На правах рукописи
УДК 517.917

ВОРОНЕЦКАЯ МАРИНА АЛЕКСАНДРОВНА

НЕКОТОРЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НА МНОЖЕСТВЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск – 2006

Работа выполнена в ГОУ ВПО «Удмуртский государственный университет».

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент Иванов Александр Геннадьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Альбрехт Эрнст Генрихович

доктор физико-математических наук, профессор Чубурин Юрий Павлович

Ведущая организация: Институт математики Национальной Академии наук Беларуси

Защита состоится «____» ______________ 2006 г. в 14^{00} на заседании диссертационного совета К 212.275.04 в ГОУ ВПО «Удмуртский государственный университет» по адресу: 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), ауд. 222. E-mail: *imi@uni.udm.ru*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Удмуртского государственного университета.

Автореферат разослан «____» ______________ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент Петров Н.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Как сказано в монографии Н.Г. Малкина [1)] "С середины 50-х годов акцент с исследования периодических колебаний сместился в сторону изучения условно периодических и почти периодических (п.п.) колебаний". Во многих интегрируемых задачах движение оказывается условно периодическим. Более точно: во многих физических системах с несколькими степенями свободы множество периодических движений составляет "множество меры 0", а множество полной меры составляют п.п. движения (например, движения небесных тел, движения твердого тела с закрепленной точкой без воздействия внешних сил, колебания, возникающие в электрических цепях). Кроме того, возмущающая сила в физических системах также зачастую имеет п.п. характер. Одним из важных вопросов исследования является вопрос о существовании п.п. решения нелинейного дифференциального уравнения, в частности, уравнения Эйлера-Лагранжа (или системы уравнений Гамильтона), описывающего движение физической системы. Результаты исследований находят применение в теоретической механике, небесной механике, теории электрических цепей и т.д.

Одним из методов качественного изучения уравнений Эйлера-Лагранжа является переход к рассмотрению соответствующей вариационной задачи. По-видимому, впервые Blot J. доказал, что множество п.п. решений уравнения Эйлера-Лагранжа совпадает со множеством стационарных точек функционала

$$J\big(x(\cdot)\big) = M\{L\big(x(t), \dot{x}(t)\big)\} \doteq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T L\big(x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt,$$

определенного на множестве $B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ п.п. по Бору вместе со своей производной функций. В работах [2)] [3)] он исследовал задачу

$$J\big(x(\cdot)\big) \to \inf, \quad x(\cdot) \in B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{0.1}$$

[1)] Малкин Н. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.

[2)] Blot J. Calculus of variations in mean and convex lagrangians. // J. Math. Anal. — 1988. — V.134, №2. — P. 312 — 321.

[3)] Blot J. Calculus of variations in mean and convex lagrangians. II //Bull. Austral. Math. Soc. — 1989. — V.40. —P. 457 — 463.

названную им простейшей задачей вариационного исчисления в среднем. Применение вариационного формализма позволило ему привести некоторые необходимые и достаточные условия существования (а также отсутствия) п.п. решения уравнения Эйлера-Лагранжа, и исследовать структуру множества таких решений [4)].

Другой актуальной задачей, связанной с п.п. движениями, является задача п.п. оптимизации, и здесь следует отметить в первую очередь работы А.Г. Иванова. Задача п.п. оптимизации возникает в случае, когда у управляемой системы координатные функции периодичны, и периоды несоизмеримы. Такая ситуация встречается во многих прикладных задачах. Задача п.п. оптимизации является непосредственным обобщением задачи периодической оптимизации, исследованием которой занимались многие авторы. Для этой задачи получен ряд сильных результатов, составляющих теорию периодической оптимизации. В то же время задачи п.п. оптимизации исследованы пока недостаточно. Задача оптимального управления п.п. движениями

$$M\{f(t,x(t),\dot{x}(t)\} \to \mathrm{extr}, \quad \dot{x}(t)=\varphi(t,x(t),u(t))$$

исследовалась в работе [5)] в предположении, что система уравнений в вариациях, отвечающая уравнению связи, является экспоненциально дихотомичной. Вариационные задачи могут рассматриваться как задачи оптимального управления п.п. движениями. Здесь следует отметить, что при такой формализации в уравнении связи $\dot{x}(t)=u(t)$, $t\in\mathbb{R}$ управления $u(\cdot)$ должны быть таковы, что соответствующая функция $x(t)=x(0)+\int_0^t u(s)\,ds$ почти периодична по Бору, а значит, ограничена на $\mathbb{R}$. Это обстоятельство потребовало при доказательствах построения вариаций специального вида. Отметим, что при формализации вариационных задач в виде задач оптимального управления п.п. движениями оптимальный процесс является решением вариационной задачи в сильном смысле. Поэтому в диссертации рассматривались решения в сильном и слабом смыслах.

Сказанное свидетельствует об актуальности задач, рассмотренных в диссертации.

[4)] Blot J. Calculus of variations in mean and convex lagrangians. IV //Ricerche di Math. 1991. V.XL, fasc. 1. P. 3 — 18.L.

[5)] Иванов. А. Г. Оптимальное управление почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние. // Доклады РАН. — 1995 г. — Т.343, №6. — с. 51- 53.

Цель работы. Основной целью работы является вывод необходимых условий первого и второго порядков решения в сильном и слабом смысле ряда экстремальных задач, определенных на множестве п. п. по Бору функций, производная которых принадлежит пространству ограниченных (в существенном) п. п. по Степанову отображений.

Методы решения. Используются методы теории п.п. функций, дифференциальных уравнений с п.п. коэффициентами, вариационное исчисление, а также некоторые методы, использующиеся при изучении задач оптимального управления п.п. движениями.

Научная новизна. В рамках общих принципов теории экстремальных задач для ряда экстремальных задач, определенных на множестве п.п. по Бору функций, производная которых принадлежит пространству ограниченных п.п. по Степанову отображений, приведены необходимые условия первого и второго порядков решений в слабом и сильном смыслах. Для функционалов в виде среднего значения квадратичной формы с п.п. по Степанову коэффициентами приведены необходимые и достаточные условия неотрицательности и необходимое условие строгой положительности. В одномерном случае получены достаточные условия решения простейшей задачи вариационного исчисления, определенной на указанном множестве п.п. функций.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретических характер. Результаты работы могут быть в дальнейшем использованы при исследовании конкретных прикладных задач, в которых возникают колебательные процессы, и задач, допускающих управление такими процессами.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на городском семинаре по дифференциальным уравнениям и теории управления (Ижевск, 1998-2006 годы), научной конференции молодых ученых (МГУ, Мехмат, май 1998 года), семинаре кафедры прикладной математики УрГУ (Екатеринбург, 2003 год), научной конференции “Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям”, (Минск, 2005 год), научной конференции “Теория управления и математическое моделирование”, посвященная 50-ти летию Ижевского государственного технического университета (Ижевск, 2006 год), научной конференции “Теория управления и математическое моделирование”, посвященная 75-ти летию Удмуртского государственного университета (Ижевск, 2006 год).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти работах [1]-[5].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, одиннадцати параграфов (нумерация параграфов сквозная) и списка литературы. Объем диссертации 97 страниц. Библиографический список содержит 47 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описывается общая постановка задачи и излагается краткое содержание работы.

В первом параграфе приведены определения и используемые в дальнейшем свойства банаховых пространств $B \doteq B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *почти периодических* (п. п.) *по Бору* и $S \doteq S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *п. п. Степанову функций*, а также пространства $S_\infty \doteq S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, состоящего из ограниченных (в существенном) п. п. по Степанову функций.

Напомним, что каждой п. п. по Степанову функции f можно поставить в соответствие ряд Фурье $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} c(\lambda, f)e^{i\lambda t}$. В первом параграфе доказана следующая

Теорема 0.1. *Если ряд Фурье* $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} c(\lambda, f)e^{i\lambda t}$, *отвечающий функции* $f \in S_\infty$, *совпадает с формально продифференцированным рядом Фурье* $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} c(\lambda, g)e^{i\lambda t}$ *для функции* $g \in S$, *то функция* g *принадлежит пространству* B, *и при почти всех* $t \in \mathbb{R}$ *имеет место равенство* $\dot{g}(t) = f(t)$.

Результаты второго параграфа носят вспомогательный характер. В нем введено в рассмотрение пространство $B(\mathbb{R} \times \mathbb{U}, \mathbb{R}^n)$, $\mathbb{U}$ — компактное множество в $\mathbb{R}^n$, состоящее из непрерывных отображений $(t, u) \mapsto f(t, u)$, которые п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $u \in \mathbb{U}$, а также пространство $S\big(\mathbb{R}, C(\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)\big)$, состоящее из таких отображений $f : \mathbb{R} \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$, что для любого $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функция $(t, u) \mapsto f(t, u), \quad (t, u) \in [a, b] \times \mathbb{U}$ удовлетворяет условиям Каратеодори, и для любого $\varepsilon > 0$ множество ε - почти периодов $E_S(f, \varepsilon) \doteq \bigcap\limits_{u\in\mathbb{U}} E_S\big(f(\cdot\,, u), \varepsilon\big)$ относительно плотно.

Обоснована корректность определения на множестве $S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{U})$ функционала $u(\cdot) \mapsto \mathfrak{I}\big(u(\cdot)\big) \doteq M\{g\big(t, u(t)\big)\}$, отвечающего заданной функции $g \in S\big(\mathbb{R}, C(\mathbb{U}, \mathbb{R})\big)$, и указан ряд свойств этого функционала.

В третьем параграфе вводится в рассмотрение отображение $(t, x, u) \mapsto L(t, x, u) \in \mathbb{R}$, $(t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n$ ($\mathcal{V}$ — область в $\mathbb{R}^n$), удовлетворяющее условию:

A) для любых фиксированных компактных множеств V и U из $\mathcal{V}$ и $\mathbb{R}^n$, соответственно, отображение L принадлежит пространству $S\big(\mathbb{R}, C(V \times U, \mathbb{R})\big)$.

Показано, что на множестве $\mathcal{B} \doteq \{x \in \mathfrak{B}, \overline{\mathrm{orb}}(x) \subset \mathcal{V}\}$, в котором $\mathfrak{B} \doteq \{x \in B \,:\, \dot{x} \in S_\infty\}$ — нормированное пространство с нормой $\|x\|_{\mathfrak{B}} \doteq \|x\|_B + \|\dot{x}\|_S$ и $\mathrm{orb}(x) \doteq \{x(t),\ t \in \mathbb{R}\}$, определен функционал

$$x(\cdot) \mapsto I\big(x(\cdot)\big) \doteq M\{L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\}, \quad x(\cdot) \in \mathcal{B}. \tag{0.2}$$

В начале параграфа доказан ряд свойств функционала (0.2), и рассмотрена следующая задача:

$$I\big(x(\cdot)\big) \to \inf, \quad x(\cdot) \in \mathcal{B}, \tag{0.3}$$

которая называется *простейшей задачей вариационного исчисления, определенной на множестве п. п. функций.* В этой задаче функция $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ называется решением в *сильном* (*слабом*) *смысле*, если для всех $x(\cdot)$ из множества $\mathcal{B}$ таких, что $\|\widehat{x} - x\|_B < \gamma$ (соответственно, $\|\widehat{x} - x\|_{\mathfrak{B}} < \gamma$) выполнено неравенство $I\big(x(\cdot)\big) \geqslant I\big(\widehat{x}(\cdot)\big)$.

Основным утверждением третьего параграфа является следующая теорема, в которой $AC\big([\alpha, \alpha+T], \mathbb{R}^n\big)$ — пространство абсолютно непрерывных функций, заданных на $[\alpha, \alpha+T]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 0.2. *Пусть отображение* $L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию* A) *и ограничено. Функция* $\widehat{x}$ *является решением задачи* (0.3) *в сильном смысле тогда и только тогда, когда для любого* $T > 0$ *найдется такое* $\gamma \doteq \gamma(T) > 0$, *что для всякого* $\alpha \in \mathbb{R}$ *и всякой функции* x *из пространства* $AC\big([\alpha, \alpha+T], \mathbb{R}^n\big)$ *такой, что* $\|x - \widehat{x}\|_{C\left([\alpha,\alpha+T],\mathbb{R}^n\right)} < \gamma$, *будет выполнено неравенство*

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt \geqslant \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)\, dt$$

В четвертом параграфе рассматривается отображение $L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) в каждой точке $(t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n$ существуют производные L'_x, L'_u по переменным x и, соответственно, u;

2) для любых фиксированных компактных множеств V из $\mathcal{V}$ и U из $\mathbb{R}^n$ $L \in S\big(\mathbb{R}, C(V \times U, \mathbb{R})\big)$ и L'_x, $L'_u \in S\big(\mathbb{R}, C(V \times U, \mathbb{R}^{n*})\big)$.

Всюду далее используются следующие обозначения:
$\widehat{L}'_x(t) \doteq L'_x\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$, $\widehat{L}'_u(t) \doteq L'_u\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}$.

В следующем утверждении $\delta I\big(x(\cdot); \cdot\big)$ — первая вариация по Лагранжу в точке $x(\cdot) \in \mathfrak{B}$ функционала (0.2).

Теорема 0.3. *Пусть в точке* $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ $\quad \delta I(\widehat{x}(\cdot); \cdot) = 0$. *Тогда если п. п. по Степанову функции* $t \mapsto \widehat{L}'_x(t) \quad t \mapsto \widehat{L}'_u(t)$ *ограничены в существенном, то отображение* $t \mapsto \widehat{L}'_u(t)$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{B}$, *и при почти всех* $t \in \mathbb{R}$

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}'_u(t) + \widehat{L}'_x(t) = 0. \tag{0.4}$$

Из теоремы 0.3 следует один из результатов Blot J.: функционал J является непрерывно дифференцируемым по Фреше на пространстве $B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, и если функция $\widehat{x} \in B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ такова, что $J'\big(\widehat{x}(\cdot)\big) = 0$, то для всех $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство (0.4).

Пусть, далее, функции $L_j : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 0,\ldots, k+m$, удовлетворяющие условию, аналогичному условию A). Рассмотрим следующую задачу:

$$I_0\big(x(\cdot)\big) \to \inf, \quad x(\cdot) \in D, \tag{0.5}$$

где

$$D \doteq \{x \in \mathcal{B} : I_j\big(x(\cdot)\big) \leqslant 0,\ j = 1,\ldots, k,\ I_j\big(x(\cdot)\big) = 0,\ j = k+1,\ldots, k+m\}.$$

Эта задача называется *п. п. задачей с ограничениями на средние значения типа равенств и неравенств*, в которой функция $\widehat{x}(\cdot)$ называется решением *в слабом смысле*, если найдется такое $\gamma > 0$, что $I_0\big(\widehat{x}(\cdot)\big) \leqslant I_0\big(x(\cdot)\big)$ для всякой функции $x(\cdot) \in D$, удовлетворяющей неравенству $\|\widehat{x} - x\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma$.

Теорема 0.4. *Пусть отображения* $L_j : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, k+m$, *удовлетворяют условиям, аналогичным условиям* 1), 2) *для лагранжиана* L, *и функция* $\widehat{x}(\cdot) \in D$ *является решением в слабом смысле задачи* (0.5). *Тогда найдутся такие числа*
$\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_{k+m}$, *не равные нулю одновременно, что будут выполнены соотношения:* $\widehat{\lambda}_j \geqslant 0$, $\quad \widehat{\lambda}_j I_j\big(\widehat{x}(\cdot)\big) = 0$, $j = 1, \ldots, k$. *Кроме того, если п. п. по Степанову функции* $t \mapsto \widehat{L}'_{jx}(t) \doteq L'_{jx}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$,

$t \mapsto \widehat{L}'_{ju}(t) \doteq L'_{ju}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$ *ограничены на* $\mathbb{R}$ *в существенном, то функция* $t \mapsto \sum\limits_{j=0}^{k+m} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}'_{ju}(t)$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{B}\big(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n*}\big)$, *и при почти всех* $t \in \mathbb{R}$ *имеет место равенство:*

$$-\frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=0}^{k+m} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}'_{ju}(t)\Big) + \sum_{j=0}^{k+m} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}'_{jx}(t) = 0.$$

В параграфах 5-7 исследуется п. п. задача Больца. Для постановки этой задачи наряду с функцией $L : \mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию A), фиксируются константа $a > 0$, *п. п. последовательность* $\{t_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$, и отображение $(t,x) \mapsto g(t,x) \in \mathbb{R}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathcal{V}$, удовлетворяющее условиям:

I) в каждой точке $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathcal{V}$ существует $g'_x(t,x)$,

II) для всякого компактного множества V из области $\mathcal{V}$ функции $(t,x) \mapsto g(t,x)$ и $(t,x) \mapsto g'_x(t,x)$ принадлежат пространствам $B(\mathbb{R}\times V, \mathbb{R})$ и $B\big(\mathbb{R}\times V, \mathbb{R}^{n*}\big)$, соответственно.

В этом случае на множестве $\mathcal{B}$ определен непрерывно дифференцируемый (по Фреше) функционал

$$x(\cdot) \mapsto G\big(x(\cdot)\big) \doteq \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} g\big(t_m, x(ma)\big).$$

Сказанное выше позволяет рассмотреть задачу, которая называется *п. п. задачей Больца*

$$\mathbb{I}\big(x(\cdot)\big) \doteq I\big(x(\cdot)\big) + G\big(x(\cdot)\big) \to \inf, \quad x(\cdot) \in \mathcal{B}, \tag{0.6}$$

и функция $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ называется (локальным) *решением в слабом* (*сильном*) *смысле*, если найдется такое $\gamma > 0$, что $\mathbb{I}\big(\widehat{x}(\cdot)\big) \leqslant \mathbb{I}\big(x(\cdot)\big)$ для всякой функции $x(\cdot) \in \mathcal{B}$, удовлетворяющей неравенству $\|\widehat{x} - x\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma$ (соответственно $\|\widehat{x} - x\|_B \leqslant \gamma$).

Основным утверждением параграфа 5 является следующая

Теорема 0.5. *Пусть отображения* $L : \mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и* $g : \mathbb{R}\times\mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *удовлетворяют условиям* 1), 2) *и* I), II), *соответственно, и функция* $\widehat{x}$ *из множества* $\mathcal{B}$ *является решением в слабом смысле задачи* (0.6). *Тогда, если функция* $t \mapsto \widehat{p}(t) \doteq \int\limits_0^t \widehat{L}'_x(s)\, ds$, $t \in \mathbb{R}$, *п. п. по Бору, то* а) *отображение* $\widehat{L}'_u$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{B}\big(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n*}\big)$;

б) $\widehat{x}(t)$ *при почти всех* $t\in\mathbb{R}$ *удовлетворяет системе уравнений* (0.4)*;*

в) *имеет место равенство* $\lim\limits_{q\to\infty}\dfrac{1}{q}\sum\limits_{m=0}^{q-1}g'_x\big(t_m,\widehat{x}(ma)\big)=0.$

В шестом параграфе приведены необходимые условия решения в сильном смысле задачи (0.6). Для получения этих условий введены в рассмотрение п. п. иголки Вейерштрасса, которые определяются следующим образом. С фиксированной точкой $\theta\in(0,a)$ связывается множество $\Lambda\doteq\{\lambda>0\ :\ \vartheta+\varepsilon<a\}$, где $\varepsilon=\varepsilon(\lambda)\doteq\lambda+\sqrt{\lambda}$, и по заданной п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{R}^n$ строится функция $x(\cdot,\lambda)\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\quad(\lambda\in\Lambda)$, определенная на каждом полуинтервале $[ma,(m+1)a),\quad m\in\mathbb{Z}$ равенством

$$x(t,\lambda)\doteq\begin{cases}0,\ t\in\big[ma,(m+1)a\big)\setminus[ma+\vartheta,ma+\vartheta+\varepsilon),\\(t-ma-\vartheta)\,v_m,\ t\in[ma+\vartheta,ma+\vartheta+\lambda),\\\lambda v_m-\sqrt{\lambda}(t-ma-\vartheta-\lambda)v_m,\ t\in[ma+\vartheta+\lambda,ma+\vartheta+\varepsilon),\end{cases}$$

Показано, что множество функций $\{x(\,\cdot\,,\lambda),\ \lambda\in\Lambda\}$, которое названо семейством *п. п. иголок Вейерштрасса*, принадлежит пространству $\mathfrak{B}$, ограничено по норме $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$, и является равностепенно почти периодичным.

В дальнейшем

$$\mathcal{E}(t,x,u,v)\doteq L(t,x,v)-L(t,x,u)-(v-u)\cdot L'_u(t,x,u)$$

функция Вейерштрасса отображения $z\mapsto L(t,x,z)$.

Лемма 0.1. *Пусть отображение* $L:\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *помимо условий* 1), 2) *удовлетворяет условию:*

3) *для любых компактных множеств* V *из* $\mathcal{V}$ *и* U *из* $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{\gamma\downarrow0}(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\omega_\gamma[L'_u(t,\cdot,\cdot),V\times U])=0.$$

Тогда, если функция $\widehat{x}(\cdot)\in\mathcal{B}$ *при почти всех* $t\in\mathbb{R}$ *удовлетворяет уравнению* (0.4), *то для каждого компакта* $U\doteq\overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}})+O_N[0]$, $N\in\mathbb{N}$, *найдутся последовательности* $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$, $\lim\limits_{l\to\infty}q_l=\infty$, $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}\subset(0,a)$, $\lim\limits_{j\to\infty}\eta_j=0$, *и измеримое множество* $\Xi\subset[0,a]$, $\operatorname{mes}\Xi=a$, *что в каждой точке* $\vartheta\in\Xi$ *и для любой фиксированной* *п. п. последовательности* $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset O_N[0]$ *будет иметь место предельное равенство*

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\eta_j}\bigl(\mathbb{I}\bigl(\widehat{x}(\cdot)+x(\cdot,\eta_j)\bigr)-\mathbb{I}\bigl(\widehat{x}(\cdot)\bigr)\bigr)=$$

$$=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\mathcal{E}(ma+\vartheta,\widehat{x}_{ma}(\vartheta),\dot{\widehat{x}}_{ma}(\vartheta),\dot{\widehat{x}}_{ma}(\vartheta)+v_m).$$

Лемма 0.1 используется при доказательстве следующего утверждения.

Теорема 0.6. *Пусть функции* $L:\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *и* $g:\mathbb{R}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ *удовлетворяют условиям* 1)–3) *и* I), II), *соответственно, и функция* $\widehat{x}$ *из множества* $\mathcal{B}$ *является решением задачи* (0.6). *Тогда*

а) *если функция* $t\mapsto\widehat{p}(t)\doteq\int\limits_0^t\widehat{L}'_x(s)\,ds\in\mathbb{R}^{n*}$, $t\in\mathbb{R}$, *п. п. по Бору, то для каждой функции* $u(\cdot)$ *из* S_∞ *выполнено неравенство*

$$M\{\mathcal{E}\bigl(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t),\dot{\widehat{x}}(t)+u(t)\bigr)\}\geqslant 0, \tag{0.7}$$

б) *если функция* L *удовлетворяет также условию: для любой ограниченной области* $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$, *содержащей* $\overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}})$, $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} l(t)<\infty$, *где* $l(t)\doteq\max\limits_{u\in U}|L'_u(t,\widehat{x}(t),u)|$, $\quad U\doteq\overline{\mathcal{U}}$, *то неравенство* (0.7) *выполнено в том и только том случае, если при почти всех* $t\in\mathbb{R}$ *и каждом* $v\in\mathbb{R}^n$ $\mathcal{E}(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t),\dot{\widehat{x}}(t)+v)\geqslant 0$.

В седьмом параграфе доказано, что если функция $\widehat{x}(\cdot)\in\mathcal{B}$ является решением в сильном смысле задачи (0.6), то при почти всех $t\in\mathbb{R}$ и всяком $v\in\mathbb{R}^n$ верно неравенство $v^*L''_{uu}\bigl(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\bigr)\,v\geqslant 0$. Из этого утверждения следует результат Blot J.: если функция $\widehat{x}$ является решением задачи $J\bigl(x(\cdot)\bigr)\to\inf$, $\quad x(\cdot)\in B^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ в слабом смысле, то для всех $t\in\mathbb{R}$ и всяком $v\in\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $v^*L''_{uu}\bigl(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\bigr)\,v\geqslant 0$.

В восьмом параграфе приведены необходимые и достаточные условия неотрицательности среднего значения п. п. квадратичной формы. Фиксируем отображения $P,Q,R\in S_\infty\bigl(\mathbb{R},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)\bigr)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) для почти всех $t\in\mathbb{R}$ $\quad P(t)=P^*(t)$, $R(t)=R^*(t)$;

2) $v^*P(t)v > 0$ для всех отличных от нуля $v \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $t \in \mathbb{R}$.

Указанным отображениям P, Q, R ставится в соответствие оператор $\mathbb{K} : \mathfrak{B} \to S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, определенный равенством:

$$\mathbb{K}[x](t) \doteq \dot{x}(t)^* P(t)\dot{x}(t) + 2\dot{x}(t)^* Q(t)x(t) + x(t)^* R(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

и определяется функционал

$$x(\cdot) \mapsto \mathcal{K}\big(x(\cdot)\big) \doteq M\big\{\mathbb{K}[x](t)\big\}, \quad x(\cdot) \in \mathfrak{B},$$

который называется *неотрицательным*, если $\mathcal{K}\big(x(\cdot)\big) \geqslant 0$ для всех функций $x(\cdot)$, принадлежащих $\mathfrak{B}$.

Линейная (п. п. по Степанову) система дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\big(P(t)\dot{x} + Q^*(t)x\big) = Q(t)\dot{x} + R(t)x, \ x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R} \qquad (0.8)$$

является[6)] *системой без сопряженных точек на интервале* J, если каждое нетривиальное (не обязательно почти периодическое) решение не более одного раза обращается в нуль на этом интервале.

Теорема 0.7. *Для неотрицательности функционала* $\mathcal{K}$ *необходимо, чтобы система уравнений* (0.8) *не имела сопряженных точек на* $\mathbb{R}$, *и достаточно, чтобы эта система не имела сопряженных точек на интервале* $(0, +\infty)$.

Функционал $\mathcal{K}$ называется *строго положительным*, если найдется такая константа $\varkappa > 0$, что для всех $x(\cdot) \in \mathfrak{B}$ будет выполнено неравенство $\mathcal{K}\big(x(\cdot)\big) \geqslant \varkappa M\big\{|x(t)|^2 + |\dot{x}(t)|^2\big\}$. В девятом параграфе доказана следующая

Теорема 0.8. *Пусть функционал* $\mathcal{K}$ *строго положителен. Тогда система уравнений* (0.8) *не имеет ограниченных решений.*

Отметим далее, что системе уравнений (0.8) отвечает линейная система уравнений $\dot{z}(t) = F(t)z(t)$, в которой

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & -A^*(t) \end{pmatrix},$$

$$A(t) = P^{-1}(t)R(t), \quad B(t) = P^{-1}(t), \quad C(t) = Q(t) - R^*(t)P^{-1}(t)R(t).$$

---

6) *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.

Утверждение 0.1. *Если функционал $\mathcal{K}$ строго положителен, то система уравнений $\dot{z}(t) = F(t)z(t)$, отвечающая системе уравнений* (0.8)*, является экспоненциально дихотомичной* [7].

В десятом параграфе при рассмотрении условий строгой положительности квадратичной формы в одномерном случае функционал $\mathcal{K}$ записывается в виде

$$\mathcal{K}\bigl(x(\cdot)\bigr) = M\{p(t)\dot{x}^2(t) + 2q(t)\dot{x}(t)x(t) + r(t)x^2(t)\},$$

и предполагается, что функции p, q принадлежат пространству $\mathfrak{B}$, и $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} p(t) > 0$, а функция r принадлежит пространству S_∞.

На множестве $\mathfrak{B}^2 \doteq \bigl\{x \in B^1 : \ddot{x} \in S_\infty\bigr\}$ рассмотрим оператор $\mathbb{L} : \mathfrak{B}^2 \to S_\infty$, определенный равенством

$$\mathbb{L}[x](t) \doteq \ddot{x}(t) + \frac{\dot{p}(t)}{p(t)}\dot{x}(t) + \frac{\dot{q}(t) - r(t)}{p(t)}x(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теорема 0.9. *Функционал $\mathcal{K}$, определенный на множестве $\mathfrak{B}$, строго положителен тогда и только тогда, когда найдется функция $z \in \mathfrak{B}^2$, что $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} z(t) > 0$, и для почти всех $t \in \mathbb{R}$ $\mathbb{L}[z](t) \leqslant 0$, при этом $\mathbb{L}[z](t) \not\equiv 0$.*

В начале одиннадцатого параграфа указаны необходимые условия второго порядка решения в слабом смысле задачи (0.3), вытекающие, очевидно, из теоремы 0.7.

Теорема 0.10. *Пусть функция $\widehat{x} \in \mathcal{B}$ является решением задачи* (0.3) *в слабом смысле, и при почти всех $t \in \mathbb{R}$ и всяком $v \in \mathbb{R}^n$ $(v \neq 0)$ выполнено неравенство $v^*\widehat{L}''_{uu}(t)v > 0$. Тогда система дифференциальных уравнений* (0.8) *при $P(t) \doteq \widehat{L}''_{uu}(t)$, $Q(t) \doteq \widehat{L}''_{ux}(t)$, $R(t) \doteq \widehat{L}''_{xx}(t)$, не имеет сопряженных точек на $\mathbb{R}$.*

Приведен также пример, показывающий, что в отличие от достаточных условий решения в слабом смысле простейшей задачи вариационного исчисления с закрепленными концами, аналогичные по формулировке условия для экстремали $\widehat{x}$ не являются достаточными.

В заключение параграфа приведены достаточные условия решения задачи (0.3) в одномерном случае, вытекающие из теорем 0.3, 0.9 и 0.10.

---

[7] *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. — М. : Наука, 1970.— 351 с.

Теорема 0.11. *Пусть функция* $\widehat{x} \in \mathfrak{B}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

a) *для почти всех* $t \in \mathbb{R}$ *выполнено равенство* (0.4)*;*

b) $\widehat{L}''_{uu}, \widehat{L}''_{xu} \in \mathfrak{B}$ *и* $\inf\limits_{t \in \mathbb{R}} \widehat{L}''_{uu}(t) > 0$;

c) *найдется такая функция* $z \in \mathfrak{B}^2$, *что* $\inf\limits_{t \in \mathbb{R}} z(t) > 0$, *и для почти всех* $t \in \mathbb{R}$ *оператор* $\mathbb{L}$, *отвечающий функции Лагранжа задачи* (0.2), удовлетворяет неравенству $\mathbb{L}[z](t) \leqslant 0$ (при этом $\mathbb{L}[z](t) \not\equiv 0$).

Тогда $\widehat{x}$ *является решением задачи* (0.3) *в слабом смысле.*

Публикации по теме диссертации

1. *Воронецкая М. А., Иванов А. Г.* О необходимых условиях сильного минимума для простейшей задачи вариационного исчисления в классе почти периодических функций // Известия Института математики и информатики УдГУ. №2(13). — Ижевск: Изд-во УдГУ. — 1998. С. 59-70.

2. *Воронецкая М. А., Иванов А. Г.* О некоторых вариационных задачах в классе почти периодических функций // Деп. в ВИНИТИ 27.12.03, №1902-В2003. УдГУ, Ижевск, 2003. 32 с.

3. *Воронецкая М. А., Иванов А. Г.* Почти периодическая задача Больца. // Известия ВУЗов. 2005. № 7 (518) С.8-24.

4. *Воронецкая М. А.* О некоторых свойствах среднего значения почти периодической квадратичной формы. //Вестник Удмуртского университета. Серия Математика. Ижевск, 2005. С. 19-34.

5. *Воронецкая М. А.* О задачах вариационного исчисления в классе почти периодических функций. // Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Минск. — 2005. С. 96-97.

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

Подписано в печать . .2006. Формат 60x84/16.
Тираж 100 экз. Заказ №
Типография ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет».
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.