

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Рязанский государственный университет  
имени С. А. Есенина»

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**  
**И**  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Межвузовский сборник научных трудов

Выпуск 4



Рязань 2022

УДК 517.9  
ББК 22.1  
Д50

*Рецензенты:*

*А. В. Арутюнов*, д-р. физ.-мат. наук, проф.  
(Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова Российской академии наук);  
*Н. В. Конёнков*, д-р физ.-мат. наук, проф.  
(Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина)

**Дифференциальные уравнения и математическое моделирование** [Электронный ресурс] : межвуз. сб. науч. тр. / отв. ред. С. С. Мамонов. – Вып. 4. – Электрон. текстовые дан. (1 файл : 4,74 МБ). – Рязань : Ряз. гос. ун-т имени С. А. Есенина, 2022. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования : IBM / PC ; Windows XP и выше ; 512 MB RAM; свободное место на HDD 30 Mb ; Acrobat Reader 3.0 или старше. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-907266-92-6 (вып. 4)  
ISBN 978-5-907266-29-2

В сборнике представлены научные статьи по актуальным проблемам теории дифференциальных уравнений и математического моделирования по направлениям: качественная теория дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения в частных производных, интегро-дифференциальные операторы, уравнения и краевые задачи, оптимальное управление в динамических системах, компьютерные технологии в дифференциальных уравнениях, математическое моделирование и управление в биологии, физике и социально-экономических науках.

Издание адресовано научным работникам, преподавателям, аспирантам и студентам, специализирующимся в области дифференциальных уравнений и математического моделирования.

*дифференциальные уравнения; краевые задачи; математическое моделирование; периодические решения; предельные циклы; динамики; управляемость; аттрактор; бифуркация; интегро-дифференциальные уравнения; операторные уравнения*

УДК 517.9  
ББК 22.1

*Редакционная коллегия:*

С. С. Мамонов – отв. редактор  
Е. Ю. Лискина – заместитель отв. редактора  
Э.С. Свирина – отв. секретарь  
В. В. Абрамов, И. М. Буркин, В. Б. Васильев, В. В. Глаголев,  
О. В. Дружинина, В. И. Иванов, А. Н. Конёнков, А. Н. Куликов,  
Д. А. Куликов, А. Г. Кушнер, О. Н. Масина, Н. Н. Петров,  
Л. И. Родина, А. О. Харламова

ISBN 978-5-907266-92-6 (вып. 4)  
ISBN 978-5-907266-29-2

© Коллектив авторов, 2022  
© Мамонов С. С., отв. ред., 2022  
© Федеральное государственное  
бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Рязанский государственный университет  
имени С. А. Есенина», 2022

## СОДЕРЖАНИЕ

II Всероссийская научная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения».....	5
<b>Абрамов В. В.</b> Устойчивость нулевого решения нелинейной системы дифференциальных уравнений с малым параметром .....	6
<b>Абрамов В. В., Лискина Е. Ю.</b> Ветвление периодического решения автономной квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.....	11
<b>Агаркова Н. Н., Васильев В. Б., Эберлейн Н. В.</b> О разрешимости одной эллиптической задачи.....	16
<b>Андреев В. В.</b> Исследование диэлектрического барьерного разряда с помощью эквивалентной электрической схемы.....	20
<b>Афанасьева Е. Б., Васильев В. Б., Ходырева А. А.</b> О дискретной задаче Дирихле.....	24
<b>Базулкина А. А.</b> Оценка дохода с учетом дисконтирования для вероятностных моделей взаимодействия популяций.....	28
<b>Буркин И. М., Кузнецов Н. В., Мокаев Т. Н.</b> Мультистабильность и скрытые аттракторы в контрпримере к гипотезе Калмана.....	30
<b>Вирченко Ю. П., Субботин А. В.</b> Эволюционные ковариантные уравнения первого порядка для векторных полей на $\mathbb{R}^3$ .....	35
<b>Волдеаб М. С.</b> Задачи оптимальной добычи ресурса для вероятностных моделей популяции.....	37
<b>Глебова А. А.</b> Геометрия кривых, ассоциированная с уравнениями в частных производных .....	40
<b>Денисов И. В., Денисов А. И.</b> О нелинейном методе угловых пограничных функций.....	41
<b>Духновский С. А., Журавлёва Д. А.</b> Аналитические решения системы Карлемана с помощью Пенлеве-анализа .....	43
<b>Исмагилова А. А., Тинюкова Т. С.</b> Спектральные свойства дискретного оператора Китаева для бесконечной сверхпроводящей структуры .....	45
<b>Конёнков А. Н.</b> Задача Тихонова для параболической системы с постоянными коэффициентами на плоскости .....	47
<b>Костючек М. И., Лычагин В. В.</b> Фильтрация газа Ландау – Лифшица при постоянной энтальпии .....	49
<b>Куликов А. Н.</b> К вопросу о достаточных условиях единственности центрального инвариантного многообразия системы дифференциальных уравнений... ..	52
<b>Куликов Д. А.</b> Нелокальное уравнение эрозии. Аттракторы в случае антипериодических краевых условий.....	55
<b>Кушнер А. Г., Кушнер Е. Н., Тао Синиан</b> Конечномерные динамики уравнений фильтрации .....	58

<b>Кушнер А. Г., Мухина С. С., Файзуллина Э. Р.</b> Точные решения уравнений фильтрации суспензии .....	60
<b>Лискина Е. Ю.</b> Примеры исследования сложного состояния равновесия нелинейной динамической системы.....	62
<b>Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О.</b> Колесательные циклы систем с нелинейным запаздыванием.....	66
<b>Марковский А. Н.</b> Метод фундаментальных решений для краевых задач с неклассическими граничными условиями.....	70
<b>Мартынов С. И., Ткач Л. Ю.</b> Моделирование коллективной динамики двумерных структур частиц в жидкости.....	74
<b>Мастерков Ю. В., Корнеева О. А.</b> К задаче об управляемости системы с линейным выходом в $\mathbb{R}^2_+$ .....	77
<b>Обуховский В. В., Корнев С. В., Гетманова Е. Н.</b> О некоторых свойствах одного класса измеримых многозначных отображений.....	78
<b>Пантелеева П. Ю., Станкевич Н. В.</b> Динамика системы с седло-фокусом при изменении направления импульсного воздействия .....	82
<b>Петров А. А., Дружинина О. В., Масина О. Н.</b> Интеллектуальное управление ленточным конвейером, моделируемым системой дифференциальных уравнений с переключением .....	86
<b>Родина Л. И., Черникова А. В.</b> Оптимизация характеристик дохода от добычи ресурса на бесконечном промежутке времени .....	90
<b>Ройтенберг В. Ш.</b> О бифуркации сепаратрисных контуров динамических систем с центральной симметрией .....	94
<b>Рябушев Е. А.</b> Уравнения магнитной гидродинамики.....	99
<b>Титаренко С. А.</b> Клеточность как необходимое условие спектральной задачи для лапласиана «услышать форму барабана» .....	103
<b>Черникова А. В.</b> О существовании предела средней временной выгоды для стохастических моделей эксплуатируемых популяций.....	108
<b>Шагалова Л. Г.</b> Обобщенные решения уравнений Гамильтона – Якоби с экспоненциальной зависимостью гамильтонианов от импульсной переменной.....	111
<b>Litvinova K. V.</b> Mathematical modeling on nonlinear vibrations of an unbounded string with a moving boundary .....	116
К семидесятилетию научной школы «Дифференциальные уравнения и их приложения» в Рязанском государственном университете имени С. А. Есенина.....	119
<b>Авторам</b> .....	123

УДК 517.958, 530.145.6

## СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА КИТАЕВА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ СТРУКТУРЫ

А. А. Исмагилова, Т. С. Тинюкова

В работе исследованы спектральные свойства дискретного оператора Китаева. Для нулевого собственного значения найдено условие существования собственных функций в случае тривиальной топологической фазы и доказано их отсутствие в нетривиальной топологической фазе. Для собственных функций получены асимптотические формулы.

*оператор Китаева; собственное значение; собственная функция*

## SPECTRAL PROPERTIES OF THE DISCRETE KITAYEV OPERATOR FOR AN INFINITE SUPERCONDUCTING STRUCTURE

A. A. Ismagilova, T. S. Tinyukova

In this paper, the spectral properties of the discrete Kitaev operator are investigated. For a zero eigenvalue, a condition for the existence of eigenfunctions in the case of a trivial topological phase is found, and their absence in a nontrivial topological phase is proved. Asymptotic formulas are obtained for eigenfunctions.

*Kitaev operator; eigenvalue; eigenfunction*

Последние 15–20 лет активно изучаются сверхпроводники. Свойство металла обладать сверхпроводимостью, то есть иметь нулевое электрическое сопротивление, весьма перспективно в будущем при создании квантового компьютера. Имеется большое количество численных работ, посвященных исследованию свойств сверхпроводников или гибридных структур, например, вида нормальный металл (металл без сверхпроводящего порядка) – сверхпроводник – нормальный металл. Математически сверхпроводники изучают с помощью оператора Боголюбова – де Жена, частным случаем которого в дискретном виде является оператор Китаева, действующий на вектор-функцию  $\psi(n) = (\psi_1(n), \psi_2(n))^T$  по формуле

$$(H\psi)(n) = \begin{pmatrix} -t(\psi_1(n+1) + \psi_1(n-1)) + \Delta(\psi_2(n+1) - \psi_2(n-1)) - \mu\psi_1(n) \\ t(\psi_2(n+1) + \psi_2(n-1)) - \Delta(\psi_1(n+1) - \psi_1(n-1)) + \mu\psi_2(n) \end{pmatrix},$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – номер узла в рассматриваемой бесконечной цепочке,  $\psi_1(n)$  ( $\psi_2(n)$ ) – волновая функция электрона (дырки),  $t > 0$  – амплитуда перехода на соседний узел,  $\Delta$  – вещественный параметр сверхпроводимости,  $\mu$  – химический потенциал. Функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  принадлежат пространству  $\ell_2(\mathbb{Z})$ , а константы  $t, \Delta, \mu$  определяются изучаемой системой.

Рассмотрим возмущенный оператор  $H + V$ , где

$$V = V_0 \begin{pmatrix} \delta_{n0} & 0 \\ 0 & -\delta_{n0} \end{pmatrix} + V_0 \begin{pmatrix} \delta_{n1} & 0 \\ 0 & -\delta_{n1} \end{pmatrix},$$

$V_0$  – вещественная константа. Уравнение на собственные значения  $(H + V)\psi = E\psi$  можно переписать в виде

$$\psi = -(H - E)^{-1}V\psi. \quad (1)$$

Резольвента оператора  $H$  найдена в [1]. Далее, положим  $E = 0$ . Тогда (1) примет вид

\* Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках госзадания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010).

© Исмагилова А. А., Тинюкова Т. С., 2022

$$\begin{aligned} \psi_j(n) = & -\frac{\alpha V_0(2t \cos k_+ + \mu)}{2i \sin k_+} \left( e^{ik_+|n|} \psi_j(0) + e^{ik_+|n-1|} \psi_j(1) \right) + \\ & + \frac{\alpha V_0(2t \cos k_- + \mu)}{2i \sin k_-} \left( e^{ik_-|n|} \psi_j(0) + e^{ik_-|n-1|} \psi_j(1) \right) - \\ & - \alpha \Delta V_0 \left( \text{sign}(n) (e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|}) \psi_{j'}(0) + \text{sign}(n-1) (e^{ik_+|n-1|} - e^{ik_-|n-1|}) \psi_{j'}(1) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $j = 1, 2, j' = j + (-1)^{j-1}$ ,

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{t^2 E^2 + \Delta^2(4(\Delta^2 - t^2) + \mu^2 - E^2)}},$$

$$2 \cos k_{\pm} = \frac{t\mu \pm \sqrt{t^2 E^2 + \Delta^2(4(\Delta^2 - t^2) + \mu^2 - E^2)}}{\mu^2 - t^2}.$$

Условие существования ненулевого решения системы (2) является необходимым для существования собственной функции оператора  $H + V$ , соответствующей нулевому собственному значению.

Пусть  $\varepsilon = \mu - 2t$ . Если  $\varepsilon > 0$ , то рассматриваемая система находится в тривиальной топологической фазе, а при  $\varepsilon < 0$  – в нетривиальной топологической фазе.

**Теорема 1.** Если  $\varepsilon > 0$ , то условие существования собственной функции оператора  $H + V$ , соответствующей нулевому собственному значению, имеет вид

$$V_0^2 - 2V_0(\Delta + t) + 2\Delta(\Delta + t) + O(\varepsilon) = 0. \quad (3)$$

Если  $\varepsilon < 0$ , то  $E = 0$  не является собственным значением оператора  $(H + V)\psi = E\psi$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\varepsilon > 0$  и выполнено условие (3). Тогда собственные функции оператора  $H + V$ , соответствующие нулевому собственному значению, имеют вид  $(\psi_1(n), \psi_2(n))^T$  и  $(\psi_2(n), \psi_1(n))^T$ , где

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_1(n) = & \frac{V_0^2}{4\Delta(\Delta + t)(V_0 - 2\Delta)} \left( (t + \Delta \cdot \text{sign}(n)) \left( \frac{\Delta - t}{\Delta + t} \right)^{|n|} + (t - \Delta \cdot \text{sign}(n)) \left( \frac{1 - 2\Delta}{2\Delta} \right)^{|n|} \right) + \\ & + \frac{V_0}{4\Delta} \left( \left( \frac{\Delta - t}{\Delta + t} \right)^{|n-1|} + \left( \frac{1 - 2\Delta}{2\Delta} \right)^{|n-1|} \right) + O(\varepsilon), \\ \psi_2(n) = & \frac{V_0^2}{4\Delta(\Delta + t)(V_0 - 2\Delta)} \left( (\Delta + t \cdot \text{sign}(n)) \left( \frac{\Delta - t}{\Delta + t} \right)^{|n|} + (\Delta - t \cdot \text{sign}(n)) \left( \frac{1 - 2\Delta}{2\Delta} \right)^{|n|} \right) - \\ & - \frac{V_0}{4\Delta} \left( \left( \frac{\Delta - t}{\Delta + t} \right)^{|n-1|} - \left( \frac{1 - 2\Delta}{2\Delta} \right)^{|n-1|} \right) \cdot \text{sign}(n-1) + O(\varepsilon). \end{aligned} \right.$$

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Tinyukova T. S., Chuburin Yu. P. Majorana states near an impurity in the Kitaev infinite and semi-infinite model // Theoretical and mathematical Physics. – 2019. – no. 200 (1). – Pp. 1043–1052.

Исмагилова Алиса Альбертовна, студент института математики, информационных технологий и физики Удмуртского государственного университета; 425034, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1; тел.: +7 (3412) 91-60-88; e-mail: ismagilowa-alisa2012@yandex.ru

Тинюкова Татьяна Сергеевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа Удмуртского государственного университета; 425034, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1; тел.: +7 (3412) 91-60-88; e-mail: ttinyukova@mail.ru