

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова»
(ФГБОУ ВО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова»)

Кафедра «Прикладная математика и информационные технологии»

РОЗЫГРЫШ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ВЫБОРКИ

Учебно-методическое пособие
Методические указания к выполнению лабораторных работ по
дисциплине “Теория вероятностей, математическая статистика
и случайные процессы” для студентов направления
09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Составители: А.Г. Ицков, К.И. Дизендорф

Ижевск 2021

УДК 519.21(075.8)

ББК 22.172р30

Р656

Розыгрыш случайных величин и статистическая обработка выборки: учеб.-метод. пособие. Методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине “Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы” для студентов направления 09.03.01 Информатика и вычислительная техника / сост. А.Г. Ицков, К.И. Дизендорф. – Ижевск, 2021. – 9 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	2
Лабораторная работа №1. Розыгрыш стандартных дискретных случайных величин.....	3
Лабораторная работа №2. Розыгрыш стандартных непрерывных случайных величин.....	4
Лабораторная работа №3. Розыгрыш нормального распределения.....	5
Лабораторная работа №4. Оценки параметров распределений по выборкам	6
Литература	8
ПРИЛОЖЕНИЕ	9

Введение

В методических указаниях описаны задания к лабораторным работам по дисциплине «Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы». Они предназначены для студентов направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

Лабораторные работы №1–3 предназначены для отработки методов розыгрыша случайных величин – дискретных, непрерывных и нормально распределенных. При выполнении лабораторной работы №4 прививаются навыки первичной обработки выборки, расчета точечных и интервальных оценок выборочных характеристик.

Описание каждой работы содержит разделы: задание, требования к оформлению, указания к выполнению. Также приведены данные для 23 вариантов.

Лабораторная работа №1. Розыгрыш стандартных дискретных случайных величин

Задание

Написать программу для розыгрыша указанного стандартного дискретного распределения. Записать в файл 100 разыгранных значений.

Вариант 1-7: Биномиальное распределение с параметрами n, p .

$$P(\xi = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p, m = 0, 1, \dots, n$$

Вариант 8-15: Геометрическое распределение с параметром p .

$$P(\xi = m) = pq^{m-1}, \text{ где } m = 1, 2, \dots$$

Вариант 16-23: Распределение Пуассона с параметром λ .

$$P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ где } m = 0, 1, 2, \dots$$

Значения параметров по вариантам приведены в Приложении.

Требования к оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие разделы:

1. Постановка задачи (при описании постановки задачи необходимо указать требуемое распределение и привести параметры, соответствующие использованному варианту).
2. Описание применяемых методов розыгрыша (в том числе расчетные формулы для вашего варианта).
3. Результаты розыгрыша представить в виде дискретного вариационного ряда. Построить гистограмму относительных частот.

Указания к выполнению работы

Разбить отрезок $[0, 1]$ точками x_1, x_2, \dots

$$x_i = P(\xi = x_i).$$

Если случайное число γ попадает в интервал (x_i, x_{i+1}) , то считаем, что ξ принимает значение x_{i+1} .

Лабораторная работа №2. Розыгрыш стандартных непрерывных случайных величин

Задание

Написать программу для розыгрыша указанного стандартного непрерывного распределения стандартным методом. Записать в файл 200 разыгранных значений.

Вариант 1-7: Равномерное распределение на $(a; b)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b). \end{cases}$$

Вариант 8-15: Распределение Коши

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Вариант 16-23: Показательное распределение с параметром λ .

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Значения параметров по вариантам приведены в Приложении.

Требования к оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие разделы:

1. Постановка задачи (при описании постановки задачи необходимо указать требуемое распределение и привести параметры, соответствующие использованному варианту).
2. Описание применяемых методов розыгрыша (в том числе расчетные формулы для вашего варианта).

3. Результаты розыгрыша представить в виде интервального вариационного ряда. Построить гистограмму относительных частот и график функции плотности распределения.

Указания к выполнению работы

Находим функцию распределения $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Далее решаем уравнение:

$$F(x) = \gamma.$$

Если случайное число γ попадает в интервал (x_i, x_{i+1}) , то считаем, что ξ принимает значение x_{i+1} .

При построении интервального вариационного ряда и гистограммы количество интервалов определяется по формуле $N = [\log n]$, где $n = 200$ (объем выборки). Для вариантов 1-7 на N частей делится отрезок (a, b) . Для вариантов 8-23 отрезок выбирается так:

$$a = [\min x_i], \quad b = [\max x_i] + 1.$$

Далее он делится на N одинаковых частей.

Лабораторная работа №3. Розыгрыш нормального распределения

Задание

Написать программу для розыгрыша нормальной величины с параметрами m, σ с помощью центральной предельной теоремы. Записать в файл 200 разыгранных значений.

Значения параметров по вариантам приведены в Приложении.

Требования к оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие разделы:

1. Постановка задачи (при описании постановки задачи необходимо указать требуемое распределение и привести параметры, соответствующие использованному варианту).

2. Описание применяемых методов розыгрыша (в том числе расчетные формулы для вашего варианта).
3. Результаты розыгрыша представить в виде интервального вариационного ряда. Построить гистограмму относительных частот и график функции плотности распределения.

Указания к выполнению работы

Сначала разыграем $\xi \in N(0,1)$ по формуле $x = \sum_{i=1}^{12} \gamma_i - 6$, где γ_i имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

Переход к значениям $\eta \in N(m, \sigma)$ осуществляется по формуле $y = \sigma x + m$.

При построении интервального вариационного ряда и гистограммы количество интервалов определяется по формуле $N = [\log n]$, где $n = 200$. Отрезок $[a, b]$ для построения интервального вариационного ряда и гистограммы выбирается так:

$$a = [\min x_i], \quad b = [\max x_i] + 1.$$

Далее он делится на N одинаковых частей.

Лабораторная работа №4. Оценки параметров распределений по выборкам

Задание

Написать программу для обработки выборок, полученных в лабораторных работах №1–3.

1. Найти выборочные характеристики распределений по выборкам, полученным при выполнении лабораторных работ №1–3:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad D_B = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2, \quad S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2, \\ \sigma_B = \sqrt{D_B}, \quad S = \sqrt{S^2}$$

Сравнить полученные значения с истинными значениями характеристик. Здесь N – объем выборки.

2. Написать программу для нахождения по данным лабораторной работы №3 доверительных интервалов с

надежностью $\alpha = 0.95$ для $M\xi$ с известной дисперсией; $M\xi$ с неизвестной дисперсией; $D\xi$.

Требования к оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие разделы:

1. Постановка задачи (при описании постановки задачи необходимо указать требуемое распределение и привести параметры, соответствующие использованному варианту).
2. Описание применяемых методов расчета характеристик (в том числе расчетные формулы для вашего варианта).
3. Результаты расчета (точечные и интервальные оценки) сопоставить с истинными значениями характеристик.

Указания к выполнению работы

Для расчета доверительных интервалов использовать следующие соотношения:

$$\bar{x} - \frac{\sigma t}{\sqrt{N}} < m < \bar{x} + \frac{\sigma t}{\sqrt{N}} \quad t = \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\bar{x} - \frac{St_2}{\sqrt{N}} < m < \bar{x} + \frac{St_2}{\sqrt{N}} \quad t_2 - \text{коэффициент Стьюдента,}$$

$$\frac{S^2(N-1)}{x_{(2)}^2} < \sigma^2 < \frac{S^2(N-1)}{x_{(1)}^2}$$

Значения $x_{(1)}^2$ и $x_{(2)}^2$ находим по таблице критических точек $x_{(N-1)}^2$ с уровнем значимости $\frac{1+\alpha}{2}$ и $\frac{1-\alpha}{2}$, соответственно.

Литература

1. Дерр В.Я., Дизендорф К.И., Статистическое моделирование. – Ижевск, ИЖГТУ, 2001. – 34с.
2. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 312с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Данные для вариантов к лабораторным работам.

Вариант	Лабораторная работа		
	№1	№2	№3
1	$n=10; p=0,32$	(3;5)	$m=5; \sigma=1$
2	$n=11; p=0,07$	(-3;-1)	$m=-0,5; \sigma=1$
3	$n=13; p=0,82$	(4;5)	$m=0,5; \sigma=2$
4	$n=10; p=0,01$	(2;4)	$m=2,5; \sigma=1$
5	$n=10; p=0,83$	(1;2)	$m=-4; \sigma=2$
6	$n=11; p=0,26$	(-2;0)	$m=-1; \sigma=2$
7	$n=13; p=0,4$	(-1;1)	$m=1,5; \sigma=3$
8	$p=0,85$	–	$m=4; \sigma=1$
9	$p=0,87$	–	$m=5,5; \sigma=2$
10	$p=0,73$	–	$m=-2; \sigma=2$
11	$p=0,36$	–	$m=1,5; \sigma=1$
12	$p=0,44$	–	$m=-4,5; \sigma=3$
13	$p=0,11$	–	$m=-0,5; \sigma=3$
14	$p=0,25$	–	$m=-1; \sigma=1$
15	$p=0,33$	–	$m=-5; \sigma=1$
16	$\lambda=2,88$	$\lambda=1,9$	$m=3,5; \sigma=2$
17	$\lambda=1,32$	$\lambda=3,1$	$m=-3; \sigma=2$
18	$\lambda=3,6$	$\lambda=2,8$	$m=-1,5; \sigma=1$
19	$\lambda=1,04$	$\lambda=5$	$m=3; \sigma=2$
20	$\lambda=3,16$	$\lambda=4$	$m=-3,5; \sigma=1$
21	$\lambda=4,28$	$\lambda=4,7$	$m=-3,5; \sigma=3$
22	$\lambda=4,92$	$\lambda=2,5$	$m=5; \sigma=3$
23	$\lambda=3,96$	$\lambda=2,9$	$m=2; \sigma=2$