МИНОБРНАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное Государственное Бюджетное Образовательное
Учереждение Высшего Образования
"Ижевский Государственный Технический Университет
им. М. Т. Калашникова"
факультет "Математика и Естественные науки"
кафедра "Прикладная математика и информатика"

ИЦКОВ А.Г.

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ.

Теория множеств и комбинаторика.

Ижевск, 2018

УДК 519.7(075.8)
ББК 22.18я73
И962

Рецензент

В.И. Родионов, кандидат физико- математических наук, доцент, зав.кафедрой информатики и математики Удмуртского государственного университета

А.Г. Ицков

И962 Примеры и задачи по дискретной математике. Теория множеств и комбинаторика : учеб.-метод. пособие / А.Г.Ицков - Ижевск : Изд-во ИжГТУ имени М.Т.Калашникова, 2019. - 112 с.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для изучения основных разделов дискретной математики - теории множеств и комбинаторики. Предлагается большое число разобранных примеров и упражнений, а также задачи для самостоятельного решения. Материал сопровождается изложением основных теоретических сведений.

Пособие предназначено для студентов направления 01.03.04 - прикладная математика, но может использоваться и студентами других специальностей, изучающих дискретную математику, а также студентами заочной формы обучения и как пособие для самообразования.

УДК 519.7(075.8)

Содержание

Предисловие

Дискретная математика в настоящее время является частью вузовского математического образования для студентов практически всех технических специальностей. Это естественно, так как в компьютерную эпоху значение дискретных способов представления и переработки информации неуклонно возростает. Дискретная математика образует основу таких прикладных дисциплин как информатика и языки программирования, теория алгоритмов, теория формальных систем и тому подобное. В то же время разделы дискретной математики тесно связаны с классическими математическими науками – математическим анализом, алгеброй, теорией чисел и особенно с теорией вероятностей.

В настоящее пособие включены два базисных раздела дискретной математики – теория множеств и комбинаторика. Начальные сведения по этим разделам содержатся в школьной программе и, казалось бы, их изучение не должно вызывать трудностей у студентов. Практика, однако, показывает, что многие студенты 1-2 курсов испытывают большие сложности при формализации математичеких понятий и доказательств, использовании технических приемов и навыков комбинаторных рассуждений. Слушатели не раз высказывали желание иметь своего рода элементарное руководство по решению задач дискретной математики. Данное методическое пособие предназначено для этой цели.

Пособие содержит базовые теоретические сведения, термины и формулировки основных утверждений. В раздел "ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ"входят все основные темы: представление множеств, операции над множествами, свойства булевой алгебры множеств; теория бинарных отношений, в том числе отношений эквивалентности и порядка; мощность множеств, счетные множества и множества мощности континуум. Раздел "КОМБИНАТОРИКА"содержит основные перечислительные комбинаторные формулы, метод включений и исключений, бином Ньютона и его обобщение – полиномиальную формулу, а также сравнительно сложную тему – производящие функции для решения более трудных комбинаторных задач.

В каждом параграфе приводятся решения типовых упражнений и задач и даются задания для самостоятельной работы. Нумерация параграфов, формул и задач сквозная. Термины, впервые появляющиеся в тексте, выделены жирным шрифтом. Также выделяются особенно важные утверждения. Запись A$\Rightarrow$B означает "из A следует B". A$\Leftrightarrow$B – "A тогда и только тогда, когда B". Логические кванторы существования и всеобщности понимаются как: $\exists$x – существует x, $\forall$x – для всех x.

Пособие рекомендуется студентам младших курсов - слушателям лекций по дискретной математике и комбинаторному анализу для практических занятий и самостоятельной работы. Его также могут использовать преподаватели этих дисциплин.

Часть I

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Задание множеств. Операции над множествами.

Множество понимается как совокупность произвольных объектов, называемых **элементами**. Запись $a \in A$ означает: a есть элемент множества A, $\in$ **- символ принадлежности**. Противоположное утверждение $a \notin A$ - a не принадлежит A.

Стандартные обозначения для основных числовых множеств:

$\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел,

$\mathbb{Z}$ - множество целых чисел,

$\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел,

$\mathbb{J}$ - множество иррациональных чисел,

$\mathbb{R}$ - множество вещественных чисел,

$\mathbb{C}$ - множество комплексных чисел.

Определение 1. Множества A и B **равны** тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Определение 2. Множество A является **подмножеством** множества B (A включается в B) тогда и только тогда, когда каждый элемент из A является элементом B. Значок $\subseteq$ есть **символ включения** множеств:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Так, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{R}$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то пишут $A \subset B$: множество A **строго** включается в множество B. Например, предыдущие включения можно записать и так:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \ \mathbb{J} \subset \mathbb{R}.$$

Определение 3. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** множеством и обозначается $\varnothing$. Пустое множество **является подмножеством любого множества**.

Из определений 1 и 2 следует признак равенства множевств:

Теорема 1. А = В $\Leftrightarrow$ (А $\subseteq$ В и В $\subseteq$ А).

Упражнение 1. Доказать, что существует только одно пустое множество.

Решение. Предположим, что существует два пустых множества $\varnothing_1$ и $\varnothing_2$. Тогда $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ и $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$. По теореме 1 $\varnothing_1 = \varnothing_2$.

Задание множества

Первый способ: **перечисление**. Множество А, состоящее из элементов a_1, a_2, ..., a_n, записывается как А = { a_1, a_2, ..., a_n } (порядок элементов, как следует из определения 1, несущественен). Очевидно, что не любое множество можно задать таким образом (приведите примеры). Более универсальным является другой способ - через **определяющее свойство**.

Пусть запись $P(x)$ означает: объект x удовлетворяет свойству P. Тогда А = $\{x|P(x)\}$ есть множество всех элементов x, удовлетворяющих свойству P. Например, А = $\{x|x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ есть множество четных натуральных чисел: А = { 2, 4, 6, ... }.

Упражнение 2. Задать множество А = { 3, 6, 15, 9, 12 } с помощью определяющего свойства.

Решение. Общее свойство всех элементов из А - быть кратным 3. Поэтому А = $\{x|x = 3k, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 5\}$.

Определение 4. Множество $\mathcal{P}(A) = \{X|X \subseteq A\}$ называется **множеством всех подмножеств** множества А.

Упражнение 3. Записать $\mathcal{P}(A)$ для множества А = $\{a, b, c\}$.

Решение: $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Обозначим символом $|A|$ число элементов множества А.

Следующий результат очень важен.

Теорема 2. Если $|A| = n$, то $|\mathcal{P}(A)| = 2^n, n = 0, 1, 2, ...$

Упражнение 4. Доказать теорему 2.

Решение. Приведем доказательство методом математической индукции. При n=0 множество А пустое и, следовательно, $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$, то есть $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$. Пусть утверждение верно для произвольного множества A = $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ из n элементов.

Рассмотрим множество A' = $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$, полученного добавлением к A нового элемента a_{n+1}. Каждое из 2^n подмножеств A будет, очевидно, подмножеством A'. Ещё 2^n подмножеств A' образуются добавлением к каждому подмножеству A элемента a_{n+1}. Следовательно, всего будет $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ подмножеств множества A'. Теорема доказана.

Операции над множествами.

1. Объединение множеств.

Объединением A ∪ B множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих **хотя бы одному** из множеств A и B.

$$A \cup B = \{x | x \in A \textbf{ или } x \in B\}.$$

2. Пересечение множеств.

Пересечением A ∩ B множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих **обоим** множествам A и B.

$$A \cap B = \{x | x \in A \textbf{ и } x \in B\}.$$

3. Разность множеств.

Разностью A \ B множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

4. Симметрическая разность.

Симметрической разностью A Δ B множеств A и B называется обьединение обычных разностей A \ B и B \ A.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Нетрудно понять, что А Δ В можно определить как множество всех элементов, принадлежащих **только одному** из множеств А и В.

Для введения ещё одной операции над множествами потребуется следующее определение.

Определение 5. Множество $\mathcal{U}$, такое, что любое множество А является подмножеством $\mathcal{U}$, называется **универсальным множеством** или **универсумом**.

5. Дополнение множества.

Дополнением $\bar{A}$ множества А называется множество всех элементов из универсума, **не принадлежащих** множеству А.

$$\bar{A} = U \setminus A = \{x | x \notin A\}.$$

Операции 1-5 выполнимы для любых множеств из универсума $\mathcal{U}$ и результат операции также включается в $\mathcal{U}$. Операции 1-4 выполняются над двумя множествами и потому называются **бинарными операциями**, операция 5 выполняется над одним множеством и является **унарной операцией**.

Упражнение 5. Пусть А - множество натуральных чисел, делящихся на 3. Считая универсумом множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, определить $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B, \bar{A}, \bar{B}$.

Решение. $A \cup B = \{x | x \in A$ или $x \in B\} = \{x | x \vdots 2$ или $x \vdots 3, x \in \mathbb{N}\}$ - множество чисел, делящихся либо на 2, либо на 3. Нетрудно понять, что в $A \cup B$ попадают все четные числа, а также все нечетные, кратные 3.

$A \cap B = \{x | x \in A$ и $x \in B\} = \{x | x \vdots 2$ и $x \vdots 3, x \in \mathbb{N}\}$. Однако, если число одновременно кратно 2 и 3, то оно кратно 6 (так как 2 и 3 - взаимнопростые числа). Поэтому $A \cap B = \{x | x \vdots 6, x \in \mathbb{N}\}$.

$A \setminus B = \{x | x \in A$ и $x \notin B\} = \{x | x \vdots 2$ и $x \not\vdots 3, x \in \mathbb{N}\}$ - множество четных числе, не делящихся на 3. Можно перечислить первые элементы $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, ...\}$.

$B \setminus A = \{x | x \in B$ и $x \notin A\} = \{x | x \vdots 3$ и $x \not\vdots 2, x \in \mathbb{N}\}$ - множество нечетных числе, кратных 3. $B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, ...\} = \{x | x = 3 + 6k, k = 0, 1, 2, ...\}$.

$A\Delta B = \{x | x \in A \setminus B$ или $x \in B \setminus A\}$ - множество натуральный чисел, кратных 2, но не кратных 3 либо кратных 3, но не кратных 2.

$\bar{A} = \{x | x \notin A\} = \{x | x \not\vdots 2, x \in \mathbb{N}\}$ - множество нечетных натуральных чисел. Можно записать $\bar{A} = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}$.

$\bar{B} = \{x | x \notin B\} = \{x | x \not\vdots 3, x \in \mathbb{N}\}$ - множество натуральных чисел, не кратных 3. Можно записать $\bar{B} = \{x | x = 3k - 1$ или $x = 3k - 2, k \in \mathbb{N}\}$.

Упражнение 6. При каких необходимых и достаточных условиях выполняются следующие равенства:

а) $A \cup B = \varnothing$
б) $A \cap B = \mathcal{U}$
в) $A \setminus B = \varnothing$
г) $A\Delta B = \varnothing$
д) $A \cup B = A$
е) $A \cup B = \bar{A}$
ж) $A \cup B = A \cap B$
з) $A \cap B = A$
и) $A \cap B = \bar{A}$

Решение: а) Из опредления операции объединения следует, что $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$. Поскольку $A \cup B = \varnothing$, то $A \subseteq \varnothing$ и $B \subseteq \varnothing$. Но единственным подмножеством пустого множества является оно само. Отсюда $A = B = \varnothing$, то $A \cup B = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

б) Из определения операции пересечения следует, что $A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$. Поскольку $A \cap B = \mathcal{U}$, то $\mathcal{U} \subseteq A$ и $\mathcal{U} \subseteq B$. Но любые множества A и B являются подмножествами универсума, то есть $A \subseteq \mathcal{U}$ и $B \subseteq \mathcal{U}$. Это влечет $A = B = \mathcal{U}$.

в) $A \setminus B = \varnothing$ означает, что не существует элемента A, не принадлежащего B. Другими словами $x \in A$ влечет $x \in B$, то есть $A \subseteq B$.

г) $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing$. По пункту а) следует, что $A \setminus B = B \setminus A = \varnothing$. По пункту в) это влечет $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то есть $A = B$.

д) Как уже отмечалось в пункте а) для любых множеств A и B $b \subseteq A \cup B$. Тогда из условия $A \cup B = A$ следует, что $B \subseteq A$.

е) Так как $A \subseteq A \cup B$, то из условия следует, что $A \subseteq \bar{A}$, что возможно только при $A = \varnothing$. Тогда $A \cup B = \varnothing \cup B = B = \varnothing = \mathcal{U}$. Итак, $A = \varnothing, B = \mathcal{U}$.

ж) $A \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq B$. Аналогично, $B \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq A$. Значит, $A = B$.

з) $A \cap B \subseteq B$, следовательно, $A \subseteq B$.

и) $A \cap B \subseteq A$, тогда из условия следует, что $\bar{A} = A$, что возможно только при $\bar{A} = \varnothing$, то есть $A = \mathcal{U}$. Тогда $A \cap B = \mathcal{U} \cap B = B = \bar{A} = \bar{\mathcal{U}} = \varnothing$. Итак, $A = \mathcal{U}, B = \varnothing$

Упражнение 7. Существуют ли такие множества A, B, C, что

$$\begin{cases} A \cap B \neq \varnothing, \\ A \cap C = \varnothing, \\ (A \cap B) \backslash C = \varnothing? \end{cases}$$

Решение. Предположим, что множества существуют. Из первого условия следует, что существует элемент x, такой, что $x \in A \cap B$, и, значит $x \in A$. Из второго условия $x \notin C$. Но тогда $x \in (A \cap B) \backslash C$, то есть $(A \cap B) \backslash C \neq \varnothing$. Противоречие.

Диаграммы Эйлера-Венна

Простым и наглядным способом иллюстраций действий над множествами являются **диаграммы Эйлера-Венна** (или **круги Эйлера**). Универсальное множество изображается прямоугольником на плоскости, а рассматриваемые множества - кругами внутри прямоугольника. Так, для операций 1-5 диаграммы выглядят следующим образом:

Например, диаграмма для симметрической разности рис. 1(г) показывает, что $A \Delta B$ можно записать как $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Упражнения 8. Изобразить на диаграмме Эйлера-Венна множества: а) $A \Delta (B \Delta C)$; б) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{C})$

Решение:

Упражнение 9. Записать заштрихованное множество:

Решение: Можно записать несколькими способами, например: $((A \backslash C) \cup (B \backslash C)) \backslash (A \cap B)$ или $((A \cup B) \backslash C) \backslash (A \cap B)$ или $(A \Delta B) \backslash C$

Булева алгебра множеств.

Математическую структуру, состоящую из всех подмножеств универсума, то есть множества $\mathcal{P}(U)$, вместе с введенными опе-

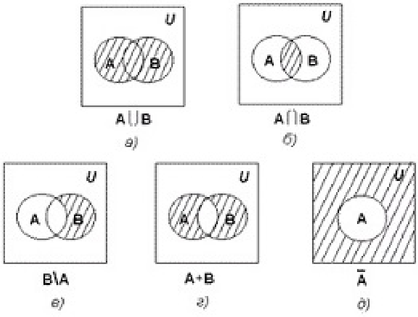


Рис. 1:

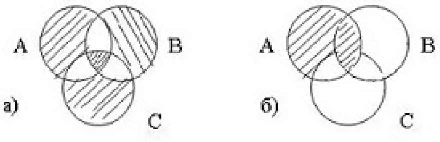


Рис. 2:

рациями, называют **булевой алгеброй множеств** $\mathcal{B}$. Можно записать обозначение (сигнатуру) так:

$$\mathcal{B} =< \mathcal{P}(U); \cup, \cap, \bar{\ } >$$

Операции разность и симметрическая разность не включаются, так как они выражаются через три оставленные операции: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, отсюда $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$.

Законы булевой алгебры множеств.

1. $A \cup B = B \cup A$ 1’. $A \cap B = B \cap A$

(законы **коммутативности**)

2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
2’. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(законы **ассоциативности**)

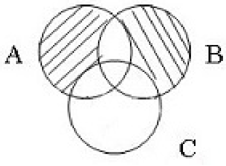


Рис. 3:

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3'. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(законы **дистрибутивности**)

4. $A \cup A = A$
4'. $A \cap A = A$

(законы **идемпотентности**)

5. $\bar{\bar{A}} = A$ (закон **дополнения дополнения**)
6. $A \bar{\cup} B = \bar{A} \cap \bar{B}$
6'. $A \bar{\cap} B = \bar{A} \cup \bar{B}$

(законы де Моргана)

7. $A \cup \varnothing = A$
7'. $A \cap \varnothing = \varnothing$
8. $A \cup \bar{A} = \mathcal{U}$
8'. $A \cap \bar{A} = \varnothing$
9. $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
9'. $A \cap \mathcal{U} = A$
10. $\bar{\varnothing} = \mathcal{U}$
10'. $A \cap \bar{\mathcal{U}} = \varnothing$

Эти законы показывают, что булева алгебра множества есть коммутативная и ассоциативная алгебра без коэффицентов и степеней, в котором пустое множество является "нулем а универсальное мнодество - "единицей".

Упражнение 10. Доказать **закон поглощения**:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

Решение: Запишем $A \cup (A \cap B)$ как $(A \cap \mathcal{U}) \cup (A \cap B)$ (по свойству 9'), далее, по правилу дистрибутивности 3' $A \cap (\mathcal{U} \cup B)$, выражение в скобках по правилу 9 равно $\mathcal{U}$, наконец, $A \cap \mathcal{U} = A$ по правилу 9'. Все это можно записать в виде цепочки простых алгебраических преобразований, как в школьной алгебре:

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap \mathcal{U}) \cup (A \cap B) = A \cap (\mathcal{U} \cup B) = A \cap \mathcal{U} = A$$

Доказательства равенства множеств.

Существует несколько способов проверить выполнение равенства $A = B$.

1. Сравнить диаграммы Эйлера-Венна для множеств А и В.

С формальной точки зрения этот способ нельзя считать строгим, скорее он позволяет быстро сделать предположение об истинности или ложности проверяемого утверждения.

2. Использование таблиц истинности.

Из курса математики логики известно, что операциям $\cup$, $\cap$, $^{-}$ взаимно-однозначно соответствуют логические операции $\vee$ (дизъюнкция), $\cdot$ (конъюнкция), $^{-}$(отрицание) **булевых переменных**, принимающих значения 0,1. Формуле, записанной на языке теории множеств соответствует **булева функция** на языке высказываний. В случае выполнения равенства $A = B$ таблицы истинности для функции, представляющих множества А и В, должны тождественно совпадать. Недостатком этого метода можно считать то, что в ряде случаев он требует излишне много вычислителных процедур.

3. Приведение одной из частей доказываемого равенства к другой части с помощью законов булевой алгебры множеств, как показано в упраждении 8, или приведение обеих частей к одинаковому виду

4. Аналитическое доказательство.

Наиболее простым и коротким методом можно считать способ, основанный на определении 1 равенства множеств: нужно проверить, что произвольный элемент одного множества является элементов другого и обратно.

Упражнение 11. Доказать: $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$.

Решение: Приведем все описанные выше способы доказательства.

1.Построим диаграмму Эйлера-Венна для множества $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$

Результат, очевидно, совпадает с $A \cap B$.

2. Составим булеву функцию, соответствующим формулам $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$ и $A \cap B$.

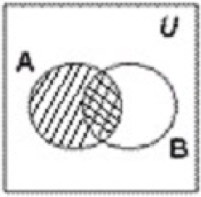
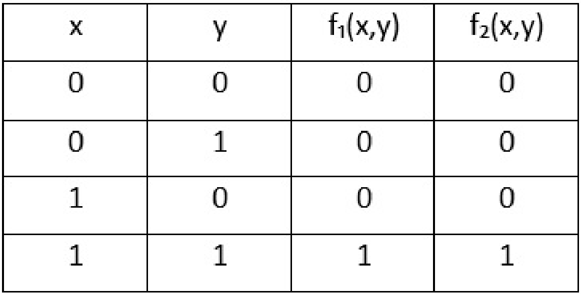


Рис. 4:

Для того, чтобы получить булеву функцию, соответствующую левой части, запишим $A\backslash(A\backslash B) = A\backslash(A\cap B) = A\cap A\bar{\cap}\bar{B}$. Тогда $f_1(x,y) = x\cdot\overline{xy}$. Для правого множества функция очевидна: $f_2(x,y) = xy$.

Строим таблицу истинности для $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$.



x	y	$f_1(x,y)$	$f_2(x,y)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Рис. 5:

Значение функции в каждой строчке совпадают, и равенство доказано.

3. Метод преобразований

Фактически, начальное преобразование уже испольщовано в предыдущем пункте:

$A\backslash(A\backslash B) = A\backslash(A\cap B) = A\cap A\bar{\cap}\bar{B} = A\cap(\bar{A}\cup\bar{\bar{B}}$ (по закону де Моргана) $= A\cap(\bar{A}\cup B)$ (по закону дополнения дополнения) $= (A\cap\bar{A})\cup(A\cap B)$ (по закону дистрибутивности) $= \varnothing\, cup(A\cap B) = A\cap B$.

4. Аналитическое доказательство.

Пусть $x \in A \backslash (A \backslash B) \Rightarrow x \in A, x \notin (A \backslash B) \Rightarrow x \in A, x \notin A$ или $x \in B \Rightarrow x \in A$ и $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$. Доказательство в обратную сторону аналогично.

Упражнение 12. Доказать закон де Моргана $A \bar{\cup} B = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Решение: Ограничимся только аналитическим доказательством.

$x \in A \bar{\cup} B \Rightarrow x \notin A \bar{\cup} B \Rightarrow x \notin A, x \notin B \Rightarrow x \in \bar{A}, x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. Обратная цепочка очевидна.

Упражнение 13. а) Доказать, что $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;

б) Верно ли утверждеие $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Решение: а) Поскольку речь идет о множестве из **множеств**, логично обозначить элемент как X

$X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Rightarrow X \subseteq A \cap B \Rightarrow X \subseteq A, X \subseteq B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A), X \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap \mathcal{P}(B)$. Обратное очевидно.

б) Впечатление, что достаточно теперь поменять $\cap$ на $\cup$ и в выводе связку **И** на связку **ИЛИ**, и как следствие, что утверждение б) верно, является ошибочным.

Действительно,

$X \in \mathcal{P}(A \cup B) \Rightarrow X \subseteq A \cup B$. Но из этого **не следует**, что $X \subseteq A$ или $X \subseteq B$, например как на следующей диаграмме

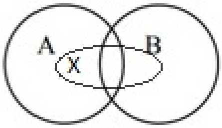


Рис. 6:

Видно, что $X \nsubseteq A$ и $X \nsubseteq B$. Утверждение б) не является верным.

Обобщенные операции

Пусть произвольное множество I используется в качестве множества индексов. **Обощенное объединение** по множеству I определяется как

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | \exists i \in I, x \in A_i\}$$

В частности, если $I = \{1, 2, ..., n\}$, то

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x | \exists i, 1 \leq i \leq n, x \in A_i\}$$

Если $I = N = \{1, 2, ..., n, ...\}$

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ... = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x | \exists i, i \in \mathbb{N}, x \in A_i\}$$

Аналогично определяется обобщенное пересечение:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | \forall i \in I, x \in A_i\};$$

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x | \forall i, 1 \leq i \leq n, x \in A_i\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \cap ... = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x | \forall i, i \in \mathbb{N}, x \in A_i\}$$

Упражнение 18. Доказать обобщенное правило де Моргана:

$$\bar{\bigcup_{i \in I}} A_i = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$$

Решение:

$$x \in \bar{\bigcup_{i \in I}} A_i \Rightarrow x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \forall i \in I x \notin A_i \Rightarrow \forall i \in I x \in \bar{A}_i \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$$

В обратную сторону аналогично.

ЗАДАЧИ

1. Записать множества действительных решений уравнений: а)$x^2-1=0$; б)$x^2+1=0$; в)$x^3-1=0$; г)$x^3-x=0$; д)$x^2+4x+4=0$.

2. Сколько элементов в множествах: а)$\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$; б)$\{\varnothing\}$; в) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$?

3. Равны ли множества$A=\{a,b,\{c,d\}\}, B=\{a,b,c,d\}, C=\{a,\{b,c\},d\}$ если a=b=c=d?

4. Записать множества, используя подходящее свойство:

а){ 3, 6, 15, 9, 12, 18, 24, 21};

б){1, 4, 9, 16, 25, 36, 49};

в){2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, . . .}

г){1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, . . . }

5. Задать свойством множество: а) всех четных; б) всех нечетных функций, определенных на $\mathbb{R}$.

6. Пусть $A=\{1,2\}, B=\{\{1,2,3\},\{1,3\},1,2\}$. Верно ли что а) $A\in B$; б) $A\subseteq B$?

7. Составить $\mathcal{P}(A)$ для а) A =a, b, c; б) A = a; b, c; d.

8. Найти объединение и пересечение множеств решений уравнений $x^2-1=0$ и $2x^2-3x=5$

9. Пусть $A\subseteq B, a\in A$. Какие из утверждений верны: а)$a\notin B$; б)$a\in A\backslash B$; в)$a\in B$; г)$a\in A\Delta B$; д)$A\in B$; е)$A\subseteq A$; ж)$a\in A\cup B$; з)$\{a\}\subseteq A$.

10. Определите: а)$\varnothing\cap\varnothing$; б)$\{\varnothing\}\cap\{\varnothing\}$; в)$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\backslash\varnothing$; г)$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\backslash\{\varnothing\}$; д)$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\backslash\{\{\varnothing\}\}$.

11. Доказать равенство: а)$A\cup B=A\cup(B\backslash A)$; б)$A\cap(B\backslash A)=\varnothing$; в)$A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash C=(A\cap B\cap C)\Delta(A\cap B)$; г)$A\cup(\bar{A}\cap B)=A\Delta(\bar{A}\cap B)=B\Delta(A\cap\bar{B})$; д)$A\bar{\Delta}B=(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap\bar{B})$.

12. Доказать второй закон поглощения $A\cap(A\cup B)=A$ (ср. с упр. 8).

13. Доказать равенство: а)$A\backslash B=A\Delta(A\cap B)$; б)$A\bar{\Delta}B=\bar{A}\Delta B=A\Delta B\Delta\mathcal{U}$.

14. Какие из следующих законов дистрибутивности справедливы:

а)$A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$; б)$A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$; в)$A\Delta(B\cup C)=(A\Delta B)\cup(A\Delta C)$; г)$A\backslash(B\Delta C)=(A\backslash B)\Delta(A\backslash C)$; д)$A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap C)$; е) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$?

15. Доказать, что:

а)$A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ и $B \subseteq C$; б)$A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $A \subseteq C$; в)$A \backslash B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$; г)$A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap \bar{B} \subseteq C$; д)$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$; е) $A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$; ж)$A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \varnothing$

16.Упростить выражения, используя законы булевой алгебры множеств:

а)$A \cap (A \cup \mathcal{U}) \cap (B \cup \varnothing)$; б)$(A \cap B) \cup ((A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B))$; в)$A \cup (B\ capA \bar{\cap} B)$; г)$(\bar{A} \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup B \cup C$.

17. Доказать обобщенные законы будевой алгебры множеств:

а)$\bigcup_{k \in K} \bigcup_{t \in T} A_{kt} = \bigcup_{t \in T} \bigcup_{k \in K} A_{kt}$; б)$\bigcup_{k \in K} A_k \cup \bigcup_{k \in K} B_k = \bigcup_{k \in K} (A_k \cup B_k)$; в)$\bigcup_{k \in K} (B \cap A_k) = B \cap (\bigcup_{k \in K} A_k)$.

18. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

где A,B,C - данные множества и $B \subseteq A \subseteq C$.

19. При каких условиях существует решение уравнения $X \cup A = B$?

20. Доказать, что $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

2. Бинарные отношения.

Определение 6. Декартовым или **прямым произведением** множеств А и В называется множество всех **упорядоченных пар** (x, y) элементов А и В, где $x \in A, y \in B$. Декартово произведение обозначается $A \times B$. Итак,

$$A \times B = \{(x,y)|x \in A, y \in B\}$$

Если $A = B$, то $A \times A$ называется **декартовым квадратом (прямым)** множества А:

$$A^2 = A \times A = \{(x,y)|x, y \in A\}$$

Например, если $A = \mathbb{R}$, то $\mathbb{R}^2$ - числовая плоскость.

Декартово произведение множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ определяется как множество **упорядоченных наборов** $(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i \in A_i, i = 1, 2, ..., n/$

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)|x_i \in A_i, i = 1, 2, ..., n\}$$

Декартово произведение n одинаковых множеств А называется **n-ой декартовой (прямой) степенью** множества А и обозначается A^n:

$$A^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)|x_i \in A, i = 1, 2, ..., n\}$$

Например, если $A = \mathbb{R}$, то $\mathbb{R}^n$- n-мерное числовое пространство.

Упражнение 15. Дать геометрическую интерпретацию множеств: а)$[a;b] \times [c;d]$, где [a;b], [c;d] - отрезки действительной прямой; б)$[a;b] \times \mathbb{R}$.

Решение: а) По определению, $[a;b] \times [c;d] = \{(x,y)|x \in [a;b], y \in [c;d]\}$. Таким образом, x и y можно считать координатами точек плоскости, заполняющих прямоугольник.

б) Точки заполняют бесконечную полосу.

Упражнение 16. Доказать, что $\bigcap_{i \in I} A_i \times \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I}(A_i \times B_i)$.

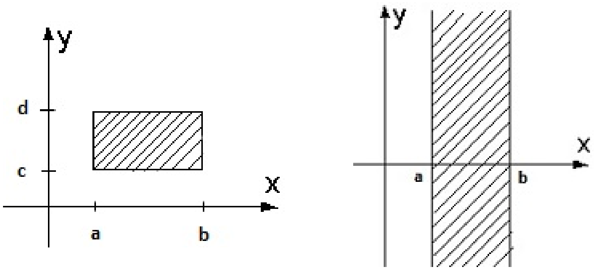


Рис. 7:

Решение: $(x,y) \in \bigcap_{i\in I} A_i \times \bigcap_{i\in I} B_i \Rightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i, y \in \bigcap_{i\in I} B_i \Rightarrow \forall i \in I x \in A_i, \forall i \in I y \in B_i \Rightarrow \forall i \in I x\ inA_i, y \in B_i \Rightarrow \forall i \in I(x,y) \in A_i \times B_i \Rightarrow (x,y) \in \bigcap_{i\in I}(A_i \times B_i)$. Обратное аналогично.

Бинарные отношения.

Определение 7. Бинарные отношения $mathcalp$ на множестве А, В называется подмножество декартово произведения множеств А и В:

$$\rho \subseteq A \times B.$$

В случаи $A = B$ отношение ρ считается заданным на множестве А:

$$\rho \subseteq A \times A = A^2$$

Если пара $(x,y) \in \rho$, где $x \in A, y \in B$, то говорят, что элемент x находится в отношении ρ с элементов у и записывается $x\rho y$. Таким образом, записи $(x,y) \in \rho$ и $x\rho y$ равнозначны.

Например, утверждение: пара чисел (3,4) находится в отношении "меньше равнозначно более привычному 3<4; утверждение: (Миша, Маша) находятся в отношении "быть братом равнозначно более привычному - Миша -брат Маши. Понятно, что пара (Маша, Миша) не находится в данном отношении. Поскольку отношения являются множествами, над мини определены все операции для множеств: $\rho_1 \cup \rho_2, \rho_1 \cap \rho_2, \rho_1 \backslash \rho_2, \rho_1 \Delta \rho_2, \bar{\rho}$, где $\rho_1, \rho_2 \subseteq A \times B$. При этом, пустое отношение - множество, не содержащее ни одной пары, роль универсума исполняет множество всех пар, то есть декартово произведение $A \times B$.

Определение 8. 1) **Областью определения** $dom(\rho)$ отношения $\rho \subseteq A \times B$ называется множество всех первых элементов пар, входящих в ρ:

$$dom(\rho) = \{x \in A | \exists y \in B, (x, y) \in \rho\}$$

2) **Областью значений** $ring(\rho)$ отношения ρ называется множество всех ndnjhs[элементов пар, входящих в ρ:

$$ring(\rho) = \{y \in B | \exists x \in A, (x, y) \in \rho\}$$

3) **Обратным отношением** называется отношение, определенное на множествах B, A:

$$\rho^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in \rho\}, x \in A, y \in B.$$

4) Пусть $\rho_1 \subseteq A \times B, \rho_2 \subseteq B \times C$. **Произведением (композицией)** отношений ρ_1 и ρ_2 называется отношение $\rho_1 \circ \rho_2$, заданным на A, C:

$$\rho_1 \circ \rho_2 = \{(x, y) | \exists z, (x, z) \in \rho_1, (z, y) \in \rho_2\}, x \in A, z \in B, y \in C.$$

Упражнение 17. Для отношения $\rho = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, y = 2x\}$ найти $dom(\rho), ring(\rho), \rho^{-1}, \rho \circ \rho, \rho \circ \rho^{-1}, \rho^{-1} \circ \rho$.

Решение:

$$dom(\rho) = \{x | \exists y \in \mathbb{N}, y = 2x\} = \mathbb{N}$$
$$ring(\rho) = \{y | \exists x \in \mathbb{N}, y = 2x\} = \{2, 4, 6, ...\}$$
$$\rho^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in \rho\} = \{(x, y) | x = 2y, x, y \in \mathbb{N}\} = \{(x, y) | y = x/2, x, y \in \mathbb{N}\}$$
$$\rho \circ \rho = \{(x, y) | \exists z, (x, z) \in \rho, (z, y) \in \rho\} = \{(x, y) | \exists z \in \mathbb{N}, z = 2x, y = 2y\} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, y = 4x\}$$
$$\rho \circ \rho^{-1} = \{(x, y) | \exists z, (x, z) \in \rho, (z, y) \in \rho^{-1}\} = \{(x, y) | \exists z \in \mathbb{N}, z = 2x, z = 2y\} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, x = y$$
$$\rho^{-1} \circ \rho = \{(x, y) | \exists z, (x, z) \in \rho^{-1}, (z, y) \in \rho\} = \{(x, y) | \exists z \in \mathbb{N}, x = 2z, y = 2z\} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, x = y, \text{ х-четное}\} = \{(2, 2), (4, 4), ...\}$$

Упражнение 18. Доказать свойство бинарных отношений:

$$(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}.$$

Решение: Напомним, что отношение - это множества поэтому требуется доказать равенство двух множеств, как в предыдущей главе.

$(x, y) \in (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} \Rightarrow (y, x) \in \rho_1 \circ \rho_2 \Rightarrow \exists z, (y, z) \in \rho_1, (z, x) \in \rho_2 \Rightarrow \exists z, (z, y) \in \rho_1^{-1}, (x, z) \in \rho_2^{-1} \Rightarrow (x, y) \in \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$. Обратное включение доказывается аналогично.

Отношение эквивалентности.

Определение 9. Бинарные отношения $\rho \subseteq A^2$, заданное на множестве A, называется:

а) **рефлекторным**, если каждый элемент из A находится в данном отношении с собой:

$$\forall x \in A x\rho x;$$

б) **симметричным**, если

$$\forall x, y \in A x\rho y \Rightarrow y\rho x;$$

в) **транзитивным**, если

$$\forall x, y, z \in A x\rho y, y\rho z \Rightarrow x\rho z.$$

Отношение $\rho \subseteq A^2$ называется **отношением эквивалентности** на множестве A, если оно рефлекторно, симмитрично и транзитивно одновременно. Абстрактное отношение эквивалентности обозначается символом $\sim$. Запись $(A, \sim)$ обозначает множество A вместе с заданным на нем отношении эквивалентности.

Упражнение 19. Какие из следующих отношений является отношениями эквивалентности на соответствующих множествах:

а) отношение раверства$(=)$ на множестве $\mathbb{R}$;

б) отношение подобия $(\simeq)$ на множестве треугольников;

в) отношение параллельности прямых $(\|)$ на плоскости;

г) отношение перпендикулярности прямых $(\perp)$ на плоскости;

д) отношение "делиться без остатка"$(\vdots)$ на множестве $\mathbb{N}$;

е) отношение "находиться на одинаковом расстоянии от Москвы"на множестве городов?

Решение: а) является. Очевидно, $\forall x \in \mathbb{R} x = x; \forall x, y \in \mathbb{R} x = y \Rightarrow y = x; \forall x, y, z \in \mathbb{R} x = y, y = z \Rightarrow x = z$.

б) является.

в) Является. Каждая прямая l считается параллельной себе: $l \parallel l; l_1 \parallel l_2 \Rightarrow l_2 \parallel l_1; l_1 \parallel l_2 \Rightarrow l_2 \parallel l_3 \Rightarrow l_1 \parallel l_3$.

г) не является. Прямая l не перпендикулярна себе. Симметричность выполняется: $l_1 \perp l_2 \Rightarrow l_2 \perp l_1$; но транзитивность - нет: $l_1 \perp l_2, l_2 \perp l_3 \Rightarrow l_1 \parallel l_3$, а не $l_1 \perp l_3$.

д) не является. Рефлексивность выполнена: $\forall x \in \mathbb{N} x \vdots x$; но симметричность - нет: $x \vdots y \not\Rightarrow y \vdots x$. Транзитивность выполнена: $x \vdots y, y \vdots z \Rightarrow x \vdots z$.

е) является. Каждый город находится сам с собой на одинаковом расстоянии от Москвы; если города x и y находятся на одинаковом расстоянии от Москвы, то же самое для городов y и x; если города x и y находятся на одинаковом расстоянии от Москвы, города y и z находятся на одинаковом, а, значит, на том же расстоянии от Москвы, то x и z также находятся на одинаковом расстоянии от Москвы.

Определение 10. Пусть на множестве A задано отношение эквивалентности $\sim$, x - произвольный элемент из A. Множество всех элементов из A, эквивалентных x, называется **классом эквивалентности** с представителем x. Класс эквивалентности обозначается [x]:

$$[x] = \{y \in A | y \sim x\}$$

Множество, состоящее из всех классов эквивалентности, называется **фактор - множество** множества A по отношению эквивалентности. Фактор - множество обозначается $A/_\sim$:

$$A/_\sim = \{[x] | x \in A\}.$$

Нетрудно понять, что разные классы эквивалентности не пересекаются (докажите!) и образуют разбиение множества A.

Отношение, рассматриваемое ниже, исключительно важно для теории чисел и алгебры.

Определение 11. Пусть x,y - произвольные целые числа, m - натуральное, m>1. Числа x и y называются **сравнимыми по модулю m**, если $(x - y) \vdots m$. Это означает, что при делении на m числа x и y дают **одинаковые остатки**. Отношение сравнения записывается так:

$$x \equiv y(modm)$$

Например: 1≡4(mod 3). Также 1≡-2(mod 3)

Упражнение 20. Показать, что отношение сравнения есть отношение эквивалентности на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$, определить классы эквивалентности и фактор - множество.

Решение:$\forall x \in \mathbb{Z}; x \equiv x(modm)$, $x - x = 0 \equiv m$

$\forall x, y \in \mathbb{Z}; x \equiv x(modm)$, так как разности x-y и y-x отличаются только знаком.

$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}; x \equiv y(modm), y \equiv z(modm) \Rightarrow x \equiv z(modm)$, так как $x - z = (x - y) + (y - z)$ и сумма чисел, делящихся на m, сама делится на m. Таким образом, отношение сравнения есть отношение эквивалентности $\mathbb{Z}$.

Возьмем для примера m=3. Класс [0] с представителем 0 есть множество всех целых чисел, сравнимых с 0, то есть дающим при делении на 3 остаток 0. Следовательно, $[0] = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\} = \{x|x = 3n, n \in \mathbb{Z}\}$. Рассмотрим теперь класс [1] с представителем 1. В него, очевидно, попадут все целые числа, дающие при делении на 3 остаток 1, то есть $[1] = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\} = \{x|x = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$. Наконец, класс [2] будет состоять из целых чисел, дающих при делении на 3 остаток 2: $[2] = \{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...\} = \{x|x = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}\}$. Поскольку при делении на 3 возможны лишь остатки 0, 1, 2, то других классов эквивалетности не существует. Следовательно, фактор-множество $\mathbb{Z}_{\equiv(mod3)} = \{[0], [1], [2]\}$.

Нетрудно понять, что для произвольного натурального m>1 фактор- множество $\mathbb{Z}_{\equiv(modm)} = \{[0], [1], ..., [m-1]\}$. Оно называется **группой остатков (вычетов)** по mod m. Если m-простое число, то фактор -множество образует конечное **поле Галуа**. Как уже было сказано, эти понятия играют важную роль в различных теоретических, а также прикдадных (например, в теории кадирования) вопросах математики.

Отношение частичного порядка

Определение 12. Отношение$\rho \subseteq A^2$ называется **антисимметричным**, если $\forall x, y \in A; x\rho y, y\rho x \Rightarrow x = y$. Другими словами, если x и y - различные элементы из A, то $x \subset y$ и $y \subset x$ не могут одновременно находиться в отношении ρ.

Отношение ρ называется отношением (нестрогого) **частичного порядка** на множестве A, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Отношения порядка обозначается знаком $\leq$. Множество A с заданным на нем отношении $\leq$ называется **частично упорядоченным** множеством и обозначается $(A, \leq)$.

Примеры: 1) множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с обычным отношением $\leq$ между ними. Очевидно, выполняются свойства:

$\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x$ -рефлексивность;

$\forall x, y \in \mathbb{R}; x \leq y$ и $y \leq x \Rightarrow x = y$ - антисимметричность;

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}; x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ - транзитивность.

Таким образом, $(\mathbb{R}, \leq)$ -частично упорядоченное множество.

2) Совокупность всех подмножеств $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ универсум $\mathcal{U}$ с отношением включения $\subseteq$ между множествами. Проверим свойства:

$\forall A \subseteq \mathcal{U}; A \subseteq A$ - рефлексивность;

$\forall A, B \subseteq \mathcal{U}; A \subseteq B$ и $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ - антисимметричность;

$\forall A, B, C \subseteq \mathcal{U}; A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ - транзитивность.

Следовательно $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \subseteq)$ - частично упорядоченное множество. Отметим, что если в первом примере для **любых** вещественных чисел x и y выполняется $x \leq y$ или $y \leq x$, то есть любые числа сравнимы, то для отношения $\subseteq$ во втором примере очевидным образом существуют тождества A,B такие, что неверно как $A \subseteq B$, так и $B \subseteq A$, скажем, $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$. Следовательно, в произвольном частично упорядоченном множестве **не все объекты** обязаны быть сравнимыми относительно рассматриваемого порядка.

Упражнение 21. Какие изследующих отношений являются отношениями частичного порядка на соответствующих множествах:

а) отношение равенства $(=)$ на $\mathbb{R}$;

б) отношение подобия $(\simeq)$ на множестве треугольников;

в) отношение "делится без остатка"$(\vdots)$ на $\mathbb{N}$;

г) отношение $|\bar{a}| \leq |\bar{b}|$ на множестве векторов;

д) отношение $max_{[a;b]}f(x) \leq max_{[a;b]}g(x)$ на множестве функций, заданных на отрезке [a;b]?

е) отношение $\bar{a} \leq \bar{b} \Leftrightarrow x_i \leq y_i, i = 1, 2, ..., n$, где $\bar{a} = \{x_1, ..., x_n\}, \bar{b} = \{y_1, ..., y_n\}$ - n-мерные векторы с вещественными координатами?

Решение: а) является. Отношение равенства симметрично, рефлексивно и транзитивно (см. упр 19а). В то же время она антисимметрична, так как $x = y$ и $y = x \Rightarrow x = y$.

Этот пример показывает, что было бы ошибочно считать, что если отношение симметрично, то оно не может быть антисимметрично и наоборот.

б) не является. Отношение подобия рефлексивно и транзитивно (см. упр. 19б), но не является антисимметричным, так как подобные треугольники не обязаны быть равными.

в) является. Отношение $\vdots$ рефлексивно и транзитивно (см. упр. 19д). Выполнено и свойство антисимметричности: $x \vdots y$ и $y \vdots x \Rightarrow x = y$.

г) не является. $|\bar{a}| \leq |\bar{b}|$ и $|\bar{b}| \leq |\bar{a}|$ влекут $|\bar{a}| = |\bar{b}|$, но это не означает равенства векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

д) не является. Равенство максимумов функций не означает равенства самих функций.

е) является. Рефлексивность и транзитивность очевидна. Антисимметричность выполняется, так как $\bar{a} \leq \bar{b}$ и $\bar{b} \leq \bar{a} \Rightarrow x_i \leq y_i, i = 1, 2, ..., n \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$. При этом не все векторы из $\mathbb{R}^n$ оказывается сравнимыми. Так, $\bar{a} = (0, 1)$ и $\bar{b} = (0, 1)$ не находятся в данном отношении порядка.

Определение 13. Пусть $(A, \leq)$ - частично упорядоченное множество. Элемент $a \in A$ называется

а) **наименьшим**, если $\forall x \in Ax \leq a$;

б) **наибольшим**, если $\forall x \in Aa \leq x$;

в) **минимальным**, если не существует $x \in A$, такого, что $x < a$;

г) **максимальным**, если не существует $xinA$ такого, что $a < x$.

Здесь отношение x<y понимается как $x \leq y$ и $x \neq y$.

Упражнение 22. Пусть на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задано отношение частиного порядка $x \leq y \Leftrightarrow y \vdots x$ (см. упр. 21в). Определить наименьший, наибольший, минимальный, максимальный элементы.

Решение: Наименьшим элементом, очевидно, является 1, так как $1 \leq x$, для любого $x \in A$. Наибольшего элемента не существует, так как в А нет числа, которое делится на все остальные числа. Число 1 не являясь наименьшим, разумеется будет и минимальным. Максимальными элементами являются числа 3,4,5, так как для каждого из них нет большего (чисел, кратных им).

Определение 14. Пусть $(A, \leq)$ - частично упорядоченное множество. Порядок $\leq$ называется **линейным**, если $\forall x, y \in A$ выполнено $x \leq y$ или $y \leq x$. Другими словами, любые элементы из А сравнимы относительно данного порядка. Множество А в этом случае называют **линейно упорядоченными** или **цепью**.

Приммеры: множество $(\mathbb{R}, \leq)$ является линейно упорядоченным; множество $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \subseteq)$ не является линейно упорядоченным.

Упражнение 22. Отношение $\bar{a} \leq \bar{b} \Leftrightarrow x_i \leq y_i, i = 1, 2, ..., n,$, где $\bar{a} = (x_1, x_2, ..., x_n), \bar{b} = (y_1, y_2, .., y_n)$ - n-мерные векторы с вещественными координатами, не является линейным порядком (см. упр. 21е). Можно ли построить на $\mathbb{R}^n$ отношения линейного порядка?

Решение: Можно. Определим отношение: $\bar{a} \leq \bar{b} \Leftrightarrow x_1 < y_1$ или $(x_1 = y_1$ и $x_2 < y_2)$ или $(x_1 = y_1, x_2 = y_2$ и $x_3 < y_3)$ или . . . или $(x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_{n-1} = y_{n-1}$ и $x_n < y_n)$. Проверьте самостоятельно, что введенное отношение является отношением порядка, и любые векторы из $\mathbb{R}^n$ сравнимы между собой. Такой порядок называется **лексиграфическим** (почему?), и он часто используется для сравнения векторов, матриц и тому подобное.

Определение 15. Линейный порядок $\leq$ на множестве А называется **полным**, если в каждом непустом подмножестве А существует наименьший элемент. Множество $(A, \leq)$ в этом случае называется **вполне упорядоченным**.

Пример: 1) множество $(\mathbb{R}, \leq)$ не является вполне упорядоченным; 2) множество $(\mathbb{N}, \leq)$ является вполне упорядоченным.

Упражнение 23. Пусть ρ_1, ρ_2 - частичные порядки на множестве А.

1)Доказать, что $\rho_1 \cap \rho_2$ -частичный порядок на А.

2) Будет ли $\rho_1 \cap \rho_2$: а) линейным, если ρ_1, ρ_2 -линейны;

б) полным, если ρ_1, ρ_2 -полные.

Решение: 1) Заметим, что если $\rho_1 \cap \rho_2 = \varnothing$, то утверждение верно, так как пустое отношение автоматически удовлетворяет определению частичного порядка. Будем считать далее, что $\rho_1 \cap \rho_2 \neq \varnothing \forall x \in A(x,x) \in \rho_1$ и $(x,x) \in \rho_2 \Rightarrow \forall x(x,x) \in \rho_1 \cap \rho_2$ - рефлексивные. Пусть $(x,y) \in \rho_1 \cap \rho_2$ и $(y,x) \in \rho_1 \cap \rho_2$ для некоторых $x, y \in A$. Тогда (x,y) и $(y,x) \in \rho_1 \Rightarrow x = y$, значит, $\rho_1 \cap \rho_2$ -антисимметрично. Наконец, если $(x,y) \in \rho_1 \cap \rho_2$ и $(y,z) \in \rho_1 \cap \rho_2$, то $(x,y) \in \rho_1, (y,z) \in \rho_1$ и $(x,y) \in \rho_2, (y,z) \in \rho_2$, откуда $(x,z) \in \rho_1$ и $(x,z) \in \rho_2 \Rightarrow (x,z) \in \rho_1 \cap \rho_2$ - транзитивность. Доказано, что $\rho_1 \cap \rho_2$ - частичный порядок на А.

2а) Не обязатльно. Пусть x,y -различные элементы из А. Поскольку ρ_1, ρ_2 по условию линейные порядки, то x, y - сравнимы по каждому из этих отношений. Но может оказаться, что $(x,y) \in \rho_1$ и $(y,x) \in \rho_2$, следовательно, $(y,x) \notin \rho_1$ и $(x,y \notin \rho_2)$, то есть $(x,y) \notin \rho_1 \cap \rho_2$ и $(y,x) \notin \rho_1 \cap \rho_2$, значит, x и y не будут сравнимы по отношению $\rho_1 \cap \rho_2$.

2б) Не обязательно. в силу п.а)

Упражнение 24. Пусть $\leq$ - обычный порядок на множестве $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$. Найти $\leq \circ \geq$.

Решение: Отношение $\leq$ есть множество $\rho_1 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{N}_0, x \leq y\}$. Отношение $\geq$ есть множество $\rho_2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{N}_0, x \geq y\}$. По определению композиции отношение $\rho_1 \circ \rho_2 = \{(x,y)|\exists z, (x,z) \in \rho_1, (z,y) \in \rho_2, x,y,z \in \mathbb{N}_0\} = \{(x,y)|\exists z, x \leq z, z \geq y, x,y,z \in \mathbb{N}_0\}$. Для любых $x, y \in \mathbb{N}_0$, очевидно, такой элемент z найдется, например $z = max\{x,y\}$. Следовательно, $\rho_1 \circ \rho_2$ состоитиз всех пар $9x,y), x, y \in \mathbb{N}_0$, то есть $\rho_1 \circ \rho_2 = \mathbb{N}_0^2$.

Функции.

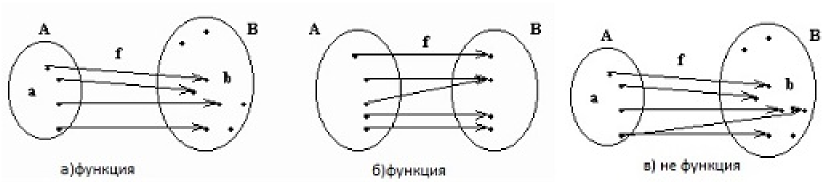
Определение 14. Функцией или **отображением** из множества X в множество Y называется бинарное отношение $f \subseteq X \times Y$ такое, что

$$(x,y_1) \in f, (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Это означает, что любой элемент $x \in X$ не может находится в отношении с двумя или более элементов из Y.

Запись $(x,y) \in f$ эквивалентна привычному обозначению $y = f(x)$.

Удобно также записывать $f : X \to Y$. Элементы $x \in X$ называют **аргументом** или **прообразом**, элементы $y \in Y$ - **значением** или **образом**.



а)функция

б)функция

в) не функция

Рис. 8:

Поскольку функция есть частный случай бинарного отношения на множествах X, Y, то для нее справедливы все понятия, связанные с отношениями (определение 8). Так, $dom(f)$ есть **область определения** функции; обычно считается, что $dom(f)$ совпадает с множеством X; $ring(f)$ - **область значений** фкнуции, $ring(f) \subseteq Y$. Если задано две функции: $f_1 : X \to Y$ и $f_2 : Y \to Z$, то $f_1 \circ f_2$ - **композиция (суперпозиция)** функции - это функцияя из X в Z. В математическом анализе принят термин "сложная функция"или функция от функции: $f_1 \circ f_2 = f_2(f_1(x))$ - обратите внимание на порядок.

Стоит подробнее рассмотреть понятие обратной функции. Напрашивающаяся мысль, что это есть обратное отношение, очевидно неверна. Обратное отношение $f^{-1} = \{(y, x), (x, y) \in f\} = \{(y, x)|y = f(x)\}$ существует для любого отношения f, но оно не обязано **являться функцией**, то есть удовлетворять определению 14. Например, на рисунке которого нет изображена функция, для которой двум различным аргументам моответствует одно значение и, следовательно, обратное отношение не является функцией.

Упражнение 25. Имеет ли функция $y = \sin x$ обратную?

Решение: Ответ зависит от того, как задается функция. Если понимать функцию $y = \sin x$ как отображение $f : \mathbb{R} \to [-1; 1]$, то, очевидно, она **не имеет** обратной функции, так как одному элементу $y \in [-1; 1]$ соответствует бесконечно много элементов x таких, что $y = \sin x$. Если же рассматривать ограничение функции, обычно на отрезке $[\frac{-}{\pi}/2; \pi/2]$, то есть $y = \sin x$ есть отображение $[-\pi/2; \pi/2] \to [-1; 1]$, то обратная функция существует и она называется $\arcsin : x = \arcsin$. По обычной математической практиве аргумент и значение обратной функции предпочитают обозначать x и y соответственно, тогда обратная функция есть $y = \arcsin x : [-1; 1] \to [pi/2; \pi/2]$.

Определение 15. Пусть $f : X \to Y$ - отображение из множества X в множество Y,такое, что : $dom(f) = X, ring(f) = Y$ и f^{-1} - обратная функция из Y в X. Отображение f называется **взаимно-однозначным отображением** из X в Y или **взаимно-однозначным соответствием** между множествами X и Y. Такое отображение обозначается $f : X \xrightarrow{1-1} Y$.

Часто используется и такая терминалогия: отображение $f : X \to Y$ являющееся взаимно-однозначным соответствием между X и $Y' \subseteq Y$, называется **инъективным** или **инъекцией**; отображение $f : X \to Y$, для которого $ring(f) = Y$, называется отображением "на"или **сюзъекцией**. Отображение $f : X \xrightarrow{1-1} Y$ является одновременно инъекцией и сюръекцией и называется **биективным** отображении или **биекцией**.

Упражнение 26. Какие из данных отображений являются взаимно-однозначными между указанными множествами:

а) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$;

б) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, f(x) = x^2$, где $\mathbb{R}_0^+$ - множество натуральных чисел;

в) $f : \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}/\{0\}, f(x) = 1/x$?

Решение: а) является. Обратная функция $x = \sqrt[3]{y}$;

б) не является. Область значений - все множество $\mathbb{R}_0^+$, но обратной функции не существует, так как любому $y > 0$ соответствует два значение $x = \pm\sqrt{y}$;

в) является. Обратная функция $x = 1/y$.

Упражнение 27. Найти композицию функции $f \circ g$: а$f(x) = 2x + 1, g(x) = \sqrt{x}$;

б) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 2x + 1$.

Решение: а) По поределению композиции $f \circ g = \{(x, y)|\exists z, (x, z) \in f, (z, y) \in g\} = \{(x, y)|\exists z, z = f(x), y = g(x)\} = \{(x, y)|\exists, z =$

$2x+1, y=\sqrt{z}=\sqrt{2x+1}\} = \{(x,y)|y=\sqrt{2x+1}\}$. Другими словами, композиция или функция от функции есть $y=g(f(x)) = \sqrt{2x+1}$.

б) Аналогично п.а) получим $f \circ g = g(f(x)) = 2\sqrt{x}+1$.

Определение 16. Пусть $f : X \to Y$ и $A \subseteq X$. **Образом множества А** назовем $f(A) = \{y|\exists x \in A, y=f(x)\}$. Если $B \subseteq ring(f)$, то **прообразом множества** В назовем множество $f^{-1}(B) = \{x|\exists y \in B, y=f(x)\}$

Упражнение 28. Доказать, что для любой функции f

а) $f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$;

б) $f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

Решение: а) Требуется доказать равенство множеств.

$y \in f(A\cup B) \Rightarrow \exists x \in A\cup B, y=f(x) \Rightarrow \exists x, x \in A$ или $x \in B, y=f(x) \Rightarrow y \in f(A)$ или $y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A)\cup f(B)$. В обратную сторону аналогично.

б) $x \in f^{-1}(A\cap B) \Rightarrow \exists y\ inA\cap B, y=f(x) \Rightarrow \exists y, y\in A$ и $y \in B, y=f(x) \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$ и $x\ inf^{-1}(B) \Rightarrow x \in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$. Обратно аналогично.

ЗАДАЧИ

21. Опишите следующие множества:

а)$[a;b]^2$; б) $\mathbb{R}^2$; в) $\mathbb{R}\times[a;b]\times[c;d]$; г) $\mathbb{R}^n, n=1,2,...$

22. Докажите, что $|A_1\times A_2\times ...\times A_n| = |A_1||A_2|...|A_n|$

23. Докажите, что

а) $(A\cap B)\times(C\cap D) = (A\times C)\cap(B\times D)$;

б) $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$;

в) $(A/B)\times C = (A\times C)/(B\times C)$;

г) $A\times(B/C) = (A\times B)/(A\times C)$

24. Пусть $A=\{0,2,4,6,8\}, B=\{1,3,8\}$. Перечислллить элементы следующих бинарных отношений между элементами множеств А и В:

а) $(x,y)\in\rho \Leftrightarrow x+y$ - четно;

б) $(x,y)\in\rho \Leftrightarrow x*y$ -четно;

в) $(x,y)\in\rho \Leftrightarrow x+y<5$;

г) $(x,y)\in\rho \Leftrightarrow x+y=3$.

25. Постройте графики бинарных отношений на $\mathbb{R}$:

а) $\rho = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1\}$
б) $\rho = \{(x,y)|x^2+4y^2 = 1\}$
в) $\rho = \{(x,y)|x^2 = y^2\}$
г) $\rho = \{(x,y)|y \leq x^2, -1 \leq x \leq 1\}$

26. Найти $dom(\rho), ring(\rho), \rho^{-1}, \rho \circ \rho, \rho \circ \rho^{-1}, \rho^{-1} \circ \rho$ для отношений:

а) $\rho = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{N}, y \vdots x\}$;
б) $\rho = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}, 2x < 3y\}$
в) $\rho = \{(x,y)|x,y \in [-\pi/2;\pi/2], y \leq \sin x\}$

27. Доказать, что для любых бинарных отношений

а) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$; б)$\overline{\rho^{-1}} = \bar{\rho}^{-1}$; в) $(\rho_1 \cup \rho_2)^{-1} = \rho_1^{-1} \cup \rho_2^{-1}$; г) $(\rho_1 \cap \rho_2)^{-1} = \rho_1^{-1} \cap \rho_2^{-1}$; д) $|rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) = (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3$; е) $(\bigcup_{i\in I} \rho_i) * q = \bigcup_{i \in I}(\rho_i * q)$.

28. Доказать, что если ρ_1 и ρ_2 симметричны, то $\rho_1 \cup \rho_2, \rho_1 \cap \rho_2, \rho_1^{-1}, \rho_1 \circ |rho_!^{-1}$ тоже симметричны.

29. Доказать, что если ρ_1, ρ_2 антисимметричны, то $\rho_1 \cup \rho_2, \rho_1^{-1}$ тоже антисимметричны.

30. Доказать, что: а) ρ транзитивно тогда и только тогда, когда $\rho \circ \rho \subseteq \rho$; б) если ρ транзитивно, то ρ^{-1} тоже транзитивно.

31. Доказать, что если ρ - отношение эквивалентности, то ρ^{-1} - также отношение эквивалентности.

32. Покажите, что отношение $\rho = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}, x-y \in \mathbb{Q}\}$, где $\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел, есть отношение эквивалентности. Опишите классы эквивалентности т фактор-множества.

33. Показать, что если ρ - отношение частичного порядка, то ρ^{-1} также отношение частичного порядка.

34. Пусть $<$ -отношение обычного порядка на множестве $\mathbb{N}$. Найти $< \circ <$.

35. Какие из следующих отношений являются функциями? Для последних найдите область определения и область значений.

а) $\rho = \{(-1;1),(0;1),(1;1)\}$; б) $\rho = \{(-1;-1),(-1;1),(2;2)\}$; в) $\rho = \{(1;1),(2;2),(3;3),(4;4)\}$.

36. Пусть $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,...\}$. Постройте оторажение $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

а) взаимно-однозначное, но не на $\mathbb{N}_0$; б) на $\mathbb{N}_0$, но не взаимнооднозначное.

37. Пусть $|A| = m, |B| = n$. Сколько существует различных функций из А в В? (Их множества обозначают B^A)

38. Доказать, что каждая их следующих функций имеет обратую. Записать обратные функции явным образом и найти их области определения

а) $y = 2x - 1$; б) $y = x^3$; в) $y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [0, 1]$; г) $y = \frac{x}{x-1}, x \in (-2; 1)$.

39. Найти композицию функций $f \circ g$:

а)$f(x) = 1 - x^2, g(x) = \sqrt{x}$; б)$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 1 + x^2$.

40. Доказать, что для любой функции f :

а)$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$; б) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$; в) $f^{-1}(A/B) = f^{-1}(A)/f^{-1}(B)$.

3. Мощность множества

Ниже речь пойдет о важном и сложном вопросе-сравнении, главным образом, бесконечных множеств. Можно ли говорить о том, что одно бесконечное множество содержит больше элементов, чем другое бесконечное множество? ОчевидноЮ подмножество не может иметь больше элементов, чем само множество, но может ли оноо содержать "столько же"элементовсколько имеется в множестве? В теории мощностей основой служит следующее определение.

Определение 16. Множества А и В называются **равномощными**, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие, то есть существует функция $f : A \xrightarrow{1-1} B$.

Тот факт, что множества А и В равномощны, обозначается $|A| = |B|$ (мощность А равна мощности В). Такимобразом, символ $|A|$ обозначает мощность множества А. Для конечного множества А его мощность совпадает с числом элементов.

Пример: Пусть А-мощность четных положительных чисел, $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел. Очевидно, $A \subseteq \mathbb{N}$. Однако было бы неверно сделать из этого вывод, что в $\mathbb{N}$ "больше"чисел, чем в А. Действительно, можно записать элементы А, а под ними соответствующие элементы $\mathbb{N}$:

$$A : 246...2n$$
$$\mathbb{N} : 123...n$$

Это означает, что между А и $\mathbb{N}$ можно установить взаимно-однозначное соответствие, которое задается простой функцией $f(n) = 2n, n \in \mathbb{N}$. Согласно определению 16, множества А и $\mathbb{N}$ равномощны, $|A| = |\mathbb{N}|$.

Упражнение 29. Доказать равномощность:

а) двух произвольных отрезков [a;b] и [c;d];

б) двух произвольных интервалов (a;b) и (c;d) вещественных чисел, $a < b < c < d$.

Решение: а) Мнение, что на более длинном отрезке "больше"точек, ошибочно. Доказать равномощность можно многими способами. Проще всего рассмотреть геометрическую иллюстрацию:

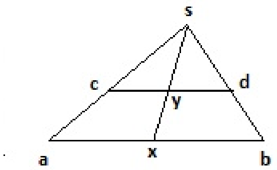


Рис. 9:

Соединив точки a,c и b,d прямыми, получив в пересечении точку S. Тогда отрезок [a;b]можно считать проекцией отрезка [c;d]. При проектировании каждой точке $x \in [a;b]$ соответствует ровно одна точка $y \in [c;d]$. (При желании можно считать, что [a;b] есть тень [c;d], S-солнце)

Другим способом является задание соотвествия между [a;b] и [c;d] явным способом

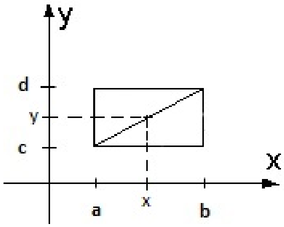


Рис. 10:

Уравнение прямой, проходящей через точки (a;c) и (b;d), очевидно, будет взаимно-однозначным соответствием между отрезками:

$$\frac{y-c}{d-c} = \frac{x-a}{b-a}$$

б) аналогично а) , только концы отрезков a,b и c,d не используются.

Равномощные множества A и B называются **эквивалентными** и обозначают $A \sim B$. Основанием для такого термина служит следующее утверждение:

Упражнение 30. Показать, что отношение равномощности множеств является отношением эквивалентности.

Решение: Проверим, что отношение $|A| = |B|$ а) рефлексивно, б) симметрично, в) транзитивно.

а) $|A| = |A|$, так как между A и A, очевидно существует взаимно-однозначное соответствие, например, тождественно отображение: $f(x) = x, x \in A$

б) Если $|A| = |B|, |B| = |C|$, то существуют $f : A \xrightarrow{1-1} B$. Тогда $f^{-1} : B \xrightarrow{1-1} A$, следовательно, $|B| = |A|$.

в) Если $|A| = |B|, |B| = |C|$, то существуют $f : A \xrightarrow{1-1} B$ и $g : B \xrightarrow{1-1} C$. Тогда $f \circ g : A \xrightarrow{1-1} C$. Тогда $|A| = |C|$.

Упражнение 31. Показать, что произвольный интервал (a;b), a<b, вещественных чисел и все множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ равномощны.

Решение: Из упражнения 29(б) и того факта, что равномощность есть отношение эквивалентности, достаточно выбрать конкретный интервал, например $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Тогда функция $y = \operatorname{tg} x$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие между $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ и $\mathbb{R}$.

Счетные множества и их свойства.

Определение 17. Множество A называется счетным, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$: $A \sim \mathbb{N}$.

Из вышеприведенного примера следует, что множество четных положительных чисел счетно.

Упражнение 32. Показать, что множество квадратов натульных чисел счетно.

Решение: Функция $f(n) = n^2, n \in \mathbb{N}$ является взаимно-однозначным соответствием между $\mathbb{N}$ и $A = \{1^2, 2^2, ..., n^2, ...\}$.

Перечислим основые свойства сченых множеств.

1. В кадом бесконечном множестве имеется счетное подмножество. (Это означает, что бесконечное множество не может быть "меньше"счетного)

2. Множество счетно тогда и только тогда, когда его элементы можно представить в виде последовательности $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Другими словами, термин "счетность"означает не возможность

"сочитать"элементы(для бесконечного множества это невыполнимо), а возможность **пронумеровать** элементы множества.

3. Объединение любого конечного числа счетных множеств есть счетное множество: если $A_1, A_2, ..., A_n$ - счетные, то $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ - счетно.

4. Объединение счетного числа сножеств есть счетное множество: если $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ - счетные, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ - счетно. (Индексы могут пробегать не только натуральный ряд, но и любое счетное множество).

5. Декартово произведение любого конечного числа счетных множеств есть счетное множество: если $A_1, A_2, ..., A_n$ - счетные, то $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ - счетно.

Упражнение 33. Показать, что а) множество целых чисел $\mathbb{Z}$ и б) множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ - счетные.

Решение: $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}^{-1}$, где $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}, \mathbb{N}^{-1} = \{-1, -2, -3, ...\}.\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}^{-1}$ очевидным образом счетные: функция $f(n) = n-1, n \in N$, есть взаимно-однозначное соответствие между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_0$; функция $g(n) = -n, n \in N$, есть взаимно-однозначное отображение $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^{-1}$. Тогда $\mathbb{Z}$ является счетным по свойству 3.

б) Любое рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}, m\ in \mathbb{Z} ? n \in \mathbb{N}$ или в виде пары $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ счетные, следовательно $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ счетное по мвойству 5.

При желании можно провести более "конструктивное"доказательство счетности $\mathbb{Q}$, прямо продемонтрировав способ занумеровать рациональные числа. Для простоты ограничемся только положительными рациональными числами. Запишем последовательность

$$\frac{1}{1}; \frac{1}{2}, \frac{2}{1}; \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}; \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}; ...$$

В каждом блоке записаны дроби $\frac{m}{n}$ с постоянной суммой $m + n$ числителя и знаменателя, внутри блока числа расположены по возростанию числителя. Ясно, что любое число $\frac{m}{n}$ попадет в "свой"блок, а в нем получит конкретное место. Таким образом, $\frac{m}{n}$ будет иметь фиксированный натуральный номер. Осталось только убрать повторные числа, такие как $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}$ и тому подобное.

Приведем ещё один пример, показывающий, как найти мощность множества, сравнив его с множеством, чья мощность уже известна.

Упражнение 34. Чему равна мощность произвольного множества непересекающихся интервалов на вещественной прямой?

Решение: Множество интервалов может быть конечным или бесконечным. Понятно, что нас интересует бесконечное множество. Может показаться, что задача легко решается прямой нумерацией интервалов: выберем произвольный интервал и присвоим ему номер 1. Ближайший, скажем, справа, интервал получит номер 2, а ближайший слева - номер 3. Далее продолжаем аналогичным образом, после чего каждый интервал будет иметь фиксированный номер и, следовательно, множество интервалов счетное. На это рассуждение имеется возражение: можем ли мы гарантированно определить для первого интервала ближайший справа или слева? Представим себе бесконечную последовательность сужающийся по длине интервалов, из "бесконечности"и остающихся по одну сторону от первого интервала. В этом случае мы не можем указать интервал номер 2.

Попробуем рассуждать по-иному. Возьмем очень простую последовательность интервалов: $(n-\alpha; n+\alpha), 0 < \alpha < 1, n \in \mathbb{Z}$; то есть непересекающихся интервалос с центрами, являющимся целыми числами. Тогда, очевидно, каждый интервал представляется его центром и мощность мнодества интервалов совпадает с мощьностью множества целых чисел $\mathbb{Z}$, то есть счетного множества. Для произвольных интервалов существования таких "целых"представителей требовать уже невозможно, но зато в каждом сколько угодно малом интервале можно выбрать **рациональную** точку. Таким образом, множество интервалов не может иметь большую мощность, чем множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел, то есть счетную мощность. Итак, ответ: множество неперсекающихся интервалов **не более чем счетно**, то есть конечно или счетно.

Далее рассмотрим множество чисел, имеющих важное значение в математике, особенно в анализе.

Определение 18. Вещественное число называется **алгебраическим**, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффицентами.

Очевидно, любое рациональное число $\frac{m}{n}?m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ алгебраическое, так как оно является корнем уравнения $nx - m = 0$, то есть корем многочлена первой степени $nx - m$ с целыми коэффицентами. Число $\sqrt{2}$ - иррациональное, но также алгебраическое, поскольку является корнем уравнения $x^2 - 2 = 0$.

Упражнение 35. Найти мощность множества всех алгебраических чисел.

Решение: Многочлен степени n имеет вид

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

и, следовательно, полностью отпределяется набором коэффицентов $(a_0, a_1, ..., a - n)$. Поскольку все коэффиценты - целые числа, множество все многочленов степени n равномощно множеству $\mathbb{Z}^{n+1}$, которое является счетным по свойству 5. Из алгебры известно, что многочлен степени n имеет не более n действительных корней. Тогда множество всех корней всевозможных многочленов степени n не превосходит по мощности объединение n экземпляров $\mathbb{Z}n + 1$, то есть счетно. Наконец, множество всех корней всех многочленов с целыми коэффицентами не превосходит объединение предыдущего множества по всем n = 1, 2 , . . ., то есть счетного объединения множеств. По свойству 4 это множество счетно. Ответ: множество алгебраических чисел - счетно.

Множество мощности континуум

Во всех рассмотренных до сих пор примерах сравниваемые множества оказывались равномощными. Это могло привести к убеждению, что все бесконечны емножество именно из-за того, что они бесконечны, имеют одинаковую, а значит счетную мощность. То, что это не так и существуют бесконечные множества, не являющиеся счетными (которые естественно называются **несчетными**), показал основатель математической теории множеств и теории мощностей Г. Кантор.

Теорема 3.(Кантор) Множество вещественных чисел из интервала (0;1) не счетно.

Упражнение 34. Доказать теорему Кантора

Решение: Предполодим, что (0;1) - счетное множество, тогда его элементы можно занумеровать. Будем записывать вещественные числа бесконечными десятичными дробями, если нужно, приписывая нули. Тогда перечисление всех чисел из (0;1) можно представить бесконечной таблицей:

$$\begin{array}{llllllll} a_1 = 0, & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & ... & \alpha_{1n} & ..., \\ a_2 = 0, & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & ... & \alpha_{2n} & ..., \\ a_3 = 0, & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & ... & \alpha_{3n} & ..., \end{array}$$

Здесь первый индекс показывает номер числа, а второй - номер разряда. Запишим число

$$b = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3, ..., \beta_n, ...,$$

где $\beta_1 \neq \alpha_{11}, \beta_2 \neq \alpha_{22}, ..., \beta_n \neq \alpha_{nn}, ...$

Число b принадлежит интервалу (0;1) и отличается по крайне мере одним десятичным знаком от любого числа из таблицы. Значит, вопреки предположению, число b не входит в перечисление.

Примечание. Имеется один нюанс в доказательстве. Из того факта, что два вещественных числа записаны разными десятичными знаками, вообще говоря, не следует, что эти числа обязательно различны. Числа 0,500 и 0,499 различны всеми знаками после запятой, однако они совпадают. Чтобы устранить эту возможность, достаточно выбрать только одну форму записи , например, не используя цифпы 9 в периоде.

Определение 19. Множество A, эквивалентное (0;1), называется **множеством мощности континуум**.

Из упражнений 29 и 31 следует, что произвольный непустой интервал (a;b) и отрезок [a;b] вещественных чисел, а также все множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ имеют мощность континуум.

Для того, чтобы иметь возможность сравнить счетную мощность и мощность континуум, воспользуемся следующим естественным определением.

Определение 19. Мощность множества A **меньше** мощности множества B, если A эквивалентно некоторому подмножеству множества B, а B не эквивалентно никакому подмножеству множества A. Другими словами, существует отображение $f : A \xrightarrow{1-1} B_1 \subseteq B$, но не существует отображение $g : B \xrightarrow{1-1} A_1 \subseteq A$.

Обозначение: $|A| < |B|$.

Для сравнения мощностей полезной явялется

ТЕОРЕМА 4(Кантора-Бернштейн) Если $A \sim B_1 \subseteq B$, а $B \sim A_1 \subseteq A$, то $A \sim B$.

Этот факт можно понимать так: если $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$.

Упражнение 37. Пусть A -счетное множество, а B - ножество мощности континуум. Показать, что $|A| < |B|$.

Решение: Для определенности выберем в качестве счетного множества множество $\mathbb{N}$, а множество мошности континуум - $\mathbb{R}$. Так как $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, существует взаимно-однозначное соответствие между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, и, значит, $|\mathbb{N}| \subseteq |\mathbb{R}|$. Обратное же взаимно-однозначного отображения из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{N}$ существовать не может, так как это противоречило бы теореме Кантора о несчетности (0;1). Следовательно, $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Упражнение 38. Показать, что множество $\mathbb{J}$ иррациональных чисел имеет мощность континуум.

Решение: На первый взгляд проще всего доказывать от противного. Допустим, что $\mathbb{J}$ - счетное. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, как мы знаем (упр.33(б)), счетное. Тогда множество $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$ было бы счетным, как объединение счетных множеств - противоречит тому, что $\mathbb{R}$ имеет мощность континуум. Однако, в этом рассуждение молчаливо предполагается, что если множество $\mathbb{J}$ не континуально, то оно счетное. На самом деле, из предыдущего упражнения мы знаем, что счетное множество имеет мощность **меньшую**, чем континуум, но там не говорится, что эти мощности **непосредственно следуют** друг за другом. Не может ли $\mathbb{J}$ иметь мощность между счетной и континуумом? Вопрос о существовании множества, мощность которого была бы больше счетной, но меньшей континуума, состовляет одну из самых знаменитых задач теории множеств - **проблему континуума**, которую здесь обсуждать нет возможности. Можно возразить, что если бы $\mathbb{J}$ имело некоторую несчетную мощность, меньшую, чем мощность континуума , то $\mathbb{R}$ имело бы также эту новую мощность, но это довод требует привлечения некоторых дополнительных знаний об "арифметике"мощностей, которые опять же выходил бы за рамки настоящего пособия.

Для доказательства того, что $\mathbb{J}$ все-таки имеет мощность континуума, постоим взаимно-однозначное отображение из $\mathbb{R}$ в некотрое подмножество $\mathbb{J}$. Пусть произвольное иррациональное число x , то есть бесконечная непериодическая десятичная дробь, имеет вид $x = a, b_1 b_2 ...$, где a - целая часть, $b_1 b_2, ...$ - десятичные знаки. Сопоставим x число y, равное $a + 1, b_1 b_2, ...$, если x>0, и $a - 1, b_1, b_2, ...$, если x<0. Очевидно, что y -тоже иррациональное и $|y| > 1$. В промежутке (-1;1) выберем некоторе счетное множество иррациональных чисел, которое, очевидно существует. Все рациональные числа из $\mathbb{R}$ можно, следовательно, взаимно-однозначно отобразить на это множество. В итоге $\mathbb{R}$ взаимно-однозначно отобразиться на некотором подмножество $\mathbb{J}$. А поскольку $\mathbb{J}$, понятно, можно отобразить на себя как часть $\mathbb{R}$, остается воспользоваться теоремой Кантора-Бернштейна. Итак $\mathbb{J} \sim \mathbb{R}$, то есть $\mathbb{J}$ имеет мощность континуум.

Упражнение 39. Показать, что множество точек квадрата $[0; 1]^2$ равномощно множеству точек отрезка [0;1] и, следовательно, имеет мощность континуума.

Решение: Опять выгодно применить теорему Кантора-Бернштейна. Поскольку $[0; 1] \subset [0; 1]^2$?, достаточно построит взаино-однозначное отображение из $[0; 1]^2$ в [0;1]. Пусть (x,y) - произвольная точка квадрата, $x = 0, a_1 a_2 ..., y = 0, b_1 b_2 ...$. Сопоставим точке (x,y) точку $z = 0, , a_1 b_1 a_2 b_2 ... \in [0; 1]$. Это и будет искомым отображнием.

Как следствие получим, что множество точек любого квадрата имеет мощность континуума. Теперь нетрудно показать, что множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$, пространство $\mathbb{R}^3$, и вообще пространства любой размерности $\mathbb{R}^n$ также имеют мощность континуума.

Может ли существовать множество большей мощности, чем континуум? Вспомним, что по теореме 2 количество подмножеств n - элементного множества есть $2^n > n$. Оказывается, что этот результат распространяется на бесконечные множества.

Теорема 5. Для любого множества A выполняется $|\mathcal{P}(A)|, > |A|$.

По аналогии с конечным множеством удобно ввести следующие обозначения: $\mathcal{P}(A) = 2^A, |\mathcal{P}(a)| = 2^{|A|}$.

Упражнение 40. Пусть А -счетное. Показать, что $\mathcal{P}(A) = 2^A$ есть множество мощности континуум.

Решение: Постараемся сначала лучше понят, в чем состоит доказываемое утверждение. Пусть, например, в качестве счетного множества А взято множество натуральный чисел $\mathbb{N}$, а предполагаемое множество мощности континуум есть множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Тогда утверждение означает, что $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$. По существу, надо показать, что одному действительному числу соответствует целое множество натуральных чисел. Как это может быть? В курсе математического анализа одним из способов введения действителных чисел является определение действительных чисел как предела сходящейся (фундаменьтальной) последовательности рациональных чисел. Если это предел есть рациональное число, то онп определено. Если же существующий предел не рациональное число, то она объявляется иррациональным число. Теперь строгое доказательно утверждения провести не очень удобно. Каждому действительному x сопоставить схлдящуюся к x счтеную последователньость рациональных чисел. А так как $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, то последовательность может быть заменена на последовательность натуральный чисел. Элементы этой последовательности образуют некотрое подмножество натуральных чисел. Итак, имеет взаимно-однозначное отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Обратно, непустому множеству натуральный чисел $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ модно сопоставить действительное число из интервала [0;1), например, так:

$$0, \underbrace{0...0}_{a_0} 1 \underbrace{0...0}_{a_1} 1...1 \underbrace{0...0}_{a_n} 1...$$

Пустому множеству соответствет 0. Поскольку $[0;1) \sim \mathbb{R}$, то имеет взаимно-однозначное отображение из $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ в $\mathbb{R}$. По теореме Кантора-Бернштейна $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$.

В заключение параграфа отметим: из теоремы 5 следует, что существует бесконечная последовательность возростающих по мощности бесконечных множеств: $|A| < |\mathcal{P}(A)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))| < ...$ или, эквивалентно, $|A| < 2^{|A|} < 2^{2^A} < ...$

В начале этой последовательност находится самое "маленькое"из бесконечных множеств - счетное множество. Затем, как было доказано в упр. 40, идет множество 2^A мощности континуум, потом 2^{2^A} - гиперконтинуум, и так далее. Примеров множества мощности, гиперконтинуум яаляется множеством всех действительных функций.

ЗАДАЧИ

41. Покажите, что множества а)$A = \{1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2, ...\}$ - квадратов; б)$B = \{1^3, 2^3, 3^3, ..., n^3, ...\}$ - кубов; в)$C = \{1^4, 2^4, 3^4, ..., n^4, ...\}$ - четвертых степеней натуральных чисел равномощны. Какую мощность имеют все эти множества?

42. Докажите, что множества точек двух окружностей радиусов r и R равномощны. Какова мощность этих множеств?

43. Пусть $|A| = |B|, |C| = |D|$. Верно ли, что а)$|A \cup C| = |B \cup D|$ б)$|A \cap C| = |B \cap D|$ в)$|A \backslash C| = |B \backslash D|$? Приведите примеры.

45. Установите взаимно- однозначное соответствие между $\mathbb{N}$ и следующими множествами, доказав тем самым, что они счетны:

а) множество целых чисел, кратных 3;

б) множество неотрицательных целых чисел, кратных 5;

в) множество положительных нечетных чисел.

46. Докажите счетность множеств:

а) всех конечных двоичных дробей, то есть неотрицательных чисел, представимых в виде

$$a = A + \tfrac{a_1}{2} + \tfrac{a_2}{2^2} + ... + \tfrac{a_n}{2^n},$$

где A -целое неотрицательное; $a_1, a_2, ..., a_n \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{N}$;

б) всех конечных p-ичных дробей, то есть неотрицательных чисел, представляемых в виде

$$a = A + \tfrac{a_1}{p} + \tfrac{a_2}{p^2} + ... + \tfrac{a_n}{p^n},$$

где A -целое неотрицательное; $a_1, a_2, ..., a_n \in \{0, 1, ..., p-1\}, n \in \mathbb{N}$;

47. Каую мощность имеет множество всех простых чисел?

48. Докажите счетность следующих множеств:

а) множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов счетного множества;

б) множество всех конечных подмножеств счетного множества;

в) множество всех многочленов от одной переменой с рациональными коэффицентами.

49. Какова мощность: а) произвольного множества непересекающихся треугольников на плоскости; б)* произвольного множества букв Т на плоскости (буква Т понимается как пара отрезков одинаковой длины, один из которых является серединным перпендикуляром к другому; буквы могут касаться друг друга, но не налегать).

50. Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции, определенной на действительной прямой, не более. чем счетное.

51. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и существует такое число $\delta > 0$, что расстояние между любыми $x, y \in A$ не превосходит $\delta : |x - y| \leq \delta$. Докажите, что множество А не более, чем счетное.

В задачах 49-51 используйте способ из упр. 32.

52. *. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ - счетное множество. Докажите, что существует действительно число а, такое, что множество $B = \{x + a | x \in A\}$, то есть множество получающееся "сдвигом"множества А на а, не пересекается с А.

53. Докажите, что множество комплексных чисел $mathbbC$ имее мощность континуум. (**Комплексным** числом называется число вида $z = a + bi$), где $a, b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица).

54. доказать, что для произвольной функции $f |dom(f)| \geq |ring(f)|$.

55. Покажите, что существуют **трансцендентные** (неалгебраические) числа (см. упр. 33). Какую мощность имеет множество трансцендентных чисел?

56. Существует ли функция, взаимно-однозначно отображающая отрезок [0;1] на множестве $\mathbb{R}$? Существует ли непрерывная такая функция?

57. Какую мощность имеет множество: а) всех конечных последовательностей из 0, 1; б) всех бесконечных (то есть счетных) последовательностей из 0,1?

58. Какую мощность имеет множество всех **рациональных функций**, то есть функция $f(x)$, представимых в виде $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x), Q_m(x)$ - многочлены степени n и m соответственно с целыми коэффицентами?

59.* Какую мощность имеет множество: а) всех непрерывных функций, заданных на $\mathbb{R}$ б) всех монотонных функций, заданных на $\mathbb{R}$?

60, (Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах). Гостиница с бесконечным (то есть счетным) числом номеров полностью заселена. а) Как обеспечить отдельных номеров вновь прибывших туристов? б) Как обеспечить отдельными номерами бесконечно много новых туристов?

Часть II

КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика - раздел математики, в котором изучаются способы подчета числа расположений (комбинаций) объектов произвольного множества.

4. Основные принципы кобинаторики

Принцип умножения. Если объект A может быть выбран m различными способами и после каждого такого выбора объект B может быть выбран m n различными способами, то выбор A и B в указанном порядке может быть осуществлен m*n способами.

Выбор A и B можно записать как выбор **упорядоченной** пары (A,B). С этой точки зрения принцип умножения эквивалентен утверждению: если $|A| = m, |B| = n$, то $|A \times B| = |A| \times |B| = m \times n$ (задача 22). Принцип умножения естественным образом распространяется на произвольное чило обэектов $A_1, A_2, ..., A_k$.

Принцип сложения. Если объект A можно выбрать M способами, а объект B **другими** n способами, то выбор A или B модет быть сделан m+n способами.

Несмотря на простоту и очевидность основных принципов, их применения требует аккуратности. Подчеркнем ещё раз , что для принципа умножения важно понимать, являются ли пар (A, B) и (B, A) **различными** по смыслу задчи, а для принципа сложения чтобы способы выбора A+B не повторялись.

Упражнение 41. Сколько существует: а) различных трехзначных чисел; б) трехзначных чисел с различными цифрами; в) четных трехзначных чисел; г) четных трехзначных чисел с различными цифрами?

Решение: Задача, фактически, для младшего школьного возроста и приводится здесь для иллюстрации основных принципов.

а) Нужно осуществить выбор трех цифр. На первом месте имеется 9 вариантов. Так как 0 не может быть первой цифрой, на втором и третьем местах по 10 вариантов. Ответ: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ чисел.

Часто студенты рассуждают так: самое большое трехзначное число - 999, самое маленькое - 100. Вычитая, получаем 899. Логическая ошибка - вычитание числа 100, которое удовлетворяет условию задчи. Мы видим, что принцип умножения эффективней и "безопасней".

б) Аналогично п. а) на первом месте 9 вариантов. на втором также 9, так как нельзя повторить первую цифру, на третьем - 8. Ответ: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

в) Ответ:$9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$, так как существет 5 четных цифр. Рассуждение, что половины всех чисел -четные и, значит, ответ $900 : 2 = 450$ хуже, так как требует формального доказательства того, что количество четных и нечетных чисел одинаково.

г) Этот вопрос чуть сложнее предыдущего. Попытки обойтись только принципом умножения затруняются тем, что цифра 0 четная и в то же время не должна стоять на первом месте. Можно рассуждать так: сначала найдем количество чисел, у которых в конце находиться 0: $9 \cdot 8 \cdot 1 = 72$. Теперь подсчитаем количество чисел, у которых в конце четная цифра, но не 0: $8 \cdot 8 \cdot 4 = 256$. По принципу сложения ответ: 72+256=328.

В комбинаторных задачах часто встречается **схема размещения предметов по урнам**. Рассмотрим простейший вариант этой схемы.

Упражнение 42. Сколькими способами n **различных** предметов можно разместить по k **различным** урнам?

Решение: Для кадого предмета есть k вариантов выбора урны. по принципу умножения ответ: $\underbrace{k \cdot k \cdot ... \cdot k}_{n} = k^n$.

Отметим важный частный случай схемы при k =2. Эту ситуацию можно трактовать как то, что каждый предмет находится в одном из двух состояний. К этому сводится уже рассмотренная задача о числе подмноеств конечного множества (теорема 2 и упр. 4): каждый из n элементов может быть включен в подмножество - состояние 1, или не включен в подмножество - состояние 0. Отсюда мгновенно получаем ответ: число подмножеств равен

2^n. Приведем ещ1 несколько примеров на использование этой схемы:

1) Сколько существует исходов при подбрасывании монеты n раз?

2) Сколько существует бинарных векторов $(x_1, x_2, ..., x_n), x_i = 0, 1, i = 1, 2, ..., n$?

3) Сколько вершин в n-мерном единичном кубе?

Во всех случаях ответ 2^n.

В развитие данной схемы решим следующую задачу.

Упражнение 41. Сколько существует рефлексивных бинарных отношений, заданных на n-элементном множестве A?

Решение: Напомним, что бинарное отношение ρ на множестве A есть некоторое подмножество декартова произведения: $\rho \subseteq A \times A = A^2$. Отношение рефлексивна (опр. 9), если каждый элемент из A находится в отношении с самим собой. Отношение, заданное на конечном множестве A, удобно изображать с помощью квадратной матрицы размера $n \times n$, в которой элемент $a_{ij} = 1$, если элемент x_i находится в отношении ρ с элементом x_j, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Всего в матрице n^2 элементов, и каждый элемент модет находиться в состоянии 1 или 0. Отсюда получаем, что число способов запомнить матрицу, то есть число различных бинарных отношений, есть 2^{n^2}. Этот результат, разумеется, совпадает с числом всех подмножеств A^2, так как $|A^2| = n^2$. Теперь найдем количество рефлексивных отношений. В этом случае все элементв главной диагонали матрицы обязаны равняться 1. Следовательно произвольно заполнять 0 и 1 можно только оставшиеся $n^2 - n$ элементов матрицы. Получаем, что число рефлексных бинарных отношений равно 2^{n^2-n}.

В заключении параграфа рассмотрим задачу, связанную с теорией чисел.

Упражнение 44. Натуральное число A разложно на произведение простых делителей: $A = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_n^{k_n}$. Сколько всего делителей имеет число A?

Решение: Пусть d - произвольный делитель числа A. Тогда D модет сам быть разложен как $d = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$, где $0 \leq \alpha_i \leq k_i, i = 1, 2, ..., n$. Количество делителей, следовательно, совпадает с количеством способов выбрать числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. По принципу умножения получаем ответ: $(k_1+1)\cdot(k_2+1)\cdot ... \cdot(k_n+1)$.

Например, число 60 раскладывается как $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$. Следовательно, количество делителей 60 равно $(2+1)(1+1)(1+1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

5. Перестановки, сочетания, размещения

Во многих комбинаторных задачах возникают однотипные ситуации, поэтому целесобразно объединить их в стандартные формулы.

Перестановки

Определение 20. Перестановкой из n элементов называется их расположение в некотором порядке. Чисо всех перестановок обозначается P_n.

Упражнение 45. Доказать, что P_n вычисляется по формуле

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n! \qquad (1),$$

(n - факториал, 0! =1).

Решение: Отметим, что понятие перестановки укладывается в рассмотренную выше схему размещения предметов по урнам. В данном случае речь идет о размещении n объектов по n урнам с условием, что в каждой урне должен находиться ровно один объект. Для первого объекта можно выбрать любую из n урн, для второго - одну из n-1 оставшихся и так далее По принципу умножения получаем $P_n = n(n-1)...\cdot 1$ или, записывая в обратном порядке $P_n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n!$

Реши довольно популярную задачу.

Упражнение 46. Сколькими способамт 8 ладей можно расставить на шахматной доске 8×8 та, чтобы они не били друг друга? (Лодьи ходят по горизонтали или вертикали)

Решение: Из условия хадачи следует, что на каждой горизонтали и вертикали должнв стоять ровно одна ладья. Выберем для ладьи одну из 8 клеток, скажем, на первой вертикали. Тогда одна из горизонталей будет уже "занята так что для ладьи на второй вертикали остается 7 клеток и так далее

Ответ: число способов расставить ладьи равно $8 \cdot 7 \cdot ... \cdot 1 = 8!$

Представим теперь, что ладья окрашены в различные цвета. Изменится ли ответ? Разумеется, да. Из каждой из 8! расстановок ладей можнно получить 8! расположений, меняя цвета. по принципу умножения получаем $8! \cdot 8! = (8!)^2$. Это пример ещё раз подчеркивает важность понимания того, какие конфигурации, исходят из условия задачи, следует считать различными или одинаковыми.

Упражнение 47. На полке нужно расставить n занумерованных книг. Сколько существует способов расстановки, если k выбраных книг должны стоять вместе?

Решение: Представим, что k выбранных книг "склеили"ипревратили в одну толстую книгу. Тогда расставлять нужно n-k+1 книгу. Это можно сделать $(n-k+1)!$ способами. Учтем ещё, что склеивать книги можно было k! способами. По принципу умножения получаем ответ: k!(n-k+1)! способов.

Упражнение 48. Сколькими способами n человек $(n \geq 2)$ можно рассадить за круглым столом?

Решение: Если бы n человек сидели на скамейке, то ответ, понятно, был бы $P_n = n!$. Однако для круглого стола ситуация меняется, так как если бы люди одновременно сдвинутся на одинаковое число мест, скажем, по часовой стрелке, то их взаимное расположение не изменится, следовательно, мы должны считать такую расстановку совпадающей с исходной. Поскольку исходное расположение можно сдвигать на 0, 1, 2, . . ., n -1 мест, то из n! формальных перестановок n элементов n перестановок дают совпадающие расположения. Поэтому ответ: $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

Сочетание

Определение 21. Пусть m,n - целые числа, $0 \leq m \leq n$. **Сочетанием из n по m** называется выбор m элементов из n-элементного множества. Число всех сочетаний обозначается C_n^m.

Формула для числа сочетаний имеет вид:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (2)$$

При этом $C_n^0 = C_n^n = 1, n = 0, 1, 2, ...$. При $m > nC_n^m = 0$

Упражнение 49. Доказать формулу (2).

Решение: Выбираем последовательно первй элемент - n сособов, второй элемент - (n-1) способов и так далее Перед выборов последнего, m-го элемена, уже выбран m-1 элемент и, значит, число способов равно n-(m-1) = n-m+1. По принциау умножения число способов выбрать все m элементов равно n(n-1) . . . (n-m+1). Однако выбранные элементы могли появиться в **разных порядках** (скажем ab и ba). А поскольку число разных порядков есть число перестановок $P_m = m!$, то окончательный результат есть $C_n^m = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}$ - первая часть формулы (2). Для получения второй части домножим числитель и знаменатель на (n-m)!, откуда $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Для непосредственного вычисления числа сочетаний удобнее первая форма. Заметим, что в числителе и заменателе ровно m сомножителей. Вторая форма чаще используется при использовании свойств.

Упражнение 50. а) n шахматов $n \geq 2$, играют по одной партии друг с другом. Сколько всего партий буднт сыграно?

б) На плоскости расположено n прямых $n \geq 2$, любые две из них пересекаются в одной точке и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько всего точек пересечения имеют эти прямые?

Решение: а) Данную известную задачу можно решить многими способами, но самым "радикальным"будет такой: партия - это два игрока. Следовательно, число партий совпадает с числом способов выбрать двух шахматистов из n, то есть $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

б) Формулировка ина, чем в п. а), но комбинаторная суть та же самая: одна точка пересечения - это выбор двух прямых. Ответ: $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Числа сочетаний обладают двумя простыми, но важными свойствами :

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \qquad (3)$$

$$C_n^m = C_{n-1^{m-1}} + C_{n-1}^m. \qquad (4) \text{ (тождество Паскаля)}$$

Упражнение 51. Доказать формулы (3), (4).

Решение: Можно записать правые части по формуле (2) и убедиться в верности равенства. Но лучше рассуждать исходя из понимания термина. а) C_n^m есть число способов выбрать m элементов из n. Но выбрать m элементов, вы автоматически "выбираете"остальные n-m элементов. б) Зафиксируем произвольный элемент из n, обозначим его "a". Все сочетания можно разбить на два класса - содержащие a и не содержащие a. Первых будет C_{n-1}^{m-1}, так как один элемент уже выбран. Вторых будет C_{n-1}^m. Скадывая, приходим к (4).

Упражнение 52. Чему равны: а) C_1000^1000; б) C_1000^999?

Решение: а) По формуле (3) $C_1000^1000 = C_1000^0 = 1$.

б) $C_1000^999 = C_1000^1 = 1000$.

Упражнение 53. Сколькими способами из карточной колоды (52 карты) можно вытащить 4 карты, содержащие а) ровно один туз; б) по крайней мере один туз?

Решение: а) Из четырех тухов нужно выбрать один, из 48 остальных карт нужно выбрать 3. Ответ: $C_4^1 \cdot C_48^3 = 4C_48^3$.

б) Напрашивающееся рассуждение: выберем один туз из четырех, оставшмеся 3 туза вернем в колоду. Затем из 51 карт выберем любые три. Тогда в четырех картах будем по крайней мере один туз. Следовательно, получается $C_4^1 \cdot C_51^3$. Это рассуждение содержит логическую ошибку: некоторые наборы из четырех карт при подсчете буду учитываться повторно. Решить задачу можно так: число всех наборов из четырех карт ровно C_52^4; число наборов, не содержащих ни одного туза, равноC_48^4. Ответ: $C_52^4 - C_48^4$.

Упражнение54. В скольких точках пересекаются диагонали внутри выпуклого n-угольника, если никакие три диагонали не пересекаются в одной точке?

Решение: Попробуем сначала просто подсчитав число точек пересечения диагоналей для случаев n = 3, 4,5. В треуглньнике (n =3) это число равно 0, ы четырехугольнике (n = 4) - 1, в пятиугольнике (n = 5) - 5. Какой-то очевидной зависимости от n не видно. Далее может прийти такая мысль: найдем числа всех диагоналей (это сделать нетрудно (см. упр 50(б))). Но, к сожалению, не быле диагонали пересекаются - значит, этот способ не годится. Вернемся к случаю четыреугольника. В нем равно две диагонали, которые заведомо пересекаются. И теперь мы нашли правильную идею: будем выбирать четверку вершин, этой четверки соответствует ровно одна точка пересения диагоналей. итак, ответ: $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Размещение.

Определение 22. Пусть, как и в предыдущем определении, m,n - целые, $0 \le m \le n$. **Размещением из n по m** называется выбор m элементов из n-элементного множества с **учетом порядка выбранных** элементов. Число размещений обозначается A_n^m.

Поскольку размещение отличается от сочетаний только учетом порядка элементов, формула для вычисления числа размещений отличается от формулы (2) лишь отсутствием m! в знаменателе:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (5)$$

Отсюда получается очевидная формула, связывающая число размещений, сочетаний и перестановок:

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m. \qquad (6)$$

Упражнение 55. Доказать тождество $A_{n-1}m = A_n^m - mA_{n-1}m - 1$

Решение: Можно использовать (5) и поле очевидных преобразований убедиться в верности равенства. Но проще и быстрее перйти к равносильному равентсву по формуле (6):

$$C_{n-1}^m \cdot m! = C_n^m \cdot m! - m \cdot C_{n-1}m - 1 \cdot (m-1)! \text{ или}$$
$$C_{n-1}^m = C_n^m - C_{n-1}^{m-1}$$

Упражнение 56. Сколько существует шестизначных телефонных номеров, состоящих из различных цифр (ноль допускается на любом месте)?

Решение: Всего различных шестизначных номеров, очевидно, 10^6. Если цифры не повторяются, то на первом месте 10 вариантов, на втором - 9 и так далее Получим $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ и замечаем, что это совпадает с формулой (5) при n =10, m=6. Итак, ответ: A_10^6

ЗАДАЧИ

61. Сколько существует трехзначных чисел, которые записываются цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5 и делятся на 3?

62. Найдите число диагоналей в выпуклом n-угольнике.

63. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску а) белую и черную ладью; б) белого и черного слона; в) белого и черного ферзя; г) белого и черного короля так, чтобы они не били друг друга?

64. Сколько слов длины n можно образовать, используя алфавит из m букв?

65. Сколько существует матриц размера $m \times n$ с элементами $pm1$.

66. **Булевой функцией** называется функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, значение функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ принадлежат множеству $\{0,\ 1]$, то есть это двоичная функция двоичных переменных.

а) Сколько существует булевых функций от n переменных?

б) Сколько существует булевых функций от n переменных, сохраняющих ноль, то есть удовлетворяющих условию $f(0, 0, ..., 0) = 0$?

в) Сколько существует булевых функций от n переменных, сохраняющих единицу, то есть удовлетворяющих условию $f(1, 1, ..., 1) = 1$?

г)Сколько существует самодвоичных булевый функций от n перемнных? Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется самодвойственной, если $f(\bar{x_1}, \bar{x_2}, ..., \bar{x_n}) = \bar{f}(x_1, x_2, ..., x_n)$, где черта означает отрицание: $\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$.

67. Сколько существует а) симметричных; б)* антисимметричных юинарных отношенийна множестве из n элементов?

68. Сколько существует а) рефлексивных и симметричных отношений одновременно; б) бинарных отношений, не являющихся рефлексивными на множестве из n элементов?

69. На полке нужно расставить n занумерованных книг. Сколько существует способов расставить их, если:

а) книги расставляются в произвольном порядке;

б)1 и 2 том не должны стоять рядом;

в) книги с четными номерами должны стоять на четных местах;

г) книги с четными номерами должны стоять на нечетных местах;

д) 1-й том должен стоять левее 2-го тома?

70. Сколькими способами можно составить из n разноцветных бусин, $n \geq 3$?

71. Сколько в n-элементном множестве существует k-элементных подмножеств?

72. Доказать: $C_n^m + 2C_n^{m+1} + C_n^{m+2} = C_{n+2}^{m+2}$.

73. Даны n точек,никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

74. На сколько частей делят выпуклый n-угольник все диагонали, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

75. Сколькими способами из колоды карт (52 карты) можно вытащить четыре так, чтобы:

а) все карты были разных мастей;

б) все карты были одной масти;

в) все карты были разных мастей и достоинств?

76. В лоторее разыгрывается n билетов, из которых m выиграшные. Сколько способов приобрести k билетов так, чтобы хотя бы один из них был выиграшным?

77. В урне находятся N шаров, среди которых M белых, N-M черных. Сколькими способами из урны можно извлечь n шаров, чтобы из них было m белых?

78. Сколькими способамиможно расставить в ряд n нулей и m единиц так, чтобы никакие две единицы не чтояли рядом?

79. В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали. Сколько всего отрезков проведено, если учитывать и стороны в n-угольнике?

80. В предыдущей задаче каждый отрезок(сторона или диагональ) ориентирован в ту или иную сторону (такой n-угольник называется **турниром**).Сколько существует турниров?

6. Перестановки с повторениями.

Определение 23. Пусть множество A состоит из n элементов. Количество способов разбить A на заданное число k подмножеств $B_1, B_2, ..., B_k$, имеющих, соответственно, $n_1, n_2, ..., n_k$ элементов, называется числов **перстановок с повторениями** из n по $n_1, n_2, ..., n_k$. Обозначение: $C_n(n_1, n_2, ..., n_k)$.

Определение обозначает, что нас интересует количество способов представления множества A в виде объединения его непересекающихся подмножеств $B_1, B_2, ..., B_k$:

$$A = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k,$$

где k-заданное число, а также заданы числа $n_1, n_2, ..., n_k$ элементов этих подмножеств. Понятно, что $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Число престановок с повторениями находится по формуле

$$C_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \tfrac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}. \qquad (7)$$

Упражнение 57. Вывести формулу (7).

Решение: Приведем два доказательства формулы (7). Первое - скорее вычислительное, второе - более логическое.

1) Будем последовательно выбирать подмножества $B_1, B_2, ..., B_k$.

Подмножество B_1 можно выбрать $C_n^{n_1}$ способами. После выбора B_1 останется $n - n_1$ элементов и поэтому подмножество B_2 можно выбрать $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами. Аналогично для B_3 есть $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ способов и так далее Для выбора всех k подмножеств по принципу умножения получается

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot ... \cdot C_{n-n_1-n_2-...-n_k}^{n_k}.$$

способов. Запишем числа сочетаний по формуле (2):

$$\tfrac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \tfrac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot ... \cdot \tfrac{(n-n_1-n_2-...-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-...-n_{k-1}-n_k)!}.$$

(Заметим, что в последнем множителе в знаменателе стоит $n_k!0!$)

После очевидных сокращений остается

$$\tfrac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}.$$

2) Задачу нахождения числа перестановок с повторениями можно трактовать как сзему размещения n элементов по k различным урнам м заданным количеством предметов в каждой урне. Число всех перестановок элементов множества A равно $P_n = n!$.

Пусть n элементов разложены по k урнам, причем в первой урне n_1 предметов, во второй n_2, и так далее, в k-ой урне n_k. Перестановки предметов внутри урны не меняют общего размещения. Поскольку число перестановок внутри урны B_j есть $P_{n_j} = n_j!, j = 1, 2, ..., k$, количество **различных** размещений элементов множества A будет равно

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Приммер. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове "мама"

Всего букв n=4. Представим, что каждая буква записана на карточке. Тогда число перестановок карточек равно $P_4 = 4! = 24$. Но взаимные перестановки карточек с буквами а и с буквами м не меняют общего слова. Поэтому число различных слов есть $C_4(2, 2) = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$.

Из примера также можно уяснить,почему число **перестановок** с повторениями обозначается символом $C_n(n_1, n_2, ..., n_k)$, напоминающим число сочетаний C_n^m можно рассматривать как число способов разбить множество из n элементов на два подмножества из m и n-m элементов, то есть $C_n^m = C_n(m, n-m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Упражнение 58. Сколькими способами начинающий шахматист модет расставить белые и черные фигуры на соответственно первой и последней горизонтали шазматной доски?

Решение: Имеется 8 фигур каждого цвета: король, ферзь, две ладьи, два слона и два коня. Для белый фигур число способов расстановки есть $C_8(1, 1, 2, 2, 2) = \frac{8!}{1!1!(2!)^3} = \frac{8!}{8} = 7!$. Столько эе способов расстановки для черных фигур на противоположной горизонтали. Общий ответ по принципу умножения есть$(7!)^2$

Упражнение 59. Сколькими способами 3n различных предметов можно разложить поровну по n урнам, если:

а) урны различны;

б) урны одинковы?

Решение: а) Из формулировки задачи непосредственно следует, что $C_{3n}(\underbrace{3,3,...,3}_{n}) = \frac{(3n)!}{(3!)^n} = \frac{(3n)!}{6^n}$

б) Постраpаемся понять в чем состоит отличие от задачи (а). Различиные урны снабжены метками или номерами: урна 1, урна 2, . . . , урна n. Поэтому, если поменять сожержимое, скажем 1 и 2 урны, то это будет другое распределение предметов по урнам. В б) урны одинаковые, то есть фактически перестановка урн не меняет общего распределения предметов. Так как n урн можно переставлять между собой n! способами, число распределений будет в n! раз меньше ответа к задаче (а), то есть $\frac{(3n)!}{n!6^n}$

7. Сочетания с повторениями.

Определение 24. Пусть m,n - целые числа, $m \geq 0, n \geq 1$. **Сочетанием с повторениями** из n по m назовем выбор m объектов из n **типов** объектов. Число сочетаний с повторениями обозначим $\overline{C_n^m}$.

Удабно использовать представление: объекты n различных типов: тип 1, тип 2, . . . , тип n. Объекты одного типа неразличны между собой. Количество объектов каждого типа неограниченно. Нужно выбрать (набрать) m объектов безралично каких типов.

Другое представление этого кобминаторного понятия связано с уже не раз упоминавшейся задачей распределения предметов по урнам. В данном случае требуется m предметов разложить по n **различным** урнам. Отличием от схемы в упр. 42 является то, что предметы **неразличны**. Поэтому распределения предметов в той или иной урне, а не тем, какие именно предметы попали в данную урну.

Пример. Сколькими способами можно состовить наборы, чодержащие две буквы, из букв a, b, c?

В первой интерпретации нужно выбрать два объекта из трех типов: тип a, тип b, тип c. Получаются наборы из двух букв одного типа: aa, bb, cc, или наборы из двух разных типов: ab, ac, bc. Всего 6 наборов. Во второй интерпретации требуется два одинаковых предмета разложить по трем различным урнам с метками a, b, c. Если оба предмета положить в одну урну, получим сочетания aa, bb или cc. Если положить по одному предмету в две урны, то возникают сочетания ab, ac или bc.

Формула для числа сочетаний с повторениями имеет вид:

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}. \qquad (8)$$

Упражнение 58. Вывести формулу (8).

Решение:Удобно закодировать каждое сочетание вектором из единиц и нулей следующим образом: напишем столько единиц, столько выбрано объектов первого типа, затем поставим ноль, служащий разделителем или перегородкой. Далее опять пишем столько единиц, сколько выбрано объектов второго типа и опять поставим ноль и так далее В конце будут находиться единицы, обозначающие объекты последнего, n-го, типа, после чего ноль уже не нужен. Независимо от способа выбора вектор будет содержать m единиц и n-1 нулей, то есть m+n -1 элементов. Теперь достаточно найти, сколькими способами среди m+n-1 элементов можно выбрать m элементов (единиц) или, эквивалентно, n-1 элементов (нулей). Это число равно C_{n+m-1}^m или , что то же самое, C_{n+m-1}^{n-1}. Формула (8) доказана.

Проиллюстрируем метод вышеперечисленный примером. Выбор aa закодируем вектором 1100. Аналогично, bb-0110, cc - 0011, ab -1010, ac - 1001, bc - 0101. Всего число сочетаний $\overline{C_3^2}$ будет равно $C_4^2 = 6$.

Рассмотрим важную задачу из теории чисел.

Упражнение 61. Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = m,$$

где m - натуральное, n - целое, $n \geq 0$?

Решение: Если определение 24 хорошо понято, то нетрудно заметить, что данная задача дает ещё одно представление для сочетание с повторениями. Действительно, можно считать, что требуется найти число способов разложить m неразличимых предметов по n различным урнам. Здесь номер переменной служит номером урны. Поскольку $x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n$, некоторые урны, как и в общем случае, могут оставаться пустые. Итак, ответом является $\overline{C_n^m}$.

Упражнение 62. Сколько имеется костей домино?

Решение: Можно решить так: костей с разными числами от 0 до 6 имеется $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$; к этому числу надо добавить количество дублей, которых, очевидно, 7. В итоге 28 костей. Но лучше сразу заметить, что число костей есть

$$\overline{C_7^2} = C_{7+2-1}^2 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Упражнение 61. Сколько существует прямоугольных параллелепипедов, у которых длина каждого ребра есть целое число от 1 до 10?

Решение: Требуется выбрать 3 числа (длину, ширину, высоту параллелепипеда) из 10 возможных типой. Ответ:

$$\overline{C_10^3} = C_{10+3-1}^3 = C_12^3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220.$$

Упражнение 64. Сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы трех натуральных слагаемых с учетом порядка?

Решение: Требуется записать n в виде суммы

$$x_1 + x_2 + x_3 = n,$$

где x_1, x_2, x_3 - натуральные числа. В упр. 61 мы видели похожую задачу, но там переменные могли равняться нулю. Представим, что нужно разложить n одинаковых шаров по трех урнам, но так чтобы ни одна урна не была пустой. Положим в каждую урну по шару. Тогда шаров остается n-3, и мы приходим к уравнению

$$x_1' + x_2' + x_3' = n - 3,$$

где новые переменные $x_1', x_2', x_3' \geq 0$. Отсюда получаем ответ:

$$\overline{C_3^{n-3}} = C_{3+n-3-1}^{n-3} = C_{n-1}^{n-3} = C_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

.

8. Формула включений и исключений.

Число элементов в объединении двух множеств A и B равно

$$(9)|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Это легко проверить на диаграмме (рис. 11), цифры показывают, сколько раз учитываются элементы соответствующих частей:

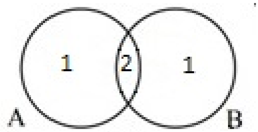


Рис. 11:

Для трех множеств A, B, C формула имеет вид:

$$(10)$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

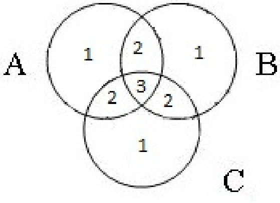


Рис. 12:

Общая формула для объединения n множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ называется **формулой включений и исключений**:

$$(11)\ |\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| -$$
$$... + (-1)^{n-1} |A_1 \bigcap_{i=1}^{n} A_i|.$$

Формулу (11) можно доказать по индукции, используя свойства будевой алгебры множеств.

Онапозволяет находить число объектов, обладающих или не обладающих заданными свойствами.

Упражнение 63. Сколько натуральных чисел из первой сотни не делятся на 2, 3, 5 одновременно?

Решение: Обозначим через A_2 множество натуральных чисел от 1 до 100, делящихся на 2 ; A_3 - делящихся на 3; A_5 - делящихся на 5. Очевидно, эти множества переекаются; к примеру число 6 принадлежит A_2 и A_3, а число 30 принадлежит всех трем множествам. Найдем по формуле 10: $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2A_3| - |A_2A_5| - |A_3A_5| + |A_2A_3A_5|$ (для простоты пересечение множеств записать как произведение). Число элементов A_2 (то есть четных чисел) равно 100 : 2 = 50. Число элементов A_3 есть целая часть от деления 100 на 3, то есть 33. Число элементов A_5 равно 100 : 5 = 20. Если число принадлежит A_2 и A_3, то в сиду взаимной простоты чисел 2 и 3, оно делится на $2 \cdot 3 = 6$. Поэтому $|A_2A_3| = [100/6] = 16$. Аналогично, $|A_2A_5| = [100/10] = 10$, $|A_3A_5| = [100/30] = 3$. Отсюда, $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$. Ответ будет 100 - 76 = 26.

Упражнение 66. Сколько решений имеет уравнение $x + y + z = 10$, где x, y, z -целые числа, удовлетворяющие условиям: $x \geq 0, 1 \leq yle3, 0 \leq z \leq 2$?

Решение: Сначала найдем общее количество решений, удовлетворяющих нижним ограничениями для переменных: $x \geq 0, y \geq 1, z \geq 0$ по образцу упр. 61 и 64. Рассмотрим уравнение $z + y' + z = 9$, где $x, y', z \geq 0$. Число решений равно $\overline{C_3^9} = C_11^2 = \frac{11\cdot10}{2=55}$. Из этого числа вычтем количество решений, нарушающих верние ограничения для переменных. Пусть A_y - множество решений, для которых $y \geq 4$, A_z - множество решений, для которых $z \geq 3$. A_y есть множество решений уравнения $x + y'' + z = 6, x.y'', z \geq 0$ и $|A_y| = \overline{C_3^6} = C_8^2 = \frac{8\cdot7}{2} = 28$. A_z есть множество решений уравнения $x + y''' + z''' = 6$ и $|A_z| = 28$. Множество A_yA_z есть пересечение A_y и A_z, то есть множество решений уравнения $x + y'''' + z'''' = 3, x, y'''', z'''' \geq 0$. Оно сожержит $\overline{C_3^3} = C_5^2 = \frac{5\cdot4}{2} = 10$ решений. Используя (9), имеем число решений, нарушающих условия, равно $|A_y|+|A_z|-|A_yA_z| = 28+28-10 = 46$. Вычитая из общего числа решений получаем ответ: 55- 46 =9.

Далее рассмотрим важное для комбинаторики и приложений понятие.

Определение 25. Перестановка $(a_1, a_2, ..., a_n)$ элементов 1, 2, . . ., n называется **беспорядком**, если $a_i \neq i, i = 1, 2, ..., n$. Другими словами, в беспорядке ни одние элемент не стоит на своем метсте: 1 не находится на первом месте, 2 - на втором, . . ., n - не на n-ом месте. Чисо всех беспорядков из n элементов обозначается D_n (его также называют **субфакторным**), D_0 по определению принимается равным 1, $D_1 = 0$. Для двух элементов D_2, очевиднл, равно 1, для трех элементов 1, 2, 3 существует два беспорядка: (2 3 1) и (3 1 2), то есть $D_3 = 2$.

Формула для беспорядков имеет вид:

$$(12)\ D_n = n!(\tfrac{1}{0!} - \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} - ... + (-1)^n \tfrac{1}{n!}) = n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \tfrac{1}{k!}.$$

Упражнение 65. Вывести формулу (12).

Решение: Из общего числа перестановок $P_n = n!$ вычтем число перестановок, не образующиз беспорядок. Пусть A_1 - множество перестановок, содержащих 1 на первом месте, A_2 - содержащих 2 на втором месте, . . . , A_n - содержащих n на n-ом месте. Число всех "небеспорядков"есть число элементов $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Найдем его по формуле (11).

Для любого $I, 1 \leq I \leq n, |A_i| = (n-1)!$, так как элемент i стоит на i-ом месте, а остальные элементы располагаются правильно. Поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| = n(n-1)! = n!, |A_i \cap A_j| = (n_2)!$, так как два элемента i и j стоят на "своих"местах. Число пар $(i, j)(i \neq j)$ равно $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$. Аналогично, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!$, а число трех (i, j, k) из различных элементов равно $C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3}!$. Продолжая таким же образом, имеем

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = n! - \tfrac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! + \tfrac{n!}{3!(n-3)!}(n-3)! - ... + (-1)^{n_1} \tfrac{n!}{n!0!} 0! =$$
$$\tfrac{n!}{1!} - \tfrac{n!}{2!} + \tfrac{n!}{3!} - ... + (-1)^{n-1} \tfrac{n!}{n!}$$

Тогда:

$D_n = n! - (\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{n!}{n!}) = n!(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!})$

Мы пришли к формуле (12).

Упражнение 68. Клетки шахматной доски нужно раскрасить в 8 цветов так, чтобы в каждой горизонтали встречались все 8 цветов, а в каждой вертикали не втречались подряд две клетки, окрашенные в один цвет. Сколькими способами можно это сделать?

Решение: Для первой горизонтали возможно 8! раскасок. Для второй горизонтали возможно D_8 раскасок, так как они обязаны быть беспорядком по отношению к первой горизонтали. Аналогично, для третьей горизонтали возможно D_8 раскрасок-беспорядков по отногению ко второй горизонтали. Продолжая до последней горизонтали и применяя принцип умножения получаем ответ: $8!(D_8)^7$.

ЗАДАЧИ (к параграфам 6, 7, 8)

81. Сколько слов можно составить, переставляя буквы в словах: а) вектор; б) баобаб; в) математика?

82. Сколькими способами 10 человек можно: а) разделить на две коанды А и В по 5 человек в каждой; б) разделить поровну?

83. а)Сколькими способами коллектив из 8 женщин и 4 мужчие можно разделить на четыре занумерованные группы с равным количеством людей?

б)Сколько способов, при которых в каждой группе будет мужчина?

в) Сколько способов, при которых в каждой группе будет женщина?

84. Сколькими способами 2n различных предметов можно разложить по n урнам, если а) урны занумерованны; б) урны одинаковы?

85. Покажите, что следующие числа - целые (n - натуральное): а) $\frac{(2n)!}{2^n}$; б) $\frac{(2n)1}{n!2^n}$; в) $\frac{(2n)!}{2^n3^n}$; г) $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$

86. Сколькими способами можно составить ожерелье из 3 бусин синего цвета, 4 бусины красного цвета и 5 бусин зеленого цвета (ср. с задачей 70)?

87. Сколько различных комбинаций можно сотавить из 30 монет достоинством 1 рубль, 2 рубля, 5 рублей?

88. Сколькими способами можно разложить 5 рублевых монет и 10 полтинников по 4 различным кошелькам?

89. Сколько существует треугольников , длины сторон которых могут равняться 4,5,6,7?

90. Найти количество целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$, где n,m - целые неотрицательные числа, если:

а) $x_i \geq 0$; б) $x_i > 0$; в) $x_i \geq a_i$; где a_i - заданные целые числа.

91. В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 - на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащизся. Сколько учащихся умеют кататься и на лыжах и на коньках?

92. а) Сколько чисел из первой тысячи не делятся ни на одно из чисел 2, 3, 5?

б) Сколько среди первых ста натуральных чисел простых?

93. Сколько целочисленных решений имеет уравнение $x+y+z=40$, если а) $x,y,z \geq 0$; б)$x,y,z>0$; в) $x \geq, y \geq 0, z \geq 2$; г) $3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5, z \geq 2$?

94. Сколькими способами можно выбрать из колоды, содержащей 52 карты , 6 карт так, чтобы среди них были карты всех четырех мастей?

95. Сколько существует трехзначных числе, у которых сумма цифр равна 20?

96. Вычислите D_3, D_4, D_5.

97. Чему равна доля беспорядков среди всех перестановок из n элементов? К чему стремится это доля при $n \to \infty$?

98. Докажите, что а) $D_n = (n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$; б) $D_n = nD_{n-1}+(-1)^n$ (эти свойства напоминают свойства факториалов, поэтому D_n и называется субфакториалом).

99. Обозначим через $D_{n,k}$ число перестановок из n элементов, у которых ровно k элементов находятся на "своих"местах.

а) Вывсти формул для $D_{n,k}$; б) Найти $\sum\limits_{k=0}^{n} D_{n,k}$.

100. Сколькими способами на щахматной доске 8×8 можно расставить 8 ладей так, чтобы они не были друг друга и что бы на главной диагонали а) не стояла ни одна ладья; б) стояли ровно две ладьи (ср. с упр. 46).

9. Бином Ньютона. Полиномиальная теорема.

Начнем с школьных формул:

$$\begin{aligned}
&(a+b)^0 = 1,\\
&(a+b)^1 = a+b,\\
&(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,\\
&(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.
\end{aligned}$$

Коэффицент в правых частях совпадает с числами сочетаний:

$$\begin{aligned}
&n=0 \qquad C_0^0 = 1'\\
&n=1 \qquad C_1^0, C_1^1,\\
&n=2 \qquad C_2^0, C_2^1, C_2^2,\\
&n=3 \qquad C_3^0, C_3^1, C_3^2, c_3^3.
\end{aligned}$$

Если эти числа расположить в виде треугольника, получится начало известного **треугольника Паскаля**. Числа в каждой строчке симметричнв (свойство сочетаний(3)). А тождество Паскаля (4) означает, что каждыйй внутренний элемент, начиная с n=2, равен сумме, стоящих под ним элементов предыдущей строки. Таким образом, можно продолжать треугольник до бесконечности.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Если предположить о связи чисел сочетаний с формулой возведения в степень верно, то должны быть справедливы формулы:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

и так далее То, что это действительно так объясняет знаменитая формула, называемая **бином Ньютона**:

$$(13)$$
$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k$$

Поскольку числа сочетаний C_n^k являются коэффицентами в разложении в бином Ньютона, их ещё называют **биномиальными коэффицентами**.

Упражнение 69. Доказать формулу (13).

Решение: В курсе математического анализа обычно используют доказательство методом математической индукции. На наш взгляд, комбинаторное доказательство лучше проясняет смысл формулы.

Запишем, произведение n скобок $(a+b)\cdot(a+b)\cdot...\cdot(a+b)$. Если раскрыв произведение, то есть произвести умножение всех скобок, получится сумма, состоящая из 2^n слагаемых (почему?) вида $a^{n-k}b^k$, где k может равнятся 0, 1, . . ., n. Приведя подобные, замечаем, что слагаемое $a^{n-k}b^k$ содержится C_n^k раз, так как из k скобок в качестве множителя выбрано b, а из остальных n-k скобок - выбрано a. Остается только написать сумму приведенных членов: $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^ka^kb^{n-k}$, что и доказывает (13). Отметим, что формула бинома можно записать в виде

$$(13')(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k,$$

то есть по возростающим степеням a.

Пример. Записать $(a-b)^6$

Коэффиценты разложения возбмем из строчки треугольника Паскаля при n =6. Заметим, что при нечетных степнях перед слагаемым будет знак минус, а при четных - плюс. Получим:

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$$

Упражнение 70. Доказать **комбинаторные тождества**:

$$\text{а) } \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n; \qquad (14)$$

$$\text{б) } \sum_{k=0}^{n} (-1) C_n^k = 0; \qquad (15)$$

$$\text{в) } \sum_{0 \geq k \geq \frac{n}{2}} C_n^2 k = \sum_{0 \geq k \geq \frac{n-1}{2}} C_n^{2k+1}; \qquad (16)$$

Данные торждества, связаны с числами сочетаний, не только позволяет упрощать рузельтат, но и по-иному их интерпретировать.

Решение: а) Первый способ: сумма всех чисел сочетаний - это число всех подмножеств n-элементного множества. Оно равно 2^n (теорема 2). Второй способ: положить в формуле бинома (13) a=b=1.

Формула (14) позволяет утверждать, что сумма всех чисел в n-ой строчке треугольника Паскаля равна 2^n.

б) Положим в (13) a=1, b=1. Из (15) следует, что знакочередующаяся сумма чисел в любой строчке треугольника Паскаля равно нулю.

в) Складывая левые и правые части в (14) и (15), получим $2 \sum_{0 \geq k \geq \frac{n}{2}} C_n^2 k = 2^n$, откуда следуют оба результата в (16). Формулы (16) означает, что сумма по четным верхним индексам чисел в строчке треугольника Паскаля равна сумме по нечетным верхним индексам, и обе они равны половине суммы всех чисел строчки.

Упражнение 71. Вычислить сумму:
$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 1C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n.$

Решение: Запишем бином $(1+x)^n = 1+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$. Дифференцируя обе части тождества, имеем:

$n(1+x)^{n-1} = 1C_n^1 + 2C_n^2x + ... + nC_n^nx^{n-1}.$

Полагая x=1, получаем

$1C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}. \qquad (17)$

Рассмотрим более сложное **тождество Вандермонда**:

Упражнение 72. Доказать

$$C_n^0C_m^k + C_n^1C_m^{k-1} + ... + C_n^kC_m^0 = C_{n+m}^k \qquad (18)$$

Решение: Запишем два разложения по формуле бинома:

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n; \qquad (*)$$
$$(1+x)^m = 1 + C_m^1x + C_m^2x^2 + ... + C_m^mx^m; \qquad (**)$$

Перемножая левые части равенства, имеем $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$.

Расскладывая последнее выражение, получим Решение: Запишем два разложения по формуле бинома:

$$(1+x)^{n+m} = 1 + C_{n+m}^1x + C_{n+m}^2x^2 + ... + C_{n+m}^{n+m}x^{n+m}, \qquad (***)$$

то есть многочлен степени n+m. С другой чтороны, премножая правые части (*) и(**), получим этот же многочлен.

Два многочлена равны, когда коэффиценты при одинаковых степенях переменной совпадают. Коэффиценты при x^k в (***) равен C_{n+m}^k. Чтобы получить такой же коэффицент в произведении (*) и (**), нужно сложить произведения коэффицентов при x^i в (*) и x^{k-i} в (**) по всем i, $0 \geq i \geq k$. В итоге приходим к равенству:

$$C_{n+k}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i \cdot C_m^{k-i},$$

которое совпадает с (18).

Важный частный случай формулы (18) получается при n=m=k. При этом $C_n^i = C_n^{n-i}$ (тождество (3)) и поэтому

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2 = c_2n^n. \qquad (19)$$

Упражнение 71. При каком n в разложении $(\frac{x}{5} + \frac{2}{5})^n$ наибольший коэффицент находится при x^9?

Решение: Запишем исходное выражение как $\frac{(x+2)^n}{5^n}$. Коэффицент при x^9 равен $\frac{2^9C_n^{n-9}}{5^n} = \frac{C_n^9 \cdot 2^9}{5^n}$. Поскольку он набольший, обязаны выполняться неравенства

$$\frac{C_n^9 \cdot 2^9}{5^n} > \frac{C_n^8 \cdot 2^8}{5^n},$$
$$\frac{C_n^9 \cdot 2^9}{5^n} > \frac{C_n^10 \cdot 2^10}{5^n},$$

Из первого нераверства следует:

$$2\frac{n!}{9!(n-9)!} > \frac{n!}{8!(n-8)!},$$

откуда $\frac{2}{9} > \frac{1}{n-8}$, или $2n - 19 > 9, n > 12,5$.

Из второго следует:

$$2\frac{n!}{9!(n-9)!} > \frac{n!}{10!(n-10)!},$$

откуда $\frac{1}{n-9} > \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, или $n - 9 < 5, n < 14$.

Поскольку n - целое число, подходящим значение может быть только n = 13.

Ответ: n =13.

Обощением биномиальной формулы (13) является **полиномианальная формула** для n-ой степени k слагаемых $a_1, a_2, ..., a_k$:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^k = \sum_{\substack{0 \le n_1, n_2, ..., n_k \le n \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n}} C_n(n_1, n_2, ..., n_k) a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_k^{n_k} =$$

$$= \sum_{\substack{0 \le n_1, n_2, ..., n_k \le n \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_k^{n_k}. \qquad (20)$$

Суммирование в (20) идет по всем наборам неотрицательых целый чисел $n_1, n_2, ..., n_k$, сумма которых равна n. Поскольку коэффицентами в (20) являются числа перестановок с повторениями $C_n(n_1, n_2, ..., n_k)$, их ещё называют **полиномиальными коэффицентами**.

Доказательство формулы (20) может быть проведено аналогично доказательству биномиальной формулы (13) и предлагается для самостоятельного решения.

Пример. Разложить $(x + y + z)^3$.

Показатель n=3 может бвть представлен в виде суммы трех неотрицательных слагаемых следующими способами:

$3 + 0 + 0 = 0 + 3 + 0 = 0 + 0 + 3 = 2 + 1 + 0 = 2 + 0 + 1 = 1 + 2 + 0 = 0 + 2 + 1 = 1 + 0 + 2 = 0 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1$

Записывая соответствующие коэффиценты, получаем следующее разложение:

$$\frac{3!}{3!0!0!}x^3 + \frac{3!}{0!3!0!}y^3 + \frac{3!}{0!0!3!}z^3 + \frac{3!}{2!1!0!}x^2y + \frac{3!}{2!0!1!}x^2z + \frac{3!}{1!2!0!}xy^2+$$

$$+\frac{3!}{0!2!1!}y^2z + \frac{3!}{1!0121}xz^2 + \frac{3!}{0!1!2!}yz^2 + \frac{3!}{1!1!1!}xyz =$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + 6xyz.$$

Упражнение 74. а) Чему равны коэффиценты при x^17 и x^18 в разложении $(1-x^2-x^7)^n$? б) Чему равна сумма всех коэффицнтов?

Решение: Показатель 17 у пременной х можно получить единственным способом: $9 - x)^5 \cdot (-x)^7$. Раскладывая $(a + b + c)^n$ по полиномиальной формуле (20), где $a = 1, b = -x^5c = -x^7$, имеем коэффицент при $a^{n-3}b^2c$,равный $C_n(n - 3, 2, 1) = \frac{n!}{(n-3)!2!1!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$. Естественно, этот коэффицент будет иметь знак минус. Ответ: $-\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$.

б) Для произвольного многочлена $P_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ сумма клэфиицентов $a0 + a_1 + ... + a_n$ совпадает с значением $P_n(1)$. Поэтому сумма коэффицентов в разложении $(1 - x^2 - x^7)^n$ равна значению выражения при х=1, то есть $(-1)^n$. Следовательно, при четном n ответ 1, при нечетном n ответ -1.

10. Рекуррентные соотношения. Производящие функции.

Определение 26. Последовательность a_n задается **рекуррентным соотношением** k порядка, если

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k}), \qquad (21)$$

где f -некоторая заданная функция. Другими словами, n-ый член послеовательности вычисляется по k предыдущим членам $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-}$ этой же последовательности.

Для того, чтобы "запустить"процесс вычисления, необходимо знать k **начальных значений** последовательности.

Пример. Последовательность $a_n = n!$ удовлетворяет реккуррентному соотношению первого порядка $a_n = na_{n-1}$, так как $n! = n(n-1)!$. Начальное значение $a_0 = 0! = 1$

Общее решение рекуррентное соотношение состоит из всех последовательностей a_n, удовлетворяющих (21). Последовательность a_n, входящая в общее решение и удовлетворяющая начальным условиям, называется **частным решением** (21).

Упражнение 73. Задать последовательность рекуррентных соотношений:и а) $A_n = c + n$; б) $a_n = cn$; в) $a_n = c^n$, где c=const.

Решение: а) По условию $a_n = c+n, a_{n-1} = c+n-1$. Вычитая, имеем $a_n - a_{n-1} = 1$ или $a_n = a_{n-1} + 1$; б) аналогично предыдущему $a_n = cn, a_{n-1} = c(n_1) = cn - c$, откуда $a_n - a_{n-1} = c$ или $a - n = a_{n-1} + c$; в) $a_n - c^n, a_{n-1} = c^{n-1}$. Беря отношение, получим $\frac{a_n}{a_{n-1}} = c$ или $a_n = ca_{n-1}$.

Рекуррентные соотношения часто возникают в комбинаторных задачах.

Упражнение 76. На сколько частей делят плоскость n окружностей при условии, что каждые две окружности имеют одну общую хорду и никакие три окружности не пересекаются в одной точке?

Решение: Обозначим искомое число через a_n. Для начала найдем $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8$. Возникает предположение: $a_n = 2^n$.

Попробуем теперь рассуждать. Пусть проведена (n+1)-я окружность. По условию она пересекается в двух точках с каждой из предыдущих окружностей, причем это точки различныы. Следовательно, последняя окружность имеет с предыдущими 2^n точек пересечения. Эти точки разбивают окружность на 2^n дуг. Каждая из этих дуг разбивает часть плоскости на две новые части. Отсюда, количество частей плоскости a_{n+1} увеличивается на 2^n по сравнению с a_n. Таким образом, верно соотношение: $a_{n+1} = a - n + 2^n$. Удобнее это рекуррентное соотношение записать как $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$.

Для нахождения решения соотношения запишем $a_n = 2(n-1) + a_{n-1}$, а последний член снова распишем по соотношению: $a_n = 2(n-1) + a_{n-2} + 2(n-2)$. Продолжая так, получим:

$$a_n = 2(n-1) + 2(n-2) + ... + 2 \cdot 1 + 2 = 2(1 + 2 + ... + n - 1) + 2 = 2 \cdot \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} + 2 = n(n-1) + 2 = n^2 - 2n + 2.$$

Значит, первоначальное предположение, что ответом является 2^n, оказалось неверным. Впрочем, по зрелому рассуждению, можно было догадаться лб этом сразу. Ведь 2^n означало бы, что **каждая** "старая"часть плоскость новой окружности делится на две, в то время, ка это справедливо лишь для некоторых частей.

Рассмотрим важный класс рекуррентных соотношений.

Определение 27. Линейным рекуррентным соотношением с постоянными коэффицентами порядка k называется соотношение вида

$$a_{n+k} = p_1 a_{n+k-1} + p_2 a_{n+k-2} + ... + p_k a_n, \qquad (22)$$

где $p_1, p-2, ..., p_k$ - постоянные.

Для соотношений (22) возможно записывать общее решение методом, позожим на решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффицентами.

Уравнение $x^k = p_1 x^{k-1} + p_2 x^{k-2} + ... + p_k$ называется **характеристическим**. Если корни $x_1, x_2, ..., x_k$ характеристического уравнения простые (то есть все различные) действительные, то общее решение соотношения (22) имеет вид

$$a_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + ... + C_k x_k^n.$$

где $C_1, C_2, ..., C_k$ - произвольные постоянные. Если x_i - дйствительный корень **кратности S** характеристического уравнения, то ему соответственно слагаемое общего решения

$$x_i^n(C_i1 + C_i2n + C_i3n^2 + ... + C_isn^{s-1}).$$

Зная k начальных значений $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ последовательности a_n, можно получить частное решение соотношения (22), подставляя начальное значение в общее решение и находя константы $C_1, C_2, ..., C_k$ из получающейся системы.

Упражнение 77. Найти общее решение рекурентного соотношений:

а) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$;
б) $a_{n+2} = 3a_n$;
в) $a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n$;
г) $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0$.

Решение: а) Характеристическое уравнение имеет вид:

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

его корни$x_1 = 1, x_2 = \sqrt{3}$. Общее решение: $a_n = C_1 + C_2 3^n$

б) Характеристическое уравнение имеет вид:

$$x^2 - 3 = 0,$$

его корни$x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$. Общее решение:
$a_n = C_1(-\sqrt{3})^n + C_2(\sqrt{3})^n$

в) Характеристическое уравнение имеет вид:

$$x^2 + 2x + 1 = 0,$$

его корни$x_1 = -1$, кратности 2. Общее решение:
$a_n = (-1)^n({}_1 + nC_2)$

г)Характеристическое уравнение имеет вид:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0,$$

его корни$x_1 = 1$, имеет кратность 3. Поэтому общее решение запишется как

$a_n = 1^n(C_1 + nC_2 + n^2C_3) = C_1 + nC_2 + n^2C_3$

Упражнение 78. Найти частные решения соотношений:

а) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n, a_0 = 10, a_1 = 16;$

б)$a_{n+2} = 2\cos\alpha a_{n+1} - a_n, a_0 = \cos\alpha, a_1 = \cos 2\alpha;$

в)$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_{n-1}a_0 = 3, a_1 = 6.$

Решение: а) Общее решение соотношения найдено в упр 77(а):

$$a_n = C_1 + C_2 3^n,$$

Подставляя в это находим $C_1 = 7, C_2 = 3$. Частное решение имеет вид

$$a_n = 7 + 3^{n+1}.$$

б) Находим общее решение. Характеристичесикое кравнение:

$$x^2 - 2\cos\alpha x + 1 = 0,$$

Его корни $x_{1,2} = cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}$. Поскольку рассматриваются только действительные корни, $\cos^2\alpha$ обязан ровняться 1, $\cos\alpha = \pm 1$. Если $\cos\alpha = 1, \alpha = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, x_{1,2} = \cos\alpha = 1$. Общее решение:

$$a_n = 1^n(C_1 + C_2 n) = C_1 + C_2 n.$$

Подставляем начальные значения, получим систему

$$\begin{cases} \cos\alpha = 1 = C_1 + C_2 \cdot 0, C_1 = 1, \\ \cos 2\alpha = 1 = C_1 + C_2, C_2 = 0. \end{cases}$$

Частное решение: $a_n = (-1)^n, n = 0, 1, ...$

Его $\cos\alpha = -1, \alpha = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, x_{1,2} = -1$. Общее решение:

$$a_n = (-1)^n(C_1 + C_2 n).$$

Подставляем начальные значения, получим систему

$$\begin{cases}\cos\alpha = -1 = C_1, C_1 = -1,\\ \cos 2\alpha = 1 = -C_1 - C_2, C_2 = 0.\end{cases}$$

Частное решение: $a_n = (-1)^{n+1}, n = 0, 1, ...$

в) Это соотношение отличается от структур (22) Наличием свободного члена. Чтобы приветси соотношение к нужному виду, запишем вместе с ни соотношение, "сдвинутое"на один шаг:

Его корни $x_{1,2} = cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}$. Поскольку рассматриваются только действительные корни, $\cos^2\alpha$ обязан ровняться 1, $\cos\alpha = \pm 1$. Если $\cos\alpha = 1, \alpha = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, x_{1,2} = \cos\alpha = 1$. Общее решение:

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - 1,$$
$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} - 1.$$

Вычитая из второго равенства первое, получаем рекуррентное соотношение третьего порядка:

$$a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n.$$

Характеристическое уравнение: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$. Поскольку корень $x_1 = 1$ легко угадывается, то остальные корни $x_2 = z, x_3 = 2$. Общее решение:$a_n = 1^n(C_1 + C_2 n) + C_3 \cdot 2^n = C_1 + C_2 n + C_3 2^n$.

Из исходного соотношения найдем $a_3 = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 3 - 1 = 11$. Подсавляя в общее решение значения $a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 11$, получаем систему:

$$\begin{cases}C_1 + C_2 + 2C_3 = 3,\\ C_1 + +2C_2 + 4C_3 = 6,\\ C_1 + 3C_2 + 8C_3 = 11.\end{cases}$$

Из нее находим $C_1 = 0, C_2 = C_3 = 1$. Искомое частное рещение имеет вид: $a_n = n + 2^n$.

Знаменитая последовательность **чисел Фибоначчи** 1,1,2,3,5,8,13,21, . . . определяется рекуррентным соотношением

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \geq 1. \qquad (23)$$

Упражнение 79. Найти выражение для общего члена последовательности Фибоначчи.

Решение: Характеристическое уравнение: $x^2 - x - 1 = 0$, его корни $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. (Отметим, что корень$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ есть не что иное, как "золотое сечение "). Общее решение соотношения (23):

$$a_n = C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

Подставляя $a_1 = a_2 = 1$, получим систему

$$\begin{cases} C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1, \\ C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = 11. \end{cases}$$

Умножим члены первого уравнения на $\frac{16\sqrt{5}}{2}$ и вычтем из второго уравнения.

$$\begin{cases} {\scriptstyle 2}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 - C_2\frac{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{2^2} = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ C_2\frac{1-2\sqrt{5}+5-1+5}{4} = \frac{1-sqrt5}{2}, \\ C_2\frac{5-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, C_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \\ C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}.} \end{cases}$$

Общий член последовательности Фибоначчи, следовательно, имент вид

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n). \qquad (24)$$

(Формула Бине)

Интересно, что выражение (24) имеет иррациональный вид , хотя все члены последовательности - натуральные числа.

Одним из самых эффективных способов решения комбинаторных задач являетсяметод производящих функций.

Определение 28. Производящей функцией для последовательности a_n называется функция

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (25)$$

то есть сумма степенного, коэффиценты которого являются члены последовательности. Разумеется, функция $A(x)$ рассматривается только в области сходимости ряда.

Примеры: а) Последовательность $a_n \equiv 1$, то есть все члены последовательности - единицы. Производящая функция $A(x)$,согласно (25), имеет вид:

$$A(x) = 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + ... + 1 \cdot x^n + ... = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

Это -сумма геометрической прогрессиии с знаменателем x, следовательно, $A(x) = \frac{1}{1-x}$

Область сходимости ряда есть $|x| < 1$, оно и будет областью определения функции $A(x)$. Если, скажем, подтавить значение $x = 2$, не входящее в область определения, получим абсурдное равенство:

$$-1 = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n + ...$$

б) Последовательность a_n задается условием :

$$a_n = \begin{cases} 0, 0 \leq n \leq m-1, \\ 1, n > m. \end{cases}$$

a_n содержит вначале m нулей, а все последующие члены - единицы. Производящая функция имеет вид:

$$A(x) = 0{\cdot}1 + 0{\cdot}x + 0{\cdot}x^2 + ... + 0{\cdot}x^{m-1} + 1{\cdot}x^m + 1{\cdot}x^{m+1} + 1{\cdot}x^{m+2} + ... = \\ x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + ... = x^m(1 + x + x^2 + ...)$$

В скобках стоит тот же ряд, что в пункте а), следовательно,

$$A(x) = \frac{x^m}{1-x}, |x| < 1$$

Упражнение 80. Вычислить производящую функцию для биномиальных коэффицентов C_n^m.

Решение: В данном случае последовательность связана с переменным индексом m, а n - константа, то есть $a_m = C_n^m, m = 0, 1, 2, ..., n$. Поэтому

$$A(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^m$$

Нетрудно заметить, что получтвшаяся сумма есть разложение по биному Ньютона (13) $(1+x)^n$. Получился простой, но важный результат: производящей функцией для биномиальных коэффицентов является функция $A(x) = (1+x)^n$.

Упражнения 81. Зная производящую функцию $A(x)$ для последовательности $\{a_n\}$, найти производящую функцию $B(x)$ для последовательности $\{b_n\}$:

а) $b_n = a_{n-1}$; б) $b_n = a_{n+1}$; в) $b_n = na_n$; г) $b_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$.

Решение: а) По определению $B(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + ... + a_{n-1} x^n + ... = x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1}) = xA(x)$.

б) $B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n + ... = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + ... + a_{n-1} x^n + ... = \frac{1}{x}(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_{n+1} x^{n+1})$. В скобках записана производящая функция $A(x)$ без свободного члена a_0. Поэтому ответ: $B(x) = \frac{1}{x}(A(x) - a_0)$.

в) $B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n + ... = 0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 x + 2 \cdot a_2 x^2 + ... + na_n x^n + ... = a1x + 2a_2 x^2 + ... + na_n x^{n-1} + ...) = x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_x^n + ...)' = xA'(x)$.

г) $B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n + ... = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + ... + (a_0 + a_1 + ... + a_n)x^n + ... = (a_0 + a_0 x + a_0 x^2 + ... + a_0 x^n + ...) + (a_1 + a_1 x + a_1 x^2 + ... + a_1 x^n + ...) + ... = a_0(1 + x + x^2 + ... + x^n + ...) + a_1 x(1 + x + x^2 + ... + x^n + ...) + ... = (1 + x + x^2 + ... + x^n + ...)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...) = \frac{A(x)}{1-x}$.

Определение 29. Сверткой последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называется последовательность $\{c_n\}$, общий член которого имеет вид:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0$$

Свертка обозначается $\{c_n\} = \{a_n\} * \{b_n\}$ равна произведению производящих функций:

$$C(x) = A(x) \cdot B(x) \qquad (25)$$

С этой точки зрения результат в упр.81(г) можно было бы получить так: последовательность $\{b_n\}$ есть свертка последовательности $\{a_n\}$ и последовательности $\{c_n\}$, состоящей из единиц: $C_n \equiv 1$.

Производящая функция последней последовательности, как мы знаем(пример (а)), равна $\frac{1}{1-x}$. Поэтому ответ получаем сразу по формуде (26): $B(x) = A(x) \cdot \frac{1}{1-x}$.

Читатель может заметить, что фактически это же прием с учетом результата упр.80 был использован при выводе тождества Вандермонда (18) (упр.72).

Основная идея метода производящих функций состоит в том, что если a_n - решение комбинаторной задачи, содержащей параметр n, и известна производящая функция $A(x)$ последовательности $\{a_n\}$, то раскладываея $A(x)$ в степенной ряд, получаем значение a_n как коэффиценьа при x^n.

Пример. Найти число сочетаний из трех предметов (типов) 1, 2, 3 при условии, что 1,2 могут встречаться не более двух раз, а 3 - не более одного.

Рассмотрим фукнцию $A(x) = (1+x+x^2)(1+x+x^2)(1+x) = 1+3x+5x^2+5x^3+3x^4+x^5$. Коэффицент при $x^n, n = 0, 1, ..., 5$, показывает число соответствующих сочетаний по n элементов. Так, коэффицент 5 при x^3 означает, что существует 5 сочетаний по 3 элемента: 1, 1,2; 1, 1, 3; 1, 2, 2; 1, 2, 3; 2, 2, 3. Сумма всех коэффицентов дает общее число сочетаниц с указанными ограничениями: 18.

При реализации метода часто приходится использовать биномиальный ряд Ньютона, являющийся обобщением биномиальной формулы(13) разложения $(a+b)^n$ на случай ненатурального n:

$$(a+x)^n = \\ a^n + \tfrac{n}{1!}a^{n-1}x + \tfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + ... + \tfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}a^{n-k}x^k + ... \qquad (27)$$

Форммула (27) имеет место при $a > 0$ и $|x| < a, n \in \mathbb{R}$. При натуральном n ряд обрывается и переходит в формулу (13).

Упражнение 82. Абитуриенту для поступления в вуз достаточно набрать 17 баллов в 4 экзаменах. а) Сколькими способами он может получить это число баллов? б) Сколько способов он иожет получить не меньше 17 баллов?

Решение: На первом экзамене абитуриент может получить 3, 4 или 5 баллов. Сопоставим этому результату выражение $x^3+x^4+x^5$. На остальных экзаменах аналогичная ситуация. Следовательно, производящая функция имеет вид: $A(x) = (x^3 + x^4 + x^5)^4 = x^12(1+x+x^2)^4$. Раскладывая ее в многочлен, убеждаемся, что коэффиценты при x^17 равен 16- ответ на п а) Сумма коэффицентов при x^17, x^18, x^19, x^20 равна 31 - ответ на п. б).

Упражнение 83. Разложить в ряд $\frac{1}{(1-x)^n}, n$ - натуральное. Какую комбинаторную итерпретацию имеет полученный результат?

Решение: Запишем $\frac{1}{(1-x)^n}$ как $(1 + (x))^{-n}$. По формуле (27)

$$(1 + (-x))^{-n} = 1 + \frac{-n}{1!}(-x) + 1 + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}(-x)^2 + ...$$

$$... + \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)...(-n-k+1)}{k!}(-x)^k + ... =$$

$$= 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + ...$$

$$... + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)...(n+k-1)}{k!}x^k + ...$$

Заметим, что по формуле (2) для числа сочетаний

$$\frac{n}{1!} = C_n^1, \frac{n(n+1)}{2!} =$$

$$= C_{n+1}^2, ..., \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)...(n+k-1)}{k!} = C_{n+k-1}^k, ...$$

Таким образом,

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k. \qquad (28)$$

Коэффицент при x^k равен C^k_{n+k-1} - формула (8) для числа сочетаний с повторениями $\overline{C^k_n}$. Значит, сожно утверждать, что функция $A(x) = \frac{1}{(1-x)^n}$ есть производящая функция для $\overline{C^k_n}$. Почему получился такой результат? Будем рассуждать, как в вышеприведенном примере и упр. 82. $\overline{C^k_n}$ обозначает число способов выбрать 0,1,2,... способами. Такому выбору соответствует ряд $1 + x + x^2 + ...$ Для предметов второго, третьего и так далее типов ситуация аналогична. Таким образом, производящая функция $A(x) = (1 + x + x^2 + ...)^n = \frac{1}{(1-x)^n}$. Можно было бы, отталкиваясь от этой функции, констатировать, что чисо способав выбрать k предметов из n типов равно коэффиценту при x^k в разложении функции $\frac{1}{(1-x)^n}$ в ряд и, как следствие, вывести формулу $\overline{C^k_n} = C^k_{n+k-1}$.

Упражнение 83. Сколькими способами можно выбрать m предметов из n типов, если предмет каждого типа должен быть выбрать хотя бы раз?

Решение: Составим производящую функцию. Для каждого типа число выбранных предметов равно 1,2 , . . . , поэтому

$$A(x) = (x + x^2 + x^3 + ...)^n = x^n(1 + x + x^2 + ...)^n = \frac{x^n}{(1-x)^n}.$$

Разложим $A(x)$ в ряд , используя (28):

$$\frac{x^n}{(1-x)^n} = x^n \frac{1}{(1-x)^n} = x^n \sum_{k=0}^{\infty} C^k_{n+k-1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} C^k_{n+k-1} x^{k+n}.$$

Удобно произвести перенумерацию. Обозначим k+n = m. Тогда ряд запишем как $\sum_{m=n}^{\infty} C^{m-n}_{m-1} x^m$. Ответ на задачу: C^{m-n}_{m-1} при условии $m \geq n, 0$ если $m < n$.

Для нахождения общего члена a_n последовательности по ее производящей функции $A(x)$ в ряд. Можно использовать известные разложения в ряд Тейлора. Часто встречается ситуация, когда $A(x)$ если **рациональная функция**, то есть отношение двух многочленов. В этом случае удоюно разложить $A(x)$ на элементарные дроби.

Упражнение 85. Найти общий член последовательноси $\{a_n\}$ по ее производящей функции: а) Используя стандартное представление функции $\ln(1+x)$ рядом Тейлора: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!} + ...$. Следовательно, $a_0 = 0, a_1 = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, n \geq 1$.

б) Корни знаменателя $x = 2, x = 3$, фнкция раскладывается на ссумму элементарных дробей:

$$\frac{1-7x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)};$$

Подставляя числители значения x=2 и x=3,получаем систему:

$$\begin{cases} -B = -A; \\ -20 - B; \end{cases}$$

$A = B, B = -20$. Таким образом $A(x) = \frac{13}{x-2} - \frac{20}{x-3}$

Запишем первую дробь как $\frac{13}{-2(1-\frac{x}{2})} = -\frac{13}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}}$.

Выражение $\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$ есть сумма геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{x}{2}$:

$\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + (\frac{x}{2})^2 + ... + (\frac{x}{2})^n + ...$

Аналогично, для второй дроби

$$\frac{20}{-3(1-\frac{x}{3})} = -\frac{20}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}, \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = 1 + \frac{x}{3} + (\frac{x}{3})^2 + ... + (\frac{x}{3})^n + ...$$

В итоге

$$A(x) = -\frac{13}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n + \frac{20}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^n =$$

$$= -13\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} + 20\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{20}{3^{n+1}} - \frac{13}{2^{n+1}} \quad (1)$$

.

Получим ответ:

$$a_n = \frac{20}{3^{n+1}} - \frac{13}{2^{n+1}}$$

.

В заключение расссмотрим, как находить производяющую функцию для последовательности, заданной рекуррентным соотношение.

Упражнение 86. Найти общий член последовательности $\{a_n\}$, заданной нелинейным рекуррентным соотношением.

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + ... + a_{n-1} a_1, a_0 = 1$$

Решение: Умножим обе части равенства на x^n и просуммируем по $n \geq 1$. Получим равенство для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + ... + a_{n-1} a_1) x^n =$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + ... + a_{n-1} a_1) x^{n-1}$$

Заметим, что ряд в левой части есть $A(x) - a_0 = A(x) - 1$. Далее, в правой части записана производящая функция свертки последовательности $\{a_n\}$ с собой, то есть $\{a_n\} \times \{a_n\}, n = 1, 2, ...$ (Обратите внимание на нумерацию, вот почему нужно было вынести x за знак суммы). По теореме 6 о светрке имеет:

$$A(x) - 1 = x A^2(x)$$

Получем алгебраическое уравнение относительно неизестной функции $A(x)$. Обозначим времено $A(x) = y$ и решим квардратное уравнение.

Получим $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$.

Корень $\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ - не подходит, так как $\lim_{x \to 0} \frac{1-1+4x}{2x(1+\sqrt{1-4x})} = \infty$., а по условию $A(0) = a_0 = 1$. Для второго корня $\lim_{x \to 0} \frac{1-1+4x}{2x(1+\sqrt{1-4x})} = \lim \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}} = 1$

Следовательно, производящая функция $A(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Остается разложит ее в ряд. Соглано формуле (28), имеем

$$\begin{aligned}(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(-4x) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-4x)^2 + \\ + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}(-4x)^3 + ... = \\ = 1 - 2x - \frac{1}{2!}\frac{1 \cdot 1}{2^2}4^2x^2 - \frac{1}{3!}\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2^3}4^3x^3 - ... = \\ = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2k-3)}{2^k}4^kx^k \quad (2)\end{aligned}$$

Добавляя в числитель и знаменатель множитель $(2k-1)k!$ получим

$$\begin{aligned}(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2k-3)(2k-1)(2k-1)k!}{2^k(2k-1)k!}4^kx^k = \\ = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2k}{k!2^k2^k(2k-1)}4^kx^k = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{(2k)!}{(2k-1)k!}x^k = \\ = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^{k}\frac{1}{2k-1}x^k \quad (3)\end{aligned}$$

Тогда $A(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} C_2k^k \frac{1}{2k-1}x^k$,
иил проведя перенумерацию $A(x) - \frac{1}{2}C_{2n+2}^{n+1}\frac{1}{2n-1}x^n$.
Таким образом, $a_n = \frac{1}{2}C_{2n+2}^{n+1}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{n+1}C_2n^n$.

Числа $\frac{1}{n+1}C_2n^n$ называются **числами Каталана**. Они находят применение во многих комбинаторных задачах.

ЗАДАЧИ

к параграфам 9,10.

101. Найдите n, если известно, что в разложении $(1+x)^n$ коэффиценты при x^5 и x^12 равны.

102. Найти наибольший коэффицент многочленов: а)$(2+x)^8$; б)$(1+2x)^8$.

103. Найти наибольший коэффицент разложения $(a+b)^n$, если сумма всех коэффицентов равна 4096.

104. Найти коэффицент при x^k в разложении:

а)$1+(1+x)+(1+x)^2+...+(1+x)^n, 0\leq k\leq n$;

б) $(1+x)^m+(1+x)^{m+1}+...+(1+x)^n$

105. Используя бином Ньютона, дакажите, что:

а)$(1+x)^n+(1-x)^n\leq 2^n, |x|\leq 1, n\geq 2$;

б)$|(1+x)^2m-(1-x)^2m|\leq 4^m, |x|\leq 1$;

в) $n^{n+1}>(n+1)^n, n\geq 3$.

106. Пользуясь полиномиальной формулой (20), вычислит: а) $(x+y+z)^7$; б) $(2x+y-z)^3$; в) $(x-2y+z-1)^3$.

107. Чему равен коэффицент:

а) при $x^2y^3z^7$ в разложении $(x+y+z)^7$

б) при x^ky^m в разложении $(1+x+y)^n$

в) при x^3 в разложении $4\sqrt{x}+3\sqrt{x}+\sqrt{x})$

г) при x^k в раложении $(1+x+...+x^{n-1})$? Чему равны суммы всех коэффицентов?

108. Доказать тождества:

а) $\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+\frac{1}{5!(n-5)!}+...+\frac{1}{(n-1)!1!}=\frac{2^{n-1}}{n!}$

б) $\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{2^{n-1}-1}{n+1}$;

в)$\sum_{k=0}^{\infty}k^2C_n^k=n(n+1)2^{n-2}=2^{n-2}C_{n+1}^2$;

г) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}kC_n^k=0, n>1/$

109 Вычислить суммы:

а)$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)C_n^k$;

б) $\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)C_n^k$;

в)$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)C_n^k$;

г)$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_n^k}{k+2}$;

д)$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{C_n^k}{k+1}$;

е) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(C_n^k)^2$.

110. Найти общее решение рекуррентных соотношений: а)$a_{n+2} = a_n$ б)$a_{n+3} = a_{n+1}$ в)$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 3a_n - 2$

111. Найти частные решения рекуррентных соотношений из 110, удовлетворяющие начальным условиям: а)$a_0 = 1, a_1 = -1$; б)$a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 3$; в)$a_0 = -1, a_1 = 0, a_2 = 3$.

112. Пусть a_n - число частей, на которые n попарно перечекающихся прямых делят плоскость, при условии, что никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Составьте рекуррентное соотношение для a_n и решите его.

113. На сколько частей делят пространство n плоскостей, проходящих через точку A, если никакие три из них не проходят черезе одну прямую?

114. Вычислить производящие функции последовательномтей:

а)

$$a_n = \begin{cases} 1, n = m, \\ 0, n = 0, 1, 2, ..., m-1, m+1, ...; \end{cases}$$

б)

$$a_n = \begin{cases} 1, n = 0, 1, ..., m-1 \\ 0, n \geq m; \end{cases}$$

в) $a_n = a^n$;

г)$a_n - n\alpha^n$;

д)$a_n = \alpha n$;

е)$a_n = n^3$;

ж) $a_n = n(n-1)$.

115. С помощью теоремы 6 о свертке докажите тождества:

а)

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^{m-k} C_n^k = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} C_n^{\frac{m}{2}}, m - , \\ 0, m - . \end{cases}$$

$A(x) = (1+x)^n, B(x) = (1-x)^n$;

б)

$$\sum_{m=0}^{[}\frac{k}{2}]C_n^{k-2m}C_{n+m-1}^{m} = C_{n+k-1}^{k}, A(x) = (1+x)^n, B(x) = (1-x^2)^{-n}$$

.

116. Найти производящую функцию для последовательности $a_n = \frac{D_n}{n!}$, где $D_n = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$ - число беспорядков из n элементов.

117. Найти общий член последовательности a_n по заданной производящей функции:

а)$A(x) = \frac{2x}{x^2-1}$; б)$A(x) = \frac{1}{(1+x)^m}$; в)$A(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2}$; г)$A(x) = \operatorname{arctg} x$.

118. Сколько существует сочетаний из n типо по m объектов, если: а) если каждый объектвстречается не менее k раз; б) каждый объект встречается не более k раз?

119.1 Сколькими способами можно уплаить: а) 60 коп.; б) 6 коп.; в) 62 коп., беря не более одной монеты каждого достоинства (1 коп., 5 коп., 10 коп., 50 коп.) 2. Сколькими способами можно: а) разменять гривенник (то есть 50 коп.) на конеечные и пятикопеечные монеты; б) уплатить 19 копеек такими же монетами?

120. Методом производящих функций: а) решить задачу из упр. 76; б) найти общий член последовательности Фибоначчи(упр. 79); в) решить задачи 112, 113.

Список литературы

[1] Виленкин Н.Я. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969.

[2] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике — М.: Наука, 1969.

[3] Ицков А.Г. Основы дискретной математики. Задачи по теории множеств. —Ижевск, ИжГТУ, 2005. — 40с

[4] Ицков А.Г. Основы дискретной математики. Задачи по комбинаторике. —Ижевск: ИжГТУ, 2007.— 60с

[5] Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Наука, 1975. — 240с.

[6] Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математике. — М.: Изд-во МАИ, 1992

[7] Столл Р. Множества. Логика.Аксиматические теории. —М.: Просвещение, 1968, — 232с.