Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра математического анализа

Н. А. Соловьева

СИСТЕМЫ И ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2022

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73
С 60

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: к.ф.-м.н., ст. научный сотрудник А. Ю. Дроздов

Соловьева Н.А.

С60 Системы и функции случайных величин : учеб.-метод. пособие. — Ижевск : Удмуртский университет, 2022. – 64 с.

Учебно-методическое пособие посвящено изучению таких разделов теории вероятностей, как системы случайных величин и функций случайных величин. Приводятся основные понятия и подробные решения типовых задач.

Для студентов всех направлений Института математики, информационных технологий и физики.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73

© Н. А. Соловьева, 2022
© ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», 2022

Содержание

Введение 4

1. Системы дискретных случайных величин 5

2. Системы непрерывных случайных величин 13

3. Числовые характеристики двумерной случайной величины 24

4. Функции одной случайной величины 34

5. Функции двух случайных величин 39

Тестовые задания 47

Ответы к упражнениям 51

Список литературы 60

Приложения 61

Введение

Теория вероятностей — математическая наука, которая изучает закономерности случайных явлений. Часто испытание описывается несколькими случайными величинами. В этом случае говорят о многомерной случайной величине или о системе случайных величин. Например, успеваемость выпускника вуза характеризуется системой случайных величин — оценками по различным предметам, проставленными в приложении к диплому. Или погода в данном месте в определенное время суток может быть охарактеризована системой случайных величин: температурой, влажностью, давлением, скоростью ветра и т.п.

В пособии изложены разделы теории вероятностей — системы случайных величин и функций случайных величин. Рассмотрены основные понятия двумерных случайных величин, законы их распределения и функции от случайных величин.

Учебно-методическое пособие содержит подробное решение типовых задач и упражнения для самостоятельной работы. Может быть использовано для работы на практических занятиях по дисциплинам: «Теория вероятностей и математическая статистика», «Стохастический анализ».

В результате освоения материала пособия формируются следующие компетенции:

- УК-1 — способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;
- ОПК-1 — способность применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Учебно-методическое пособие подготовлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) для бакалавров по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Механика и математическое моделирование», «Математика и компьютерные науки».

1. Системы дискретных случайных величин

Очень часто результат опыта характеризуется не одной случайной величиной, а несколькими случайными величинами (системой случайных величин или случайным вектором).

Пусть на дискретном вероятностном пространстве заданы две случайные величины $\xi=\{x_1,\ldots,x_n\}$ и $\eta=\{y_1,\ldots,y_m\}$. Упорядоченная пара (ξ,η) называется двумерным случайным вектором или двумерной случайной величиной.

Распределение двумерной дискретной случайной величины (ξ,η), задается таблицей, содержащей возможные значения случайных величин и их вероятности $P((\xi=x_i)(\eta=y_j))=p_{ij}$, при этом $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}p_{ij}=1$ (рис.1).

ξ	η				
	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_m
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	p_{n1}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}

Рис. 1 Распределение двумерной случайной величины (ξ,η)

Распределение одномерной дискретной случайной величины ξ можно получить, вычислив вероятности событий $\{\xi=x_i\}$, $i=1,\ldots,n$ по теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(\xi=x_i)=\sum_{j=1}^{m}P((\xi=x_i)(\eta=y_j))=\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=p_i, \qquad (1.1)$$

при этом $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$. Аналогично можно найти распределение одномерной дискретной случайной величины η.

Условные распределения ξ при условии $\eta=y_j$ можно найти

по теореме умножения вероятностей:

$$P(\xi = x_i | \eta = y_j) = \frac{P((\xi = x_i)(\eta = y_j))}{P(\eta = y_j)}. \tag{1.2}$$

Определение 1.1. Функцией распределения двумерной случайной величины (ξ, η) называется функция

$$F(x, y) = P((\xi < x)(\eta < y)). \tag{1.3}$$

Геометрически функция распределения двумерной случайной величины — это вероятность попадания случайной точки в бесконечный прямоугольник $\Pi(x, y) = (-\infty, x) \times (-\infty, y)$ (рис.2).

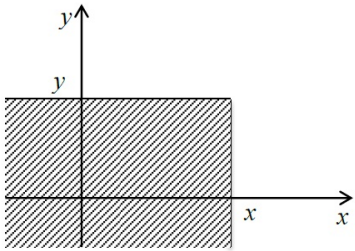

Рис. 2 Функция распределения $F(x, y)$

Функции распределения составляющих ξ и η равны

$$F_\xi(x) = F(x, +\infty), \quad F_\eta(y) = F(y, +\infty).$$

Для функции распределения системы случайных величин справедливы следующие свойства:

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$.
2. $F(x, y)$ неубывающая функция по каждому аргументу.
3. $F(x, y)$ непрерывна слева по обоим аргументам в каждой точке.
4. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$.

5. $F(+\infty, +\infty) = 1$.

6. Вероятность попадания двумерной случайной величины (ξ, η) в прямоугольник $[a; b) \times [c; d)$ равна

$$P(a \le \xi \le b, c \le \eta \le d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c).$$

Определение 1.2. Случайные величины ξ и η называются независимыми, если для любых пар $(x_i, y_j), i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$

$$P((\xi = x_i)(\eta = y_j)) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j). \tag{1.4}$$

Если распределение двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) задается таблицей (рис. 1), то распределения суммы, разности, произведения и частного случайных величин ξ и η можно найти по формулам:

$$P(\xi \pm \eta = x_i + y_j) = p_{ij},\ P(\xi \cdot \eta = x_i \cdot y_j) = p_{ij},$$
$$P(\frac{\xi}{\eta} = \frac{x_i}{y_j}) = p_{ij},\ y_j \ne 0,\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m.$$

Затем объединить одинаковые значения и сложить соответствующие вероятности.

Пример 1.1. Распределение двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) задано таблицей

ξ	η			
	0	1	2	3
-1	0,02	0,03	0,09	0,01
0	0,04	0,20	0,16	0,10
1	0,05	0,10	0,15	0,05

Найдите: а) законы распределения одномерных случайных величин ξ и η; б) условные законы распределения случайной величины ξ при условии $\eta = 2$ и случайной величины η при условии $\xi = 0$; в) вероятность $P(\eta > \xi)$; г) проверить, являются ли случайные величины ξ и η зависимыми.

Решение. а) Случайная величина ξ может принимать значения $-1, 0, 1$ с вероятностями:

$$P(\xi = -1) = 0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}09 + 0{,}01 = 0{,}15;$$
$$P(\xi = 0) = 0{,}04 + 0{,}2 + 0{,}16 + 0{,}1 = 0{,}5;$$
$$P(\xi = 1) = 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0,35,$$

т.е. ее закон распределения

ξ	-1	0	1
P	0,15	0,5	0,35

Аналогично для случайной величины η

η	0	1	2	3
P	0,11	0,33	0,4	0,16

б) Условный закон распределения случайной величины ξ при условии $\eta = 2$ имеет вид

$$P(\xi = -1|\eta = 2) = \frac{P((\xi = -1)(\eta = 2))}{P(\eta = 2)} =$$
$$= \frac{0{,}09}{0{,}09 + 0{,}16 + 0{,}15} = \frac{0{,}09}{0{,}4} = 0,225,$$
$$P(\xi = 0|\eta = 2) = \frac{P((\xi = 0)(\eta = 2))}{P(\eta = 2)} = \frac{0{,}16}{0{,}4} = 0{,}4,$$
$$P(\xi = 1|\eta = 2) = \frac{P((\xi = 1)(\eta = 2))}{P(\eta = 2)} = \frac{0{,}15}{0{,}4} = 0{,}375.$$

$\xi \mid \eta = 2$	-1	0	1
P	0,225	0,4	0,375

Аналогично находим условный закон распределения случайной величины η при условии $\xi = 0$:

$\eta \mid \xi = 0$	0	1	2	3
P	0,08	0,4	0,32	0,2

в) $P(\eta > \xi) = 0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}09 + 0{,}01 + 0{,}2 + 0{,}16 + 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}81$.

г) Проверим, являются ли случайные величины ξ и η зависимыми. Вероятность $P((\xi = -1)(\eta = 0)) = 0{,}02$, но произведение вероятностей $P(\xi = -1) \cdot P(\eta = 0) = 0{,}15 \cdot 0{,}11 = 0{,}0165$, т.е.

$$P((\xi = -1)(\eta = 0)) \neq P(\xi = -1) \cdot P(\eta = 0).$$

Следовательно, случайные величины ξ и η зависимы.

Пример 1.2. Распределение двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) задано таблицей

ξ	η	
	0	1
0	0,16	0,20
1	0,28	0,36

Найдите функцию распределения $F(x, y)$ двумерной случайной величины (ξ, η) и вероятность попадания в прямоугольник $B = (-1; 2) \times (-1; 0,5)$.

Решение. Функцию распределения $F(x, y)$ найдем по формуле 1.3.

Если $x \leqslant 0, y \leqslant 0$ событие $\{(\xi < x)(\eta < y)\}$ является невозможным, поэтому $F(x, y) = 0$.

Если $0 < x \leqslant 1, 0 < y \leqslant 1$, в прямоугольник $\Pi(x, y)$ попадает одна точка $(0, 0)$, поэтому

$$F(x, y) = P(\xi = 0, \eta = 0) = 0{,}16.$$

Если $0 < x \leqslant 1, y > 1$, в прямоугольник $\Pi(x, y)$ попадут две точки $(0, 0), (0, 1)$, поэтому

$$F(x, y) = P(\xi = 0, \eta = 0) + P(\xi = 0, \eta = 1) = 0{,}16 + 0{,}2 = 0{,}36.$$

Если $x > 1, 0 < y \leqslant 1$, в прямоугольник $\Pi(x, y)$ попадут две точки $(0, 0), (1, 0)$, поэтому

$$F(x, y) = P(\xi = 0, \eta = 0) + P(\xi = 1, \eta = 0) = 0{,}16 + 0{,}28 = 0{,}44.$$

Если $x \geqslant 1, y \geqslant 1$ событие $\{(\xi < x)(\eta < y)\}$ является достоверным, поэтому $F(x, y) = 1$.

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0, \\ 0{,}16, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, 0 < y \leqslant 1, \\ 0{,}36, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, y > 1, \\ 0{,}44, & \text{если } x > 1, 0 < y \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } x > 1, y > 1. \end{cases}$$

Вероятность попадания в прямоугольник $B = (-1; 2) \times \times (-1; 0{,}5)$ равна $F(2; 0,5) = 0{,}44$.

Упражнения

1.1. Распределение двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) задано таблицей

ξ	η		
	0	1	2
1	0,10	0,10	0,10
2	0,15	0,20	0,15
3	0,10	0,05	0,05

Найдите: а) законы распределения одномерных случайных величин ξ и η; б) условные законы распределения случайной величины ξ при условии $\eta = 1$ и случайной величины η при условии $\xi = 2$.

1.2. Распределение двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) задано таблицей

ξ	η		
	10	14	18
3	0,25	0,15	0,32
6	0,10	0,05	0,13

Найдите условные законы распределения случайной величины ξ при условии $\eta = 10$ и случайной величины η при условии $\xi = 6$.

1.3. Распределение двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) задано таблицей

ξ	η		
	1	2	3
1	0,10	0,10	0,10
2	0,15	0,20	0,10
3	0,10	0,05	0,10

Найдите: а) законы распределения одномерных случайных величин ξ и η; б) таблицу условных распределений $\xi|\eta$ и $\eta|\xi$; в) проверить, являются ли случайные величины ξ и η зависимыми.

1.4. Распределение двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) задано таблицей

ξ	η	
	1	2
0	0,06	0,30
1	0,50	0,14

Найдите функцию распределения (ξ, η) и вероятность попадания в прямоугольник $B = (-1; 1{,}5) \times (0; 1{,}5)$.

1.5. Распределение двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) задано таблицей

ξ	η	
	-1	1
0	0,1	0,06
1	0,3	0,18
2	0,2	0,16

Найдите функцию распределения $F(x, y)$ двумерной случайной величины (ξ, η), функции распределения составляющих $F_\xi(x), F_\eta(y)$ и вероятность $P(\xi \geqslant \eta)$.

1.6. Бросаются две кости. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 — число очков на первой и второй кости соответственно, а случайная величина $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$. Найдите распределение двумерной случайной величины (ξ_1, η).

1.7. Проводятся два выстрела в мишень. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Случайная величина ξ — число попаданий при первом выстреле, а η — при втором выстреле. Найдите распределение двумерной случайной величины (ξ, η) и ее функцию распределения.

1.8. Даны распределения случайных величин ξ и η :

ξ	1	2	4
P	0,1	0,5	0,4

η	0	1	2
P	0,2	0,4	0,4

Найдите распределения $\xi + \eta, \xi - \eta, \xi \cdot \eta, \dfrac{\eta}{\xi}$.

1.9. Даны распределения случайных величин ξ и η :

ξ	-1	0	1
P	0,4	0,1	0,5

η	1	2
P	0,2	0,8

Найдите распределения $3\xi + 2\eta, \xi^2, \xi^2 + \eta^2$.

1.10. Распределение двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) задано таблицей

ξ	η		
	0	2	4
1	0,40	0,15	0,10
2	0,05	0,15	0,15

Найдите распределения $\xi + \eta, \xi - \eta, \xi \cdot \eta$.

2. Системы непрерывных случайных величин

Определение 2.1. Двумерная случайная величина (ξ, η) называется непрерывной, если ее функция распределения $F(x, y)$ — непрерывная функция, дифференцируемая по каждому аргументу, и у неё существует непрерывная вторая смешанная производная $F''_{xy}(x, y)$.

Определение 2.2. Плотностью совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (ξ, η) называется вторая смешанная производная:

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y). \tag{2.1}$$

Плотность распределения $f(x, y)$ обладает следующими свойствами:

1. $f(x, y) \geqslant 0$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dxdy = 1$;
3. $P((\xi, \eta) \in D) = \iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy$;
4. $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u, v)\, dudv$;
5. $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy,\ F_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$;
6. $f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy,\ f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$.

Определение 2.3. Условной функцией распределения случайной величины ξ при условии, что известно значение $\eta = y$, называется функция $F(x|y) = P((\xi < x)|(\eta = y))$.

Аналогично, условной функцией распределения случайной величины η при условии, что известно значение $\xi = x$ называется функция $F(y|x) = P((\eta < y)|(\xi = x))$.

Определение 2.4. Условной плотностью распределения случайной величины ξ при условии, что $\eta = y$, называется

$$f(x|y) = \frac{\partial F(x|y)}{\partial x}. \tag{2.2}$$

Аналогично, условной плотностью распределения случайной величины η при условии $\xi = x$ называется

$$f(y|x) = \frac{\partial F(y|x)}{\partial y}. \tag{2.3}$$

Условные плотности распределения $f(x|y), f(y|x)$ можно выразить через совместную плотность $f(x, y)$:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx}, \tag{2.4}$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy}. \tag{2.5}$$

Определение 2.5. Случайные величины ξ и η называются независимыми, если

$$F(x|y) = F_\xi(x),\ \ F(y|x) = F_\eta(y), \tag{2.6}$$

$$f(x|y) = f_\xi(x),\ \ f(y|x) = f_\eta(y). \tag{2.7}$$

Теорема 2.1. *Случайные величины ξ и η тогда и только тогда, когда совместная функция распределения равна произведению функций распределений составляющих*

$$F(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y). \tag{2.8}$$

Теорема 2.2. *Случайные величины ξ и η тогда и только тогда, когда совместная плотность распределения равна произведению плотностей распределений составляющих*

$$f(x, y) = f_\xi(x)f_\eta(y). \tag{2.9}$$

Пример 2.1. Случайная точка (ξ, η) равномерно распределена внутри треугольника T, ограниченного прямыми $x = 0, y = 0$, $x+y=1$. Найдите плотности $f_\xi(x), f_\eta(y)$. Зависимы ли случайные величины ξ и η?

Решение. Так как случайная точка (ξ, η) распределена равномерно внутри треугольника T, то совместная плотность распределения постоянна в данном треугольнике:

$$f(x,y) = \begin{cases} C, & \text{если } (x,y) \in T, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin T. \end{cases}$$

Для нахождения постоянной C воспользуемся свойством 2.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{T} C\,dxdy = C \cdot S_T = \frac{1}{2}\,C = 1,$$

Тогда $C = 2$, т.е. совместная плотность равна

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{если } (x,y) \in T, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin T. \end{cases}$$

Плотности распределения составляющих случайных величин ξ и η равны

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \int\limits_0^{1-x} 2\,dy = 2(1-x), & \text{если } x \in [0,1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0,1]. \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \int\limits_0^{1-y} 2\,dx = 2(1-y), & \text{если } y \in [0,1], \\ 0, & \text{если } y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Тогда получаем, что $f(x,y) \neq f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$ и, следовательно, случайные величины ξ и η зависимы.

Пример 2.2. Случайная точка (ξ, η) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата D с вершинами $(1,0), (0,1), (-1,0)$, $(0,-1)$. Найдите плотность совместного распределения $f(x,y)$, плотности $f_\xi(x), f_\eta(y)$. Зависимы ли случайные величины ξ и η?

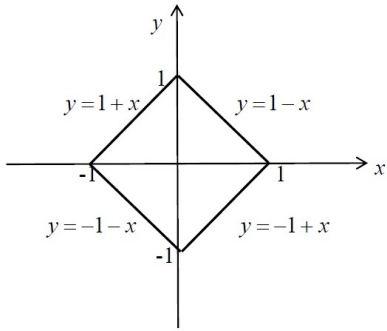

Рис. 3 Квадрат D

Решение. Длины сторон квадрата D (рис.3) равны $\sqrt{2}$, его площадь равна 2, поэтому из свойства 2 следует, что совместная плотность равна

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Стороны квадрата D задаются уравнениями $y = 1 - x, y = x - 1$, $y = 1 + x, y = -1 - x$.

Плотности $f_\xi(x)$ найдем по формуле

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

Если $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ точка (x,y) не содержится в квадрате, поэтому $f(x,y) = 0$ при данных значениях x. Следовательно, $f_\xi(x) = 0$.

Если $x \in [-1, 0]$, то $f(x,y) = \dfrac{1}{2}$ при $y \in [-1 - x, 1 + x]$. Следовательно,

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-x-1}^{x+1} \frac{1}{2}\,dy = x + 1.$$

Если $x \in [0,1]$, то $f(x,y) = \dfrac{1}{2}$ при $y \in [x-1, 1-x]$. Следовательно,

$$f_\xi(x) = \int\limits_{x-1}^{1-x} \frac{1}{2}\, dy = 1 - x.$$

Получаем

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -1, \\ x+1, & \text{если } -1 \leqslant x < 0, \\ -x+1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Аналогично находим плотность Y:

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < -1, \\ y+1, & \text{если } -1 \leqslant y < 0, \\ -y+1, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } y > 1. \end{cases}$$

Для ответа на вопрос о независимости рассмотрим значения плотности совместного распределения $f(x,y)$ и плотностей $f_\xi(x), f_\eta(y)$ в точке $(0,0)$.

$$f(0,0) = \frac{1}{2},\ f_\xi(0) = 1,\ f_\eta(0) = 1$$
$$f(0,0) \neq f_\xi(0) \cdot f_\eta(0),$$

т.е. случайные величины ξ и η зависимы.

Пример 2.3. Внутри квадрата D, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0, y = \dfrac{\pi}{2}$, плотность распределения двух случайных величин имеет вид $f(x,y) = C\sin(x+y)$; вне данного квадрата $f(x,y) = 0$.

Найдите постоянную C; функцию распределения системы $F(x,y)$; вероятность попадания случайной точки в квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$, $y = 0, y = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Для нахождения постоянной C воспользуемся свойством 2.

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} C\sin(x+y)\,dxdy=$$

$$= -\,C\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos(x+\frac{\pi}{2})-\cos x)\,dx = -C(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}) = 2C,$$

следовательно $C = \frac{1}{2}$.

Найдем функцию распределения $F(x,y)$ по свойству 4.

Если $x \in (-\infty, 0)$, или $y \in (-\infty, 0)$, то функция распределения равна $F(x,y) = 0$.

Если $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ функция распределения равна

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{y}\sin(u+v)\,dudv=$$

$$= -\,\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}(\cos(u+y)-\cos u)\,du = -\frac{1}{2}(\sin(x+y)-\sin x-\sin y).$$

Если $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], y \in \left(\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right)$ функция распределения равна

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin(u+v)\,dudv = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x + 1).$$

Если $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right), y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ функция распределения равна

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{y}\sin(u+v)\,dudv = \frac{1}{2}(\sin y - \cos y + 1).$$

Если $x \in \left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right), y \in \left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$, то областью интегрирования является исходный квадрат и функция распределения равна $F(x, y) = 1$.

Следовательно, функция распределения системы (ξ, η) равна

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } y < 0, \\ \frac{\sin x + \sin y - \sin(x+y)}{2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\sin x - \cos x + 1}{2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ y > \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\sin y - \cos y + 1}{2}, & \text{если } x > \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если } x > \frac{\pi}{2},\ y > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вероятность попадания случайной точки в квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0, y = \frac{\pi}{4}$, равна

$$P(0 \leqslant X \leqslant \frac{\pi}{4}, 0 \leqslant Y \leqslant \frac{\pi}{4}) = F(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) - F(0, \frac{\pi}{4}) - F(\frac{\pi}{4}, 0) +$$
$$+ F(0,0) = F(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Пример 2.4. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} Cxy, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдите постоянную C; плотности $f_\xi(x), f_\eta(y)$; условные плотности $f(x|y), f(y|x)$.

Решение. Для нахождения постоянной C вычислим интеграл

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} Cxy\, dxdy = C \int\limits_0^1 \frac{x^5}{2}\, dx = \frac{C}{12},$$

тогда $C = 12$.

Найдем плотности $f_\xi(x), f_\eta(y)$.

Если $x < 0$ или $x > 1$, то совместная плотность $f(x,y) = 0$, поэтому $f_\xi(x) = 0$.

Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int\limits_{0}^{x^2} 12xy\,dy = 6x^5.$$

Аналогично, если $y < 0$ или $y > 1$, то совместная плотность $f(x,y) = 0$, поэтому $f_\eta(x) = 0$.

Если $0 \leqslant y \leqslant 1$, то

$$f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_{\sqrt{y}}^{1} 12xy\,dx = 6y - 6y^2.$$

Таким образом, плотности составляющих ξ и η имеют вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 6x^5, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > 1, \end{cases}$$

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 6y - 6y^2, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } y < 0 \text{ или } y > 1. \end{cases}$$

Найдем условные плотности $f(x|y), f(y|x)$.

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)} = \begin{cases} \dfrac{2x}{1-y}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)} = \begin{cases} \dfrac{2y}{x^4}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Упражнения

2.1. Функция распределения двумерной случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$F(x,y) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin y, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найдите совместную плотность распределения и вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0, x = \dfrac{\pi}{6}, y = 0, y = \dfrac{\pi}{4}$.

2.2. Функция распределения двумерной случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & \text{если } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найдите совместную плотность распределения и вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 1, x = 3, y = 3, y = 8$.

2.3. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x, y) = \frac{C}{(16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Найдите постоянную C; функцию распределения системы $F(x, y)$.

2.4. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} C \cdot 3^{-\frac{x}{2} - y}, & \text{если } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } y < 0, \end{cases}$$

Найдите постоянную C; функцию распределения $F(x, y)$.

2.5. Случайная точка (ξ, η) равномерно распределена в круге радиуса R. Найдите плотность совместного распределения $f(x, y)$, плотности $f_\xi(x), f_\eta(y)$; вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в круг радиуса $r = 1$ с центром в начале координат, если $R = 2$. Зависимы ли случайные величины ξ и η?

2.6. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} C \cdot e^y, & \text{если } x \leqslant 0,\ y \leqslant 0,\ y \leqslant x, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдите постоянную C; плотности $f_\xi(x), f_\eta(y)$.

2.7. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} 36xye^{-3(x^2+y^2)}, & \text{если } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & x < 0 \text{ или } y < 0, . \end{cases}$$

Доказать, что случайные величины ξ и η независимы.

2.8. Внутри треугольника T, ограниченного прямыми $x = 0$, $y=0$, $2x+3y=6$, совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид $f(x,y) = Cxy^2$. Найдите постоянную C; плотности составляющих. Зависимы ли случайные величины ξ и η?

2.9. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{C}{(x+y+2)^4}, & \text{если } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } y < 0, \end{cases}$$

Найдите постоянную C; плотности $f_\xi(x), f_\eta(y)$; вероятность попадания случайной точки в квадрат $x = 0, x = 2,\ y = 0, y = 2$. Зависимы ли случайные величины ξ и η?

2.10. Случайная точка (ξ, η) равномерно распределена в прямоугольнике Π, ограниченного прямыми $x = 0, x = 1, y = 2, y = 4$. Найдите плотность совместного распределения $f(x,y)$, функцию распределения $F(x,y)$, плотности распределения и функции распределения составляющих. Найдите вероятность попадания случайной точки в треугольник с вершинами $(0,1), (0,3), (2,1)$.

2.11. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{C}{x^4(y-1)^3}, & \text{если } x > 1,\ y > 3, \\ 0, & \text{если } x < 1 \text{ или } y < 3, \end{cases}$$

Найдите постоянную C; функцию распределения $F(x,y)$, плотности $f_\xi(x), f_\eta(y)$. Зависимы ли случайные величины ξ и η?

2.12. Двумерная случайная величина (ξ, η) равномерно распределена внутри треугольника T, ограниченного прямыми $x=0$,

$y=0$, $x+2y=4$. Найдите плотности распределения составляющих; условные плотности. Зависимы ли случайные величины ξ и η?

2.13. Функция распределения двумерной случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), & \text{если } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найдите совместную плотность распределения; плотности распределения составляющих; условные плотности; вероятность попадания случайной точки в треугольник с вершинами $(0,0), (0,1), (1,0)$.

2.14. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xe^{-y}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y \geqslant 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдите условные плотности $f(x|y), f(y|x)$.

2.15. Совместная плотность распределения двух нормальных случайных величин (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = C \cdot e^{-\frac{(x+3)^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{2}}.$$

Найдите постоянную C. Установить, являются ли случайные величины ξ и η зависимыми

3. Числовые характеристики двумерной случайной величины

Зная распределение двумерной случайной величины (ξ, η) можно вычислить числовые характеристики составляющих ξ и η — математические ожидания и дисперсии.

Если (ξ, η) — дискретная случайная величина, то математические ожидания и дисперсии ξ и η равны:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}, \quad M\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}, \tag{3.1}$$

$$D\xi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - M\xi)^2 p_{ij}, \ D\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (y_j - M\eta)^2 p_{ij}. \tag{3.2}$$

Если (ξ, η) — непрерывная случайная величина с плотностью $f(x, y)$, то математические ожидания и дисперсии ξ и η равны:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y)\, dxdy, \tag{3.3}$$

$$M\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_\eta(y)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y)\, dxdy \tag{3.4}$$

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f(x, y)\, dxdy, \tag{3.5}$$

$$D\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - M\eta)^2 f_\eta(y)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - M\eta)^2 f(x, y)\, dxdy. \tag{3.6}$$

Также рассматриваются числовые характеристики условных распределений: условные математические ожидания $M(\xi|\eta = y)$, $M(\eta|\xi{=}x)$ и условные дисперсии $D(\xi|\eta{=}y), D(\eta|\xi{=}x)$. Эти характеристики можно найти по формулам (3.1)-(3.6), где вместо вероятностей p_{ij} или плотностей $f_\xi(x), f_\eta(y)$ используются условные вероятности $P(\xi{=}x_i|\eta{=}y_j)$ или условные плотности $f(x|y), f(y|x)$.

Например, для непрерывной случайной величины условные математические ожидания равны:

$$M(\xi|\eta=y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x|y)\,dx,\ \ M(\eta|\xi=x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yf(y|x)\,dy. \quad (3.7)$$

Определение 3.1. Функцией регрессии ξ по η называется условное математическое ожидание $M(\xi|\eta=y)$, а кривая $x=M(\xi|\eta=y)$ называется линией регрессии ξ по η.

Аналогично, условное математическое ожидание $M(\eta|\xi=x)$ называется функцией регрессии η по ξ, а кривая $y=M(\eta|\xi=x)$ называется линией регрессии η по ξ.

Для изучения зависимости случайных величин ξ и η вычисляют ковариацию и коэффициент корреляции.

Определение 3.2. Ковариацией (корреляционным моментом) системы (ξ,η) называется математическое ожидание произведения отклонений случайных величин ξ и η от своих математических ожиданий, т.е.

$$cov(\xi,\eta)=M(\xi-M\xi)(\eta-M\eta). \quad (3.8)$$

Для дискретных случайных величин

$$cov(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-M\xi)(y_j-M\eta)p_{ij}, \quad (3.9)$$

для непрерывных

$$cov(\xi,\eta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M\xi)(y-M\eta)f(x,y)\,dxdy. \quad (3.10)$$

Свойства ковариации:

1. $cov(\xi,\eta)=cov(\eta,\xi)$;
2. $cov(\xi,\eta)=M(\xi\eta)-M\xi\cdot M\eta$;

3. $cov(\xi, \xi) = D\xi,\ cov(\eta, \eta) = D\eta$;

4. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2cov(\xi, \eta)$;

5. Если ξ и η независимы, то $cov(\xi, \eta) = 0$.

Корреляционной матрицей двумерной случайной величины (ξ, η) называется матрица

$$\begin{pmatrix} D\xi & cov(\xi, \eta) \\ cov(\xi, \eta) & D\eta \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Определение 3.3. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η называется число

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}. \tag{3.12}$$

Коэффициент корреляции является величиной безразмерной, измеряет тесноту линейной связи случайных величин.

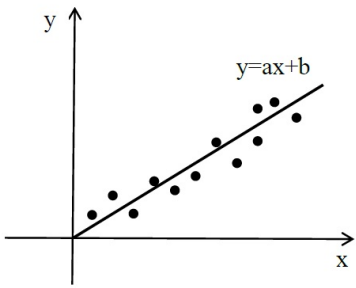

Рис. 4 $\eta = a\xi + b$

Свойства коэффициента корреляции:

1. $|\rho(\xi, \eta)| \leqslant 1$;

2. Если ξ и η независимы, то $\rho(\xi, \eta) = 0$;

3. $|\rho(\xi, \eta)|$=1, тогда и только тогда, когда случайные величины ξ и η связаны линейной зависимостью, т.е. η=$a\xi$+b (рис. 4).

Определение 3.4. Случайная величина (ξ, η) имеет двумерное нормальное распределение, если её совместная плотность имеет вид:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}. \tag{3.13}$$

Плотности составляющих нормально распределенной случайной величины равны

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \ f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}. \tag{3.14}$$

Тогда $M\xi = a_1,\ M\eta = a_2,\ D\xi = \sigma_1^2,\ D\eta = \sigma_2^2$, а ρ — это коэффициент корреляции.

Теорема 3.1. *Нормально распределенные случайные величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда они некоррелированны.*

Пример 3.1. Распределение двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) задано таблицей

ξ	η			
	0	1	2	3
-1	0,02	0,03	0,09	0,01
0	0,04	0,20	0,16	0,10
1	0,05	0,10	0,15	0,05

Найдите ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

Решение. В примере 1.1 были найдены законы распределения случайных величин ξ и η :

ξ	-1	0	1
P	0,15	0,5	0,35

η	0	1	2	3
P	0,11	0,33	0,4	0,16

Найдем математические ожидания и дисперсии этих случайных величин:

$$M\xi = -1 \cdot 0{,}15 + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}35 = 0{,}2,$$
$$M\eta = 0 \cdot 0{,}11 + 1 \cdot 0{,}33 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}16 = 1{,}61,$$
$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 =$$
$$=(-1)^2 \cdot 0{,}15 + 0^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}35 - 0{,}2^2 = 0{,}46,$$
$$D\eta = M(\eta^2) - (M\eta)^2 =$$
$$=0^2 \cdot 0{,}11 + 1^2 \cdot 0{,}33 + 2^2 \cdot 0{,}4 + 3^2 \cdot 0{,}16 - 1{,}61^2 = 0{,}7779.$$

Для нахождения $M(\xi\eta)$ воспользуемся таблицей распределения двумерной дискретной случайной величины (ξ, η)

$$M(\xi\eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} = -1 \cdot 0 \cdot 0{,}02 + (-1) \cdot 1 \cdot 0{,}03 +$$
$$+(-1) \cdot 2 \cdot 0{,}09 + (-1) \cdot 3 \cdot 0{,}01 + 0 \cdot 0 \cdot 0{,}04 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}20 +$$
$$+0 \cdot 2 \cdot 0{,}16 + 0 \cdot 3 \cdot 0{,}10 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}10 +$$
$$+1 \cdot 2 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 3 \cdot 0{,}05 = 0{,}37.$$

Тогда ковариация и коэффициент корреляции равны

$$cov(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta = 0,37 - 0,2 \cdot 1,61 = 0,048,$$
$$\rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D_\xi \cdot D_\eta}} = \frac{0,048}{\sqrt{0,46 \cdot 0,7779}} = 0,08.$$

Пример 3.2. Плотность распределения вероятности случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{если } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin D, \end{cases}$$

где область $D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1; 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Найдите ковариацию и коэффициент корреляции.

Решение. Найдем математическое ожидание $M\xi$.

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x, y)\, dxdy = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} x(x + y)\, dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (x^2 + xy)\, dxdy = \int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{xy^2}{2} \right) \Big|_0^1 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{12}.$$

Аналогично, $M\eta = \dfrac{7}{12}$.

$$M(\xi\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x,y)\, dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 xy(x+y)\, dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (x^2 y + xy^2)\, dxdy = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right) \Big|_0^1 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Тогда ковариация равна

$$cov(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = -\frac{1}{144}.$$

Вычислим соответствующие дисперсии:

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x,y)\, dxdy - (M\xi)^2 =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 x^2 (x+y)\, dxdy - \left(\frac{7}{12} \right)^2 = = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (x^3 + x^2 y)\, dxdy - \frac{49}{144} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^3 y + \frac{x^2 y^2}{2} \right) \Big|_0^1 dx - \frac{49}{144} = \int\limits_0^1 \left(x^3 + \frac{x^2}{2} \right) dx - \frac{49}{144} =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^1 - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}.$$

Аналогично, $D\eta = \dfrac{11}{144}$.

Тогда коэффициент корреляции равен

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}} = -\frac{1}{11}.$$

Упражнения

3.1. Распределение двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) задано таблицей

ξ	η			
	-1	0	1	2
1	0,10	0,25	0,30	0,15
2	0,10	0,05	0,00	0,05

Найдите ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

3.2. Распределение двумерной дискретной случайной величины (ξ, η) задано таблицей

ξ	η	
	1	2
1	0,15	0,15
2	0,15	0,20
3	0,10	0,25

Найдите ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

3.3. Две игральные кости бросают один раз. Случайные величины ξ_i, $i = 1, 2$ — число очков на i-той кости, $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$. Найдите корреляционную матрицу и коэффициент корреляции случайных величин ξ_1 и η.

3.4. Мяч бросается в корзину три раза. Вероятность попадания при одном броске равна 0,5. Случайные величины ξ — число попаданий при первом броске, η — общее число попаданий при трех бросках. Найдите корреляционную матрицу и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

3.5. Случайная точка (ξ, η) распределена равномерно внутри квадрата D, ограниченного прямыми $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$. Найдите математические ожидания и дисперсии составляющих ξ и η; ковариацию и коэффициент корреляции.

3.6. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} C(x^2 + xy + y^2), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдите C; математические ожидания и дисперсии составляющих ξ и η; коэффициент корреляции.

3.7. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, & \text{если } x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найдите математические ожидания и дисперсии составляющих ξ и η; коэффициент корреляции.

3.8. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & \text{если } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найдите корреляционную матрицу и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

3.9. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/2\sin(x+y), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдите математические ожидания и дисперсии составляющих ξ и η; коэффициент корреляции.

3.10. Случайная точка (ξ, η) распределена равномерно в области $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 4, x \leqslant 0\}$. Найдите математические

ожидания и дисперсии составляющих ξ и η; ковариацию и коэффициент корреляции.

3.11. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi R^4}(x^2+y^2), & \text{если } (x,y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где $D = \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \leqslant R,\ y > 0\},\ R > 0$.

Найдите математические ожидания и дисперсии составляющих ξ и η; коэффициент корреляции.

3.12. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{320}{(x+y)^6}, & \text{если } x > 1,\ y > 1, \\ 0, & \text{если } x < 1 \text{ или } y < 1. \end{cases}$$

Найдите математические ожидания и дисперсии составляющих ξ и η; коэффициент корреляции.

3.13. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{480}{(x+1)^4(y+2)^6}, & \text{если } x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найдите математические ожидания и дисперсии составляющих ξ и η; ковариацию коэффициент корреляции. Зависимы ли ξ и η? Коррелированы ли ξ и η?

3.14. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ, η) имеет вид

$$f(x,y) = \frac{1}{1,6\pi} e^{-\frac{1}{1,28}\left((x-2)^2 - 1,2(x-2)(y+3) + (y+3)^2\right)}.$$

Найдите математические ожидания и дисперсии составляющих ξ и η; коэффициент корреляции.

3.15. Внутри треугольника T, ограниченного прямыми $x=0$, $y=0$, $2x+3y=6$, совместная плотность распределения случайной величины (ξ,η) имеет вид $f(x,y)=\dfrac{5}{6}xy^2$. Найдите математические ожидания и дисперсии составляющих ξ и η; коэффициент корреляции; функции регрессии ξ по η и η по ξ.

3.16. Совместная плотность распределения случайной величины (ξ,η) имеет вид

$$f(x,y)=\begin{cases} 12xy, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x^2,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Найдите функции регрессии ξ по η и η по ξ.

4. Функции одной случайной величины

Определение 4.1. Если каждому возможному значению случайной величины ξ соответствует единственное значение случайной величины η, то η называют функцией от случайной величины ξ :

$$\eta = \varphi(\xi).$$

1. Пусть ξ — дискретная случайная величина, имеющая закон распределения

ξ	x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
P	p_1	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Обозначим $y_i = \varphi(x_i)$.

Если функция $\eta = \varphi(\xi)$ монотонна, то различным значениям случайной величины ξ соответствуют различные значения случайной величины η, причем $P(\eta = y_i) = P(\xi = x_i)$, т.е.

η	y_1	$\dots$	y_i	$\dots$	y_n
P	p_1	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Если функция $\eta = \varphi(\xi)$ не является монотонной, то различным значениям случайной величины ξ могут соответствовать одинаковые значения случайной величины η. Например, пусть $f(x_i) = f(x_k)$, тогда $P(\eta = y_i) = P(\xi = x_i) + P(\xi = x_k)$.

2. Пусть ξ — непрерывная случайная с плотностью распределения $f(x)$.

Если $\eta = \varphi(\xi)$ — дифференцируемая монотонная функция, обратная функция которой $x = \varphi^{-1}(y) = \psi(y)$, то плотность распределения случайной величины η равна

$$g(y) = f(\psi(y)) \left| \frac{d\psi(y)}{dy} \right|. \tag{4.1}$$

Если функция $\eta = \varphi(\xi)$ не является монотонной, то интервал возможных значений ξ разбиваем на такие интервалы, в которых функция $\varphi(\xi)$ является монотонной, и находим плотности

распределения $g_i(y)$ на каждом из этих интервалов. Тогда плотность распределения случайной величины η равна

$$g(y) = \sum_i g_i(y) \tag{4.2}$$

Пример 4.1. Дискретная случайная величина ξ задана законом распределения

ξ	-2	-1	1	2
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$

Найдите закон распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

Решение. Найдем возможные значения случайной величины $\eta = \xi^2$:

$$y_1 = x_1^2 = (-2)^2 = 4,\ y_2 = x_2^2 = (-1)^2 = 1,$$
$$y_3 = x_3^2 = 1^2 = 1,\ y_4 = x_4^2 = 2^2 = 4.$$

Различным значениям случайной величины ξ соответствуют одинаковые значения случайной величины η, потому что функция η=ξ^2 не является монотонной. Поэтому вероятности значений η найдем, используя теорему сложения:

$$P(\eta = 1) = P(\xi = -1) + P(\xi = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$
$$P(\eta = 4) = P(\xi = -2) + P(\xi = 2) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4}.$$

Тогда закон распределения случайной величины η имеет вид

η	1	4
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Пример 4.2. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[1; 3]$. Найдите плотность распределения случайной величины $\eta = e^{\xi}$.

Решение. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если } x \in [1; 3], \\ 0, & \text{если } x \notin [1; 3]. \end{cases}$$

Функция $y = e^x$ является монотонно возрастающей и дифференцируемой. Обратная функция $x = \ln y$ также является монотонной и дифференцируемой функцией для всех $y \in (0; \infty)$ и её производная равна $x'_y = \frac{1}{y}$.

Тогда по формуле 4.1 плотность распределения случайной величины η будет иметь вид

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2y}, & \text{если } x \in [e; e^3], \\ 0, & \text{если } x \notin [e; e^3]. \end{cases}$$

Пример 4.3. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = 1, \sigma^2 = 1$ Найдите плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

Решение. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Так как функция $y = x^2$ на интервале $(-\infty; \infty)$ не является монотонной, то разобьем этот интервал на два интервала $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$, на которых функция монотонна. На интервале $(-\infty; 0)$ обратная функция имеет вид $\psi_1(y) = -\sqrt{y}$, на интервале $(0; \infty)$ обратная функция $\psi_2(y) = \sqrt{y}$.

Производные обратных функций:

$$\psi'_1(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}, \ \psi'_2(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Так как $y = x^2$, $x \in (-\infty; \infty)$, то $y \in (0; \infty)$.

Тогда по формуле 4.2 плотность распределения случайной величины η на интервале $(0; \infty)$ равна

$$g(y) = f(\psi_1(y)) \cdot |\psi'_1(y)| + f(\psi_2(y)) \cdot |\psi'_2(y)| =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}.$$

Пример 4.4. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F_\xi(x)$. Найдите функцию распределения случайной величины $\eta = k\xi + b$.

Решение. По определению функция распределения случайной величины равна $F_\eta(y) = P(\eta < y)$.

Если $k > 0$, то $F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(k\xi + b < y) = P\left(\xi < \frac{y-b}{k}\right) = F_\xi\left(\frac{y-b}{k}\right)$.

Если $k < 0$, то $F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(k\xi + b < y) = P\left(\xi > \frac{y-b}{k}\right) = 1 - P\left(\xi \leqslant \frac{y-b}{k}\right) = 1 - F_\xi\left(\frac{y-b}{k}\right)$.

Упражнения

4.1. Дискретная случайная величина ξ задана законом распределения

ξ	-2	-1	1	2
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Найдите закон распределения случайной величины $\eta = |\xi|$.

4.2. Дискретная случайная величина ξ задана законом распределения

ξ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
P	0,2	0,7	0,1

Найдите закон распределения случайной величины $\eta = \sin\xi$.

4.3. Случайная величина ξ задана плотностью распределения $f(x)$ на интервале $(1; 4)$. Найдите плотность распределения случайных величин $\eta_1 = -4\xi,\ \eta_2 = 3\xi + 1$.

4.4. Случайная величина ξ распределена по закону Коши

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Найдите плотности распределения случайных величин $\eta_1 = \xi^3 + 2,\ \eta_2 = \dfrac{1}{\xi}$.

4.5. Случайная величина ξ с плотностью распределения $f(x)$ принимает только положительные значения. Найдите плотности распределения случайных величин $\eta_1 = e^{-\xi},\ \eta_2 = \dfrac{1}{\xi^2},\ \eta_3 = \sqrt{\xi}$.

4.6. Случайная величина ξ с плотностью распределения $f(x)$ принимает все вещественные значения. Найдите плотности распределения случайных величин $\eta_1 = \ln|\xi|$, $\eta_2 = \operatorname{arctg}\xi$, $\eta_3 = \dfrac{1}{1+\xi^2}$.

4.7. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найдите плотность распределения случайной величины $\eta = e^{\xi}$.

4.8. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = 0, \sigma = 1$ Найдите плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^5$.

4.9. Случайная величина ξ равномерно распределена на промежутке $[-2; 2]$. Найдите плотность распределения случайной величины $\eta = |\xi|$.

4.10. Случайная величина ξ равномерно распределена на промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$. Найдите плотность распределения случайной величины $\eta = \sin\xi$.

4.11. Случайная величина ξ равномерно распределена на промежутке $(0; 2\pi)$. Найдите плотность распределения случайной величины $\eta = \cos\xi$.

4.12. Случайная величина ξ имеет функцию распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 0,25x^2, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Найдите функцию распределения случайных величин $\eta_1 = 5\xi + 3$, $\eta_2 = -4\xi + 1$.

4.13. Непрерывная случайная величина ξ имеет функцию распределения $F_\xi(x)$. Найдите функцию распределения случайных величин $\eta_1 = \xi^3$, $\eta_2 = \operatorname{arctg}\xi$, $\eta_3 = \xi^2$.

4.14. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найдите функции распределения случайных величин $\eta_1 = 2 - \xi$, $\eta_2 = \xi^2$, $\eta_3 = \sqrt{\xi}$, $\eta_4 = [\xi]^2$, где $[\xi]$— целая часть ξ.

4.15. Радиус шара распределен по показательному закону с параметром λ. Найдите распределение объема шара и площади поверхности сферы.

5. Функции двух случайных величин

Пусть (ξ, η) — двумерная случайная величина. Случайная величина $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$ называется функцией от двумерной случайной величины.

Если (ξ, η) непрерывная случайная величина с плотностью $f(x, y)$, то функцию распределения и плотность случайной величины $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$ можно найти по формулам

$$F_\zeta(z) = P(\zeta < z) = P(\varphi(x, y) < z) = \iint\limits_D f(x, y)dxdy, \tag{5.1}$$

$$f_\zeta(z) = \frac{d}{dz} \iint\limits_D f(x, y)dxdy, \tag{5.2}$$

где $D = \{(x, y)|\varphi(x, y) < z\}$.

1. Пусть $\zeta = \xi + \eta$. Тогда множество $D = \{(x, y)|x + y < z\}$ (рис. 5), а функция распределения и плотность $\zeta = \xi + \eta$ равны

$$F_\zeta(z) = \iint\limits_{x+y<z} f(x, y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x, y)dy, \tag{5.3}$$

$$f_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y)dy. \tag{5.4}$$

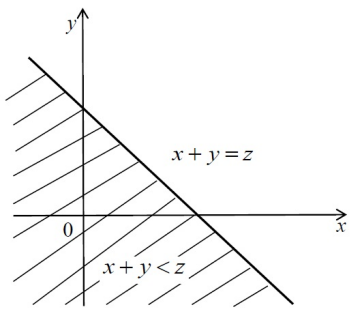

Рис. 5 Множество $D = \{(x, y)|x + y < z\}$.

Если ξ и η — независимые случайные величины с плотностями $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$, то плотность суммы случайных величин $\xi+\eta$ равна

$$f_{\xi+\eta}(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)f_\eta(z-x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(z-y)f_\eta(y)dy. \qquad (5.5)$$

Формулу 5.5 называют формулой свёртки.

2. Пусть $\zeta=\xi\cdot\eta$. Тогда множество $D=\{(x,y)|xy<z\}$ (рис. 6), а функция распределения и плотность произведения случайных величин $\xi\cdot\eta$ равны

$$F_\zeta(z)=\int\limits_{-\infty}^{0} dx\int\limits_{\frac{z}{x}}^{+\infty} f(x,y)dy+\int\limits_{0}^{+\infty} dx\int\limits_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f(x,y)dy, \qquad (5.6)$$

$$f_\zeta(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{|x|}. \qquad (5.7)$$

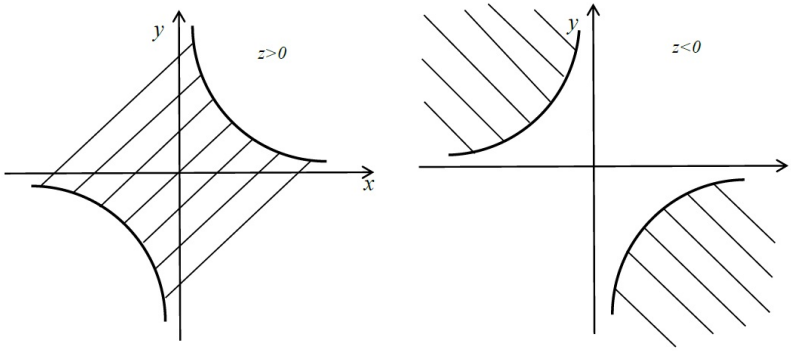

Рис. 6 Множество $D=\{(x,y)|xy<z\}$.

Если ξ и η — независимые случайные величины с плотностями $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$, то плотность произведения случайных величин $\xi\cdot\eta$ равна

$$f_{\xi\cdot\eta}(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)f_\eta\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{|x|}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi\left(\frac{z}{y}\right)f_\eta(y)\frac{dy}{|y|}. \qquad (5.8)$$

3. Пусть $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$. Тогда множество $D = \{(x, y)|x < yz\}$ (рис. 7), а функция распределения и плотность отношения случайных величин $\frac{\xi}{\eta}$ равны

$$F_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} dy \int\limits_{zy}^{+\infty} f(x, y)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{zy} f(x, y)dx, \tag{5.9}$$

$$f_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(zy, y)|y|dy. \tag{5.10}$$

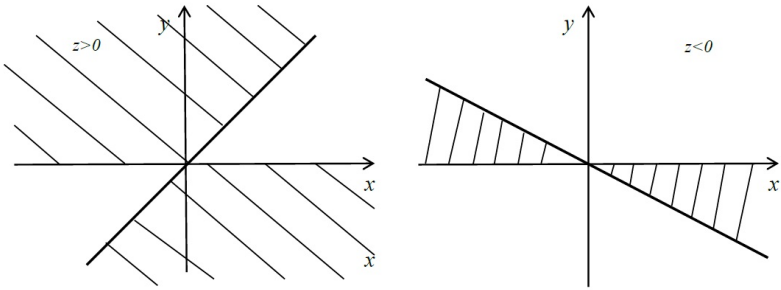

Рис. 7 Множество $D = \{(x, y)|x < yz\}$.

Если ξ и η — непрерывные независимые случайные величины с плотностями $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$, то плотность отношения случайных величин $\frac{\xi}{\eta}$ равна

$$f_{\frac{\xi}{\eta}}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) f_\eta\left(\frac{x}{z}\right) \frac{|x|}{z^2} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(zy) f_\eta(y)|y|dy. \tag{5.11}$$

Пример 5.1. Найдите плотность суммы случайных величин ξ и η, если эти величины независимы и ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а η имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2]$.

Решение. Плотности распределения случайных величин ξ и η будут иметь вид

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0; 1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0; 1] \end{cases} \quad f_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если } y \in [0; 2], \\ 0, & \text{если } y \notin [0; 2] \end{cases}$$

Используем формулу свертки 5.5

$$f(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x)\, dx$$

Выпишем плотность случайной величины η как функцию от переменной $z - x$:

$$f_\eta(z-x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если } z - x \in [0;2] \\ 0, & \text{если } z - x \notin [0;2] \end{cases}$$

$$f_\eta(z-x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если } z - 2 \leqslant x \leqslant z, \\ 0, & \text{если } z - x \notin [0;2] \end{cases}$$

Если $z < 0$ (рис. 8), то $f_\xi(x) f_\eta(z-x) = 0$ и $f(z) = 0$.

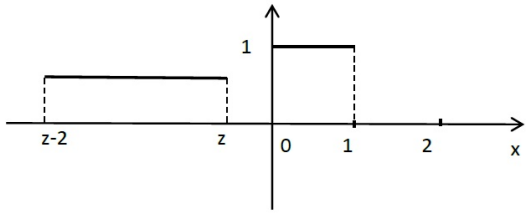

Рис. 8 Случай $z < 0$.

Если $0 \leqslant z < 1$ (рис. 9), то $f_\xi(x) f_\eta(z-x) = \dfrac{1}{2}$ и

$$f(z) = \int\limits_{0}^{z} \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2} z.$$

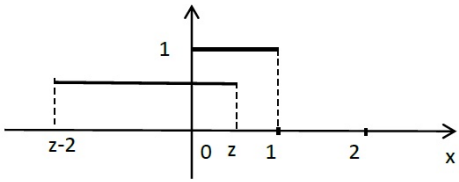

Рис. 9 Случай $0 \leqslant z < 1$.

Если $z \geqslant 1, z-2<0$, т.е $1 \leqslant z<2$ (рис. 10), то $f_\xi(x)f_\eta(z-x)=\dfrac{1}{2}$ и

$$f(z) = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}.$$

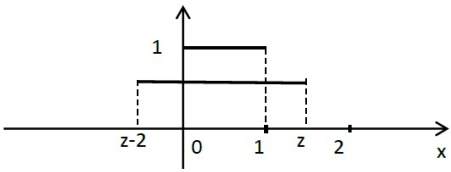

Рис. 10 Случай $1 \leqslant z < 2$.

Если $2 \leqslant z < 3$ (рис. 11), то $f_\xi(x)f_\eta(z-x) = \dfrac{1}{2}$ и

$$f(z) = \int\limits_{z-2}^1 \frac{1}{2}\,dx = \frac{3-z}{2}.$$

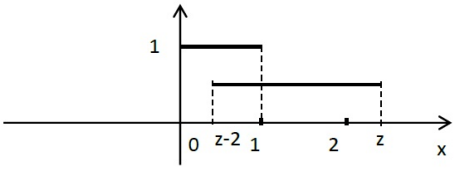

Рис. 11 Случай $2 \leqslant z < 3$.

Если $z \geqslant 3$ (рис. 12), то $f_\xi(x)f_\eta(z-x) = 0$ и $f(z) = 0$.

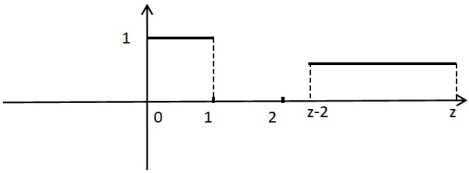

Рис. 12 Случай $z \geqslant 3$.

Тогда

$$f(z)=\begin{cases} 0, & \text{если } z<0,\\ \dfrac{z}{2}, & \text{если } 0\leqslant z<1,\\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } 1\leqslant z<2,\\ \dfrac{3-z}{2}, & \text{если } 2\leqslant z<3,\\ 0, & \text{если } z\geqslant 3.\end{cases}$$

Пример 5.2. Случайная точка (ξ,η) равномерно распределена внутри прямоугольника с вершинами $(0;0),(2;0),(2;1)$ и $(0;1)$. Найдите плотность произведения случайных величин $\zeta=\xi\cdot\eta$.

Решение. Случайная точка (ξ,η) равномерно распределена внутри прямоугольника $D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1\}$. Плотность распределения случайной величины (ξ,η) имеет вид

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если } (x,y)\in D,\\ 0, & \text{если } (x,y)\notin D.\end{cases}$$

При этом случайные величины ξ и η также имеют равномерное распределение с плотностями

$$f_\xi(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если } x\in[0,2],\\ 0, & \text{если } x\notin[0,2],\end{cases}\qquad f_\eta(y)=\begin{cases} 1, & \text{если } y\in[0,1],\\ 0, & \text{если } y\notin[0,1].\end{cases}$$

и ξ и η независимы.

Для нахождения плотности произведения случайных величин $\zeta=\xi\cdot\eta$ воспользуемся формулой 5.8. Если $x\in[0,2]$, то

$$f_{\xi\cdot\eta}(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)f_\eta\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{|x|}=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} f_\eta\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{x}.$$

Плотность $f_\eta\left(\frac{z}{x}\right)=1$ при $0<x<z$ и $f_\eta\left(\frac{z}{x}\right)=0$ при $z<0$ или $z>2$. Следовательно, при $0<z<2$

$$f_{\xi\cdot\eta}(z)=\frac{1}{2}\int\limits_{z}^{2}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln z)=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{z}.$$

Тогда плотности произведения случайных величин $\zeta = \xi \cdot \eta$ равна

$$f_{\xi\eta}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{z}, & \text{если } 0 < z < 2, \\ 0, & \text{если } z < 0 \text{ или } x > 2. \end{cases}$$

Упражнения

5.1. Найдите плотность суммы случайных величин ξ и η, если эти величины независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

5.2. Найдите плотность суммы случайных величин ξ и η, если эти величины независимы и имеют нормальное распределение с параметрами $a = 0, \sigma^2 = 1$.

5.3. Найдите плотность суммы случайных величин ξ и η, если эти величины независимы и ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = 0, \sigma^2 = 1$, а η имеет нормальное распределение с параметрами $a = 1, \sigma^2 = 1$.

5.4. Найдите плотность суммы случайных величин ξ и η, если эти величины независимы и имеют плотности распределений:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ e^{-x}, & \text{если } x \geqslant 0, \end{cases} \quad f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0, \\ \frac{1}{2}e^{-y/2}, & \text{если } y \geqslant 0, \end{cases}$$

5.5. Найдите плотность суммы случайных величин ξ и η, если эти величины независимы и ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = 0, \sigma^2 = 1$, а η имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

5.6. Найдите плотность суммы случайных величин ξ и η, если эти величины независимы и ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$, а η имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

5.7. Найдите плотность суммы случайных величин ξ и η, если эти величины независимы и ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$, а η имеет нормальное распределение с параметрами $a = 0, \sigma^2 = 1$.

5.8. Найдите плотность разности случайных величин ξ и η, если эти величины независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

5.9. Найдите плотность разности случайных величин ξ и η, если эти величины независимы и ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda=1$, а η имеет показательное распределение с параметром $\lambda=2$.

5.10. Найдите плотность произведения случайных величин ξ и η, если эти величины независимы и ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, а η имеет равномерное распределение на отрезке $[1,2]$.

5.11. Найдите плотность произведения случайных величин ξ и η, если эти величины независимы и имеют плотности распределений:

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\ f_\eta(y)=\begin{cases} 0, & \text{если } y<0,\\ ye^{-y^2/2}, & \text{если } y>0.\end{cases}$$

5.12. Найдите плотность отношения случайных величин ξ и η, если эти величины независимы и ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda=1$, а η имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

5.13. Найдите плотность отношения случайных величин ξ и η, если эти величины независимы и ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, а η имеет нормальное распределение с параметрами $a=0, \sigma^2=1$.

5.14. Случайная точка (ξ,η) равномерно распределена в квадрате $D=[0;1]\times[0;1]$. Найдите распределение площади прямоугольника $[0;\xi]\times[0;\eta]$.

5.15. Система (ξ,η) независимых случайных величин имеет плотность распределения

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{если } x<0 \text{ или } y<0,\\ xye^{-(x^2+y^2)/2}, & \text{если } x>0 \text{ и } y>0.\end{cases}$$

Найдите плотность отношения случайных величин ξ и η.

Тестовые задания

1. Двумерная случайная величина называется непрерывной, если
   a) ее функция распределения $F(x, y)$ - непрерывная функция;
   b) ее функция распределения $F(x, y)$ дифференцируемая по каждому из аргументов;
   c) существует вторая смешанная производная $F''_{xy}(x, y)$;
   d) существует производная $F'_x(x, y)$;
   e) ее функция распределения $F(x, y)$ дифференцируемая по y.

2. Свойства функции распределения двумерной случайной величины $F(x, y)$:
   a) функция распределения $F(x, y)$ есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей;
   b) функция распределения $F(x, y)$ есть неубывающая функция по каждому из аргументов;
   c) если хотя бы один из аргументов стремится к $-\infty$, функция распределения $F(x, y)$ равна нулю;
   d) если один из аргументов стремится к $+\infty$, функция распределения $F(x, y)$ становится равной функции распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу;
   e) функция распределения $F(x, y)$ есть невозрастающая функция по каждому из аргументов.

3. Непрерывными являются следующие двумерные случайные величины:
   a) масти двух карт, вытаскиваемых из колоды;
   b) число очков, выпавших на каждом из двух подбрасываемых кубиков;
   c) число очков, выпавших на двух разных рулетках;
   d) скорость и направление ветра;
   e) дальность и направление полета снаряда.

4. $P((x_1 \leq \xi < x_2)(y_1 \leq \eta < y_2))=$
   a) $F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$;
   b) $F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)$;
   c) $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1)$;
   d) $F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1)$.

5. Если оба аргумента стремятся к $+\infty$, то функция распределения равна...

6. Плотностью совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (ξ, η) называют:

   a) $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}$, где $F(x,y)$— функция распределения;

   b) $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$, где $F(x,y)$— функция распределения;

   c) $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}$, где $F(x,y)$— функция распределения;

   d) $f(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, dxdy.$

7. Функция распределения $F(x,y)$ двумерной случайной величины принимает значения:

   a) $F(x,y) \leqslant 0$;

   b) $-1 \leqslant F(x,y) \leqslant 1$;

   c) $0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1$;

   d) $F(x,y) > 1$.

8. Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины (ξ, η) обладает свойствами:

   a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dxdy = 1$;

   b) $f(x,y) \geqslant 0$;

   c) $-1 \leqslant f(x,y) \leqslant 1$;

   d) $\int\limits_{0}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} f(x,y)\, dxdy = 1$.

9. Вероятность попадания двумерной случайной величины (ξ, η) в область D вычисляется по формуле:

   a) $P((\xi,\eta) \in D) = \iint\limits_{D} f(x,y)\, dxdy$;

   b) $P((\xi,\eta) \in D) = \iint\limits_{D} F(x,y)\, dxdy$;

   c) $P((\xi,\eta) \in D) = \iint\limits_{D} f_\xi(x)\, dxdy$;

   d) $P((\xi,\eta) \in D) = \iint\limits_{D} f_\xi(x) f_\eta(y)\, dxdy$.

10. Ковариация случайной величины с самой собой есть
    a) ее дисперсия;
    b) математическое ожидание ее квадрата;
    c) ее математическое ожидание;
    d) 0.
11. Коэффициент корреляции принимает значения
    a) от -1 до 1;
    b) от 0 до 1;
    c) от 0 до $+\infty$;
    d) от $-\infty$ до $+\infty$.
12. Ковариация двух независимых случайных величин равна...
13. Выберите верное утверждение.
    a) Если две нормально распределенные случайные величины ξ и η коррелированы, то они зависимы.
    b) Если две нормально распределенные случайные величины ξ и η некоррелированы, то они зависимы.
    c) Если две нормально распределенные случайные величины ξ и η некоррелированы, то они независимы.
    d) Если две нормально распределенные случайные величины ξ и η коррелированы, то они независимы.
    e) Если две нормально распределенные случайные величины ξ и η независимы , то они некоррелированы.
14. Ковариацией системы (ξ, η) называется
    a) $cov(\xi, \eta) = M((\xi - M\xi)^2(\eta - M\eta)^2)$;
    b) $cov(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$;
    c) $cov(\xi, \eta) = D(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$;
    d) $cov(\xi, \eta) = \dfrac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$.
15. Если случайные величины ξ и η независимы, то для функций распределения выполняется соотношение
    a) $F(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$;
    b) $F(x, y) = F_\xi(x) + F_\eta(y)$;
    c) $F(x, y) = F_\xi(x) = F_\eta(y)$;
    d) $F(x, y) = \sqrt{F_\xi(x)F_\eta(y)}$.

16. Если случайные величины ξ и η независимы, то для плотности распределения выполняется соотношение
    a) $f(x,y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$;
    b) $f(x,y) = f_\xi(x) + f_\eta(y)$;
    c) $f(x,y) = f_\xi(x) = f_\eta(y)$;
    d) $f(x,y) = \sqrt{f_\xi(x) f_\eta(y)}$.
17. Коэффициент корреляции принимает значения:
    a) $|\rho(\xi,\eta)| \leqslant 1$;
    b) $|\rho(\xi,\eta)| < \infty$;
    c) $\rho(\xi,\eta) > 0$;
    d) $0 < \rho(\xi,\eta) < 1$;
18. Если случайные величины ξ и η независимы, то их ковариация равна
    a) $cov(\xi,\eta) = 1$;
    b) $cov(\xi,\eta) = 0$;
    c) $cov(\xi,\eta) > 0$;
    d) $cov(\xi,\eta) \neq 0$.
19. Для дискретных случайных величин ковариация равна
    a) $cov(\xi,\eta) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij}$;
    b) $cov(\xi,\eta) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} (x_i - M\xi)(y_j - M\eta) p_{ij}$;
    c) $cov(\xi,\eta) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} (x_i - M\xi)^2 (y_j - M\eta)^2 p_{ij}$;
    d) $cov(\xi,\eta) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} (x_i - M\xi)(y_j - M\eta) f(x_i, y_j)$.
20. Для непрерывных случайных величин ковариация равна
    a) $cov(\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)(y - M\eta) f(x,y)\, dxdy$;
    b) $cov(\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y)\, dxdy$;
    c) $cov(\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 (y - M\eta)^2 f(x,y)\, dxdy$;
    d) $cov(\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi) f(x,y)\, dxdy$;

Ответы к упражнениям

1. Системы дискретных случайных величин

1.1.

ξ	1	2	3
P	0,3	0,5	0,2

η	0	1	2
P	0,35	0,35	0,3

$\xi \mid \eta = 1$	1	2	3
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

$\eta \mid \xi = 2$	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

1.2.

$\xi \mid \eta = 10$	3	6
P	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

$\eta \mid \xi = 6$	10	14	18
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{13}{28}$

1.3.

ξ	1	2	3
P	0,3	0,45	0,25

η	1	2	3
P	0,35	0,35	0,3

$\xi \mid \eta$	1	2	3
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$

$\eta \mid \xi$	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

ξ и η — зависимы.

1.4. $F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 1, \\ 0,06, & \text{если } 0 < x \leqslant 1,\ 1 < y \leqslant 2, \\ 0,36, & \text{если } 0 < x \leqslant 1,\ y > 2, \\ 0,56, & \text{если } x > 1,\ 1 < y \leqslant 2, \\ 1, & \text{если } x > 1,\ y > 2. \end{cases}$

$P(\xi, \eta \in B) = 0,56.$

1.5. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 0,16, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ 0,54, & \text{если } 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leqslant -1, \\ 0,06, & \text{если } -1 < y \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } y > 1. \end{cases}$

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\leqslant 0 \text{ или } y\leqslant -1,\\ 0,10, & \text{если } 0<x\leqslant 1,\ -1<y\leqslant 1,\\ 0,16, & \text{если } 0<x\leqslant 1,\ y>1,\\ 0,40, & \text{если } 1<x\leqslant 2,\ -1<y\leqslant 1,\\ 0,60, & \text{если } x>2,\ -1<y\leqslant 1,\\ 0,64, & \text{если } 1<x\leqslant 2,\ y>1,\\ 1, & \text{если } x>2,\ y>1. \end{cases}$$

$P(\xi\leqslant\eta)=0,94.$

1.6.

ξ_1	η					
	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	0	1/18	1/36	1/36	1/36	1/36
3	0	0	1/12	1/36	1/36	1/36
4	0	0	0	1/9	1/36	1/36
5	0	0	0	0	5/36	1/36
6	0	0	0	0	0	1/6

1.7.

ξ_1	η	
	0	1
0	0,09	0,21
1	0,21	0,49

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\leqslant 0 \text{ или } y\leqslant 0,\\ 0,21, & \text{если } 0<x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 1,\\ 0,30, & \text{если } x>1,\ 0<y\leqslant 1,\\ 0,30, & \text{если } 0<x\leqslant 1,\ y>1,\\ 1, & \text{если } x>1,\ y>1. \end{cases}$$

1.8.

$\xi+\eta$	1	2	3	4	5	6
P	0,02	0,14	0,24	0,28	0,16	0,16

$\xi-\eta$	-1	0	1	2	3	4
P	0,04	0,24	0,22	0,26	0,16	0,08

$\xi\cdot\eta$	0	1	2	4	8
P	0,2	0,04	0,24	0,36	0,16

$\frac{\eta}{\xi}$	0	0,25	0,5	1	2
P	0,2	0,16	0,36	0,24	0,04

1.9.

$3\xi+2\eta$	-1	1	2	4	5	7
P	0,08	0,32	0,02	0,08	0,1	0,4

ξ^2	0	1
P	0,1	0,9

$\xi^2+\eta^2$	1	2	4	5
P	0,02	0,08	0,18	0,72

1.10.

$\xi+\eta$	1	2	3	4	5	6
P	0,2925	0,1575	0,195	0,105	0,1625	0,0875

$\xi-\eta$	-3	-2	-1	0	1	2
P	0,1625	0,0875	0,195	0,105	0,2925	0,1575

$\xi\cdot\eta$	0	2	4	8
P	0,45	0,195	0,2675	0,0875

2. Системы непрерывных случайных величин

2.1. $f(x,y)=\begin{cases}\cos x\cdot\cos y, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{если } x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$

$P(0\leqslant\xi\leqslant\frac{\pi}{6},0\leqslant\eta\leqslant\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

2.2. $f(x,y)=\begin{cases}\ln^2 2\cdot 2^{-x-y}, & \text{если } x\leqslant 0,\ y\leqslant 0,\\ 0, & \text{если } x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$

$P(1\leqslant\xi\leqslant 3,3\leqslant\eta\leqslant 8)=\frac{93}{2048}$.

2.3. $C=\dfrac{20}{\pi^2},\ F(x,y)=(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2})(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{5}+\dfrac{1}{2})$.

2.4. $C=\dfrac{\ln^2 3}{2}$,

$F(x,y)=\begin{cases}(3^{-\frac{x}{2}}-1)(3^{-y}-1) & \text{если } x\leqslant 0,\ y\leqslant 0.\\ 0, & \text{если } x<0 \text{ или } y<0.\end{cases}$

2.5. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, & \text{если } x^2+y^2\leqslant R^2,\\ 0, & \text{если } x^2+y^2>R^2,\end{cases}$

$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}, & \text{если } -R\leqslant x\leqslant R,\\ 0, & \text{если } x<-R \text{ или } x>R,\end{cases}$

$f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}, & \text{если } -R\leqslant y\leqslant R,\\ 0, & \text{если } y<-R \text{ или } y>R.\end{cases}$

$P(\xi^2+\eta^2\leqslant 1)=0,25$, ξ и η зависимы.

2.6. $C=1$. $f_\xi(x)=\begin{cases} e^x, & \text{если } x\leqslant 0,\\ 0, & \text{если } x>0,\end{cases}$

$f_\eta(y)=\begin{cases} -ye^y, & \text{если } y\leqslant 0,\\ 0, & \text{если } y>0.\end{cases}$

2.8. $C=\dfrac{5}{6}$. $f_\xi(x)=\begin{cases} \dfrac{20}{9}x(3-x)^3, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 3,\\ 0, & \text{если } x<0 \text{ или } x>3,\end{cases}$

$f_\eta(y)=\begin{cases} \dfrac{15}{16}y^2(2-y)^2, & \text{если } 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & \text{если } y<0 \text{ или } y>2.\end{cases}$

ξ и η зависимы.

2.9. $C=24$. $f_\xi(x)=\begin{cases} \dfrac{8}{(x+2)^3}, & \text{если } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } x<0,\end{cases}$

$f_\eta(y)=\begin{cases} \dfrac{8}{(y+2)^3}, & \text{если } y\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } y<0.\end{cases}$

$P(0\leqslant\xi\leqslant 2, 0\leqslant\eta\leqslant 2)=\frac{11}{18}$. ξ и η зависимы.

2.10. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если } (x,y)\in\Pi,\\ 0, & \text{если } (x,y)\notin\Pi,\end{cases}$

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{если } x<1 \text{ или } y<2,\\ \dfrac{x(y-2)}{2}, & \text{если } (x,y)\in\Pi,\\ \dfrac{y-2}{2}, & \text{если } x>1,\ 2\leqslant y\leqslant 4,\\ x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\ y>4,\\ 1, & \text{если } x>1,\ y>4,\end{cases}$$

$F_\xi(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x<0,\\ x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & \text{если } x>1,\end{cases}$ $F_\eta(y)=\begin{cases} 0, & \text{если } y<2,\\ \dfrac{y-2}{2}, & \text{если } 2\leqslant y\leqslant 4,\\ 1, & \text{если } y>4.\end{cases}$

$f_\xi(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{если } x<0 \text{ или } x>1,\end{cases}$

$f_\eta(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если } 2\leqslant y\leqslant 4,\\ 0, & \text{если } y<2 \text{ или } y>4.\end{cases}$

$P((\xi,\eta)\in\triangle)=0,25$.

2.11. $C=24$,

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\leqslant 1 \text{ или } y\leqslant 3,\\ \left(1-\frac{1}{x^3}\right)\left(1-\frac{4}{(y-1)^2}\right), & \text{если } x>1,\ y>3,\end{cases}$$

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x^4}, & \text{если } x>1,\\ 0, & \text{если } x<1,\end{cases}\quad f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{8}{(y-1)^3}, & \text{если } y>3,\\ 0, & \text{если } y<3.\end{cases}$$

ξ и η независимы.

2.12. $f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x}{8}, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{если иначе},\end{cases}$

$$f_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{2-y}{2}, & \text{если } 0\leqslant y\leqslant 4,\\ 0, & \text{если иначе.}\end{cases}$$

$$f_\xi(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4-2y}, & \text{если } (x,y)\in \mathrm{T},\\ 0, & \text{если } (x,y)\notin \mathrm{T},\end{cases}$$

$$f_\eta(y|x)=\begin{cases}\dfrac{2}{4-x}, & \text{если } (x,y)\in \mathrm{T},\\ 0, & \text{если } (x,y)\notin \mathrm{T},\end{cases}$$

ξ и η зависимы.

2.13. $f(x,y)=\begin{cases}8e^{-4x-2y}, & \text{если } x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } x<0 \text{ или } y<0,\end{cases}$

$$f_\xi(x|y)=\begin{cases}4e^{-4x}, & \text{если } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } x<0,\end{cases}\quad f_\eta(y|x)=\begin{cases}2e^{-2y}, & \text{если } y\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } y<0,\end{cases}$$

$P((\xi,\eta)\in\triangle)=1+e^{-4}-2e^{-2}$.

2.14. $f_\xi(x|y)=\begin{cases}2x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{если } x<0, \text{ или } x>1,\end{cases}$

$$f_\eta(y|x)=\begin{cases}e^{-y}, & \text{если } y\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } y<0,\end{cases}$$

2.15. $C=\dfrac{1}{4\pi}$, ξ и η независимы.

3. Числовые характеристики двумерной случайной величины

3.1. $cov(\xi,\eta)=-0,1,\ \rho(\xi,\eta)=-0,244.$

3.2. $cov(\xi,\eta)=0,07,\ \rho(\xi,\eta)=0,178.$

3.3. $\begin{pmatrix}2,92 & 1,46\\ 1,46 & 1,97\end{pmatrix},\ \rho(\xi,\eta)=0,609.$

3.4. $\begin{pmatrix}0,25 & 0,25\\ 0,25 & 0,75\end{pmatrix},\ \rho(\xi,\eta)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

3.5. $M\xi=\dfrac{1}{2},\ M\eta=1,\ D\xi=\dfrac{1}{12},\ D\eta=\dfrac{1}{3},\ cov(\xi,\eta)=0,\ \rho(\xi,\eta)=0.$

3.6. $C=\dfrac{12}{11},\ M\xi=M\eta=\dfrac{7}{11},\ D\xi=D\eta=\dfrac{257}{3630},\ \rho(\xi,\eta)=-\dfrac{40}{257}.$

3.7. $M\xi=M\eta=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2},\ D\xi=D\eta=1-\dfrac{\pi}{4},\ \rho(\xi,\eta)=0.$

3.8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$, $\rho(\xi,\eta)=0$.

3.9. $M\xi = M\eta = \dfrac{\pi}{4}$, $D\xi = D\eta = \dfrac{\pi^2+8\pi-32}{16}$, $\rho(\xi,\eta)=0,74$.

3.10. $M\xi = -\dfrac{8}{3\pi}$, $M\eta=0$, $D\xi = 1-\dfrac{64}{9\pi^2}$, $D\eta=1$, $cov(\xi,\eta)=0$, $\rho(\xi,\eta)=0$.

3.11. $M\xi=0$, $M\eta=\frac{8R}{5\pi}$, $D\xi=\dfrac{R^2}{3}$, $D\eta=\dfrac{25\pi^2-192}{75\pi^2}$, $cov(\xi,\eta)=0$, $\rho(\xi,\eta)=0$, ξ и η зависимы, некоррелированы.

3.12. $M\xi=M\eta=\dfrac{5}{3}$, $D\xi=D\eta=\dfrac{8}{9}$, $\rho(\xi,\eta)=\dfrac{1}{4}$.

3.13. $M\xi=M\eta=\dfrac{1}{2}$, $D\xi=\dfrac{3}{4}$, $D\eta=\dfrac{5}{12}$, $\rho(\xi,\eta)=0$, ξ и η независимы, некоррелированы.

3.14. $M\xi=2$, $M\eta=-3$, $D\xi=D\eta=1$, $\rho(\xi,\eta)=0,6$.

3.15. $M\xi=M\eta=1$, $D\xi=\dfrac{2}{7}$, $D\eta=\dfrac{1}{7}$, $\rho(\xi,\eta)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$$y=\begin{cases} \frac{1}{2}(3-x), & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 3, \\ 0, & \text{если } x<0, \text{ или } x>3, \end{cases}$$

$$x=\begin{cases} 2-y, & \text{если } 0\leqslant y\leqslant 2, \\ 0, & \text{если } y<0, \text{ или } y>2. \end{cases}$$

3.16. $y=\begin{cases} \frac{2}{3}x^2, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & \text{если } x<0, \text{ или } x>1, \end{cases}$

$$x=\begin{cases} \frac{2}{3}\cdot\frac{1+\sqrt{y}+y}{1+\sqrt{y}}, & \text{если } 0\leqslant y\leqslant 1, \\ 0, & \text{если } y<0, \text{ или } y>1. \end{cases}$$

4. Функции одной случайной величины

4.1.

η	1	2
P	0,3	0,7

4.2.

η	$\sqrt{2}/2$	1
P	0,3	0,7

4.3. $g_1(y)=\dfrac{1}{4}f\left(-\dfrac{y}{4}\right)$, $y\in(-16;-4)$, $g_2(y)=\dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{y-1}{3}\right)$, $y\in(4;13)$.

4.4. $g_1(y)=\dfrac{1}{3\pi((y-2)^{2/3}+(y-2)^{4/3})}$, $g_2(y)=\dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$.

4.5. $g_1(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y}f\left(ln\dfrac{1}{y}\right), & \text{если } 0<y<1, \\ 0, & \text{если } y<0, \text{ или } y>1, \end{cases}$

$$g_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y\sqrt{y}}f\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right), & \text{если } y>0,\\ 0, & \text{если } y<0,\end{cases}$$

$$g_3(y)=\begin{cases}2yf(y^2), & \text{если } y>0,\\ 0, & \text{если } y<0.\end{cases}$$

4.6. $g_1(y)=(f(e^y)+f(-e^y))e^y$,

$$g_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^2 y}f(\operatorname{tg} y), & \text{если } -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{если } y<-\frac{\pi}{2}, \text{ или } y>\frac{\pi}{2},\end{cases}$$

$$g_3(y)=\begin{cases}\dfrac{f\left(\sqrt{\frac{1-y}{y}}\right)+f\left(-\sqrt{\frac{1-y}{y}}\right)}{2y\sqrt{y-y^2}}, & \text{если } 0<y<1,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

4.7. $g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}, & \text{если } y\geqslant 1,\\ 0, & \text{если } y<1.\end{cases}$

4.8. $g(y)=\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}y^{4/5}}e^{-\frac{1}{2}y^{2/5}}$, $y\neq 0$.

4.9. $g(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{если } 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & \text{если } y<0, \text{ или } y>2.\end{cases}$

4.10. $g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & \text{если } -1<y<1,\\ 0, & \text{если } y<-1, \text{ или } y>1.\end{cases}$

4.11. $g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & \text{если } -1<y<1,\\ 0, & \text{если } y<-1, \text{ или } y>1.\end{cases}$

4.12. $F_{\eta_1}(y)=F_\xi\left(\dfrac{y-3}{5}\right)$, $F_{\eta_2}(y)=1-F_\xi\left(\dfrac{y-1}{4}\right)$.

$$F_{\eta_1}(y)=\begin{cases}0, & \text{если } y<3,\\ \dfrac{(y-3)^2}{100}, & \text{если } 3\leqslant y\leqslant 13,\\ 1, & \text{если } y>13,\end{cases}$$

$$F_{\eta_2}(y)=\begin{cases}0, & \text{если } y<-7,\\ 1-\dfrac{(y-1)^2}{64}, & \text{если } -7\leqslant y\leqslant 1,\\ 1, & \text{если } y>1,\end{cases}$$

4.13. $F_{\eta_1}(y)=F_\xi(\sqrt[3]{y})$, $F_{\eta_2}(y)=F_\xi(\operatorname{tg} y)$,

$$F_{\eta_3}(y)=\begin{cases}0, & \text{если } y\leqslant 0,\\ F_\xi\left(\sqrt{y}\right)-F_\xi\left(-\sqrt{y}\right), & \text{если } y>0.\end{cases}$$

4.14. $F_{\eta_1}(y) = \begin{cases} e^{y-2}, & \text{если } y < 2, \\ 1, & \text{если } y \geqslant 2, \end{cases}$

$F_{\eta_2}(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{y}}, & \text{если } y \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } y < 0, \end{cases}$

$F_{\eta_3}(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y^2}, & \text{если } y \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } y < 0, \end{cases}$

η_4	0	1	4	$\dots$	k^2	$\dots$
P	$1 - e^{-1}$	$e^{-1} - e^{-2}$	$e^{-2} - e^{-3}$	$\dots$	$e^{-k} - e^{-(k+1)}$	$\dots$

4.15. $g_V(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\sqrt[3]{36\pi y^2}} e^{-\lambda \sqrt[3]{\dfrac{3y}{4\pi}}}, & \text{если } y > 0, \\ 0, & \text{если } y < 0, \end{cases}$

$g_S(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{4\sqrt{\pi y}} e^{-\lambda \sqrt{\dfrac{y}{4\pi}}}, & \text{если } y > 0, \\ 0, & \text{если } y < 0, \end{cases}$

5. Функции двух случайных величин

5.1. $f_{\xi+\eta}(z) = \begin{cases} z, & \text{если } 0 \leqslant z < 1, \\ 2 - z, & \text{если } 1 \leqslant z \leqslant 2, \\ 0, & \text{если } z < 0, \text{ или } z > 2. \end{cases}$

5.2. $f_{\xi+\eta}(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-z^2/4}, \ z \in R.$

5.3. $f_{\xi+\eta}(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(z-1)^2/4}, \ z \in R.$

5.4. $f_{\xi+\eta}(z) = \begin{cases} e^{-z/2} - e^{-z}, & \text{если } z \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } z < 0. \end{cases}$

5.5. $f_{\xi+\eta}(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{z-1}^{z} e^{-t^2/2}\, dt = \Phi(z) - \Phi(z-1), \ z \in R.$

5.6. $f_{\xi+\eta}(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z < 0, \\ 1 - e^{-z}, & \text{если } 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ e^{1-z} - e^{-z}, & \text{если } z > 1. \end{cases}$

5.7. $f_{\xi+\eta}(z) = 2e^{2-2z} \left(\dfrac{1}{2} + \Phi(z-2) \right), \ z \in R.$

5.8. $f_{\xi-\eta}(z) = \begin{cases} 1+z, & \text{если } -1 \leqslant z < 0, \\ 1-z, & \text{если } 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } z < -1, \text{ или } z > 1. \end{cases}$

5.9. $f_{\xi-\eta}(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}e^{-z}, & \text{если } z > 0, \\ \\ \dfrac{2}{3}e^{2z}, & \text{если } z \leqslant 0. \end{cases}$

5.10. $f_{\xi\eta}(z) = \begin{cases} \ln 2, & \text{если } 0 \leqslant z < 1, \\ \ln \dfrac{2}{z}, & \text{если } 1 \leqslant z \leqslant 2, \\ 0, & \text{если } z < 0, \text{ или } z > 2. \end{cases}$

5.11. $f_{\xi\eta}(z) = \dfrac{1}{2}e^{-|z|}, \ z \in R.$

5.12. $f_{\frac{\xi}{\eta}}(z) = \begin{cases} \dfrac{1-(z+1)e^{-z}}{z^2}, & \text{если } z > 0, \\ 0, & \text{если } z < 0. \end{cases}$

5.13. $f_{\frac{\xi}{\eta}}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - e^{-1/2z^2}\right), & \text{если } z \neq 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, & \text{если } z = 0. \end{cases}$

5.14. $f_S(z) = \begin{cases} -\ln z, & \text{если } 0 < z < 1, \\ 0, & \text{если } z < 0, \text{ или } z > 1. \end{cases}$

5.15. $f_{\frac{\xi}{\eta}}(z) = \begin{cases} \dfrac{2z}{(1+z^2)^2}, & \text{если } z > 0, \\ 0, & \text{если } z < 0. \end{cases}$

Список литературы

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей : учебник для вузов рек. МО РФ/ Е. С. Вентцель. — 9 - е изд., стер. — М. : Академия, 2003. — 571 с.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для бакалавров вузов/ В. Е. Гмурман. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва: Юрайт, 2013.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров для вузов/ В. Е. Гмурман. — 12-е изд. – Москва: Юрайт, 2013. — 478 с.
4. Дерр В. Я. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие для вузов/ В. Я.Дерр — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 596 с.
5. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов./ Н. Ш.Кремер. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. — 573 с.
6. Малугин В. А. Теория вероятностей: учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры/ В. А. Малугин. — М.: Издательство Юрайт, 2019. — 266 с.
7. Теория вероятностей. Ч. 3. Системы и функции случайных величин. Случайные процессы : учеб.-метод. пособие / авт.-сост.: С. Е. Демин, Е. Л. Демина. — Нижний Та-гил : НТИ (ф) УрФУ, 2017. – 295 с.
8. Мастерков Ю. В. Теория вероятностей: примеры и задачи : учеб. пособие/ Ю. В. Мастерков, Л. И. Родина. — Ижевск : 2013. — 131 с.

Приложения

Таблица 1

Значения функции Гаусса $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3882	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2568	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1619	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001

Таблица 2

Значения функции Лапласа $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,44	0,1700	0,88	0,3106	1,32	0,4066	1,76	0,4608	2,40	0,4918
0,01	0,0040	0,45	0,1736	0,89	0,3133	1,33	0,4082	1,77	0,4616	2,42	0,4922
0,02	0,0080	0,46	0,1772	0,90	0,3159	1,34	0,4099	1,78	0,4625	2,44	0,4927
0,03	0,0120	0,47	0,1808	0,91	0,3186	1,35	0,4115	1,79	0,4633	2,46	0,4931
0,04	0,0160	0,48	0,1844	0,92	0,3212	1,36	0,4131	1,80	0,4641	2,48	0,4934
0,05	0,0199	0,49	0,1879	0,93	0,3238	1,37	0,4147	1,81	0,4649	2,50	0,4938
0,06	0,0239	0,50	0,1915	0,94	0,3264	1,38	0,4162	1,82	0,4656	2,52	0,4941
0,07	0,0279	0,51	0,1950	0,95	0,3289	1,39	0,4177	1,83	0,4664	2,54	0,4945
0,08	0,0319	0,52	0,1985	0,96	0,3315	1,40	0,4192	1,84	0,4671	2,56	0,4948
0,09	0,0359	0,53	0,2019	0,97	0,3340	1,41	0,4207	1,85	0,4678	2,58	0,4951
0,10	0,0398	0,54	0,2054	0,98	0,3365	1,42	0,4222	1,86	0,4686	2,60	0,4953
0,11	0,0438	0,55	0,2088	0,99	0,3389	1,43	0,4236	1,87	0,4693	2,62	0,4956
0,12	0,0478	0,56	0,2123	1,00	0,3413	1,44	0,4251	1,88	0,4699	2,64	0,4959
0,13	0,0517	0,57	0,2157	1,01	0,3438	1,45	0,4265	1,89	0,4706	2,66	0,4961
0,14	0,0557	0,58	0,2190	1,02	0,3461	1,46	0,4279	1,90	0,4713	2,68	0,4963
0,15	0,0596	0,59	0,2224	1,03	0,3485	1,47	0,4292	1,91	0,4719	2,70	0,4965
0,16	0,0636	0,60	0,2257	1,04	0,3508	1,48	0,4306	1,92	0,4726	2,72	0,4967
0,17	0,0675	0,61	0,2291	1,05	0,3531	1,49	0,4319	1,93	0,4732	2,74	0,4969
0,18	0,0714	0,62	0,2324	1,06	0,3554	1,50	0,4332	1,94	0,4738	2,76	0,4971
0,19	0,0753	0,63	0,2357	1,07	0,3577	1,51	0,4345	1,95	0,4744	2,78	0,4973
0,20	0,0793	0,64	0,2389	1,08	0,3599	1,52	0,4357	1,96	0,4750	2,80	0,4974
0,21	0,0832	0,65	0,2422	1,09	0,3621	1,53	0,4370	1,97	0,4756	2,82	0,4976
0,22	0,0871	0,66	0,2454	1,10	0,3643	1,54	0,4382	1,98	0,4761	2,84	0,4977
0,23	0,0910	0,67	0,2486	1,11	0,3665	1,55	0,4394	1,99	0,4767	2,86	0,4979
0,24	0,0948	0,68	0,2517	1,12	0,3686	1,56	0,4406	2,00	0,4772	2,88	0,4980
0,25	0,0987	0,69	0,2549	1,13	0,3708	1,57	0,4418	2,02	0,4783	2,90	0,4981
0,26	0,1026	0,70	0,2580	1,14	0,3729	1,58	0,4429	2,04	0,4793	2,92	0,4982
0,27	0,1064	0,71	0,2611	1,15	0,3749	1,59	0,4441	2,06	0,4803	2,94	0,4984
0,28	0,1103	0,72	0,2642	1,16	0,3770	1,60	0,4452	2,08	0,4812	2,96	0,4985
0,29	0,1141	0,73	0,2673	1,17	0,3790	1,61	0,4463	2,10	0,4821	2,98	0,4986
0,30	0,1179	0,74	0,2703	1,18	0,3810	1,62	0,4474	2,12	0,4830	3,00	0,49865
0,31	0,1217	0,75	0,2734	1,19	0,3830	1,63	0,4484	2,14	0,4838	3,20	0,49931
0,32	0,1255	0,76	0,2764	1,20	0,3849	1,64	0,4495	2,16	0,4846	3,40	0,49966
0,33	0,1293	0,77	0,2794	1,21	0,3869	1,65	0,4505	2,18	0,4854	3,60	0,499841
0,34	0,1331	0,78	0,2823	1,22	0,3883	1,65	0,4515	2,20	0,4861	3,80	0,499928
0,35	0,1368	0,79	0,2852	1,23	0,3907	1,67	0,4525	2,22	0,4868	4,00	0,499968
0,36	0,1406	0,80	0,2881	1,24	0,3925	1,68	0,4535	2,24	0,4875	4,50	0,499997
0,37	0,1443	0,81	0,2910	1,25	0,3944	1,69	0,4545	2,26	0,4881	5,00	0,499997
0,38	0,1480	0,82	0,2939	1,26	0,3962	1,70	0,4554	2,28	0,4887		
0,39	0,1517	0,83	0,2967	1,27	0,3980	1,71	0,4564	2,30	0,4893		
0,40	0,1554	0,84	0,2995	1,28	0,3997	1,72	0,4573	2,32	0,4898		
0,41	0,1591	0,85	0,3023	1,29	0,4015	1,73	0,4582	2,34	0,4904		
0,42	0,1628	0,86	0,3051	1,30	0,4032	1,74	0,4591	2,36	0,4909		
0,43	0,1664	0,87	0,3078	1,31	0,4049	1,75	0,4599	2,38	0,4913		

Таблица 3

Основные непрерывные распределения

Распределение	Плотность распределения	Функция распределения
Равномерное	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a;b], \\ 0, & \text{если } x \notin [a;b]. \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$
Показательное	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$
Нормальное	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\, dt$
Лапласа	$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda \lvert x \rvert}$	$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda x}, & \text{если } x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$

Учебное издание

Соловьева Надежда Александровна

СИСТЕМЫ И ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 08.12.2022. Формат 60 × 84 1/16.
Усл. печ. л. 3,72. Уч.изд. л. 3,36.
Тираж 21 экз. Заказ № 2202.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб.021
Тел./факс: +7(3412)916-364 E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18