boundary Value Problem for Fractional Differential Inclusions with Causal Multioperators</b> .....	<b>77</b>
<i>V. Obukhovskii, G. Petrosyan, M. Soroka</i>	
О разрешимости нелокальной краевой задачи для дифференциальных включений дробного порядка с каузальными мультиоператорами	



*B. B. Обуховский, Г. Г. Петросян, М. С. Сорока*

<b>On a Local Search Method for Bilevel Optimization Problems with an Equilibrium at the Lower Level</b> .....	79
<i>Andrei V. Orlov</i>	
<b>On an Inverse Spectral Problem for Band Operators and Nonlinear Lattices</b> .....	81
<i>Andrey Osipov</i>	
<b>On the Linearization Method in Small-time Control Synthesis</b> .....	83
<i>Ivan Osipov</i>	
<b>A Note on Differential-algebraic Equations with Hysteresis Phenomena</b> ...	86
<i>Pavel Petrenko</i>	
<b>GRAPE Method for Open Quantum Systems Driven by Coherent and Incoherent Controls</b> .....	88
<i>Vadim Petruhanov, Alexander Pechen</i>	
<b>Exact Cost Increment Formula for Linear Problems of Optimal Ensemble Control in the Space of Probability Measures</b> .....	90
<i>Nikolay Podogaev, Ilya Pravosudov, Maxim Staritsyn, Fernando Lobo Pereira</i>	
<b>Navier-Stokes Evolutionary System with Spatial Variable in a Network-like Domain</b> .....	92
<i>Vyacheslav Provotorov, Semen Podvalny</i>	
Эволюционная система Навье-Стокса с пространственной переменной в сетеподобной области	
<i>В. В. Провоторов, С. Л. Подвальный</i>	
<b>Constructions of the Subdifferentials and Codifferentials</b> .....	95
<i>Igor Prudnikov</i>	
<b>Numerical Estimation of the Boundaries of the Reachability Sets of Controlled Systems Based on Symbolic Formulas</b> .....	98
<i>A.N. Rogalev</i>	
Численная оценка границ множеств достижимости управляемых систем на основе символьных формул	
<i>А. Н. Роголев</i>	
<b>Asymptotic Modelling of Interfaces in Kirchhoff-Love's Plates theory</b> ....	100
<i>Evgeny Rudoy</i>	
<b>Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential</b> .....	102
<i>Viktor Korzyuk, Jan Rudzko</i>	
<b>Bright Solitons in a (2+1)-dimensional Oceanic Model: Dynamics, Interaction and Molecule Formation</b> .....	104
<i>Sakkaravarthi Karuppaiya</i>	
<b>A Numerical Scheme for Solving of a Bilinear Optimal Impulsive Control Problem with Intermediate State Constraints</b> .....	105
<i>Olga Samsonyuk</i>	

<b>On a property of continuous dependence of sets in the space of measures .</b>	<b>106</b>
<i>Dmitrii Serkov, Alexander Chentsov</i>	
Об одном свойстве непрерывной зависимости множеств в пространстве мер	
<i>Д. А. Серков, А. Г. Ченцов,</i>	
<b>On the Solution of the Hamilton-Jacobi Equation with State Constraints Given by Zeros of the Coefficients at the Exponential Terms of the Hamiltonian . . . . .</b>	<b>108</b>
<i>Lyubov Shagalova</i>	
О решении уравнения Гамильтона – Якоби с фазовыми ограничениями, задаваемыми нулями коэффициентов при экспоненциальных слагаемых гамильтониана	
<i>Л. Г. Шагалова</i>	
<b>Fluid Storage Control with a Proportional-integrally Differentiating Solver</b>	<b>110</b>
<i>E. R. Shaihiiev, A. D. Nizamova</i>	
Контроль хранилища жидкости при помощи ПИД-регулятора	
<i>Э. Р. Шайхиев, А. Д. Низамова,</i>	
<b>Tensor Invariants of Dynamical Systems with Dissipation . . . . .</b>	<b>112</b>
<i>Maxim V. Shamolin</i>	
<b>Impulse Response Matrix for Time-Varying System of Differential-Algebraic Equations . . . . .</b>	<b>114</b>
<i>Alla A. Shcheglova</i>	
<b>On the Spectrum of One Class of Integral-Functional Operators in Solving Nonlinear Volterra Loaded Equations . . . . .</b>	<b>115</b>
<i>Nikolay Sidorov, Lev Sidorov</i>	
О роли спектра одного класса интегрально-функциональных операторов в решении нелинейных уравнений Вольтерра с нагрузками	
<i>Н. А. Сидоров, Л. Д. Сидоров</i>	
<b>On a Model of Population Dynamics with Several Delays . . . . .</b>	<b>117</b>
<i>Maria Skvortsova</i>	
Об одной модели динамики популяций с несколькими запаздываниями	
<i>М. А. Скворцова</i>	
<b>On Numerical Solution of the Second Order Differential-algebraic Equations</b>	<b>119</b>
<i>Liubov Solovarova, Ta Duy Phuong</i>	
О численном решении дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка	
<i>Л. С. Соловарова, Т. З. Фьонг</i>	
<b>Combined Algorithms Based on Bioinspired and Local Search Methods for Solving Multiextremal Optimization Problems . . . . .</b>	<b>121</b>
<i>Pavel Sorokovikov</i>	
Комбинированные алгоритмы на основе биоинспирированных методов и методов локального поиска для решения многоэкстремальных задач оптимизации	
<i>П. С. Сороковиков</i>	

<b>On Nonconvex Optimal Control Problems</b> .....	<b>123</b>
<i>Alexander Strelakovsky</i>	
<b>Stationary Points of d.c. Lagrangians in Solving Inverse Problems of the Control Theory</b> .....	<b>125</b>
<i>Nina Subbotina, Evgenii Krupennikov</i>	
Стационарные точки d.c. Лагранжианов в решении обратных задач теории управления	
<i>Н. Н. Субботина, Е. А. Крупенников,</i>	
<b>Oskolkov Models and Sobolev-type Equations in Magnetohydrodynamics</b> .	<b>128</b>
<i>T.G. Sukacheva</i>	
Модели Осколкова и уравнения соболевского типа в магнитогидродинамике	
<i>Т. Г. Сукачева</i>	
<b>On the Numerical Solution of Linear Multidimensional Differential-algebraic Systems</b> .....	<b>131</b>
<i>Svetlana Svinina</i>	
О численном решении линейных многомерных дифференциально-алгебраических систем	
<i>С. В. Свинина</i>	
<b>Control Optimization in Systems with Phase Constraints</b> .....	<b>133</b>
<i>Alexander Tyatyushkin</i>	
<b>Nonlinear Analysis Mixed Boundary Value Problem for the Sophie Germain Equation</b> .....	<b>134</b>
<i>A.L. Ushakov</i>	
Нелинейный анализ смешанной краевой задачи для уравнения Софи Жермен	
<i>А. Л. Ушаков</i>	
<b>Traps in Quantum Control Landscapes</b> .....	<b>136</b>
<i>Boris Volkov, Alexander Pechen</i>	
<b>Optimization of Sphere Partitions and Estimates of the Chromatic Number for a Forbidden Interval of Distances</b> .....	<b>138</b>
<i>Vsevolod Voronov, Viktoria Svistunova</i>	
Оптимизация разбиений сферы и оценки хроматических чисел при запрещенном интервале расстояний	
<i>В. А. Воронов, В. Р. Свистунова</i>	
<b>About Exponential Stability of Solutions to Systems of Differential Equations of Neutral Type with Distributed Delay</b> .....	<b>141</b>
<i>Timur Yskak</i>	
Об экспоненциальной устойчивости решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием	
<i>Т. Ыскак</i>	
<b>Decentralized Computation of Wasserstein Barycenter over Time-Varying Networks</b> .....	<b>143</b>
<i>Olga Yufereva, Michael Pershianov, Pavel Dvurechensky, Alexander Gasnikov, Dmitry Kovalev</i>	

<b>Variant of the Objective Function Parametrization Method for a Convex Programming Problem</b> .....	<b>146</b>
<i>I.Ya. Zabotin, K.E. Kazaeva, O.N. Shulgina</i>	
<b>One variant of the Two-Stage Cutting-Plane Method</b> .....	<b>148</b>
<i>Igor Zabotin, Oksana Shulgina, Rashid Yarullin</i>	
<b>On Matrix Eigenvalue Spectrum Assignment for High-order Linear Systems by Static Output Feedback</b> .....	<b>151</b>
<i>Vasilii Zaitsev, Inna Kim</i>	
О назначении матричного спектра линейных систем высших порядков статической обратной связью по выходу	
<i>B. A. Зайцев, И. Г. Ким</i>	
<b>The Modified Monowave Method for the Reachable Set Approximation of the Nonlinear Controlled System on the Plane</b> .....	<b>153</b>
<i>Tatiana Zarodnyuk, Alexander Gornov</i>	
<b>Lower Bounds for Area Complexity of Decoder in Model of Cellular Circuits</b>	<b>155</b>
<i>Vadim Zizov</i>	
Нижние оценки сложности длинных дешифраторов в модели клеточных схем	
<i>B. С. Зизов</i>	
<b>Laplace Cascade Method</b> .....	<b>158</b>
<i>E. I. Zotova, R. D. Murtazina</i>	
Каскадный метод Лапласа	
<i>E. И. Зотова, Р. Д. Муртазина</i>	

# On Matrix Eigenvalue Spectrum Assignment for High-order Linear Systems by Static Output Feedback\*

Vasilii Zaitsev, Inna Kim

UdSU, Izhevsk, Russia  
verba@udm.ru, kimingeral@gmail.com

For linear time-invariant control systems defined by a linear differential equation of the  $n$ th order with a multidimensional state, input and output, necessary and sufficient conditions for the solvability of the problem of assigning an arbitrary matrix spectrum by means of static output feedback are obtained.

**Keywords:** linear control system, eigenvalue spectrum assignment, linear static output feedback

## О назначении матричного спектра линейных систем высших порядков статической обратной связью по выходу

В. А. Зайцев, И. Г. Ким

УдГУ, Ижевск, Россия  
verba@udm.ru, kimingeral@gmail.com

Для линейных стационарных управляемых систем высших порядков получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи назначения произвольного матричного спектра посредством статической обратной связи по выходу.

**Ключевые слова:** линейная система управления, управление спектром, обратная связь по выходу

Пусть  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  или  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ;  $\mathbb{K}^n = \{x = \text{col}(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\}$  — линейное пространство вектор-столбцов над полем  $\mathbb{K}$ ;  $M_{m,n}(\mathbb{K})$  — пространство матриц размерности  $m \times n$  над полем  $\mathbb{K}$ ;  $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$ ;  $I \in M_n(\mathbb{K})$  — единичная матрица.

Рассмотрим линейную управляемую систему [1]

$$x^{(n)} + \sum_{i=1}^n A_i x^{(n-i)} = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{l=p}^n B_{l\alpha} u_{\alpha}^{(n-l)}, \quad (1)$$

$$y_{\beta} = \sum_{\nu=1}^p C_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}, \quad \beta = \overline{1, k}. \quad (2)$$

\* Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00, проект FEWS-2020-0010.

Здесь  $s, n, m, k \in \mathbb{N}$  — заданные числа,  $p \in \overline{1, n}$ ;  $x \in \mathbb{K}^s$  — фазовый вектор,  $u_\alpha \in \mathbb{K}^s$  — векторы управления,  $y_\beta \in \mathbb{K}^s$  — векторы выходных сигналов,  $A_i, B_{l\alpha}, C_{\nu\beta} \in M_s(\mathbb{K})$ ,  $i = \overline{1, n}, l = \overline{p, n}, \nu = \overline{1, p}, \alpha = \overline{1, m}, \beta = \overline{1, k}$ . Построим векторы  $u = \text{col}(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{K}^{ms}$ ,  $y = \text{col}(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{K}^{ks}$ . Будем строить управление в системе (1), (2) по принципу линейной статической обратной связи по выходу

$$u = Qy. \quad (3)$$

Здесь  $Q = \{Q_{\alpha\beta}\} \in M_{ms, ks}(\mathbb{K})$ ,  $Q_{\alpha\beta} \in M_s(\mathbb{K})$ ,  $\alpha = \overline{1, m}, \beta = \overline{1, k}$ .

**Определение 1.** Скажем, что для системы (1), (2) разрешима задача назначения произвольного матричного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу (3), если для любых матриц  $\Gamma_i \in M_s(\mathbb{K})$ ,  $i = \overline{1, n}$ , существует матрица обратной связи  $Q \in M_{ms, ks}(\mathbb{K})$  такая, что замкнутая система (1), (2), (3) имеет вид

$$x^{(n)} + \Gamma_1 x^{(n-1)} + \dots + \Gamma_n x = 0.$$

По системе (1), (2) построим блочные матрицы  $B = \{B_{l\alpha}\} \in M_{ns, ms}(\mathbb{K})$ ,  $l = \overline{1, n}$ ,  $\alpha = \overline{1, m}$ ,  $C = \{C_{\nu\beta}\} \in M_{ns, ks}(\mathbb{K})$ ,  $\nu = \overline{1, n}$ ,  $\beta = \overline{1, k}$ , где  $B_{l\alpha} = 0 \in M_s(\mathbb{K})$  при  $l < p$  и  $C_{\nu\beta} = 0 \in M_s(\mathbb{K})$  при  $\nu > p$ .

Обозначим  $\mathcal{J} := J \otimes I \in M_{ns}(\mathbb{K})$ , где  $I \in M_s(\mathbb{K})$ ,  $J \in M_n(\mathbb{K})$  — первый единичный косоый ряд,  $\otimes$  — прямое (кронекерово) произведение матриц.

Пусть  $X, Y$  — блочные матрицы с блоками размерности  $s$  такие, что число (блочных) столбцов матрицы  $X$  совпадает с числом (блочных) строк матрицы  $Y$ :

$$\begin{aligned} X &= \{X_{ij}\} \in M_{qs, rs}(\mathbb{K}), \quad X_{ij} \in M_s(\mathbb{K}), \quad i = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, r}; \\ Y &= \{Y_{j\nu}\} \in M_{rs, ts}(\mathbb{K}), \quad Y_{j\nu} \in M_s(\mathbb{K}), \quad j = \overline{1, r}, \quad \nu = \overline{1, t}. \end{aligned}$$

Для матриц  $X$  и  $Y$  определим операцию блочного умножения по следующему правилу:

$$Z = X \star Y := \{Z_{i\nu}\}, \quad Z_{i\nu} := \sum_{j=1}^r X_{ij} \otimes Y_{j\nu} \quad i = \overline{1, q}, \quad \nu = \overline{1, t}.$$

Имеем  $Z_{i\nu} \in M_{s^2}(\mathbb{K})$ ,  $i = \overline{1, q}, \nu = \overline{1, t}$ , поэтому  $Z := X \star Y \in M_{qs^2, ts^2}(\mathbb{K})$ .

Введем отображение  $\text{VECRR}_s : M_{qs, rs}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{s, qrs}(\mathbb{K})$ , которое разворачивает матрицу  $X = \{X_{ij}\} \in M_{qs, rs}(\mathbb{K})$  по блочным строкам в блочную строку с блоками размерности  $s$ :  $\text{VECRR}_s X = [X_{11}, \dots, X_{1r}, \dots, X_{q1}, \dots, X_{qr}]$ . Рассмотрим матрицы  $C^T \star B$ ,  $C^T \star \mathcal{J}B$ ,  $\dots$ ,  $C^T \star \mathcal{J}^{n-1}B$ . Построим матрицы  $\text{VECRR}_{s^2}(C^T \star \mathcal{J}^{i-1}B) \in M_{s^2, kms^2}(\mathbb{K})$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и матрицу

$$\Theta = \begin{bmatrix} \text{VECRR}_{s^2}(C^T \star B) \\ \text{VECRR}_{s^2}(C^T \star \mathcal{J}B) \\ \dots \dots \dots \\ \text{VECRR}_{s^2}(C^T \star \mathcal{J}^{n-1}B) \end{bmatrix} \in M_{ns^2, kms^2}(\mathbb{K}).$$

**Теорема 1.** Для системы (1), (2) разрешима задача назначения произвольного матричного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу (3) тогда и только тогда, когда

$$\text{rank } \Theta = ns^2.$$

## Список литературы

- [1] Zaitsev V., Kim I. Matrix eigenvalue spectrum assignment for linear control systems by static output feedback. Linear Algebra and its Applications. 2021. Vol. 613. Pp. 115–150.