Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра алгебры и топологии

Т.М. Банникова, Н.А. Баранова

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ЗАДАЧАХ И РИСУНКАХ ДЛЯ ИНОСТРАННЫХ СТУДЕНТОВ ИМИТИФ

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2023

УДК 514.74 (07)
ББК 22.151.54 р30
Б232

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: канд. физ.-мат .наук, ст. науч. сотрудник ОФХН ФТИ УдмФИЦ УРО РАН О.М. Немцова.

Банникова Т.М., Баранова Н.А.

Б232 Аналитическая геометрия в задачах и рисунках для иностранных студентов ИМИТиФ **:** учеб.-метод. пособие : [Электрон. ресурс]. – Ижевск : Удмуртский госуниверситет, 2023. – 43 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено иностранным студентам бакалавриата направлений подготовки 01.03.01 «Математика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 01.03.03 «Механика и математическое моделирование», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», 03.03.02 «Физика» для лучшего понимания материала при изучении аналитической геометрии. Пособие поможет преподавателям при работе с иностранными студентами на первом курсе бакалавриата при преподавании таких дисциплин, как: «Аналитическая геометрия», «Алгебра и аналитическая геометрия», «Математика и ее приложение к физике». Особое внимание уделяется анализу разнообразных приёмов и методов решения основных задач курса. В пособии содержится много рисунков и иллюстраций, облегчающих усвоение нового материала.

Пособие позволяет диагностировать уровень сформированности компетенций, необходимых для успешного обучения студентов на последующих курсах.

Для работы с данным пособием понадобится ресурс: Microsoft Office 2010 (академическая лицензия DreamsPark)

УДК 514.74 (07)
ББК 22.151.54 р30

Содержание

Введение

Данное электронное учебно-методическое пособие по курсу «Аналитическая геометрия» разработано на основе опыта преподавания данной дисциплины и современных методик обучения и предназначено для иностранных студентов. Пособие включает в себя разработанные презентации для каждого практического занятия. Занятие построено следующим образом: вначале приводятся основные теоретические сведения, примеры задач с решениями и задачи для аудиторной работы.

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором геометрические фигуры и их свойства исследуются средствами алгебры на основе метода координат. В основе этого метода лежит так называемый метод координат, впервые применённый Декартом. Каждому геометрическому соотношению этот метод ставит в соответствие некоторое уравнение, связывающее координаты фигуры или тела. Идея координат и попытки записи уравнения кривой встречались в работах древних греков. Архимед и Аполлоний Пергский в своих сочинениях на примерах конических сечений пытались создать уравнения кривых. Однако из-за невысокого уровня древнегреческой алгебры и слабого интереса к кривым, отличным от прямой и окружности результаты не получили дальнейшего развития. В Европе в XIV веке Николай Орезмский первым использовал координатное изображение для функции, зависящей от времени, назвав координаты, по аналогии с географическими, долготой и широтой. Возникновение метода координат тесно связано с бурным развитием астрономии, механики и техники в XVI веке. В 1637 году Ферма в сочинении «Введение в изучение плоских и телесных мест» рассматривает (в символике Виета) уравнения различных кривых 2-го порядка в прямоугольных координатах. Однако данное сочинение Ферма широкой известностью не пользовалось. Гораздо большее влияние имела «Геометрия» Декарта, вышедшая в том же 1637 году, которая независимо и гораздо более полно развивала те же идеи. Декарт поместил в «Геометрии» множество примеров, иллюстрирующих огромную мощь нового метода, и получил немало результатов, неизвестных ранее.

Дальнейшее развитие аналитической геометрии связано с трудами Г. Лейбница, И. Ньютона и особенно Л. Эйлера. Идеи аналитической геометрии использовал Ж. Лагранж при построении аналитической механики и Г. Монж в дифференциальной геометрии. На современном этапе аналитическая геометрия не имеет самостоятельного значения как наука, однако её методы широко применяются в различных разделах математики, механики, физики и др. наук. В связи с этим дисциплина «Аналитическая геометрия» занимает особое место в процессе подготовки бакалавров математики. Изучение аналитической геометрии помогает студентам выработать общематематическую культуру: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, знать основные алгоритмы решения геометрических задач, применять полученные знания для решения практических задач.

Получаемые знания лежат в основе математического образования и необходимы для понимания и освоения всех курсов математики, компьютерных наук и их приложений. Дисциплина адресована бакалаврам первого года обучения. Успешное освоение дисциплины позволяет перейти к изучению таких дисциплин как: численные методы, компьютерная геометрия и геометрическое моделирование, дискретная математика, математическая логика и их приложения в информатике и компьютерных науках, основы компьютерных наук, теория чисел и других.

При изучении данной дисциплины формируются элементы следующей совокупности компетенций:

− готовность использовать фундаментальные знания в области аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии;

− способность решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий;

− способность к самостоятельной научно-исследовательской работе;

− способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области;

− способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, владением знанием постановок классических задач математики;

− способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата;

− способность публично представлять собственные и известные научные результаты;

− способность представлять и адаптировать знания с учетом уровня аудитории;

− способность к организации учебной деятельности в предметной области математика;

− способность к планированию и осуществлению педагогической деятельности с учетом специфики предметной области в образовательных организациях;

− способность к проведению методических работ в области математики.

При работе с данным пособием предполагается изучение тем по предложенным презентациям. Так же прилагается файл с дополнительными задачами аналитической геометрии основных типов с подробным решением. Для закрепления изучения материала предлагаются задачи для самостоятельного решения. В пособии содержится много рисунков и иллюстраций, облегчающих усвоение нового материала.

Основные типы задач с подробным решением

Задача 1

Найти модуль и направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (-2;1;-2)$. Записать в координатной форме орт данного вектора.
Решение. Воспользуемся формулой для вычисления модуля вектора:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1} = 3.$$

Вычисляем направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{-2}{3}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{1}{3}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|} = \frac{-2}{3}.$$

Мы знаем, что направляющие косинусы вектора равны декартовым координатам его орта.
Осталось записать ответ.
Ответ: $|\bar{a}| = 3, \cos\alpha = -\frac{2}{3}, \cos\beta = \frac{1}{3}, \cos\gamma = -\frac{2}{3}$, $\bar{a}^o = (-\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3})$.

Задача 2

Найти декартовые координаты вектора $\bar{a}$, если его орт имеет координаты $\bar{a}^o = (-\frac{6}{7};-\frac{2}{7};\frac{3}{7})$ и $|\bar{a}| = 3$.

Решение. Сначала проверим, что $|\bar{a}^o| = 1$. Действительно,

$$|\bar{a}^o| = \sqrt{\left(-\frac{6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{1}{7}\sqrt{36+4+9} = 1.$$

Из определения орта вектора следует:

$$\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}^o = 3 \cdot (-\frac{6}{7};-\frac{2}{7};\frac{3}{7}) = (-\frac{18}{7};-\frac{6}{7};\frac{9}{7}).$$

Ответ: $\bar{a} = (-\frac{18}{7};-\frac{6}{7};\frac{9}{7})$.

Задача 3

Найти декартовые координаты вектора $\bar{a}$, если его модуль равен 2, $\alpha = 60^o$, $\gamma = 120^o$.
Решение. Воспользуемся тем, что сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна 1:

$$\cos^2 60^o + \cos^2\beta + \cos^2 120^o = 1.$$

Отсюда находим,

$$\cos\beta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

т. е. $\beta = 45^0$ или $\beta = 135^0$. Возможны два варианта:

$$\bar{a} = 2(\cos 60^\circ, \cos 45^\circ, \cos 120^\circ) = (1; \sqrt{2}; -1)$$

или

$$\bar{a} = 2(\cos 60^\circ, \cos 135^\circ, \cos 120^\circ) = (1; -\sqrt{2}; -1).$$

Ответ: $\bar{a} = (1; \sqrt{2}; -1)$ или $\bar{a} = (1; -\sqrt{2}; -1)$.

Задача 4

Найти декартовые координаты вектора $\overline{AB}$, если A(1; –3; 12), B(–2; 11; 9).
Решение. Воспользуемся правилом нахождения координат вектора:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-3; 14; -3).$$

Ответ: $\overline{AB} = (-3; 14; -3)$.

Задача 5

Найти декартовые координаты вектора $3\bar{a} - 2\bar{b}$, если $\bar{a} = (5; -1; -3)$, $\bar{b} = (2; 7; -5)$.

Решение. $3\bar{a} - 2\bar{b} = 3\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $3\bar{a} - 2\bar{b} = (11; 11; 1)$.

Задача 6

Найти расстояние между точками A(0; 1; –9) и B(–7; 7: –3).
Решение. Вычисляем по формуле:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} =$$
$$= \sqrt{(-7)^2 + (7-1)^2 + (-3+9)^2} = \sqrt{49 + 36 + 36} = 11$$

Ответ: 11.

Задача 7

Найти отношение, в котором точка C (2; 4; 5) делит отрезок AB, если A(0; 1; 9) и B(–2; –2;13).
Решение. Воспользуемся формулой:

$$\lambda_{AB}^{C} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_C}.$$

Заметим, что если данные точки не лежат на одной прямой, то одно из двух равенств в формуле не выполняется:

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} \neq \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} \text{ или } \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} \neq \frac{z_C - z_A}{z_B - z_C}.$$

Подставляем данные координаты в формулу:

$$\lambda_{AB}^{C} = \frac{2-0}{-2-2} = \frac{4-1}{-2-4} = \frac{5-9}{13-5} \text{ или } \lambda_{AB}^{C} = -\frac{1}{2}.$$

Одновременно мы убедились в том, что точки A, B и C находятся на одной прямой.

Ответ: $\lambda_{AB}^{C} = -\frac{1}{2}$.

Задача 8

Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}|=2, |\bar{b}|=5, (\bar{a}\wedge\bar{b})=\frac{5\pi}{6}$.

Решение. По определению скалярного произведения

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\bar{a}\wedge\bar{b})=2\cdot5\cdot\cos\frac{5\pi}{6}=-5\sqrt{3}.$$

Ответ: $-5\sqrt{3}$.

Задача 9

Найти скалярный квадрат вектора $\bar{a}$, если его модуль равен 3.

Решение. Воспользуемся свойством скалярного произведения, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля: $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2=3^2=9$.

Ответ: 9.

Задача 10

Найти модуль вектора, если его скалярный квадрат равен 18.

Решение. Воспользуемся свойством скалярного произведения, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля: $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2=18$. Отсюда находим модуль вектора.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

Задача 11

Найти $(\bar{a}+\bar{b})^2$ и $|\bar{a}+\bar{b}|$, если $|\bar{a}|=2, |\bar{b}|=\sqrt{2}$, $(\bar{a}\wedge\bar{b})=\frac{3\pi}{4}$.

Решение. Воспользуемся свойством линейности скалярного произведения, и найдем скалярный квадрат суммы:

$$(\bar{a}+\bar{b})^2=\bar{a}^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2=|\bar{a}|^2+2|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\frac{3\pi}{4}+|\bar{b}|^2=2.$$

Отсюда, $|\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{(\bar{a}+\bar{b})^2}=\sqrt{2}$.

Ответ: $(\bar{a}+\bar{b})^2=2, |\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{2}$.

Задача 12

Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}=(-2;5;-3), \bar{b}=(1;2;3)$.

Решение. Воспользуемся формулой вычисления скалярного произведения векторов, заданных в координатной форме: $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=-2+10-9=-1$.

Ответ: –1.

Задача 13

Найти скалярный квадрат вектора $\bar{a}=(-2;6;-3)$, и его модуль.

Решение. Вычисляем скалярный квадрат данного вектора, используя формулу скалярного произведения векторов, заданных в координатной форме:

$$\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=x_1x_1+y_1y_1+z_1z_1=x_1^2+y_1^2+z_1^2=4+36+9=49.$$

По свойству скалярного произведения, модуль вектора равен квадратному корню из его скалярного квадрата:

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2} = \sqrt{49} = 7 .$$

Ответ: 7.

Задача14

Найти проекцию вектора $\bar{a} = (1; 2; 4)$ на вектор $\bar{b} = (-2; 6; -3)$.

Решение. Воспользуемся формулой вычисления проекции вектора на вектор, если векторы заданы в координатной форме:

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-2+12-12}{\sqrt{4+36+9}} = \frac{-2}{7} .$$

Ответ: $-\frac{2}{7}$.

Задача 15

Найти угол между векторами $\bar{a} = (-3; 0; 4)$ и $\bar{b} = (-2; 6; -3)$.

Решение. Вычисляем скалярное произведение данных векторов и их модули:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 6 + 0 - 12 = -6, |\bar{a}| = 5, |\bar{b}| = 7 .$$

По формуле угла между векторами, находим

$$(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \arccos\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \arccos\left(-\frac{6}{35}\right).$$

Ответ: $\arccos\left(-\frac{6}{35}\right)$.

Задача 16

Выяснить, ортогональны ли векторы $\bar{a} = (-2; 6; 4)$ и $\bar{b} = (1; -3; 5)$.

Решение. Два ненулевых вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Вычисляем скалярное произведение данных векторов:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = -2 - 18 + 20 = 0 .$$

Ответ: данные векторы ортогональные.

Задача 17

Вычислить, какую работу производит сила $\bar{f} = (3; -5; 2)$, когда ее точка приложения перемещается из начала в конец вектора $\bar{s} = (2; -5; -7)$.

Решение. Работа равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения:

$$A = \bar{f} \cdot \bar{s} = 6 + 25 - 14 = 17 .$$

Ответ: 17.

Задача 18

Вычислить тупой угол, образованный медианами, проведенными из вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника.

Решение. Обозначим длины катетов данного равнобедренного прямоугольного треугольника через а, и введем систему координат как на рисунке 1.

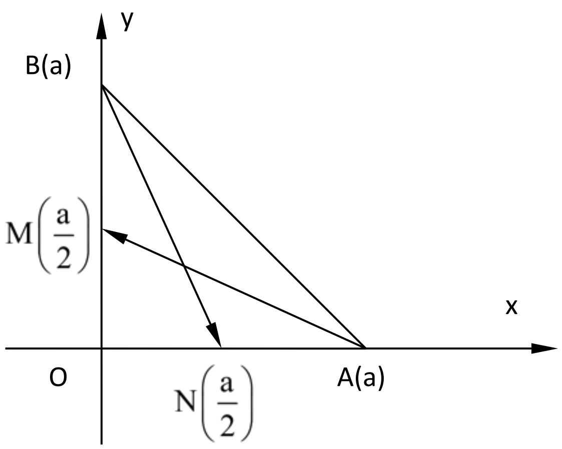

Рис. 1

Искомый угол равен углу между векторами

$$\overline{AM} = \left(-a; \frac{a}{2}\right) = a\left(-1; \frac{1}{2}\right) \text{ и } \overline{BN} = \left(\frac{a}{2}; -a\right) = a\left(\frac{1}{2}; -1\right).$$

По формуле угла между векторами, получаем:

$$\cos(\overline{AM} \wedge \overline{BN}) = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{BN}}{|\overline{AM}| \cdot |\overline{BN}|} = \frac{-a^2}{\frac{5}{4}a^2} = -\frac{4}{5}.$$

Ответ: $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$.

Задача 19

Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $\frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\overline{a}| = 6, |\overline{b}| = 5$, вычислить $|\overline{a} \times \overline{b}|$.

Решение. $|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin(\overline{a} \wedge \overline{b}) = 6 \cdot 5 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 15$.

Ответ: 15.

Задача 20

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны. Зная, что $|\overline{a}| = 3, |\overline{b}| = 4$, вычислить $|(\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{a} - \overline{b})|$.

Решение. Вычисляем векторное произведение, стоящее под знаком модуля, используя свойство линейности векторного произведения. Раскрываем скобки, сохраняя порядок сомножителей:

$$(\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{a} - \overline{b}) = \overline{a} \times \overline{a} - \overline{a} \times \overline{b} + \overline{b} \times \overline{a} - \overline{b} \times \overline{b}.$$

Так как $\overline{a} \| \overline{a}$ и $\overline{b} \| \overline{b}$, то по свойству векторного произведения $\overline{a} \times \overline{a} = \overline{b} \times \overline{b} = \overline{0}$. По свойству антикоммутативности $\overline{b} \times \overline{a} = -\overline{a} \times \overline{b}$. Получаем:

$$(\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{a} - \overline{b}) = -\overline{a} \times \overline{b} - \overline{a} \times \overline{b} = -2\overline{a} \times \overline{b},$$

$$|(\bar a+\bar b)\times(\bar a-\bar b)|=|-2\bar a\times\bar b|=2|\bar a\times\bar b|=2|\bar a|\cdot|\bar b|\cdot\sin(\bar a\wedge\bar b)=$$

$=2\cdot3\cdot4\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}=24.$

Ответ: 24.

Задача 21

Угол между векторами $\bar a$ и $\bar b$ равен $\dfrac{3\pi}{4}$. Зная, что $|\bar a|=3, |\bar b|=2\sqrt{2}$, вычислить $((2\bar a-\bar b)\times(2\bar a+\bar b))^2$.

Решение. Выражение, которое нам нужно вычислить есть скалярный квадрат вектора $\bar c=(2\bar a-\bar b)\times(2\bar a+\bar b)$.

Раскрываем скобки:

$$\bar c=(2\bar a-\bar b)\times(2\bar a+\bar b)=(2\bar a)\times(2\bar a)+(2\bar a)\times\bar b-\bar b\times(2\bar a)-\bar b\times\bar b=$$
$$=4(\bar a\times\bar b).$$

Находим модуль вектора $\bar c$:

$$|\bar c|=|4(\bar a\times\bar b)|=4\cdot|\bar a|\cdot|\bar b|\cdot\sin(\bar a\wedge\bar b)=4\cdot3\cdot2\sqrt{2}\cdot\sin\frac{3\pi}{4}=24.$$

Вычисляем скалярный квадрат вектора $\bar c$:

$$\bar c^2=|\bar c|^2=24^2=576.$$

Ответ: 576.

Задача 22

Вычислить векторное произведение векторов $\bar a=(7;2;-2), \bar b=(-3;0;1)$.

Решение. Воспользуемся формулой вычисления векторного произведения векторов, заданных в координатной форме:

$$\bar a\times\bar b=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ 7 & 2 & -2\\ -3 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\cdot\bar i-\begin{vmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{vmatrix}\cdot\bar j+\begin{vmatrix}7 & 2\\ -3 & 0\end{vmatrix}\cdot\bar k=2\bar i-\bar j+6\bar k.$$

Ответ: $\bar a\times\bar b=(2;-1;6)$.

Задача 23

Даны точки A (0; 1; 2), B(–3; 3; 0) и C(6; 5; 2). Вычислить площадь треугольника ABC.

Решение. Площадь треугольника ABC находим по формуле:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|.$$

Вычисляем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}=(-3;2;-2), \overline{AC}=(6;4;0).$$

Вычисляем векторное произведение $\overline{AB}\times\overline{AC}$:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -3 & 2 & -2\\ 6 & 4 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 6 & 0\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+$$

$$+\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 6 & 4\end{vmatrix}\cdot\bar{k}=8\bar{i}-12\bar{j}-24\bar{k}=4(2\bar{i}-3\bar{j}-6\bar{k}).$$

Вычисляем модуль вектора $\overline{AB}\times\overline{AC}$:

$$|\overline{AB}\times\overline{AC}|=4\sqrt{2^2+3^2+6^2}=4\cdot 7=28.$$

Находим площадь треугольника:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|=14.$$

Ответ: 14.

Задача 24

Дано: $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=26$ и $|\bar{a}\times\bar{b}|=72$. Вычислить $\bar{a}\cdot\bar{b}$.

Решение. Из определения векторного произведения находим синус угла между векторами:

$$\sin(\bar{a}\wedge\bar{b})=\frac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{72}{3\cdot 26}=\frac{12}{13}.$$

Используя основное тригонометрическое тождество, находим косинус угла между векторами и искомое скалярное произведение:

$$\cos(\bar{a}\wedge\bar{b})=\pm\sqrt{1-\sin^2(\bar{a}\wedge\bar{b})}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\pm\frac{5}{13},$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\bar{a}\wedge\bar{b})=3\cdot 26\cdot\left(\pm\frac{5}{13}\right)=\pm 30.$$

Ответ: $\bar{a}\cdot\bar{b}=\pm 30$.

Задача 25

Определить ориентацию тройки векторов:

а) $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$; б) $\{\bar{i},\bar{k},\bar{j}\}$; в) $\{\bar{j},\bar{k},\bar{i}\}$.

Решение. а) Определяем ориентацию тройки векторов, используя определение ориентированной тройки векторов.

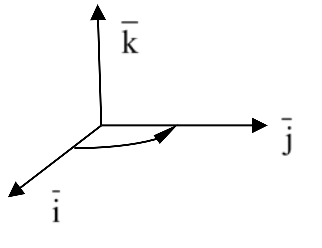

Рис.2.

Смотрим на рисунке 2 с конца третьего вектора – вектора $\bar{k}$, на плоскость, в которой лежат первые два вектора – $\bar{i}$ и $\bar{j}$. Осуществляем кратчайший поворот первого вектора $\bar{i}$ до совпадения со вторым вектором $\bar{j}$ и определяем направление вращения – против часовой стрелки. Из определения следует, что данная тройка является правой.

б) Тройка $\{\bar{i}, \bar{k}, \bar{j}\}$ получается из тройки $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ транспозицией второго и третьего векторов – $\bar{j}$ и $\bar{k}$. Транспозиция меняет ориентацию тройки векторов. Так как тройка $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ правая, то отсюда следует, что тройка $\{\bar{i}, \bar{k}, \bar{j}\}$ является левой.

в) Тройка $\{\bar{j}, \bar{k}, \bar{i}\}$ получается из тройки $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ круговой перестановкой. Вектор $\bar{i}$ с первого места переходит на третье, сдвигая векторы $\bar{j}$ и $\bar{k}$ влево. Круговая перестановка не меняет ориентацию тройки векторов, следовательно, тройка $\{\bar{j}, \bar{k}, \bar{i}\}$ является правой, как и тройка $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Ответ: а), в) тройка правая; б) тройка левая.

Задача 26

Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют левую тройку и взаимно ортогональны. Вычислить $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$, если $|\bar{a}|=4, |\bar{b}|=2, |\bar{c}|=3$.

Решение. По теореме о геометрическом смысле смешанного произведения

$$|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}| = V(\bar{a},\bar{b},\bar{c}).$$

Так как параллелепипед прямоугольный, то его объем равен произведению длин трех его ребер пересекающихся в одной вершине, т.е. произведению модулей векторов, на которых он построен:

$$V(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot|\bar{c}| = 4\cdot 2\cdot 3 = 24.$$

По условию задачи тройка векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ левая, следовательно, по той же теореме, $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}<0$. Число, равное смешанному произведению $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ отрицательное, а его модуль равен 24, т.е. $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=-24$.

Ответ: $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=-24$.

Задача 27

Вектор $\bar{c}$ ортогонален векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, угол между которыми равен 45^{o}. Вычислить $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$, если $|\bar{a}|=6, |\bar{b}|=|\bar{c}|=3$, тройка $\{\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}\}$ левая.

Решение. По условию задачи параллелепипед, построенный на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, является прямым. Смотрите рисунок 3.

Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту:

$$V(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = S_{осн}\cdot H.$$

Высота параллелепипеда $H=|\bar{c}|=3$. Основанием параллелепипеда является параллелограмм, площадь которого

$$S_{осн} = |\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a}\wedge\bar{b}) = 6\cdot 3\cdot\sin 135^{o} = 9\sqrt{2}.$$

Отсюда находим

$$|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}| = V(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = 27\sqrt{2}.$$

Тройка $\{\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}\}$ левая, следовательно, тройка $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ является правой и $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}>0$.

Ответ: $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=27\sqrt{2}$.

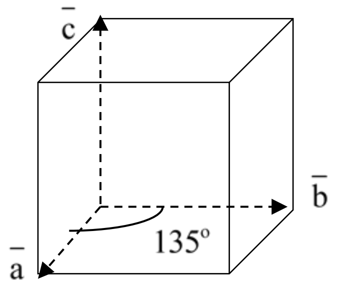

Рис.3.

Задача 28

Известно, что $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=-17$. Вычислить:
$(\bar{a}-2\bar{b})\cdot(3\bar{a}+4\bar{b}-\bar{c})\cdot\bar{c}$.

Решение. Воспользуемся свойством линейности смешанного произведения, т. е. возможностью раскрывать скобки и выносить скалярные множители за знак смешанного произведения.

Раскроем первую скобку:

$$(\bar{a}-2\bar{b})\cdot(3\bar{a}+4\bar{b}-\bar{c})\cdot\bar{c}=$$
$$=\bar{a}\cdot(3\bar{a}+4\bar{b}-\bar{c})\cdot\bar{c}-2\bar{b}\cdot(3\bar{a}+4\bar{b}-\bar{c})\cdot\bar{c}=$$

В каждом из двух слагаемых раскрываем скобку:

$$=\bar{a}\cdot(3\bar{a}+4\bar{b}-\bar{c})\cdot\bar{c}-2\bar{b}\cdot(3\bar{a}+4\bar{b}-\bar{c})\cdot\bar{c}=$$
$$=3\bar{a}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c}+4\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}-\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot\bar{c}-6\bar{b}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c}-8\bar{b}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}+2\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{c}=$$

Смешанные произведения, содержащие два одинаковых сомножителя, равно нулю, так как такие тройки векторов являются компланарными. Убирая из получившейся суммы нулевые слагаемые, получаем

$$=4\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}-6\bar{b}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c}=4\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}+6\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=10\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}.$$

По условию задачи $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=-17$, откуда
$(\bar{a}-2\bar{b})\cdot(3\bar{a}+4\bar{b}-\bar{c})\cdot\bar{c}=-170$.

Ответ: $(\bar{a}-2\bar{b})\cdot(3\bar{a}+4\bar{b}-\bar{c})\cdot\bar{c}=-170$.

Задача 29

Вычислить смешанное произведение векторов $\bar{a}=(-2;-3;1)$, $\bar{b}=(4;7;-5)$, $\bar{c}=(6;-1;6)$.

Решение. Воспользуемся формулой вычисления смешанного произведения векторов, заданных в координатной форме:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & -5 \\ 6 & -1 & 6 \end{vmatrix}=$$
$$=-2\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}=$$
$$=-2(42-5)+3(24+30)+(-4-42)=42$$

Ответ: $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=42$.

Задача 30

Определить, образует ли тройка векторов $\bar{a}=(0;-3;1), \bar{b}=(4;0;-5), \bar{c}=(6;-1;0)$ базис пространства векторов.

Решение. По определению, базисом пространства векторов называется любая упорядоченная некомпланарная тройка векторов. Поэтому достаточно вычислить смешанное произведение $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ данной тройки векторов. Если $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=0$, тогда данная тройка векторов является компланарной и не образует базис. В противном случае – образует.

Вычисляем смешанное произведение:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}=86.$$

Ответ: да.

Задача 31

Докажите, что следующие четыре точки лежат в одной плоскости:

A (–3; 2; –1), B(0; 4; 5), C(2; 2; –1), D(–1; 0; –7).

Решение. Очевидно, что если векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарны, то данные точки лежат в одной плоскости.

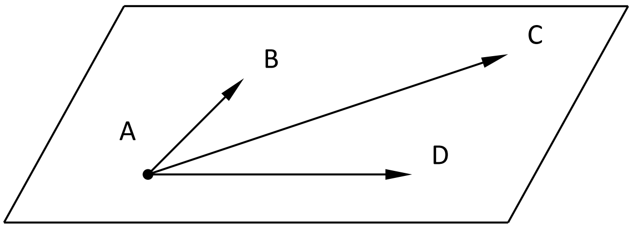

Рис. 4

Вычисляем координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$:

$$\overline{AB}=(3;2;6), \overline{AC}=(5;0;0), \overline{AD}=(2;-2;-6).$$

Вычисляем смешанное произведение:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -6 \end{vmatrix}=0,$$

Что и требовалось доказать.

Задача 32

Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках S (–4; 4; –1), A (1; 2; –3), B (3; –2; 2), C (5; –2; 5).

Решение. Вычисляем координаты векторов $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}$ и их смешанное произведение:

$$\overline{SA}=(5;-2;-2), \overline{SB}=(7;-6;3), \overline{SC}=(9;-6;6),$$

$$\overline{SA}\cdot\overline{SB}\cdot\overline{SC}=\begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 7 & -6 & 3 \\ 9 & -6 & 6 \end{vmatrix}=-84\,.$$

Вычисляем искомый объем:

$$V=\frac{1}{6}|\,\overline{SA}\cdot\overline{SB}\cdot\overline{SC}\,|=14\,.$$

Ответ: 14.

Задача 33

Изобразить на координатной плоскости Oxy прямую, заданную общим уравнением: $2x-3y-6=0$.

Решение. Для построения прямой достаточно знать координаты двух её точек. Координаты точек, лежащих на данной прямой, удовлетворяют её уравнению. Воспользуемся этим фактом. Положим в уравнении $x=0$:

$$-3y-6=0\,.$$

Вычисляем y: $y=-2$. Следовательно, точка с координатами (0; –2) лежит на данной прямой. Так как абсцисса этой точки равна 0, то она находится на оси ординат, т. е. точка с координатами (0; –2) является точкой пересечения данной прямой с осью ординат. Аналогично, полагая $y=0$ и подставляя в уравнение, находим координаты точки пересечения прямой с осью абсцисс: (3; 0). Отмечаем найденные точки на координатной плоскости Oxy и проводим через них прямую. Смотрите рисунок 3.

Заметим, что координаты точек пересечения прямой с координатными осями можно найти, зная её уравнение в отрезках. С этой целью перенесем свободный член –6 общего уравнения прямой в правую часть:

$$2x-3y=6\,,$$

затем разделим обе части получившегося уравнения на 6:

$$\frac{2x}{6}-\frac{3y}{6}=1\,,$$

и после сокращения получаем уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1\,.$$

Отсюда видим, что прямая пересекает ось абсцисс в точке $x=3$, а ось ординат – в точке $y=-2$.

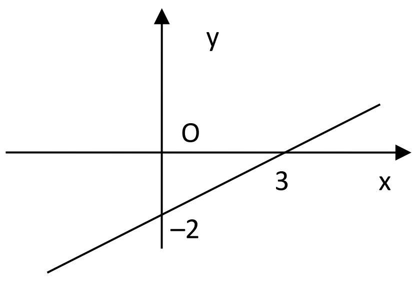

Рис.3.

Задача 34

Найти общее уравнение прямой, проходящей через точку A (2; –7), и перпендикулярной вектору $\overline{n} = (-1; 4)$.

Решение. 1-й способ. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0,$$

где (x_o, y_o) – координаты произвольной фиксированной точки M_o, лежащей на данной прямой, $(A, B) = \overline{n}$ – координаты её нормального вектора. По условию задачи искомая прямая должна проходить через точку A(2; –7), следовательно, мы можем положить $x_o = 2, y_o = -7$.

По условию задачи, прямая должна быть перпендикулярной вектору $\overline{n} = (-1; 4)$, следовательно, данный вектор может служить нормальным вектором для данной прямой и мы можем положить $A = -1, B = 4$. Подставляя эти числа в уравнение, получаем:

$$-(x - 2) + 4(y + 7) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем:

$$-x + 4y + 30 = 0 \text{ или } x - 4y - 30 = 0.$$

2-й способ. Воспользуемся общим уравнением прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

где $(A, B) = \overline{n}$ – координаты её нормального вектора.

Так как нормальный вектор прямой дан по условию задачи: $\overline{n} = (-1; 4)$, то полагаем $A = -1, B = 4$ и подставляем эти числа в общее уравнение прямой:

$$-x + 4y + C = 0.$$

Искомая прямая проходит через точку A (2; –7), поэтому её координаты должны удовлетворять уравнению этой прямой. Подставляя $x = 2, y = -7$ в предыдущее уравнение, получаем:

$$-2 + 4(-7) + C = 0.$$

Отсюда находим значение коэффициента C: $C = 30$. Подставляя в уравнение, получаем:

$$-x + 4y + 30 = 0 \text{ или } x - 4y - 30 = 0.$$

Ответ: $x - 4y - 30 = 0$.

Задача 35

Найти каноническое и параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку A(2; –7) параллельно вектору $\overline{s} = (3; 5)$.

Решение. Каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n},$$

где $(m, n) = \overline{s}$ – координаты произвольного направляющего вектора данной прямой, (x_o, y_o) – координаты произвольной фиксированной точки M_o лежащей на данной прямой.

Для написания канонического уравнения прямой у нас есть все данные. Точка A (2; –7) по условию задачи должна лежать на искомой прямой, следовательно, мы можем положить

$x_o = 2, y_o = -7$. По условию задачи вектор $\bar{s} = (3;5)$ параллелен искомой прямой, поэтому он является её направляющим вектором, отсюда следует, что мы можем положить $m = 3, n = 5$. Подставляя найденные числа в каноническое уравнение, получаем:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+7}{5}.$$

Зная каноническое уравнение прямой, легко найти её параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x = x_o + mt \\ y = y_o + nt \end{cases}, t \in R,$$

где числа x_o, y_o, m, n обозначают тоже самое, что и в каноническом уравнении прямой. Подставляя их параметрическое уравнение, получаем:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -7 + 5t \end{cases}, t \in R.$$

Заметим, что для нахождения параметрического уравнения прямой достаточно обе части канонического уравнения приравнять одной и той же букве t:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = t \\ \dfrac{y+7}{5} = t \end{cases}$$

и разрешить уравнения получившейся системы относительно переменных x и y соответственно:

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 5t - 7 \end{cases}.$$

Ответ: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+7}{5}$, $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -7 + 5t \end{cases}, t \in R$.

Задача 36

Найти общее уравнение прямой, проходящей через точки A (3; –1) и B(–2; 5).
Решение.1-й способ. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

где (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – координаты данных точек. Полагаем $x_1 = 3, y_1 = -1, x_2 = -2, y_2 = 5$ и подставляем эти числа в уравнение:

$$\frac{x-3}{-2-3} = \frac{y-(-1)}{5-(-1)} \text{ или } \frac{x-3}{-5} = \frac{y+1}{6}.$$

Умножая обе части полученного уравнения на –30, получаем:

$$6(x-3) = -5(y+1) \text{ или } 6x + 5y - 13 = 0.$$

2-й способ. Найдем каноническое уравнение искомой прямой:

$$\frac{x-x_o}{m}=\frac{y-y_o}{n}.$$

По условию задачи нам известны координаты двух точек, лежащих на прямой, поэтому вектор $\overline{AB}$ будет лежать на данной прямой и может служить её направляющим вектором. Найдем координаты вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)=(-2-3;5-(-1))=(-5;6).$$

Т.е. в каноническом уравнении прямой мы можем положить $m=-5, n=6$. В качестве x_o, y_o мы можем взять координаты любой из двух данных точек, т.к. обе они лежат на искомой прямой. Полагаем $x_o=3, y_o=-1$. Подставляем найденные значения m, n, x_o, y_o в каноническое уравнение и получаем:

$$\frac{x-3}{-5}=\frac{y+1}{6} \text{ или } 6x+5y-13=0.$$

Ответ: $6x+5y-13=0$.

Задача 37

Найти уравнение прямой с угловым коэффициентом $k=-2$, проходящей через точку M (–1; 0).

Решение. 1-й способ. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом:

$$y-y_o=k(x-x_o),$$

где (x_o, y_o) – координаты произвольной фиксированной точки M_o, лежащей на данной прямой, k – её угловой коэффициент. Прямая проходит через точку M(–1; 0) и мы можем положить $x_o=-1, y_o=0$. Угловой коэффициент известен: $k=-2$. Подставляя эти данные в уравнение прямой, получаем:

$$y=-2(x+1).$$

Раскрывая скобки, находим искомое уравнение:

$$y=-2x-2.$$

2-й способ. Воспользуемся уравнением прямой с угловым коэффициентом:

$$y=kx+b.$$

Угловой коэффициент дан по условиям задачи: $k=-2$. Подставляя его в уравнение, получаем:

$$y=-2x+b.$$

По условию задачи прямая проходит через точку M (–1; 0), следовательно, её координаты должны удовлетворять уравнению искомой прямой. Подставляя в предыдущее уравнение $x=-1, y=0$, получаем уравнение с одной неизвестной b:

$$0=-2(-1)+b.$$

Решая последнее уравнение, находим $b=-2$.
Подставляем найденное значение b в уравнение с угловым коэффициентом:

$$y=-2x-2.$$

Ответ: $y=-2x-2$.

Задача 38

Найти нормальный вектор и общее уравнение прямой $\frac{x-6}{-5}=\frac{y+2}{4}$.

Решение. 1-й способ. Нормальный и направляющий векторы прямой ортогональны, и их скалярное произведение равно нулю. Из канонического уравнения прямой находим

$$\bar{s}=(-5;4)\Rightarrow\bar{n}=(4;5).$$

Точка (6; –2) лежит на данной прямой, поэтому мы можем воспользоваться уравнением прямой, проходящей через данную точку, и перпендикулярную данному вектору:

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)=0,$$

или, после подстановки координат нормального вектора и точки, лежащей на прямой:

$$4(x-6)+5(y+2)=0\Rightarrow 4x+5y-14=0.$$

2-й способ. Умножим обе части канонического уравнения прямой на общий знаменатель. Получаем,

$$4x-24=-5y-10\Rightarrow 4x+5y-14=0.$$

Ответ: $4x+5y-14=0,\quad \bar{n}=(4;5)$.

Задача 39

Найти направляющий вектор и каноническое уравнение прямой $3x-2y+1=0$.

Решение. 1-й способ:

$$3x=2y-1\Rightarrow 3x=2(y-\frac{1}{2})\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y-\frac{1}{2}}{3}.$$

2-й способ. Выписываем координаты нормального вектора, и находим координаты направляющего вектора:

$$\bar{n}=(3;-2)\Rightarrow\bar{s}=(2;3).$$

Находим какое-нибудь решение уравнения $3x-2y+1=0$:

$$x=1,\ y=2,$$

и записываем каноническое уравнение данной прямой:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}.$$

Ответ: $\bar{s}=(2;3),\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}$.

Задача 40

Найти параметрическое уравнение прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}$.

Решение. Пусть $\frac{x-1}{2}=t$, тогда $\frac{y-2}{3}=t$. Отсюда находим:

$$\begin{cases}x=2t+1\\y=3t+2\end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases}, \quad t \in R$.

Задача 41

Найти каноническое уравнение прямой $\begin{cases} x = -t - 4 \\ y = 2 \end{cases}, \quad t \in R$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде:

$$\begin{cases} x = -t - 4 \\ y = 2 + 0 \cdot t \end{cases}.$$

Тогда, $\bar{s} = (-1; 0)$ или $\bar{s} = (1; 0)$ – направляющий вектор данной прямой, точка с координатами (–4; 2) лежит на данной прямой. Осталось записать каноническое уравнение данной прямой:

$$\frac{x+4}{-1} = \frac{y-2}{0}.$$

Ответ: $\frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{0}$.

Задача 42

Убедиться, что прямые $x - y + 1 = 0$ и $x + 2y - 3 = 0$ пересекаются и найти острый угол между ними.

Решение. Так как коэффициенты при неизвестных не пропорциональные

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{2},$$

то прямые пересекаются. Один из углов между прямыми будет равен углу между их нормальными векторами: $\overline{n_1} = (1, -1)$, $\overline{n_2} = (1, 2)$:

$$\cos(\overline{n_1} \wedge \overline{n_2}) = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{1-2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Следовательно, острый угол между данными прямыми равен

$$\pi - \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Задача 43

Выяснить взаимное расположение двух прямых
$L_1 : 3x - 4y + 11 = 0$ и $L_2 : 2x - 3y + 8 = 0$, и если они пересекаются, найти точку их пересечения.

Решение. Так как коэффициенты при неизвестных не пропорциональны:

$$\frac{3}{2} \neq \frac{-4}{-3},$$

то прямые пересекаются. Для вычисления координат точки их пересечения решим систему

$$\begin{cases} 3x - 4y = -11 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$$

с помощью формул Крамера. Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1 \neq 0 ,$$

следовательно, система имеет единственное решение, т. е. данные прямые пересекаются. Вычисляем координаты точки пересечения:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -11 & -4 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = 1, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -2 ,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -1, \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2 .$$

Ответ: прямые пересекаются в точке (–1; 2).

Задача 44

Найти точку пересечения прямых:

$L_1 : 3x - 4y + 11 = 0$ и $L_2 : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases}$.

Решение. Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 2 \\ 3x - 4y + 11 = 0 \end{cases} .$$

Подставляем неизвестные x и y из первых уравнений системы в последнее уравнение, и находим:

$$3(2t + 1) - 4(3t + 2) + 11 = 0 \text{ или } t = 1 .$$

Подставляя найденное значение параметра t в первые два уравнения системы, находим: $x = 3, y = 5$.

Ответ: (3; 5).

Задача 45

Изобразить на чертеже видимую в первом октанте ПДСК Oxyz часть плоскости $2x + 3y + 6z - 12 = 0$.

Решение. Приведем общее уравнение плоскости к уравнению в отрезках:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1 .$$

Отложим на оси Ox точку с абсциссой $x = 6$, на оси ординат точку $y = 4$ и на оси аппликат точку $z = 2$. Соединим эти точки отрезками прямых. (Смотрите рисунок 1, где $a = 6, b = 4, c = 2$).

Задача 46

Найти уравнение плоскости, проходящей через точку A(–1; 5; –7), с нормальным вектором $\overline{n} = (2; -4; 9)$.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0 ,$$

где (x_o, y_o, z_o) – координаты точки, лежащей на данной плоскости, $(A, B, C) = \overline{n}$ –

координаты её нормального вектора. По условию задачи нормальный вектор плоскости известен $A = 2, B = -4, C = 9$, и известны координаты точки, лежащей на плоскости $x_o = -1, y_o = 5, z_o = -7$. Подставляем эти числа в уравнение:

$$2(x+1) - 4(y-5) + 9(z+7) = 0$$

Осталось раскрыть скобки и привести подобные члены.
Ответ: $2x - 4y + 9z + 85 = 0$.

Задача 47

Найти уравнение плоскости, проходящей через точку М (0; –2; 4) параллельно плоскости $2x - y + z + 5 = 0$.

Решение. Так как искомая плоскость параллельна данной, то нормальный вектор данной плоскости $\overline{n} = (2; -1; 1)$ является нормальным вектором искомой. Теперь решаем задачу как в предыдущем примере:

$$2x - (y+2) + (z-4) = 0.$$

Ответ: $2x - y + z - 6 = 0$.

Задача 48

Найти уравнение плоскости, проходящей через точки A (–1; 5; –7), B (0; –2; 3), C(6; 0; 1).

Решение. 1-й способ. Нормальным вектором плоскости может служить вектор $\overline{AB} \times \overline{AC}$ и задача решается также, как в примере 2. Смотрите рисунок 2.

Находим координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}$ и $\overline{AB} \times \overline{AC}$: $\overline{AB} = (1; -7; 10), \overline{AC} = (7; -5; 8)$,

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -7 & 10 \\ 7 & -5 & 8 \end{vmatrix} = (-6;\ 62;\ 44) = 2(-3;\ 31;\ 22).$$

В качестве нормального вектора возьмем вектор $\overline{n} = (-3;\ 31;\ 22)$, а в качестве точки, лежащей на плоскости возьмем точку C(6; 0; 1). Получаем

$$-3(x-6) + 31y + 22(z-1) = 0.$$

Раскрываем скобки: $-3x + 31y + 22z - 4 = 0$.

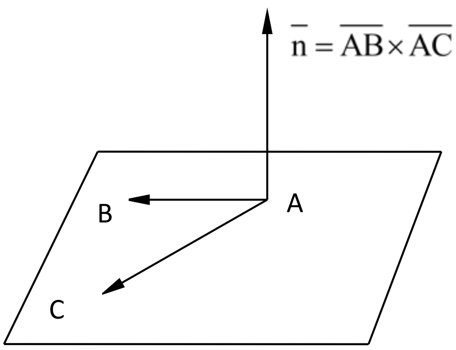

Рис. 2

2-й способ. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

В качестве первой точки считаем точку A, точка B – вторая точка, C – третья:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-5 & z+7 \\ 0+1 & -2-5 & 3+7 \\ 6+1 & 0-5 & 1+7 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x+1)\begin{vmatrix} -7 & 10 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} - (y-5)\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + (z+7)\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определители 2-го порядка и раскрывая скобки, получаем:

$$-6x - 6 + 62y - 310 + 44z + 308 = 0 \text{ или } -6x + 62y + 44z - 8 = 0.$$

Ответ: $3x - 31y - 22z + 4 = 0$.

Задача 49

Выяснить взаимное расположение двух плоскостей: а) $4x - y + 9z - 16 = 0,\ 3x - 6y - 2z + 1 = 0$
б) $x - y + z - 1 = 0,\ -3x + 3y - 3z + 3 = 0$;
в) $x - y + z - 1 = 0,\ -3x + 3y - 3z - 3 = 0$;
г) $x - y + z - 1 = 0,\ x + y + z = 0$.

Решение. а) Выписываем координаты нормальных векторов данных плоскостей: $\overline{n}_1 = (4;-1;9),\ \overline{n}_2 = (3;-6;-2)$. Замечаем, что их координаты не пропорциональные:

$$\frac{4}{3} \neq \frac{-1}{-6} \neq \frac{9}{-2}.$$

Следовательно, плоскости пересекаются. Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами:

$$(\overline{n}_1 \wedge \overline{n}_2) = \arccos\frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|}.$$

Вычисляем скалярное произведение

$$\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 12 + 6 - 18 = 0.$$

Следовательно, плоскости перпендикулярны.
б) Замечаем, что все коэффициенты в уравнениях плоскостей пропорциональны:

$$\frac{1}{-3} = \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} = \frac{-1}{3}.$$

Следовательно, плоскости совпадают.
в) Аналогично, проверяем пропорциональность коэффициентов уравнений:

$$\frac{1}{-3} = \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} \neq \frac{-1}{-3}.$$

Следовательно, плоскости параллельные.
г) Коэффициенты при переменных в уравнениях не пропорциональные, следовательно, плоскости пересекаются. Выписываем координаты нормальных векторов, находим их модули и их скалярное произведение:

$$\overline{n}_1 = (1;-1;1),\ \overline{n}_2 = (1;1;1),\ \overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 1,\ |\overline{n}_1| = |\overline{n}_2| = \sqrt{3}.$$

Вычисляем угол между плоскостями:

$$(\overline{n}_1 \wedge \overline{n}_2) = \arccos\frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \arccos\frac{1}{3}.$$

Ответ: а) плоскости перпендикулярные; б) плоскости совпадают; в) плоскости параллельные; г) плоскости пересекаются под углом, равным $\arccos\frac{1}{3}$.

Задача 50

Найти уравнение плоскости, проходящей через точки A (2; –1; 5) и B (0; 3; –2) перпендикулярно плоскости $y-z-2=0$.

Решение. Вектор $\overline{AB}=(-2;4;-7)$ лежит на искомой плоскости, а нормальный вектор $\overline{n}=(0;1;-1)$ данной плоскости параллелен искомой плоскости, перпендикулярной данной. Поэтому, их векторное произведение является нормальным вектором искомой плоскости. Смотрите рисунок 3.

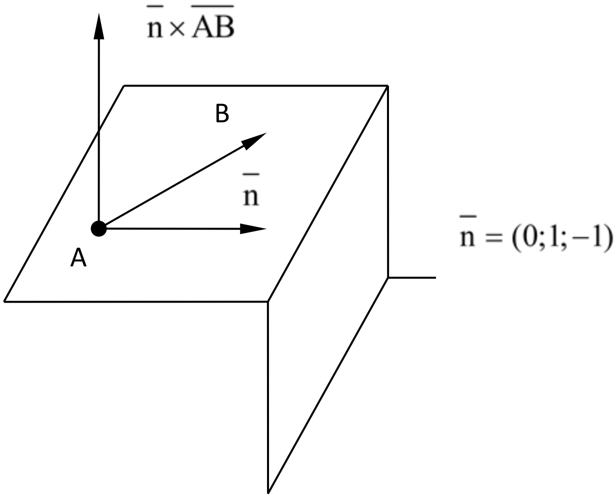

Рис. 3

Вычисляем векторное произведение

$$\overline{n}\times\overline{AB}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -7 \end{vmatrix}=(-3;2;2),$$

и записываем уравнение плоскости, проходящей через точку B (0; 3; –2) с нормальным вектором $\overline{n}\times\overline{AB}=(-3;2;2)$:

$-3x+2(y-3)+2(z+2)=0$ или $3x-2y-2z+2=0$.

Ответ: $3x-2y-2z+2=0$.

Задача 51

Найти каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку M(–2; 4; 0), если вектор $\overline{s}=(1,0,-3)$ является её направляющим вектором.

Решение. Подставляем в каноническое уравнение прямой

$$\frac{x-x_o}{m}=\frac{y-y_o}{n}=\frac{z-z_o}{p}$$

координаты точки M: $x_o=-2, y_o=4, z_o=0$, и координаты направляющего вектора прямой: $m=1, n=0, p=-3$.

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-4}{0}=\frac{z}{-3}.$$

Аналогично получаем параметрическое уравнение прямой.

Ответ:

$\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-4}{0}=\dfrac{z}{-3}$ – каноническое уравнение прямой; $\begin{cases} x=-2+t \\ y=4 \\ z=-3t \end{cases}$, $t\in R$ – параметрическое уравнение прямой.

Задача 52

Найти параметрическое уравнение прямой

$\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{0}$.

Решение. Положим

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{0}=t, \quad t\in R$$

и выразим переменные x, y и z через параметр t:

$\dfrac{x-2}{-3}=t, \quad x=-3t+2$, $\dfrac{y+1}{4}=t, \quad y=4t-1$, $\dfrac{z}{0}=t, \quad z=0$.

Ответ: $\begin{cases} x=2-3t \\ y=-1+4t, \quad t\in R. \\ z=0 \end{cases}$

Задача 53

Найти каноническое уравнение прямой

$\begin{cases} x=-5-t \\ y=-1 \quad , \quad t\in R. \\ z=2+t \end{cases}$

Решение. Из параметрического уравнения прямой сразу же находим координаты точки, лежащей на этой прямой. Их можно найти, положив $t=0$: $(x_o, y_o, z_o)=(-5;-1;2)$. Коэффициенты при параметре t дают соответствующие координаты направляющего вектора этой прямой: $\bar{s}=(-1;0;1)$. Составляем каноническое уравнение данной прямой.

Ответ: $\dfrac{x+5}{-1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-2}{1}$.

Замечание. Каноническое уравнение можно получить, если из каждого уравнения системы выразить параметр t: $t=-x-5=\dfrac{x+5}{-1}$, $t=z-2=\dfrac{z-2}{1}$. Второе уравнение запишем в виде:

$$y=-1+0\cdot t \Rightarrow t=\frac{y+1}{0},$$

где последнее равенство нужно понимать формально, как картинку, а не как действие деления. Приравнивая правые части полученных равенств, получаем ответ.

Задача 54

Найти каноническое уравнение прямой, проходящей через точки A (–1; 2; –5) и B (2; 6; 7).

Решение. Воспользуемся каноническим уравнением прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Подставляем в это уравнение координаты точек A и B:
$x_1=-1, y_1=2, z_1=-5, x_2=2, y_2=6, z_2=7$. Получаем:

$$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{6-2}=\frac{z+5}{7+5}.$$

Ответ: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+5}{12}$.

Задача 55

Найти точку пересечения двух пересекающихся пространственных прямых

$$L_1:\begin{cases} x=-4+t \\ y=7-t \\ z=2+3t \end{cases},\quad t\in R \quad \text{и} \quad L_2:\begin{cases} x=-2k \\ y=3+2k \\ z=-1-k \end{cases},\quad k\in R.$$

Решение. Так как их направляющие вектора $\bar{s}_1=(1;-1;3)$, $\bar{s}_2=(-2;2;-1)$ не коллинеарные, то прямые либо скрещивающиеся, либо пересекающиеся. Решаем систему

$$\begin{cases} -4+t=-2k \\ 7-t=3+2k \\ 2+3t=-1-k \end{cases}.$$

Выражаем t из первого уравнения и подставляем во второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} t=4-2k \\ 7-(4-2k)=3+2k \\ 2+3(4-2k)=-1-k \end{cases}.$$

Вычисляем k:

$$\begin{cases} t=4-2k \\ 0=0 \\ k=3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} t=-2 \\ k=3 \end{cases}$$

– система имеет единственное решение, следовательно, прямые пересекаются. Подставляем найденные значения t и k в параметрические уравнения прямых и находим координаты общей точки.
Ответ: (– 6; 9; – 4).

Задача 56

Задать прямую $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-5}{-5}$ пересечением двух плоскостей.
Решение. Записываем каноническое уравнение прямой в виде системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{-4} \\ \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-5}{-5} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -4(x+2) = 3(y-3) \\ 5(y-3) = 4(z-5) \end{cases}, \ \begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 5y-4z+5=0 \end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 5y-4z+5=0 \end{cases}$.

Задача 57

Определить взаимное расположение двух пространственных прямых

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}.$$

Решение. Из канонического уравнения 1-й прямой находим координаты точки, лежащей на ней и координаты её направляющего вектора: $M_1(-2;0;1), \bar{s}_1 = (2;-3;4)$. Аналогично, находим для 2-й прямой: $M_2(3;1;7), \bar{s}_2 = (-1;4;2)$. Так как направляющие вектора прямых не коллинеарные, то прямые либо пересекающиеся, либо скрещивающиеся. Вычислим смешанное произведение векторов

$$\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2} = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 44 - 48 - 84 = -88 \neq 0.$$

Ответ: прямые скрещивающиеся.

Задача 58

Найти каноническое уравнение прямой, заданной пересечением плоскостей:

$$L: \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x-y+2z-3=0 \end{cases}.$$

Решение. Найдем координаты какой-нибудь точки, лежащей на данной прямой. Исключим из уравнения одно из переменных. Умножим, например, первое уравнение на 2 и сложим оба уравнения. Получаем $4x+3y-1=0$. Положим в этом уравнении $y=3$. Получаем $x=-2$. Подставляя найденные значения x и y в первое уравнение, находим $z=5$. Таким образом, точка с координатами $(-2;3;5)$ лежит на данной прямой, т.е. $x_o=-2, y_o=3, z_o=5$. Найдем ее направляющий вектор. Выписываем нормальные векторы данных плоскостей и вычисляем их векторное произведение:

$$\bar{n}_1 = (1, 2, -1), \qquad \bar{n}_2 = (2, -1, 2), \qquad \bar{s} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = (3;-4;-5).$$

Таким образом, $\bar{s} = (3, -4, -5)$, т. е. $m=3, n=-4, p=-5$ и, подставляя эти числа в каноническое уравнение, получаем ответ.

Ответ: $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-5}{-5}$.

Задача 59

Найти расстояние между параллельными прямыми $L_1: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}$, $L_2: \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}$.

Решение. Выписываем направляющие векторы прямых:

$$\bar{s}_1 = (3; -2; 2), \bar{s}_2 = (-3; 2; -2) = -\bar{s}_1.$$

Отсюда следует, что прямые либо совпадают, либо параллельные. Пусть

$$\bar{s} = (3; -2; 2)$$

– их общий направляющий вектор. Из канонических уравнений прямых находим, что точки

$$M_1(0; 1; -1) \in L_1,\ M_2(2; 0; 0) \in L_2.$$

Находим координаты вектора

$$\overline{M_1M_2} = (2; -1; 1).$$

Видим, что $\overline{M_1M_2} \nparallel \bar{s}$, т.е. данные прямые не совпадают, а параллельные. Вычисляем векторное произведение

$$\bar{s} \times \overline{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \bar{j} + \bar{k},$$

и его модуль

$$|\bar{s} \times \overline{M_1M_2}| = \sqrt{2}.$$

Вычисляем модуль направляющего вектора и искомое расстояние между данными параллельными прямыми:

$$d(L_1; L_2) = \frac{|\bar{s} \times \overline{M_1M_2}|}{|\bar{s}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{17}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{17}}$.

Задача 60

Установить, что прямые $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{0}$ и $L_2: x = y = z+1$ скрещивающиеся, и найти расстояние между ними.

Решение. Находим координаты точек, лежащих на данных прямых $M_1(1; -1; 0) \in L_1$, $M_2(0; 0; -1) \in L_2$, и координаты вектора $\overline{M_1M_2} = (-1; 1; -1)$. Выписываем координаты направляющих векторов данных прямых: $\bar{s}_1 = (2; -1; 0)$, $\bar{s}_2 = (1; 1; 1)$, и вычисляем смешанное произведение $\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2} = -4$. Так как оно не равно нулю, то делаем вывод, что данные прямые скрещивающиеся. Вычисляем векторное произведение направляющих векторов и его модуль: $\bar{s}_1 \times \bar{s}_2 = -\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2| = \sqrt{14}$. Найденные значения модулей смешанного и векторного произведения векторов, подставляем в формулу расстояния между скрещивающимися прямыми:

$$d = \frac{|\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2}|}{|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2|} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{14}}{7}$.

Задача 61

Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A(1; 1; 1) на прямую $x = 2y = 2z$, и координаты проекции точки A на эту прямую.

Решение. Воспользуемся теоремой пункта 6. Искомый перпендикуляр является прямой пересечения двух плоскостей, одна из которых проводится через точку A и данную прямую, другая проводится через точку A перпендикулярно данной прямой. Смотрите рисунок 2. Уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\begin{cases} A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0 \\ m(x-1)+n(y-1)+p(z-1)=0 \end{cases},$$

где $(1;1;1)$ – координаты точки A, $\bar{s}=(m,n,p)$ – координаты направляющего вектора данной прямой, $(A,B,C)=\bar{s}\times\overline{OA}$, O – начало координат, это точка лежащая на данной прямой.

Запишем данную прямую в каноническом виде:

$$\frac{x}{2}=y=z.$$

Отсюда находим координаты её направляющего вектора:

$$\bar{s}=(2,1,1).$$

Вычисляем векторное произведение

$$\bar{s}\times\overline{OA}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(0;-1;1).$$

Теперь мы можем записать уравнение искомого перпендикуляра:

$$\begin{cases} -(y-1)+(z-1)=0 \\ 2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y=z \\ 2x+y+z-4=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y=z \\ y=\dfrac{x-2}{-1} \end{cases}.$$

Отсюда находим каноническое и параметрическое уравнение перпендикуляра:

$$\frac{x-2}{-1}=y=z, \quad \begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=t \end{cases}.$$

Теперь найдем точку пересечения B этого перпендикуляра и данной прямой. Точка B и будет проекцией точки A на данную прямую. Запишем данное уравнение в параметрической форме и воспользуемся теоремой пункта 3:

$$\begin{cases} x=2k \\ y=k \\ z=k \end{cases}.$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} 2-t=2k \\ t=k \\ t=k \end{cases}.$$

Отсюда находим, что система имеет единственное решение $(t,k)=\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. Подставляя найденное значение t или k в соответствующее параметрическое уравнение, находим координаты проекции точки A на данную прямую:

$$B\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right).$$

Ответ: $\frac{x-2}{-1}=y=z$ – каноническое уравнение перпендикуляра; $B\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ – координаты проекции точки A на данную прямую.

Задача 62

Определить взаимное расположение прямой и плоскости:

а) $x=3t-2,\ y=-4t+1,\ z=4t-5$ и $4x-3y-6z-5=0$;

б) $\begin{cases}5x-3y+2z-5=0\\2x-y-z-1=0\end{cases}$ и $4x-3y+7z-7=0$;

в) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{6}$ и $2x+3y+z-1=0$.

Решение. а) Выписываем направляющий вектор $\bar{s}$ прямой L и нормальный вектор $\bar{n}$ плоскости α:

$$\bar{s}=(3;-4;4),\quad \bar{n}=(4;-3;-6).$$

Вычисляем их скалярное произведение

$$\bar{s}\cdot\bar{n}=12+12-24=0.$$

Следовательно, векторы ортогональны, и либо прямая параллельна плоскости, либо лежит на ней. Смотрите следующие рисунки.

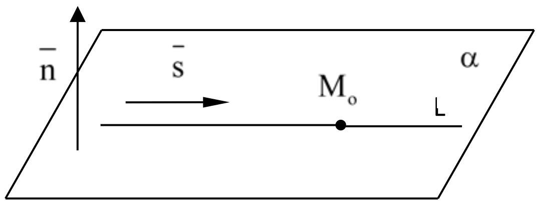

Рис. 1

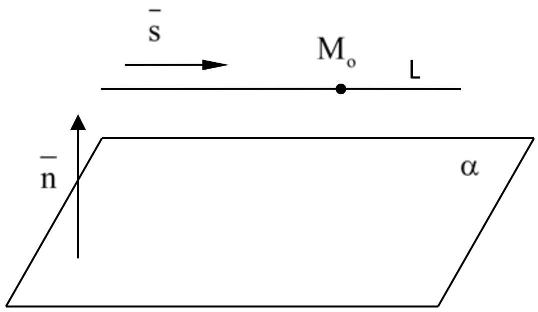

Рис. 2

Выпишем координаты точки, лежащей на прямой $M_o(-2;1;-5)$. Их можно получить, полагая $t=0$ в параметрическом уравнении прямой. Подставим координаты точки M_o в уравнение плоскости

$$4(-2)-3\cdot1-6(-5)-5=14\neq0.$$

Точка M_o не лежит на плоскости, следовательно, прямая параллельна плоскости.

б) Прямая задана пересечением двух плоскостей с нормальными векторами $\bar{n}_1=(5;-3;2),\ \bar{n}_2=(2;-1;-1)$. Задачу можно решать двумя способами.

1-й способ. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \\ 4x-3y+7z-7=0 \end{cases}.$$

Определитель этой системы равен смешанному произведению векторов $\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2\cdot\overline{n}$, где $\overline{n}=(4;-3;7)$ – нормальный вектор данной плоскости:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 5(-7-3)+3(14+4)+2(-6+4)=0.$$

Согласно теореме пункта 2, либо все три плоскости лежат в одном пучке, и в этом случае данная прямая лежит на данной плоскости, либо все три плоскости пересекаются по параллельным прямым, и в этом случае данная прямая параллельна данной плоскости. В последнем случае рассматриваемая система решений не имеет. Однако, решая систему, убеждаемся в том, что она имеет решения, например, (–2; –5; 0). Следовательно, данная прямая лежит на данной плоскости.

2-й способ. Найдем каноническое уравнение данной прямой. Векторное произведение $\overline{n}_1\times\overline{n}_2$ является направляющим вектором данной прямой (смотрите рисунок 3).

Вычисляем векторное произведение $\overline{s}=\overline{n}_1\times\overline{n}_2=(5;9;1)$, и находим частное решение (–2; –5; 0) системы

$$\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}.$$

Точка M(–2; –5; 0) лежит на данной прямой. Составляем каноническое уравнение данной прямой:

$$\frac{x+2}{5}=\frac{y+5}{9}=\frac{z}{1}.$$

Направляющий вектор прямой $\overline{s}=(5;9;1)$ ортогонален нормальному вектору данной плоскости $\overline{n}=(4;-3;7)$:

$$\overline{n}\cdot\overline{s}=20-27+7=0.$$

Следовательно, прямая лежит на плоскости или параллельная ей. Подставляем координаты точки прямой (–2; –5; 0) в уравнение плоскости:

$$4(-2)-3(-5)-7=0.$$

Делаем вывод, что прямая лежит на плоскости.

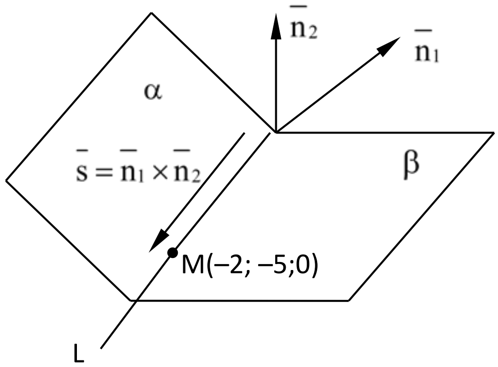

Рис. 3

в) 1-й способ. Выписываем направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости:

$$\bar{s} = (1;-2;6), \quad \bar{n} = (2;3;1).$$

Их скалярное произведение $\bar{n} \cdot \bar{s} = 2 - 6 + 6 = 2 \neq 0$, следовательно, прямая пересекается с плоскостью. Смотрите следующий рисунок.

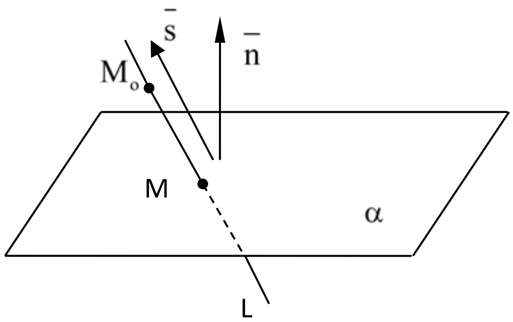

Рис. 4

2-й способ. Воспользуемся следствием теоремы пункта 3. Запишем параметрическое уравнение данной прямой и подставим неизвестные x, y, z в уравнение плоскости:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t, \\ z = 6t \end{cases} \quad 2(1+t) + 3(1-2t) + 6t - 1 = 0.$$

Решая последнее уравнение, получаем единственное решение $t = -2$. Следовательно, прямая пересекается с плоскостью в точке с координатами (–1; 5; –12).
Ответ: а) прямая и плоскость параллельные; б) прямая лежит на плоскости; в) прямая пересекается с плоскостью в точке с координатами (–1; 5; –12).

Задача 63

Найти угол между прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{6}$ и плоскостью $x + 2y - 3 = 0$.

Решение. Обозначим прямую буквой L, плоскость – буквой σ. Тогда искомый угол (смотрите рисунок 5)

$$(L \wedge \sigma) = \frac{\pi}{2} - (\bar{n} \wedge \bar{s}),$$

где $\bar{n} = (1;2;0)$ – нормальный вектор плоскости σ, $\bar{s} = (3;2;6)$ – направляющий вектор прямой L. Вычисляем угол между нормальным и направляющим векторами:

$$(\bar{n} \wedge \bar{s}) = \arccos\frac{\bar{n} \cdot \bar{s}}{|\bar{n}| \cdot |\bar{s}|} = \arccos\frac{7}{\sqrt{5} \cdot 7} = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Отсюда находим,

$$(L \wedge \sigma) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{\sqrt{5}}{5} = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$.

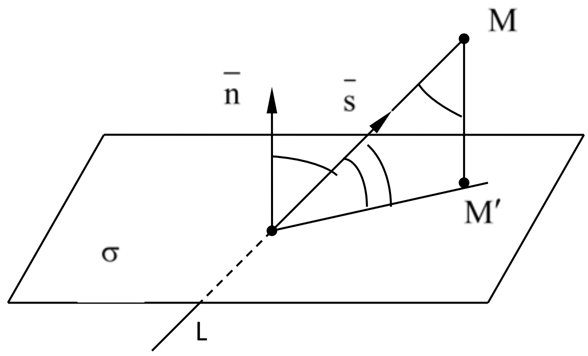

Рис. 5

Задача 63

Найти точку встречи прямой $3x = 2y = 2z$ с плоскостью $3x - 2y + 6z + 18 = 0$.
Решение. Запишем уравнение прямой в параметрической форме записи:

$$3x = 2y = 2z = t \Rightarrow x = \frac{1}{3}t,\ y = \frac{1}{2}t,\ z = \frac{1}{2}t .$$

Подставляем последние равенства в уравнение плоскости:

$$t - t + 3t + 18 = 0 \Rightarrow t = -6 .$$

Подставляя найденное значение параметра t в параметрическое уравнение прямой, получаем координаты искомой точки встречи.
Ответ: $(-2;-3;-3)$.

Задача 64

Найти точки пересечения плоскости $3x - 2y + 6z + 7 = 0$ с координатными осями.
Решение. 1-й способ. Найдем уравнение данной плоскости в отрезках:

$$3x - 2y + 6z = -7 \Rightarrow \frac{x}{\left(-\frac{7}{3}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{7}{2}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{7}{6}\right)} = 1 .$$

Отсюда сразу же находим координаты искомых точек:

$$\left(-\frac{7}{3};0;0\right), \left(0;\frac{7}{2};0\right), \left(0;0;-\frac{7}{6}\right).$$

Смотрите рисунок 6.

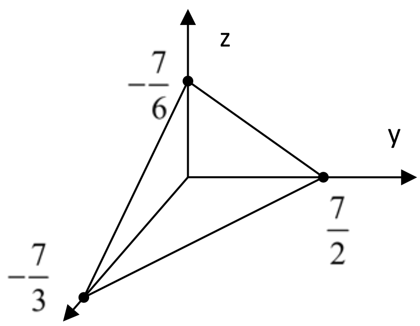

Рис. 6

2-й способ. Точка встречи прямой с плоскостью есть их общая точка, координаты которой удовлетворяют как уравнению прямой, так и уравнению плоскости, и является, таким образом, решением системы, составленной из их уравнений. Уравнение оси Ox имеет вид:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

– пересечение координатных плоскостей Oxz и Oxy. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 3x - 2y + 6z + 7 = 0 \end{cases},$$

и находим абсциссу точки пересечения данной плоскости с осью Ox: $x = -\dfrac{7}{3}$, и координаты этой точки $\left(-\dfrac{7}{3};0;0\right)$. Аналогично, полагая в уравнении плоскости $x = 0, z = 0$, находим ординату точки пересечения плоскости с осью Oy: $y = \dfrac{7}{2}$, и координаты этой точки $\left(0;\dfrac{7}{2};0\right)$. Полагая в уравнении плоскости $x = 0, y = 0$, находим аппликату точки пересечения плоскости с осью Oz: $z = -\dfrac{7}{6}$, и координаты этой точки $\left(0;0;-\dfrac{7}{6}\right)$.

Ответ: $\left(-\dfrac{7}{3};0;0\right), \left(0;\dfrac{7}{2};0\right), \left(0;0;-\dfrac{7}{6}\right)$.

Задача 65

Найти каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;1;-6)$, и перпендикулярную плоскости $4x + 3y + 5z - 11 = 0$.

Решение. Нормальный вектор плоскости является направляющим вектором для прямой, перпендикулярной этой плоскости (смотрите рисунок 7):

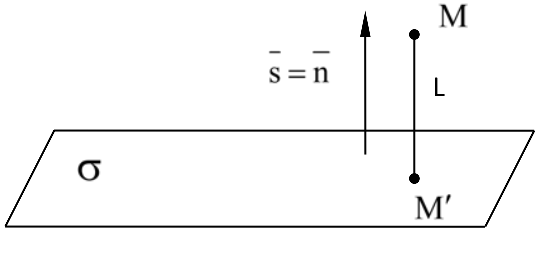

Рис. 7

$$\bar{s} = \bar{n} = (4;3;5).$$

Осталось подставить в каноническое уравнение прямой координаты её направляющего вектора и точки, через которую она проходит.

Ответ: $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+6}{5}$.

Задача 66

Найти проекцию точки $M(-2;1;-6)$ на плоскость $4x + 3y + 5z - 15 = 0$.

Решение. Находим уравнение прямой, проходящей через данную точку M, и перпендикулярную данной плоскости. Смотрите пример 5 и рисунок 7. Осталось найти точку встречи M' найденной прямой $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+6}{5}$ с данной плоскостью. Смотрите пример 3.

Ответ: (2; 4; –1).

Задача 67

Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2;1;-6)$, и перпендикулярной прямой $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+6}{5}$.

Решение. Прямая перпендикулярна плоскости, поэтому направляющий вектор прямой является нормальным вектором для плоскости:

$$\bar{n}=\bar{s}=(4;3;5).$$

Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через точку $M(x_o,y_o,z_o)$ с заданным нормальным вектором:

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0.$$

Подставляем в это уравнение координаты нормального вектора плоскости $\bar{n}=(A,B,C)=(4;3;5)$, и координаты точки $x_o=-2,\ y_o=1,\ z_o=-6$, и получаем:

$$4(x-(-2))+3(y-1)+5(z-(-6))=0,$$

или $4x+3y+5z+35=0$.

Ответ: $4x+3y+5z+35=0$.

Задача 68

Убедиться, что прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ параллельна плоскости $x-2y+6z-2=0$, и найти расстояние между ними.

Решение. Сначала убеждаемся в том, что прямая параллельна плоскости. Выписываем направляющий вектор прямой $\bar{s}=(2;1;0)$, нормальный вектор плоскости $\bar{n}=(1;-2;6)$, и вычисляем их скалярное произведение

$$\bar{n}\cdot\bar{s}=0.$$

Следовательно, прямая либо параллельная плоскости, либо лежит на этой плоскости. Точка $M(2;-1;0)$ лежит на прямой. Найдем расстояние от неё до данной плоскости:

$$d=\frac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot2-2(-1)+6\cdot0-2|}{\sqrt{1+4+36}}=\frac{2}{\sqrt{41}}.$$

Если бы прямая лежала на плоскости, то расстояние d было бы равно нулю. Следовательно, прямая параллельная плоскости, и расстояние между ними равно $\frac{2}{\sqrt{41}}$.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{41}}$.

Задача 69

Составить уравнение пучка плоскостей, если известны уравнения двух плоскостей из этого пучка:

$$x-2y+6z-2=0 \quad \text{и} \quad 4x+3y+5z-15=0.$$

Решение. Сначала нужно убедиться, что плоскости пересекаются (т. е. не параллельные и не совпадают). Выписываем координаты их нормальных векторов

$$\overline{n}_1=(1;-2;6) \quad \text{и} \quad \overline{n}_2=(4;3;5),$$

и вычисляем отношение их соответствующих координат:

$$\frac{1}{4}\neq\frac{-2}{3}\neq\frac{6}{5}.$$

Следовательно, их нормальные векторы не коллинеарные, а это означает, что плоскости пересекаются, и лежат в одном пучке плоскостей. Осталось записать уравнение этого пучка плоскостей.

Ответ: $\alpha(x-2y+6z-2)+\beta(4x+3y+5z-15)=0$.

Задача 70

Найти каноническое уравнение оси пучка плоскостей $\alpha(x-2y-z+1)+\beta(2x-y+2z-3)=0$.

Решение. Плоскости:

$$x-2y-z+1=0 \quad \text{и} \quad 2x-y+2z-3=0$$

лежат в данном пучке и пересекаются по прямой, которая и является осью этого пучка плоскостей. Следовательно, система уравнений

$$L:\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x-y+2z-3=0 \end{cases}$$

есть уравнение оси пучка. Осталось найти каноническое уравнение этой прямой. Смотрите задачу 8 из списка задач предыдущего практического занятия, и пример 8 там же.

Ответ: $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-5}{-5}$.

Задача 71

Найти уравнение пучка плоскостей с осью пучка $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-5}{-5}$.

Решение. Каноническое уравнение прямой в пространстве можно рассматривать как систему двух уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{-4} \\ \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{z-5}{-5} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -4x-8=3y-9 \\ -5x-10=3z-15 \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 5x+3z-5=0 \end{cases},$$

каждое из которых есть уравнение плоскости. Эти плоскости пересекаются по данной прямой. Имея две плоскости из пучка плоскостей, можно записать его уравнение.

Ответ: $\alpha(4x+3y-1)+\beta(5x+3z-5)=0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте в Oxyz точку A(4; 3; 5) и её проекции на координатные оси и координатные плоскости, и найти их координаты.

2. Найдите расстояния от точки B(4; 3; –5) до координатных плоскостей и координатных осей.

3. Найдите координаты точек, симметричных точке M(5; 4; – 2) относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат.

4. Найдите проекции радиус-вектора точки A(1; 2; 5) на координатные оси, и запишите его в координатной форме.

5. Найдите модуль и направляющие углы радиус-вектора точки A(2; –1; –2).

6. Найдите модуль и направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (-7; -6; 6)$.

7. Найдите орт вектора $\bar{a} = (-6; 2; -3)$.

8. Найдите проекции вектора на координатные оси, если его модуль равен 2, и известны его направляющие углы: $\alpha = 45^o, \beta = 120^o, \gamma = 60^o$. Запишите этот вектор в координатной форме.

9. Найдите декартовые координаты вектора, если его модуль равен $\sqrt{2}$, направляющие углы $\alpha = 45^o, \beta = 135^o$, и известно, что направляющий угол γ – острый.

10. Найдите координаты вектора, если точка A(–2; –13; 19) является его началом, а точка B (–11; –9; 23) – его концом.

11. Найдите координаты вектора $\bar{c} = 5\bar{a} + 2\bar{b}$, если $\bar{a} = (-1; 1; -2)$, $\bar{b} = (3; -4; 5)$.

12. Найдите длины сторон треугольника с вершинами A(2; 2; –2), B(3; –1; –3), C(–3; 6; 1), и длину его медианы, проведенной из вершины A.

13. На прямой, проходящей через точки A(2; 5; –2) и B(–1; 3; –4), найдите точку, которая делит отрезок AB в отношении $-\frac{4}{7}$, считая от точки A.

14. Убедитесь, что точки A (1; –1; 0), B(0; 1; 3) и C(–2; 5; 9) лежат на одной прямой, и найдите отношение, в котором точка A делит отрезок BC, считая от точки B.

15. Зная, что $|\bar{a}| = \sqrt{2}, |\bar{b}| = \sqrt{3}$, вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если угол между ними равен: а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $\frac{5\pi}{6}$; е) $\frac{\pi}{3}$; ё) $\frac{\pi}{4}$.

16. Найти скалярный квадрат вектора $\bar{a}$, если его модуль равен $\sqrt[3]{4}$.

17. Найти модуль вектора, если известно, что его скалярный квадрат равен $\sqrt[3]{4}$.

18. Дано: $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = \sqrt{2}, (\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{\pi}{4}$. Найти: а) $(\bar{a} - \bar{b})^2$; б) $|\bar{a} - \bar{b}|$; в) $(3\bar{a} - 2\bar{b})(\bar{a} + 2\bar{b})$.

19. Даны векторы $\bar{a} = (4; -2; -4), \bar{b} = (6; -3; 2)$. Вычислить их скалярное произведение.

20. Вычислить скалярный квадрат вектора $\bar{a} = (4; -2; -4)$ и его модуль.

21. Вычислить проекцию вектора $\bar{a} = (5; 2; 5)$ на вектор $\bar{b} = (2; -1; 2)$.

22. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\bar{a} = (2; -4; 4)$ и $\bar{b} = (-3; 2; 6)$.

23. Дано, что $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\bar{a} + \alpha\bar{b}$, $\bar{a} - \alpha\bar{b}$ будут ортогональны.

24. Найти работу производимую силой $\bar{f} = (3; -2; -5)$, когда её точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки A(2; –3; 5) в точку B(3; –2; –1).

25. Даны вершины треугольника A(3; 2; –3), B(5; 1; –1) и C(1; –2; 1). Найти его внешний угол при вершине A.

26. Даны три вектора $\bar{a} = 3\bar{i} - 6\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}$ и $\bar{c} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 12\bar{k}$. Вычислить $\text{пр}_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b})$.

27. Изобразить два произвольных вектора, отложенные от одной точки под углом 45^{o} между ними. Построить векторные произведения этих векторов.

28. Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\dfrac{5\pi}{6}$. Зная, что $|\bar{a}| = 2\sqrt{6}, |\bar{b}| = 7\sqrt{2}$, вычислить $|\bar{a} \times \bar{b}|$.

29. Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\dfrac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, вычислить:

а) $(\bar{a} \times \bar{b})^2$; б) $((2\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} + 2\bar{b}))^2$.

30. Даны векторы $\bar{a} = (3; -1; -2), \bar{b} = (1; 2; -1)$. Найти:

а) $\bar{a} \times \bar{b}$; б) $(2\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{b}$; в) $(2\bar{a} - \bar{b}) \times (2\bar{a} + \bar{b})$.

31. Даны векторы $\bar{a} = (3; -1; -2), \bar{b} = (1; 2; -1)$. Найти $|\bar{a} \times \bar{b}|$ и синус угла между данными векторами.

32. Даны точки A(1; 2; 0), B(3; 0; –3) и C(5; 2; 6). Вычислить площадь треугольника ABC.

33. Сила $\bar{P} = (2; -4; 5)$ приложена к точке M(4; –2; 3). Найти момент этой силы относительно точки A(3; 2; –1).

34. Определить ориентацию тройки векторов:

а) $\{\bar{k}, \bar{i}, \bar{j}\}$; б) $\{\bar{k}, \bar{j}, \bar{i}\}$; в) $\{\bar{j}, \bar{i}, \bar{k}\}$; г) $\{\bar{i} + \bar{j}, \bar{j}, \bar{k}\}$;

д) $\{\bar{i} + \bar{j}, \bar{i} - \bar{j}, \bar{j}\}$; е) $\{\bar{i} + \bar{j}, \bar{i} - \bar{j}, \bar{k}\}$.

35. Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правоориентированный ортогональный базис. Вычислить $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$, если $|\bar{a}| = \dfrac{2}{3}, |\bar{b}| = \dfrac{5}{2}, |\bar{c}| = 2{,}1$.

36. Вектор $\bar{c}$ ортогонален векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, угол между которыми равен 30^{o}. Вычислить $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$, если $|\bar{a}| = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, |\bar{b}| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, |\bar{c}| = 12\sqrt{6}$.

37. Докажите тождество $(\bar{a} + \bar{b})(\bar{b} + \bar{c})(\bar{c} + \bar{a}) = 2\overline{abc}$.

38. Даны три вектора $\bar{a} = (1; -1; 3), \bar{b} = (-2; 2; 1), \bar{c} = (3; -2; 5)$. Вычислить $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ и определить ориентацию тройки векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$.

39. Выяснить, какая из следующих троек векторов является компланарной:

а) $\bar{a} = (2; 3; -1), \bar{b} = (1; -1; 3), \bar{c} = (1; 9; -11)$;

б) $\bar{a} = (3; 2; -1), \bar{b} = (2; 1; 2), \bar{c} = (3; -1; -2)$;

в) $\bar{a} = (2; -1; 2), \bar{b} = (1; 2; -3), \bar{c} = (3; -4; 7)$.

40. Докажите, что четыре точки A(1; 2; –1), B(0; 1; 5), C(–1; 2; 1), D(2; 1; 3) лежат в одной плоскости.

41. Вычислить объем треугольной пирамиды, вершины которой: A(2; –1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; –1), D(4; 1; 3).

42. Даны вершины треугольной пирамиды: A(2; 3; 1), B(4; 1; –2), C(6; 3; 7), D(–5; –4; 8). Найти длину ее высоты, опущенной из вершины D.

43. Объем треугольной пирамиды равен 5, три ее вершины находятся в точках A(2; 1; –1), B(3; 0; 1), C(2; –1; 3). Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси ординат.

44. Построить прямую, заданную уравнением $2x - y - 4 = 0$, и записать уравнение этой прямой в отрезках.

45. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точку A(4; 3) перпендикулярно вектору $\overline{n} = (1; -2)$.

46. Найти уравнение прямой с угловым коэффициентом, если её угловой коэффициент равен $k = \frac{2}{3}$ и известно, что прямая проходит через точку C(0; –1).

47. Найти каноническое и параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку A(–1; 2) параллельно вектору $\overline{s} = (3; -4)$.

48. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точки A(–3; 4) и B(1; –2).

49. Найти точку пересечения двух прямых $3x - 4y - 29 = 0$ и $2x + 5y + 19 = 0$ и угол между ними.

50. Выяснить взаимное расположение прямых:

а) $x\sqrt{3} - y + 1 = 0,\ 3x - y\sqrt{3} - 1 = 0$;

б) $x\sqrt{3} - y + 1 = 0,\ x + y\sqrt{3} - 1 = 0$;

в) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1,\ y = \frac{x}{\sqrt{2}} - 1$; г) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1,\ y = -x\sqrt{2} + 1$;

д) $\frac{x-1}{3} = y + 1, \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}, t \in R$;

е) $\frac{x-1}{4} = \frac{y+6}{3}, \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}, t \in R$.

51. Найти все виды уравнений прямой $4x - 3y + 12 = 0$, ее угловой коэффициент, нормальный и направляющий векторы, точки пересечения с координатными осями, и постройте её чертеж на координатной плоскости.

52. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M (–2; 0): а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.

53. Какие из следующих точек лежат на плоскости $2x - 3y - 4z + 5 = 0$: A(1; 2; 3), B(1; 1; 1), C(3; 5; –1)?

54. Найти какую-нибудь точку, лежащую на данной плоскости: а) $x + 5y - z = 0$; б) $2x - y - 2z + 5 = 0$; в) $y - 3 = 0$.

55. Найти уравнение плоскости $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ в отрезках, точки её пересечения с координатными осями, и построить чертеж её части в первом октанте.

56. Найти нормальный вектор плоскости:

а) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$; б) $z = 2x - 3y$; в) $z - 2x = 3$;

г) $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 1$; д) $2y + 1 = 0$; е) $z = 2$; ё) $x - 1 = 0$.

57. Написать уравнения координатных плоскостей, и выписать координаты их нормальных векторов.

58. Найти общее уравнение плоскости $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ и её нормальный вектор.

59. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M(2; 1; –1), и перпендикулярной вектору $\overline{n} = (5; 0; 3)$.

60. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M(2; 1; –1), и параллельной плоскости $2x - y + z - 1 = 0$.

61. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M(3; 4; –5), и параллельной векторам $\bar{a}_1 = (3; 1; -1)$ и $\bar{a}_2 = (1; -2; 1)$.

62. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(2; –1; 3) и B(3; 1; 2) параллельно вектору $\bar{a} = (3; -1; 4)$.

63. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: A(3; –1; 2), B(4; –1; –1) и C(2; 0; 2).

64. Найти угол между плоскостями: а) $3y - z = 0,\ 2y + z = 0$;

б) $6x + 3y - 2z = 0,\ x + 2y + 6z - 12 = 0$;

в) $3x + 2y + z = 0,\ 6z - 2x - 4 = 0$.

65. Определить взаимное расположение двух плоскостей:

а) $2x - 3y + 5z - 7 = 0,\ \ 2x - 3y + 5z + 3 = 0$;

б) $3x - y - 2z - 5 = 0,\ \ 2x - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z - \frac{10}{3} = 0$;

в) $2x - 5y + 1 = 0,\ x + y + 2z - 3 = 0$.

66. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(2; 0; –3), и параллельной: а) вектору $\bar{a} = (2; -3; 5)$; б) оси Ox; в) оси Oy; г) оси Oz; д) прямой $x = 3t - 1,\ y = -2t + 3,\ z = 5t + 2$.

67. Составить уравнение движения точки, которая двигается прямолинейно и равномерно из точки M(3; –1; –5) в направление вектора $\bar{s} = (-2; 6; 3)$ со скоростью $v = 21$.

68. Найдите параметрическое уравнение прямой:

а) $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$; б) $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z-1}{0}$.

69. Найдите каноническое уравнение прямой:

а) $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 4 + 7t \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = t \\ y = -2 \\ z = 1 - t \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$.

70. Составить каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точки: а) (1; –2; 1), (3; 1; –1); б) (3; 1; 0), (1; 0; –3).

71. Найдите острый угол между прямыми:

а) $x - 3 = -y - 2 = \frac{z}{\sqrt{2}}$ и $x + 2 = y - 3 = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$;

б) $x = 3t - 2,\ y = 0,\ z = 3 - t$ и $x = 2t - 1,\ y = 0,\ z = t - 3$.

72. Найдите координаты точки пересечения прямых: $x = 2t - 3,\ y = 3t - 2,\ z = 6 - 4t$ и $x = t + 5,\ y = -4t - 1,\ z = t - 4$.

73. Найдите значение параметра m, при котором прямые $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-3}{m} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$ пересекаются, и вычислите координаты их общей точки.

74. Задайте прямую $x = 2t - 3,\ y = 3t - 2,\ z = 6 - 4t$ пересечением двух плоскостей.

75. Выясните взаимное расположение прямых:
$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ и $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$.

76. Найдите каноническое уравнение прямой:
а) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x+y-4z-8=0 \end{cases}$.

77. Найдите расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

78. Выясните взаимное расположение прямой и плоскости: а) $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ и $x-2y+6z-2=0$;

б) $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$ и $x-2y+6z-2=0$;

в) $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$ и $3x-2y+6z-2=0$;

79. Найдите угол между прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{6}$ и плоскостью $x+2y-3=0$.

80. Найдите точку встречи прямой $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{1}$ с плоскостью $3x-2y+6z+18=0$.

81. Найдите точки пересечения плоскости $3x-2y+6z+18=0$ с координатными осями.

82. Найдите каноническое уравнение прямой, проходящую через точку A(3; 0; –1), и перпендикулярную плоскости $3x-2y-z-4=0$.

83. Найдите проекцию точки M(–4; 2; –1) на плоскость $x+2y-z+3=0$.

84. Найдите общее уравнение плоскости, проходящей через точку A(1; 2; –1), и перпендикулярную прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=z$.

85. Убедитесь, что прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ параллельна плоскости $x-2y-2z+1=0$ и найдите расстояние между ними.

86. Составить уравнение пучка плоскостей, если известны уравнения двух плоскостей из этого пучка: $x-2y+z-7=0$ и $2x+2y-z+2=0$.

87. Найдите уравнение оси пучка плоскостей $\alpha(x+y-2)+\beta(y-z+1)=0$.

88. Найдите уравнение пучка плоскостей, осью которого служит прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-2}$.

89. Написать уравнение связки плоскостей, если известны три плоскости из этой связки: $x-2y+z-7=0$, $2x+2y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$.

90. Доказать, что плоскости $x-2y+z-7=0$, $2x+2y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$ принадлежат одной связке плоскостей и найти центр связки.

91. Найти уравнение связки плоскостей с центром связки в точке (5; –1; –4).

Список литературы

1. Атанасян, С. Л. Сборник задач по геометрии Ч.1./ С. Л. Атанасян, В. И. Глизбург / Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. вузов – М.: Эксмо, 2007. – 256 с.
2. Базылев, В.Т. Сборник задач по геометрии/ В. Т. Базылев, К. И. Дуничев и др./ Учеб пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1980. – 240 с.
3. Банникова, Т. М. Аналитическая геометрия. Практикум по решению задач: учеб.-метод. пособие / Т. М. Банникова, Н. А. Баранова, Д. А. Шарычева. – Ижевск: Удмуртский университет, 2014. – 90 с.
4. Банникова, Т. М. Методическое пособие по курсу «Алгебра и геометрия. Модуль геометрия»: электрон. учеб.-метод. пособие / Т. М. Банникова, Н. А. Баранова. – Ижевск: Удмуртский университет, 2015.
5. Головизин, В. В. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб.-метод. пособие. Ч. 1 / В. В. Головизин. – Ижевск: [Удмуртский университет], 2014. – 320 с.
6. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справ. пособие к решению задач / А. А. Гусак. - 4-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2006. – 287 с.
7. Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов // Учебн. пособие. – 13-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 239 с.
8. Ильин, В. А. Аналитическая геометрия: учеб. для вузов по спец. «Приклад. Математика» рек. МО РФ / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. - 7-е изд., стер. - М.: Физматлит, 2006. – 223 с.
9. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник / Учеб. пособие для вузов.– М.: Наука. Физматлит, 1998. – 240 с.
10. Кремер, Н.Ш. Линейная алгебра: учеб. и практикум для акад. бакалавриата: учеб. для вузов по экон. спец. / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман, Финансовый ун-т при Правительстве РФ; под ред. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., испр. и доп. - Москва: Юрайт, 2014. – 307 с.
11. Попов, В.Л. Аналитическая геометрия: учебник и практикум для академического бакалавриата / В. Л. Попов, Г. В. Сухоцкий. – 2-е изд., пер. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 232 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-03003-7.
12. Привалов, И. И. Аналитическая геометрия: учебник для вузов / И. И. Привалов. – 40-е изд., стер. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 233 с. – (Серия: Бакалавр и специалист). – ISBN 978-5-534-01262-0.
13. Резниченко, С.В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах в 2 ч. Часть 1: учебник и практикум для академического бакалавриата / С. В. Резниченко. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 302 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-02936-9.
14. Резниченко, С. В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах в 2ч. Часть 2: учебник и практикум для академического бакалавриата / С. В. Резниченко. — 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 288 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-02938-3.
15. Франгулов, С. А. Сборник задач по геометрии / С. А. Франгулов, П. И. Совертков и др./ Учеб. пособие для студентов пед. вузов.– М.: Просвещение, 2002. – 244 с.

Учебное издание

Татьяна Михайловна Банникова,
Наталья Анатольевна Баранова

Аналитическая геометрия в задачах и рисунках для иностранных студентов ИМИТиФ

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция
Компьютерная верстка: А.Ж. Фаттахова

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел. : + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru