Сметанина Л. П., Максимова О. В.

РЯДЫ

Ижевск
2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»

Институт математики, информационных технологий и физики

Кафедра математического анализа

Сметанина Л. П., Максимова О. В.

РЯДЫ

Методические рекомендации

Ижевск
2023

УДК 517.521
ББК 22.161.3
С502

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензенты: канд.физ.-мат. наук, доцент каф. дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «УдГУ» Т. С. Быкова,

канд. физ-мат. наук, ст. науч. сотрудник УдмФИЦ УрО РАН А.Ю. Дроздов.

Сметанина Л. П., Максимова О. В.
С502 Ряды: метод. рек. : [Электрон. ресурс] - Ижевск : Удмуртский университет, 2023. –40 с.

В методическом пособии приведены краткие теоретические сведения, изложена методика исследования числовых и функциональных рядов, представлены индивидуальные работы.

Данное пособие предназначено для студентов уровня бакалавриата всех направлений и всех форм обучения Института нефти и газа им. М.С.Гуцериева и Института экономики и управления в Удмуртском государственном университете.

УДК 517.21
ББК 22.161.3

© Л. П. Сметанина, О. В. Максимова, 2023
© ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», 2023

Содержание

Введение **4**

1 Необходимые сведения **5**

2 Основные определения **7**

3 Признаки сходимости **11**

4 Знакопеременные и знакочередующиеся ряды **18**

5 Функциональные ряды **22**

6 Степенные ряды **22**

7 Ряд Тейлора **25**

8 Тестовые задания **27**

9 Варианты индивидуальных заданий **30**

Список литературы **40**

Введение

Данное методическое пособие подготовлено преподавателями кафедры математического анализа и отражает многолетний опыт при проведении занятий и организации самостоятельной работы студентов Института нефти и газа им. М.С.Гуциериева и Института экономики и управления в Удмуртском государственном университете.

Пособие предназначено для методического обеспечения раздела «Теория рядов» курса «Высшая математика».

В данном пособии содержатся основные теоретические сведения и примеры, подробно изложена методика работы с числовыми и степенными рядами. Пособие содержит тестовые задания и варианты индивидуальных заданий.

Индивидуальные задания могут быть использованы для организации работы на практических занятиях, а также как индивидуальные домашние задания.

Пособие предназначено обеспечить студентов наглядным вспомогательным материалом и индивидуальными заданиями при изучении курса «Высшая математика» и может быть использовано для студентов других нематематических направлений УдГУ.

1 Необходимые сведения

$\boxed{I}$ Говорят, что бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to x_0$ ($f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$), если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Пример. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, $g(x) = \sqrt[4]{x}$; проверить эквивалентность $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{\sqrt{x} + 1}}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{x \to 0} \sqrt{\sqrt{x} + 1} = 1.$$

Значит, $f(x) \sim g(x)$ при $x \to 0$.

$\boxed{II}$ Говорят, что $f(x)$ и $g(x)$ одного порядка малости при $x \to x_0$, ($f(x) \asymp g(x)$, $x \to x_0$), если существует конечный, не равный нулю предел отношения этих функций.

Пример. $f(x) = \sqrt{x} - 1$, $g(x) = x - 1$, при $x \to 1$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно $f(x) \asymp g(x)$ при $x \to 1$.

$\boxed{III}$ **Таблица эквивалентных бесконечно малых функций**

$$\sin x \sim x, \quad x \to 0$$
$$\operatorname{tg} x \sim x, \quad x \to 0$$
$$\arcsin x \sim x, \quad x \to 0$$
$$\operatorname{arctg} x \sim x, \quad x \to 0$$
$$e^x - 1 \sim x, \quad x \to 0$$
$$\ln(1 + x) \sim x, \quad x \to 0$$
$$a^x - 1 \sim x \ln a, \quad x \to 0$$
$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \to 0$$
$$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad x \to 0$$

Понятие бесконечно малых функций можно перенести на числовые последовательности.

Примеры.

1) $\sin\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$, $n \to \infty$

2) $\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \to \infty$

3) $1 - \cos\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{2n^4}$, $n \to \infty$

4) $\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) \sim \dfrac{1}{n+1}$, $n \to \infty$

$\boxed{IV}$ Число e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$\boxed{V}$ Формулой Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

удобно пользоваться при исследовании сходимости степенных рядов на концах интервалов.

$\boxed{VI}$ Полезно использовать пределы:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)}, \quad p(n) - \text{многочлен}$$

(доказываются с использованием правила Лопиталя.)

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5 + n^4 + 1} = 1$.

$\boxed{VII}$ **Эталонные ряды**, используемые для исследования сходимости ряда:

1) Ряд Дирихле (обобщенный гармонический ряд) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Ряд сходится, если $\alpha > 1$, расходится, если $\alpha \leqslant 1$.

2) Геометрический ряд (геометрическая прогрессия) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

Ряд сходится, если $|q| < 1$.

2 Основные определения

Числовым рядом называется выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где a_n — **общий** или n-ый член ряда.

Сумма $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ называется **n-ой частичной суммой** ряда.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **сходящийся**, а S называется **суммой** ряда.

Если последовательность S_n не имеет конечного предела, ряд называется **расходящимся**.

Пример 1. Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$.

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

1) Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$, $\quad S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$.

<u>Замечание.</u> Сумма геометрической прогрессии

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Ряд сходится.

2) Если $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ и $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Ряд расходится.

3) Если $q = 1$, то $S_n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ слагаемых}} = n, \quad S_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Ряд тоже расходится.

4) Если $q = -1$, то $S_n = 1$ при нечетном n, $S_n = 0$ при четном n, следовательно S_n не имеет предела.

Ряд расходится.

Пример 2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$.

Выпишем общий член ряда: $a_n = \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$.

Разложим дробь в сумму простейших дробей:

$$\frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} = \frac{A(2n+1)+B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Приравниваем числители, так как знаменатели одинаковые:

$4 = (2A+2B)n + (A-B)$.

Составляем систему для определения A и B, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n

$$\begin{cases} 2A+2B=0, \\ A-B=4. \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем $A=2$, $B=-2$.

Следовательно, $a_n = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}$.

Представляя каждый член ряда в виде суммы двух слагаемых, для n-ой частичной суммы получаем выражение:

$$S_n = \frac{4}{1\cdot 3} + \frac{4}{3\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} =$$
$$= \left(2-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}-\ldots-\frac{2}{2n-1}\right) + \left(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}\right) =$$
$$= 2 - \frac{2}{2n+1}.$$

Тогда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \frac{2}{2n+1}\right) = 2$.

Рассмотрим еще один способ нахождения суммы этого ряда

$$S_1 = \frac{4}{1\cdot 3} = \frac{4}{3}$$
$$S_2 = \frac{4}{1\cdot 3} + \frac{4}{3\cdot 5} = \frac{8}{5}$$
$$S_3 = \frac{4}{1\cdot 3} + \frac{4}{3\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 7} = \frac{12}{7}$$

Устанавливаем предполагаемую закономерность: $S_n = \dfrac{4n}{2n+1}$.

Справедливость устанавливаем, используя метод математической индукции.

1) База индукции: при $n = 1$ формула верна.

2) Индукционный шаг: предполагаем, что формула верна для некоторого $n = k$, $S_k = \dfrac{4k}{2k+1}$.

3) Покажем, что формула верна для $n = k + 1$

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{4k}{2k+1}^{\lfloor 2k+3} - \frac{4}{(2k+1)(2k+3)} =$$
$$= \frac{8k^2 + 12k + 4}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{4(2k^2 + 3k + 1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{4(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} =$$
$$= \frac{4(k+1)}{2(k+1)+1}.$$

Делаем вывод, что формула справедлива для всех n.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cancel{n}}{\cancel{n}\left(2 + \boxed{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)} = 2.$$

Утверждение 1. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и его сумма равна S, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ и его сумма равна $c \cdot S$.

Утверждение 2. Если сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (сумма $\overline{S}$) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (сумма $\overline{\overline{S}}$), то сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ и их суммы $\overline{S} + \overline{\overline{S}}$; $\overline{S} - \overline{\overline{S}}$ соответственно.

Пример 3. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5 \cdot 3^n + 2^{2n}}{6^n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^n + 2^{2n}}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(5 \cdot \frac{3^n}{6^n} + \frac{2^{2n}}{6^n} \right) = 5 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$, $b_1 = \frac{1}{2}$ и $q = \frac{1}{2}$.

$$S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$\left(\frac{1}{2} \right)^n \to 0$ при $n \to \infty$, $\quad S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = 1$.

Для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$, $b_1 = \frac{2}{3}$ и $q = \frac{2}{3}$.

$$S_n = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{\frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)}{1 - \frac{2}{3}}$$

$\left(\frac{2}{3} \right)^n \to 0$ при $n \to \infty$, $\quad S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = 2$.

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^n + 2^{2n}}{6^n} = 5 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 5 \cdot 1 + 2 = 7$$

согласно утверждениям 1, 2.

3 Признаки сходимости

Необходимый признак сходимости ряда

Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

1) Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд может как сходиться, так и расходиться. В этом случае признак ответа о сходимости ряда не дает.

Необходимый признак сходимости справедлив для числовых рядов любого вида.

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+3}{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{n+1} = 1 \neq 0$. Ряд расходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{n^2+1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n^2+1} = 0$. Признак ответа не дает.

Признак Даламбера

Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами.

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = d$, то

при $d < 1$ ряд сходится,

при $d > 1$ ряд расходится,

при $d = 1$ признак Даламбера ответа не дает.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n \cdot n!}{(2n)!}$.

$$a_n = \frac{5^n \cdot n!}{(2n)!}, \qquad a_{n+1} = \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2n+2)!},$$

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot (2n)!}{(2n+2)! \cdot 5^n \cdot n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot (n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\cancel{n}\left(1 + \boxed{\frac{1}{n}}^{\to 0}\right)}{\cancel{n}^2_n \left(2 + \underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\to 0}\right)\left(2 + \underbrace{\boxed{\frac{2}{n}}}_{\to 0}\right)} = 0 < 1$$

ряд сходится (по признаку Даламбера).

Признак Коши (радикальный)

Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами.

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$, то

при $k < 1$ ряд сходится,

при $k > 1$ ряд расходится,

при $k = 1$ признак Коши ответа не дает.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 \left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{5n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(3 + \boxed{\frac{1}{n}}^{\to 0}\right)}{\cancel{n}\left(5 + \underbrace{\boxed{\frac{3}{n}}}_{\to 0}\right)} = \frac{3}{5} = k < 1$$

ряд сходится (по признаку Коши).

(Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = 1$).

Первый признак сравнения Рассмотрим два ряда с неотрицательными (положительными) членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2).$$

Если $a_n \leqslant b_n$ и ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1).

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}}$.

$$a_n = \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^9}} < \frac{n}{\sqrt[4]{n^9}} = \frac{1}{n^{5/4}} = b_n$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$ эталонный ряд с $\alpha = \frac{5}{4} > 1$ сходится $\Longrightarrow$ сходится исходный ряд по первому признаку сравнения.

Второй признак сравнения Рассмотрим два ряда с неотрицательными (положительными) членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2).$$

Если $a_n \geqslant b_n$, и ряд (2) расходится, то расходится и ряд (1).

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+3}}{n^2(3+\sin n)}$.

$$-1 \leqslant \sin n \leqslant 1; \quad 2 \leqslant 3 + \sin n \leqslant 4$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3+3}}{n^2(3+\sin n)} \geqslant \frac{n^{3/2}}{n^2 \cdot 4} = \frac{1}{4n^{1/2}} = b_n$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ эталонный ряд с $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ расходится $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^{1/2}}$ расходится. Следовательно, расходится исходный ряд по второму признаку сравнения.

Третий (предельный) признак сравнения Рассмотрим два ряда с неотрицательными (положительными) членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2).$$

Если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, или $a_n \asymp b_n$ при $n \to \infty$, то оба ряда (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{(n^2+1)^3}$.

$$a_n = \operatorname{arctg} \frac{n}{(n^2+1)^3} \sim \frac{n}{(n^2+1)^3}, \qquad n \to \infty$$

(смотреть таблицу эквивалентных бесконечно малых)

$$\frac{n}{(n^2+1)^3} \sim \frac{1}{n^5}, \quad n \to \infty$$

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n^5}{(n^2+1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^6}\, 1}{\cancel{n^6} \cdot \left(1 + \underbrace{\boxed{\frac{1}{n^2}}}_{\to 0}\right)^3} = 1.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ сходится ($\alpha = 5 > 1$). Следовательно, сходится исходный ряд по третьему (предельному) признаку сравнения.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)^2}$.

$$a_n = \frac{n}{(2n+3)^2} \asymp \frac{1}{n} = b_n.$$

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n}{(2n+3)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\ 1}{\cancel{n^2} \cdot \left(2 + \boxed{\frac{3}{n}}_{\to 0}\right)^2} = \frac{1}{4}.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (гармонический ряд). Следовательно, расходится заданный ряд по третьему признаку сравнения.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3^n-2}$.

$$a_n = \frac{2n^2+1}{3^n-2} \sim \frac{2n^2}{3^n} = b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2+1)\cdot 3^n}{(3^n-2)\cdot 2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n} \cdot \cancel{n^2} \cdot \left(2 + \boxed{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\right)}{\cancel{3^n} \cdot \left(1 - \boxed{\frac{2}{3^n}}_{\to 0} \cdot 2\cancel{n^2}\right)} = 1.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{3^n}$ сходится.

Действительно, по признаку Коши $k = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$.

Следовательно, исходный ряд сходится по третьему предельному признаку сравнения.

Пример 4.

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2+3n-1}\right)$.

$$a_n=\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2+3n-1}$$

Упростим a_n, умножив и разделив на сопряженное

$$a_n=\frac{\left(\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2+3n-1}\right)\left(\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+3n-1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+3n-1}\right)}=$$

$$=\frac{3}{\left(\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+3n-1}\right)}=$$

$$=\frac{3}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)}\asymp\frac{1}{n}$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)\cdot 1}=3$

$\sum\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$ — расходится (гармонический) $\Longrightarrow$

$\sum\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}$ — расходится $\Longrightarrow$ исходный ряд тоже расходится.

ряд сходится по признаку Коши.

Интегральный признак сходимости ряда

Если функция $f(x)$ неотрицательна, непрерывна и убывает на $[a,\,+\infty)$, $a\geqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{n=a}^{\infty}f(n)$ и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)\,dx$ сходятся <u>или</u> расходятся одновременно.

В качестве эталонного ряда сравнения мы использовали ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Если $\alpha > 1$, ряд сходится, если $\alpha \leqslant 1$, то расходится.

Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, которая положительна и монотонна.

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{1}^{A} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{A \to +\infty} \left(x^{-\alpha+1}\right)\Big|_{1}^{A} = \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1.\right)$$

Очевидно, если $\alpha > 1$ предел конечный, при $\alpha < 1$ бесконечный.

Если $\alpha = 1$, то $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A \to +\infty} (\ln|x|)\Big|_{1}^{A} = \infty$. Интеграл расходится, значит и ряд расходится.

Пример.

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\,\ln^3(n+2)}$.

Функция $f(x) = \frac{1}{(x+2)\,\ln^3(x+2)}$ удовлетворяет необходимым условиям.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{(x+2)\,\ln^3(x+2)} = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{1}^{A} \frac{dx}{(x+2)\,\ln^3(x+2)} =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{1}^{A} \frac{d(x+2)}{(x+2)\,\ln^3(x+2)} = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{1}^{A} \frac{d\ln(x+2)}{\ln^3(x+2)} =$$

$$\lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{2\ln^2(x+2)}\right)\Big|_{1}^{A} = \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{2\ln^2(A+2)} + \frac{1}{2\ln^2 3}\right) = \frac{1}{2\ln^2 3}.$$

Так как интеграл сходится, то сходится и ряд.

4 Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n может принимать значения разных знаков, называется **знакопеременным**.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, при этом говорят, что он сходится **абсолютно**.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$ называется **знакочередующимся**.

Пример. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \cos n}{(n^2+2)\sqrt{n^2+n+1}}$.

Составляем ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\,|\cos n|}{(n^2+2)\sqrt{n^2+n+1}}$

$$a_n = \frac{n\,|\cos n|}{(n^2+2)\sqrt{n^2+n+1}} \leqslant \frac{n}{(n^2+2)\sqrt{n^2+n+1}} = b_n.$$

Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n^2+2)\sqrt{n^2+n+1}}$.

Применим для сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Этот ряд сходится.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \quad \cdot \quad n^2}{(n^2+2)\sqrt{n^2+n+1}\cdot 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}1}{\cancel{n^2}\left(1+\underbrace{\boxed{\frac{1}{n^2}}}_{\to 0}\right)\cdot \cancel{n}\cdot\sqrt{1+\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\to 0}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{n^2}}}_{\to 0}}} = 1$$

Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится по третьему (предельному) признаку сравнения, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по первому признаку сравнения, а исходный ряд сходится абсолютно.

Признак Лейбница

Рассмотрим знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, $(a_n > 0)$.

Пусть выполняются следующие условия:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится , так как не выполняется необходимый признак сходимости).

2) $a_{n+1} < a_n$

Тогда знакочередующийся ряд сходится условно.

Отметим, что сначала проверяют абсолютную сходимость знакочередующегося ряда.

Пример 1.

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

Составим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

По таблице эквивалентности $1 - \cos\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt[3]{n^2}} \asymp \frac{1}{n^{2/3}}$, $n \to \infty$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ — расходится

$\Longrightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 - \cos\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ расходится (третий признак сравнения).

Абсолютной сходимости нет.

Проверяем условия признака Лейбница:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n^{2/3}}=0,$

2) $1-\cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}<1-\cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}.$

Ряд сходится условно.

Пример 2. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\cos^2 n}.$

Рассмотрим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\cos^2 n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\cos^2 n}$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\cos^2 n}>\frac{1}{\sqrt{n}+1}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ — расходящийся $\left(\alpha=\dfrac{1}{2}<1\right).$

Таким образом ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$ расходится.

Следовательно, абсолютной сходимости нет.

Схема исследования сходимости знакочередующегося ряда

$\boxed{\text{знакочередующийся ряд}}$

$\downarrow$ находим предел модуля общего члена

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|}$

$\swarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ $\downarrow$ исследовать на абсолютную сходимость использовать признаки сравнения, Коши, Даламбера

$\searrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$ $\downarrow$ $\boxed{\text{ряд расходится}}$

$\swarrow$ в случае сходимости ряда $\downarrow$ $\boxed{\text{сходится абсолютно}}$

$\searrow$ в случае расходимости ряда $\downarrow$ исследовать на условную сходимость по признаку Лейбница

$\swarrow$ $\boxed{\text{сходится условно}}$

$\searrow$ $\boxed{\text{расходится}}$

5 Функциональные ряды

Пусть на множестве E задана последовательность функций $\{u_n(x)\}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **функциональным рядом**.

Этот ряд называется **сходящимся** в точке $x_0 \in E$, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ и **абсолютно сходящимся** в точке $x_0 \in E$, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|u_n(x_0)\right|$.

Множество точек $x \in E$, в которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **областью сходимости** этого ряда, а множество точек $x \in E$, в которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|u_n(x)\right|$ называется **областью абсолютной сходимости**.

6 Степенные ряды

Функциональные ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ (в частности, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$), $x_0 \in \mathbb{R}$, называются **степенными рядами**. Числа a_n называются **коэффициентами степенного ряда**.

Для всякого степенного ряда существует неотрицательное число R (может быть и $+\infty$), такое, что ряд сходится на интервале $(x_0 - R;\, x_0 + R)$.

Этот интервал называется **интервалом сходимости**, а число R — **радиусом сходимости** степенного ряда.

Если $R = 0$, ряд сходится только в точке a.

Если $R = +\infty$ ряд сходится на все числовой оси $(-\infty;\, +\infty)$.

Радиусы сходимости можно найти по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

Формулы применяют, если $a_n \neq 0$ при всех n.

Отдельно исследуют поведение ряда в точках $x_1 = x_0 + R$ и $x_2 = x_0 - R$.

Пример 1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

Составим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^n$$

По признаку Даламбера ряд будет сходиться для тех x, для которых будет выполняться неравенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$.

Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^{n+1} \cdot (2n-1)}{(2n+1) \cdot \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^n} = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1$$

$$\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < \frac{1-x}{1+x} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} < 1 \\ \frac{1-x}{1+x} > -1 \end{cases}$$

или: $|1-x| < |1+x| \quad \Longleftrightarrow \quad (1-x)^2 < (1+x)^2$.

Решая систему, получаем $x > 0$.

При $x > 0$ исходный ряд сходится абсолютно.

Исследуем сходимость при $x = 0$. Получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

Исследуем сходимость этого знакочередующегося ряда по признаку Лейбница:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n-1} = 0$ (выполняется);

2) $\dfrac{1}{2n-1} > \dfrac{1}{2n+1}$.

Следовательно, при $x = 0$ ряд сходится условно.

Таким образом, область сходимости ряда $x \in [0; +\infty)$

Пример 2.

Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\,(x-1)^n}{n^n}$.

Исследовать сходимость ряда на концах.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!} \cdot (n+1)^{n+1}}{n^n \cdot \underbrace{\cancel{(n+1)!}}_{(n+1)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

$R = e$; интервал сходимости $1 - e < x < 1 + e$.

Исследуем поведение ряда на концах:

$x = 1 + e \qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n \cdot n!}{n^n}$.

Воспользуемся формулой Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n}{n^n}\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{2\pi n}$.

Ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$).

$x = 1 + e \qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\,(-1)^n e^n}{n^n}$.

Абсолютной сходимости нет (рассмотрели только что). Нет и условной сходимости, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

Таким образом, область сходимости ряда $(1 - e; 1 + e)$

7 Ряд Тейлора

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в ней производные любого порядка.

Степенной ряд $f(x_0) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)$ называется **рядом Тейлора** функции $f(x)$ в точке x_0.

Если $x_0 = 0$, ряд называется **рядом Маклорена**.

Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена:

(1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$

(2) $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \ldots,$ $x \in (-\infty; +\infty)$

(3) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$ $x \in (-\infty; +\infty)$

(4) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - (n-1))}{n!} x^n, \quad x \in (-1; 1)$

В частности

$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n \cdot x^n + \ldots.$

(5) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n}, \quad x \in (-1; 1]$

Пример 1.

Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{3x+8}{(2x-3) \cdot (x^2+4)}$.

Разложим рациональную дробь в сумму простейших дробей:

$$\frac{3x+8}{(2x-3) \cdot (x^2+4)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$3x + 8 = Ax^2 + 4A + 2Bx^2 + 2Cx - 3Bx - 3C$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях

$$\begin{aligned} x^2 &: \qquad A + 2B = 0 \\ x^1 &: \qquad 2C - 3B = 3 \\ x^0 &: \qquad 4A - 3C = 8 \end{aligned}$$

Решаем систему, получаем $A = 2$, $B = -1$, $C = 0$.

Тогда $f(x) = \dfrac{3x+8}{(2x-3)\cdot(x^2+4)} = \dfrac{-2}{3\left(1-\frac{2x}{3}\right)} - \dfrac{x}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)}$.

Используем разложения

$\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ и $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$,

получим $f(x) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot x^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}$.

Пример 2.

Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \cos^2 x$.

Используем тригонометрическую формулу

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

Воспользуемся формулой (3).

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot (2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 - \frac{2\cdot x^2}{2!} + \frac{2^3 \cdot x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

8 Тестовые задания

1. Ряд называется сходящимся, если

1) Последовательность его частичных сумм имеет конечный предел

2) Предел общего члена ряда равен нулю

3) Последовательность его частичных сумм является бесконечно большой

2. Дан сходящийся ряд. При отбрасывании нескольких его ненулевых членов

1) Ряд останется сходящимся и его сумма не изменится

2) Ряд останется сходящимся и его сумма изменится

3) Ряд станет расходящимся

3. Определить второй член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{2}{6}$ 3) $\frac{2}{9}$ 4) $\frac{2}{27}$

4. Указать формулу общего члена ряда $\frac{1}{5} + \frac{2}{8} + \frac{3}{11} + \frac{4}{14} + \ldots$

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+1}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+2}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+3}$

5. Найти a_{n+1}, если $a_n = \frac{n^2-2}{5^n}$

1) $a_{n+1} = \frac{n^2+2n+1}{5^{n+1}}$

2) $a_{n+1} = \frac{n^2+2n-1}{5^{n+1}}$

3) $a_{n+1} = \frac{n^2+2n-1}{5^n}$

6. Найти a_{n+1}, если $a_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}$

1) $a_{n+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n+1)}$

2) $a_{n+1} = \dfrac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n+1)}$

3) $a_{n+1} = \dfrac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}$

7. Каким признаком сходимости следует воспользоваться для исследования на сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+8n}{n^4+5n^2-3}$

1) признак Коши радикальный

2) признак Даламбера

3) признак сравнения

4) признак Лейбница

5) необходимый признак

8. Каким признаком сходимости следует воспользоваться для исследования на сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n!}$

1) признак Коши радикальный

2) признак Даламбера

3) признак сравнения

4) признак Лейбница

5) необходимый признак

9. Вычислить $D = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ и сделать заключение о сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5n^3+2n+1}{4n^3}\right)^n$

1) $D = \dfrac{5}{4}$ расходится

2) $D = \dfrac{5}{4}$ сходится

3) $D = \dfrac{e}{2}$ сходится

10. Применив интегральный признак для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot (\ln n)^3}$, указать сходится или расходится ряд

1) расходится 2) сходится 3) неизвестно

11. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$

1) сходится всегда

2) расходится всегда

3) сходится при $|a| < 1$

4) сходится при $|a| > 1$

5) сходится при $|a| = 1$

12. Укажите верные утверждения, относящиеся к поведению обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

1) при $p = 1$ указанный ряд сходится

2) при $p < 1$ указанный ряд расходится

3) при $p > 1$ указанный ряд сходится

4) при $p < 1$ указанный ряд сходится

5) при $p = 1$ указанный ряд расходится

6) при $p > 1$ указанный ряд расходится.

13. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{7^n} \right)$

1) $S = \frac{1}{6}$ 2) $S = \frac{7}{6}$ 3) $S = 1$

9 Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1.

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n - 2}$

2. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \sin \frac{1}{3^n}$

3. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{3n}$

4. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{5^n}$

5. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \cdot \ln n}$

6. Найти область сходимости степенного ряда, указать радиус сходимости, исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n(x-5)^{n+1}}{(n+1)!}$$

7. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$

8. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{9}{20 - x - x^2}$

Вариант 2.

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2+3n-2}$

2. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+4}{n^2+3}\right)$

3. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n \cdot (3n+1)}$

4. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n^2}{n^4+1}$

5. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{4^n}$

6. Найти область сходимости степенного ряда, указать радиус сходимости, исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n$$

7. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$

8. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{4}{12+x-x^2}$

Вариант 3.

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n(n-1)(n-2)}$

2. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{n}$

3. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$

4. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}$

5. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\cdot \ln^2 n}$

6. Найти область сходимости степенного ряда, указать радиус сходимости, исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$$

7. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$$

8. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$

Вариант 4.

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}$

2. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^4+5}$

3. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$

4. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(5n)!}$

5. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 2^n}$

6. Найти область сходимости степенного ряда, указать радиус сходимости, исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{3^{n-1} \cdot n\sqrt{n}}$$

7. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n}$$

8. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{5-2x}{x^2-5x+6}$

Вариант 5.

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-12}$

2. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

3. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3+2n+3}$

4. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

5. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+2}{\sqrt{n^3}}$

6. Найти область сходимости степенного ряда, указать радиус сходимости, исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)\cdot(x+3)^n}{3^{n+1}}$$

7. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(x+2)^n}$$

8. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+x-6}$

Вариант 6.

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3n+1}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}$

2. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{n}{\sqrt[3]{n^7+1}}$

3. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot(n+1)!}{(3n)!}$

4. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\cdot\sqrt{\ln(n-2)}}$

5. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$

6. Найти область сходимости степенного ряда, указать радиус сходимости, исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)\cdot 3^n}$$

7. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

8. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\ln(1+x-6x^2)$

Вариант 7.

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+21n+10}$

2. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2\cdot(n+1)}$

3. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^5 \cdot \left(\frac{2n+5}{3n+4}\right)^n$

4. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}$

5. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

6. Найти область сходимости степенного ряда, указать радиус сходимости, исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{n+2}\right)^{n^2} \cdot x^n$$

7. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n(x+2)}$$

8. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{6}{8+2x-x^2}$

Вариант 8.

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2+3n-2}$

2. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin\frac{1}{n^2}$

3. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3+2n}}$

4. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$

5. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{tg}\frac{2}{n}$

6. Найти область сходимости степенного ряда, указать радиус сходимости, исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n^2}}{n^n}$$

7. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^n$$

8. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln(1+2x-8x^2)$

Вариант 9.

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}$

2. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}$

3. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$

4. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n^2}{n^4-n^2+1}$

5. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$

6. Найти область сходимости степенного ряда, указать радиус сходимости, исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3 \cdot (x+2)^{2n}}{2n+3}$$

7. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{(3x^2+8x+6)^n}$$

8. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{5}{6+x-x^2}$

Вариант 10.

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 - 5n - 6}$

2. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \cdot \sin \frac{\pi}{2n}$

3. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$

4. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{3^{2n}}$

5. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{\sqrt[4]{n^3}}$

6. Найти область сходимости степенного ряда, указать радиус сходимости, исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости6. Найти область сходимости степенного ряда, указать радиус сходимости, исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$$

7. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 - 6x + 12)^n}{4^n \cdot (n^2 + 1)}$$

8. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$

Список литературы

1. Конспект лекций по высшей математике : [в 2 ч.]. Ч. 2 / Д. Т. Письменный. - 7-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2011. - 251, [1] с. ; 70x100/16. - ISBN 978-5-8112-4125-5 (Ч. 2). - 978-5-8112-4000-5.

2. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин [и др.]. - Москва : Айрис Пресс, 2013. - 574, [1] с. : рис. ; 60x90/16. - (Высшее образование). - На обл. авт. не указаны. - ISBN 978-5-8112-5166-7..

3. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). 2 курс : [учеб. пособие] / К. Н. Лунгу, В. П. Норин, Д. Т. Письменный [и др.] ; под ред. С. Н. Федина. - 6-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2007. - 589, [1] с. ; 60x90/16. - ISBN 978-5-8112-2948-2.

4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа, Изд. 8-е, Москва : Наука. – 2005. - 416 с.

5. Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 2 [Электронный ресурс] : учебное пособие / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2009. — 384 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2255. — Загл. с экрана.

6. Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Том 1 [Электронный ресурс] : учебное пособие / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. — Москва : Физматлит, 2013. — 216 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/59697.

Учебное издание

Максимова Ольга Васильевна
Сметанина Людмила Петровна

РЯДЫ

Методические рекомендации

.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Ломоносова,4Б, каб. 021 .
Тел.: +7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru