Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра алгебры и топологии

А.А. Грызлов, Р.А. Головастов, Е.С. Бастрыков

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ СТОУНА НЕКОТОРЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2023

УДК 515.14 (0.75.8)
ББК 22.152.11я73
Г917

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник ОФХН ФТИ УдмФИЦ УрО РАН О.М. Немцова.

Грызлов А.А., Головастов Р.А., Бастрыков Е.С.

Г917 Топологические свойства пространств Стоуна некоторых булевых алгебр : учеб.-метод. пособие : [Электрон. ресурс]. – Ижевск : Удмуртский университет, 2023. – 35 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено студентам магистратуры направления подготовки 02.04.01 «Математика и компьютерные науки», программа 02.04.01.01 «Математическая кибернетика» для лучшего понимания материала при изучении профильных дисциплин. Пособие поможет преподавателям при работе со студентами при преподавании таких дисциплин, как: «Дополнительные главы топологии», «Теория конечных графов и ее приложения», «Методы моделирования поверхностей в 3D графике», «Избранные вопросы дискретной математики», «Вычислительные аспекты дискретной математики». Изучение данного материала предполагает углубленную подготовку студентов по дифференциальной геометрии и топологии.

УДК 515.14 (0.75.8)
ББК 22.152.11я73

© А.А. Грызлов, Р.А. Головастов,
Е.С. Бастрыков, 2023
© ФБГОУ ВО «Удмуртский
государственный университет», 2023

Оглавление

Введение **3**

1 **5**

1.1 Пространство Стоуна булевой алгебры. Основные понятия и факты. 6

1.2 Определение пространств Стоуна некоторых булевых алгебр. 9

2 **13**

2.1 Пространство $S\mathfrak{B}_{1,1}$. 14

2.2 Пространство $S\mathfrak{B}_{1,2}$. 19

2.3 Пространство $S\mathfrak{B}_{1,3}$. 26

2.4 Пространства $S\mathfrak{B}_{2,1}$, $S\mathfrak{B}_{2,2}$ и $S\mathfrak{B}_{2,3}$. 29

Литература **33**

Введение

Данное электронное учебно-методическое пособие по курсу «Дополнительные главы топологии» разработано для студентов магистратуры, обучающихся по программе 02.04.01.01 «Математическая кибернетика». Оно разработано для лучшего понимания материала при изучении топологических структур, нацелено дать представление о методах и результатах областей топологии и путях использования теоретико-множественных понятий и теорем при получении топологических результатов. Данное пособие должно способствовать более глубокому пониманию профильных дисциплин, таких как «Теория конечных графов и ее приложения», «Методы моделирования поверхностей в 3D графике», «Избранные вопросы дискретной математики», «Вычислительные аспекты дискретной математики». Представленный материал отражает современное состояние теории кардинальных инвариантов и теории бикомпактных расширений и может служить хорошей основой для самостоятельной научной работы в этих областях общей топологии. Развитие теории множеств во второй половине прошлого века оказало большое и плодотворное влияние на развитие математики в целом, и общей топологии, как науки, весьма тесно близкой к теории множеств. Совершенно естественно, результаты и методы теории множеств нашли применение в таких областях общей топологии, как теория кардинальных инвариантов и теория бикомпактных расширений дискретных пространств, наиболее бурное развитие которых пришлось на 70-90 годы прошлого века. Многие классические результаты математики приобрели новое звучание, стали прозрачнее и понятнее по своей природе после переложения их на геометрический язык. Топологический язык стал универсальным языком современной математики и всего естествознания в целом.

Понятие пространства Стоуна булевой алгебры имеет важное значение в теории бикомпактных расширений.

Максимальное бикомпактное расширение топологического простраства, называемое расширением Стоуна-Чеха, основано на конструкции пространства Стоуна. Особое место в теории бикомпактных расширений занимают максимальные бикомпактные расширения Стоуна-Чеха дискретных пространств, являющиеся пространствами Стоуна булевых алгебр подмножеств дискретных пространств.

Этим расширениям посвящены работы У. Рудин [25], З. Фролика [14, 15], М.Е. Рудин [22–24], К. Кунена [16–18], Я. ван Милла [19–21], В.И. Малыхина [7], А.А. Грызлова [5, 11, 12].

Развитие теории бикомпактных расширений вызвало потребность в рассмотрении и изучении бикомпактных расширений дискретных пространств, являющихся пространствами Стоуна других булевых алгебр.

М. Белл [10] построил пространство Стоуна булевой алгебры, для которого подпространство свободных ультрафильтров несепарабельно, но удовлетворяет условию Суслина. Это пространство является бикомпактным расширением счетного дискретного пространства.

Используя расширение М. Белла, Я. ван Милл [19] и А.А. Грызлов [11] доказали существование новых типов точек в пространстве $\beta\omega$, тем самым решив несколько важных проблем теории бикомпактных расширений.

В силу актуальности расширения М. Белла, для теории бикомпактных расширений, возникла задача подробного его изучения.

Исследованию расширения М. Белла посвящены работы А.А. Грызлова, Е.С. Бастрыкова и Р.А. Головастова [4, 6, 13, 26, 27]. В этих работах изучена внутренняя структура этого пространства, получены различные типы его точек и их свойства.

Доказано, что в расширении Белла существуют как сходящиеся последовательности, так и копии пространства $\beta\omega$.

Пространство, построенное М. Беллом, является пространством Стоуна булевой алгебры подмножеств множества

$$\mathfrak{N}_1 = \{f|n \colon n \subset \omega,\ f \in P_1\},$$

$$\text{где } P_1 = \{f \in \omega^\omega \colon 0 \leqslant f(k) \leqslant k+1 \text{ для всех } k \in \omega\}.$$

Здесь и далее под n в зависимости от контекста будем понимать как натуральное число, так и множество $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Булева алгебра этого пространства порождена семейством

$$B_{1,1} = \{C_\pi : \pi \in T_1\},$$

$$\text{где } T_1 = \{\pi \in \mathfrak{N}_1^\omega : dom\pi(n) = n+1 \text{ для всех } n \in \omega\}.$$

В работе рассмотренны множества

$$\mathfrak{N}_1 = \{f|n : n \subset \omega,\ f \in P_1\};$$

$$\mathfrak{N}_2 = \{f|n : n \subset \omega,\ f \in P_2\},$$

$$\text{где } P_2 = \{f \in \omega^\omega : 0 \leqslant f(k) \leqslant 1 \text{ для всех } k \in \omega\} = \{0,\ 1\}^\omega;$$

$$\mathfrak{N}_3 = \{f|n : n \subset \omega,\ f \in P_3\}, \text{ где } P_3 = \omega^\omega.$$

Отметим, что $\mathfrak{N}_2 \subseteq \mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}_3$.

Определим множества

$$T_i = \{\pi \in \mathfrak{N}_i^\omega : dom\,\pi(n) \leqslant n+1 \text{ для всех } n \in \omega\}\ (i = 1,\ 2,\ 3).$$

В качестве семейств, порождающих булевы алгебры мы рассматриваем следующие семейства

$$B_{1,i} = \{C_\pi : \pi \in T_i\},$$

$$B_{2,i} = \{C_s : s \in \mathfrak{N}_i\}\ (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Пространства Стоуна этих булевых алгебр обозначим $S\mathfrak{B}_{j,i}$ $(i = 1,\ 2,\ 3;\ j = 1,\ 2)$. Отметим, что $S\mathfrak{B}_{1,1}$— это пространство, построенное М. Беллом.

Рассматриваемые булевы алгебры представляют собой основные характерные варианты булевых алгебр подобного типа.

В работе рассмотренны следующие вопросы, выясняющие строение и свойства указанных пространств Стоуна.

Какова внутренняя структура указанных пространств Стоуна.

Каковы взаимосвязи этих пространств между собой.

Как связаны эти пространства с такими широко известными пространствами, как $\beta\omega$ и канторовым совершенным множеством.

Каким свойством обладают сходящиеся последовательности и копии пространсвта $\beta\omega$ в этих пространствах.

Какая взаимосвязь между открыто-замкнутыми подмножествами пространств и подмножествами гомеоморфными $\beta\omega$.

Какими необходимыми характеристиками можно описать множества, гомеоморфные $\beta\omega$.

Каковы кардинально-значные характеристики указанных пространств, каковы число Суслина и плотность подпространств свободных ультрафильтров.

Глава 1

В этой главе мы рассматриваем основные понятия простраств Стоуна булевых алгебр и некоторые их свойства.

В первом параграфе приводятся необходимые сведения о пространствах Стоуна булевых алгебр. Основные понятия взяты из [8]. Нами рассматриваются булевы алгебры на множестве всех подмножеств некоторого счетного множества.

Во втором параграфе мы рассматриваем счетное множество с различными частичными порядками на нем. На основе данных частичных порядков строятся различные булевы алгебры, как алгебры порожденные некоторыми семействами множеств, и определяются пространства Стоуна данных булевых алгебр.

Точками данных пространств, являются ультрафильтры на соответсвующих булевых алгебрах. Также в данном параграфе мы доказываем ряд фактов, справедливых для наших булевых алгебр, которые позволяют построить более удобные в работе базы соответсвующих пространств Стоуна.

1.1 Пространство Стоуна булевой алгебры. Основные понятия и факты.

Определение 1.1 Булевой алгеброй называется непустое множество $\mathfrak{B}$ с тремя операциями $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ удовлетворяющим следующим аксиомам:

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
3. $(A \cap B) \cup B = B$, $(A \cup B) \cap B = B$;
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
5. $(A \cap \overline{A}) \cup B = B$, $(A \cup \overline{A}) \cap B = B$.

Мы будем рассматривать булевы алгебры $\mathfrak{B} = \{ U \subseteq X \}$ в множестве $\exp X$ с теоретико множественными операциями объединение, пересечение и дополнение.

На множестве булевых алгебр из $expX$ можно ввести отношение порядка по включению, и соответственно говорить о наименьшем элементе. Заметим, что пересечение любого числа алгебр вновь будет алгеброй. Тогда для произвольного множества $G \subseteq expX$ существует наименьшая алгебра $\mathfrak{B}$, содержащая множество G. Очевидно $\mathfrak{B}$ может быть определено как пересечение всех алгебр, содержащих множество G.

Определение 1.2 Будем говорить, что алгебра $\mathfrak{B}$ порождается множеством G. Если $\mathfrak{B}$— наименьшая алгебра, содержащая множество G.

Для алгебры порожденной множеством справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.1 *Если $G \subseteq expX$ — непусто, тогда $A \subseteq X$ принадлежит алгебре $\mathfrak{B}$, порожденной G, в том и только в том случае, когда его можно представить в виде*

$$(1) \quad A = (A_{1,1} \cap \ldots \cap A_{1,r_1}) \cup (A_{2,1} \cap \ldots \cap A_{2,r_2}) \cup \ldots \cup (A_{s,1} \cap \ldots \cap A_{s,r_s}),$$

где или $A_{m,n} \in G$, или $\overline{A}_{m,n} \in G$ для любых m,n.

Доказательство. Заметим, что класс элементов вида (1) замкнут относительно операции объединения. По формулам Моргана, дополнение к элементу A также может быть представлено в виде (1). Тогда класс элементов вида (1) замкнут и относительно опреции дополнения, а этого достаточно, чтобы соответсвующий класс образовывал алгебру $\mathfrak{B}$, содержащую G.

С другой стороны, каждый элемент A вида (1) принадлежит любой алгебре, содержащей G. Поэтому $\mathfrak{B}$ является наименьшей алгеброй, содержащей G. □

Для определения пространства Стоуна нам необходимо ввести понятие фильтра и ультрафильтра.

Определение 1.3 Семейство ξ непустых элементов булевой алгебры $\mathfrak{B}$ называется *фильтром*, если выполнены условия:

1. если $A, B \in \xi$, то $A \cap B \in \xi$;
2. если $A \in \xi$ и $A \subseteq B$, то $B \in \xi$.

Определение 1.4 *Ультрафильтром* в булевой алгебре $\mathfrak{B}$ будем называть такой фильтр $\xi \subseteq \mathfrak{B}$, что он не содержится ни в одном отличном от ξ фильтре в булевой алгебре $\mathfrak{B}$.

Выделяются два основных типа ультрафильтров: фиксированные и свободные.

Определение 1.5 Ультрафильтр ξ будем называть *фиксированным* если $\cap\{A\colon A \in \xi\} \neq \varnothing$, в противном случае ультрафильтр называется *свободным*.

Определение 1.6 Булеву алгебру $\mathfrak{B} \subseteq expX$ будем называть приведенной, если для двух различных точек $x, y \in X$ найдется $A \in \mathfrak{B}$ такое, что $x \in A$ и $y \notin A$.

Для фиксированных ультрафильтров справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.2 *Если булева алгебра $\mathfrak{B} \subseteq expX$ является приведенной. Тогда каждый фиксированный ультрафильтр ξ на $\mathfrak{B}$ определяется одной точкой $x \in X$ и $\cap\{A\colon A \in \xi\} = \{x\}$.*

Доказательство. Предположим, что найдутся две различные точки $x, y \in \cap\{A\colon A \in \xi\}$. В силу приведенности $\mathfrak{B}$ найдется $A_x \in \mathfrak{B}$ такое, что $x \in A_x$ и $y \notin A_x$. Каждый элемент ξ содержит точку y, то есть $A_x \notin \xi$. Тогда система $\{A\colon A \in \xi\} \cup \{A_x\}$ является фильтром (все её элементы пересекаются по точке x), а это противоречит максимальности ξ. □

В дальнейшем мы будем рассматривать приведенные булевы алгебры.

Фиксированный ультрафильтр в точке $x \in X$ будем обозначать, как $\hat{x}$, а множество всех фиксированных ультрафильтров обозначим $\hat{X}$.

Определение 1.7 Пространством Стоуна $S\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{B}$ называется множество ультрафильтров в $\mathfrak{B}$ с топологией, задаваемой базой состоящей их открыто-замкнутых подмножеств $[A]$ следующего вида:

$$[A] = \{\xi \in S\mathfrak{B}\colon A \in \xi\}, \text{ для } A \in \mathfrak{B}.$$

Множество свободных ультрафильтров из $[A]$ будем обозначать $A^* = [A] \setminus \hat{A}$. Множество всех свободных ультрафильтров будем обозначать $S\mathfrak{B}^*$.

Определение 1.8 *Базисом* ультрафильтра ξ будем называть подсемейство $\sigma \subseteq \xi$ удовлетворяющее следующему условию: для произвольного $F \in \xi$ найдется $F' \in \sigma$ такое, что $F' \subseteq F$.

Отметим, что в пространстве Стоуна если σ базис ультрафильтра ξ, то семейство $\tilde{\sigma} = \{[F]\colon F \in \sigma\}$ является базой в точке ξ, как точке пространства Стоуна.

Теорема 1.1 [8] *Пространство Стоуна $S\mathfrak{B}$ является бикомпактным.*

Доказательство. Пусть $S\mathfrak{B}$ пространство Стоуна некоторой булевой алгебры $\mathfrak{B}$. Рассмотрим центрированную систему замкнутых множеств $\{F_r\colon r \in R\}$ в пространстве $S\mathfrak{B}$.

Тогда по определению топологии $S\mathfrak{B}$ для каждого $r \in R$ найдется набор $\{A_q\colon A \in \mathfrak{B}, q \in Q_r\}$ такой,что $F_r = \bigcap\limits_{q \in Q_r} [A_q]$. Получим центрированную систему множеств $\{[A_q]\colon q \in Q\}$, где $Q = \bigcup\limits_{r \in R} Q_r$.

Но тогда центрированной является и система $\{A_q\colon q \in Q\} \subseteq \mathfrak{B}$, а значит её можно дополнить до некоторого ультрафильтра $\xi \in \bigcap\limits_{q \in Q} [A_q] = \bigcap\limits_{r \in R} F_r$. □

Докажем некоторые свойства пространства Стоуна $S\mathfrak{B}$ произвольной булевой алгебры $\mathfrak{B} \subseteq expX$, необходимые в дальнейшем.

Предложение 1.3 *Если $U, V \subseteq X$, V — элемент булевой алгебры и $U \cap V = \varnothing$, тогда $[U] \cap [V] = \varnothing$.*

Доказательство. Поскольку $V \subseteq X$ — элемент булевой алгебры, то $U' = X \setminus V$ также является элементом булевой алгберы и при этом $U \subseteq U'$. Согласно определению топологии $[V]$ и $[U']$ состоят из ультрафильтров элементами которых, являются V и U' соответсвенно.

Так как $V \cap U' = \varnothing$, то нет ультрафильтров содержащих оба множества одновременно. Получаем $[U] \subseteq [U']$ и $[U'] \cap [V] = \varnothing$, тогда $[U] \cap [V] = \varnothing$. □

Предложение 1.4 *Если $U, V \subseteq X$ и V — элемент булевой алгебры, тогда $[U \cap V] = [U] \cap [V]$.*

Доказательство. Действительно, $U = (U \cap V) \cup (U \setminus V)$ и мы имеем, учитывая предложение 1.3,

$$[U] \cap [V] = [(U \cap V) \cup (U \setminus V)] \cap [V] = ([U \cap V] \cup [U \setminus V]) \cap [V] =$$
$$= ([U \cap V] \cap [V]) \cup ([U \setminus V] \cap [V]) = [U \cap V] \cup [(U \setminus V) \cap V] = [U \cap V].$$

□

Предложение 1.5 *Для любого открыто-замкнутого $U \subseteq S\mathfrak{B}^*$ найдётся $V \subseteq X$ такое, что $[V] \cap S\mathfrak{B}^* = U$.*

Доказательство. Так как U открытое множество, то для каждой точки $x \in U$ найдётся окрестность $Ox = [V_x]$ ($V_x \in \mathfrak{B}$) такая, что $Ox \cap S\mathfrak{B}^* \subseteq U$.

Таким образом, семейство

$$\lambda = \left\{ Ox \cap S\mathfrak{B}^* : x \in U \right\}$$

является открытым покрытием множества U.

С другой стороны, так как U замкнутое подмножество бикомпактного пространства $S\mathfrak{B}^*$, можно выделить λ' конечное подпокрытие λ

$$\lambda' = \big\{\, Ox_i \cap S\mathfrak{B}^* : i \leqslant n \,\big\}.$$

То есть

$$U = \cup\big\{\, [V_{x_i}] : i \leqslant n \,\big\} \cap S\mathfrak{B}^* = \big[\cup\big\{\, V_{x_i} : i \leqslant n \,\big\}\big] \cap S\mathfrak{B}^*.$$

Множество $V = \cup\big\{\, V_{x_i} : i \leqslant n \,\big\}$ есть элемент $\mathfrak{B}$ и $U = [V] \cap S\mathfrak{B}^*$. $\square$

1.2 Определение пространств Стоуна некоторых булевых алгебр.

Определим множества функций

$$P_1 = \{\, f \in \omega^\omega \colon 0 \leqslant f(k) \leqslant k+1 \text{ для всех } k \in \omega \,\},$$

$$P_2 = \{\, f \in \omega^\omega \colon 0 \leqslant f(k) \leqslant 1 \text{ для всех } k \in \omega \,\},$$

$$P_3 = \omega^\omega.$$

В качестве множеств на которых будем строить булевы алгебры возьмем сужения данных функций.

$$\mathfrak{N}_1 = \{\, f|_n : f \in P_1, n \subset \omega \,\},$$

$$\mathfrak{N}_2 = \{\, f|_n : f \in P_2, n \subset \omega \,\},$$

$$\mathfrak{N}_3 = \{\, f|_n : f \in P_3, n \subset \omega \,\}.$$

Каждое $\mathfrak{N}_i$ ($i = 1, 2, 3$) можно рассматривать как частично упорядоченное множество со следующим отношением порядка: для s, $t \in \mathfrak{N}_i$ считаем, что $s \leqslant t$, если t является продолжением s (то есть $t|_{dom\ s} = s$).

Для каждого $s \in \mathfrak{N}_1$ количество его продолжений на следующий шаг растет с ростом $dom\ s$. Для $s \in \mathfrak{N}_2$ количество его продолжений на следующий шаг всегда равно 2, а для $s \in \mathfrak{N}_3$ оно всегда счетно.

Для произвольного $s \in \mathfrak{N}_i$ ($i = 1, 2, 3$) определим

$$C_s = \{t \in \mathfrak{N}_i \colon t \text{ является продолжением } s\}.$$

Рассмотрим два класса булевых алгебр на множествах $\mathfrak{N}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Булевы алгебры первого класса определим на $\mathfrak{N}_i$ ($i = 1, 2, 3$) следующим образом.

Определим множество

$$T_i = \{\, \pi \in \mathfrak{N}_i^\omega : dom \pi(n) = n+1 \text{ для всех } n \in \omega \,\}.$$

Для каждого $\pi \in T_i$ ($i = 1, 2, 3$) обозначим

$$C_\pi = \cup\{\, C_{\pi(n)} : n \in \omega \,\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{B}_{1,i}$ ($i = 1, 2, 3$) булеву алгебру, порождённую семейством

$$B_{1,i} = \{\, C_\pi : \pi \in T_i \,\}.$$

Определим пространство $S\mathfrak{B}_{1,i}$ как пространство Стоуна булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,i}$ ($i = 1, 2, 3$).

Докажем несколько лемм общих для данных пространств.

Предложение 1.6 *Для каждого $s \in \mathfrak{N}_i$ справедливо $C_s \in \mathfrak{B}_{1,i}$ ($i = 1, 2, 3$).*

Доказательство. Пусть $s \in \mathfrak{N}_i$, докажем, что $C_s \in \mathfrak{B}_{1,i}$. Построим $\pi_0, \pi_1 \in T_i$ следующим образом: рассмотрим $f_0, f_1 \in P_2 \subseteq P_1 \subseteq P_3$ такие, что $f_j \equiv j$ ($j = 0, 1$). Определим

$$\pi_j(n) = \begin{cases} f_j|_{n+1}, & \text{для } n \neq \operatorname{dom} s - 1; \\ s, & \text{для } n = \operatorname{dom} s - 1, \end{cases} \qquad j = 0, 1.$$

Так как f_0 и f_1 различны, то, очевидно, ни одно продолжение $\pi_0(n)$ не может являться продолжением никакого $\pi_1(m)$ для $n, m \in \omega$, $n \neq dom\ s - 1$, $m \neq dom\ s - 1$.

Таким образом, пересечение $C_{\pi_0} \cap C_{\pi_1}$ состоит из элемента $\pi_0(dom\ s - 1) = \pi_1(dom\ s - 1) = s$ и всех его продолжений, то есть $C_{\pi_0} \cap C_{\pi_1} = C_s$.

Получаем, что $C_s \in \mathfrak{B}_{1,i}$. □

Предложение 1.7 *Для каждого $s \in \mathfrak{N}_i$ справедливо $\{s\} \in \mathfrak{B}_{1,i}$ ($i = 1, 2$).*

Доказательство. Поскольку для всякого $s \in \mathfrak{N}_i$ при $i = 1, 2$ количество продолжений его на следующий шаг конечно, то не трудно показать, что для всякого $s \in \mathfrak{N}_i$ справедливо

$$\{s\} = C_s \setminus \cup\{C_t \colon t \in \mathfrak{N}_i, s < t, dom\ t = dom\ s + 1\} \in \mathfrak{B}_{1,i}.$$

□

Таким образом подпространства фиксированных ультрафильтров $\hat{\mathfrak{N}}_1$ и $\hat{\mathfrak{N}}_2$ в пространствах Стоуна булевых алгебр $\mathfrak{B}_{1,1}$ и $\mathfrak{B}_{1,2}$ являются дискретными. Соответсвенно подпространства $\hat{\mathfrak{N}}_1$ и $\hat{\mathfrak{N}}_2$ можно отождествить с дискретными $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ соответсвенно, а сами пространства Стоуна $S\mathfrak{B}_{1,1}$ и $S\mathfrak{B}_{1,2}$ рассматривать как бикомпактные расширения счетных дискретных пространств $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$.

В пространстве $S\mathfrak{B}_{1,3}$ подпространство фиксированных ультрафильтров $\hat{\mathfrak{N}}_3$ не является дискретным.

Предложение 1.8 *Семейство*

$$\Big\{ \Big[\Big(\bigcap_{\pi \in T'} C_\pi \Big) \cap \Big(\bigcap_{\pi \in T''} \mathfrak{N}_i \setminus C_\pi \Big) \Big] \colon T' \subset T_i,\ T'' \subset T_i,\ |T'| < \omega,\ |T''| < \omega \Big\}$$

есть база пространства $S\mathfrak{B}_{1,i}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную окресность произвольной точки $x \in [A] \subseteq S\mathfrak{B}_{1,i}$, где $A \in \mathfrak{B}_{1,i}$. Точка x является ультрафильтром, состоящим из элементов булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,i}$.

Согласно предположению 1.1, каждый элемент A булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,i}$ представим в виде

$$A = (A_{0,0} \cap \ldots \cap A_{0,r_0}) \cup (A_{1,0} \cap \ldots \cap A_{1,r_1}) \cup \ldots \cup (A_{q,0} \cap \ldots \cap A_{q,r_q}),$$

где либо $A_{j,k} \in B_{1,i}$, либо $\overline{A_{j,k}} \in B_{1,i}$ для всех $k \leqslant r_j$, $j \leqslant q$. А значит найдётся $j \leqslant q$ такое, что $A_{j,0} \cap \ldots \cap A_{j,r_j}$ есть элемент ультрафильтра x и, следовательно,

$$x \in [(A_{j,0} \cap \ldots \cap A_{j,r_j})] \subseteq [A] = U_A.$$

□

Данные базы довольно громоздки и неудобны в работе. Нами были построены другие базы для данных пространств, которые описаны далее. Для их построения приведем ряд вспомогательных результатов.

Для произвольного $\pi \in T_i$ $(i = 1, 2, 3)$ и $M \subseteq \omega$ определим $C_{\pi|M} = \bigcup\limits_{n \in M} C_{\pi(n)}$.

Предложение 1.9 *Для всех $\pi \in T_i$ $(i = 1, 2, 3)$ и $M \subseteq \omega$ найдутся $\pi_1, \pi_2 \in T_i$ такие, что $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$.*

Доказательство. Пусть $M = \{k_1, k_2, \ldots, k_j, \ldots\}$. Построим π_1 и $\pi_2 \in T_i$ следующим образом. Для всех $0 \leqslant n < k_1$ опрелелим $\pi_1(n)$ как тождественный 0 на множестве n, а $\pi_2(n)$ как тождественная 1 на множестве n. Для $k_j \leqslant n < k_{j+1}$ определим $\pi_1(n)$ и $\pi_2(n)$ как произвольные продолжения $\pi(k_j)$ на n (при $n = k_j$ они будут совпадать с $\pi(k_j)$).

Из построения π_1 и π_2 вытекает требуемое свойство $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$. Следовательно $C_{\pi|M} \in B_{1,i}$ для произвольных $\pi \in T_i$ и $M \subseteq \omega$. □

Лемма 1.1 *Пусть $\{\pi_j \colon j \leqslant n\} \subseteq T_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $n \in \omega$. Тогда для семейства $\big\{ C_{\pi_j|M_j} : j \leqslant n \big\}$ верно следующее:*

$$\bigcap_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M_j} = \bigcup_{j \leqslant n} C_{\pi_j|M'_j}, \quad \textit{для некоторых } M'_j \subseteq M_j \ (j \leqslant n).$$

Доказательство. Докажем по индукции по n. Пусть $n = 1$. Построим множества M'_0 и M'_1 такие, что

$$C_{\pi_0|M_0} \cap C_{\pi_1|M_1} = C_{\pi_0|M'_0} \cup C_{\pi_1|M'_1}.$$

Определим

$$M'_0 = \big\{ k \in M_0 : \pi_0(k) \in C_{\pi_1|M_1} \big\},$$
$$M'_1 = \big\{ k \in M_1 : \pi_1(k) \in C_{\pi_0|M_0} \big\}.$$

Заметим, что для любых s и t из $\mathfrak{N}_i$, C_s либо содержит C_t, либо содержится в C_t (в частности, они могут быть равны), или эти множества не пересекаются. Отсюда следует, что

$$C_{\pi_0|M'_0} \cup C_{\pi_1|M'_1} = C_{\pi_0|M_0} \cap C_{\pi_1|M_1}.$$

Далее по индукции, предположим, что $\bigcap\limits_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M_j} = \bigcup\limits_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M'_j}$. Тогда

$$\Big(\bigcap_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M_j}\Big) \cap C_{\pi_{n+1}|M_{n+1}} = \Big(\bigcup_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M'_j}\Big) \cap C_{\pi_{n+1}|M_{n+1}} =$$
$$= \bigcup_{j\leqslant n} (C_{\pi_j|M'_j} \cap C_{\pi_{n+1}|M_{n+1}}) = \bigcup_{j\leqslant n} (C_{\pi_j|M''_j} \cup C_{\pi_{n+1}|M^j_{n+1}}) = \bigcup_{j\leqslant n+1} C_{\pi_j|M''_j},$$

где $M''_{n+1} = \bigcup\limits_{j\leqslant n} M^j_{n+1}$. □

Следствие 1.1 *Пусть $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,i}$ $(i = 1, 2, 3)$ и $x \in \big[\bigcap\limits_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M_j}\big]$, тогда найдётся π_{j_0} и $M'_{j_0} \subseteq M_{j_0}$ такие, что $x \in [C_{\pi_{j_0}|M'_{j_0}}] \subseteq \big[\bigcap\limits_{j\leqslant n} C_{\pi_j|M_j}\big]$.*

Определим

$$\Gamma_{1,i} = \Big\{ C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\pi\in T'} C_\pi : \pi \in T_i,\, T' \subset T_i,\, |T'| < \omega,\, M \subseteq \omega \Big\}\ (i = 1, 2, 3).$$

Заметим тот факт, что $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ можно представить в виде объединения двух множеств из $\Gamma_{1,1}$ и $\Gamma_{1,2}$ соответственно. Тогда как, в силу бесконечности $\{s \in \mathfrak{N}_3 \colon dom\ s = n\}$ для каждого $n \in \omega$, для $\mathfrak{N}_3$ это неверно. Поэтому определим еще $\Theta_{1,3} = \{\mathfrak{N}_3 \setminus (\bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi) : T' \subset T_3,\, |T'| < \omega\}$.

Теперь по предложению 1.9 и следствию 1.1 мы получаем

Теорема 1.2 *Семейства*

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{1,1} = \big\{ [U] : U \in \Gamma_{1,1} \big\}$$
$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{1,2} = \big\{ [U] : U \in \Gamma_{1,2} \big\}$$
$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{1,3} = \big\{ [U] : U \in \Gamma_{1,3} \cup \Theta_{1,3} \big\}$$

являются базами пространств $S\mathfrak{B}_{1,1}$, $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и $S\mathfrak{B}_{1,3}$ соответсвенно.

Теперь рассмотрим булевы алгебры второго типа на наших частично упорядоченных множествах $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{N}_3$, порожденные другими семействами множеств.

Обозначим $\mathfrak{B}_{2,i}$ булеву алгебру порожденную семейством множеств

$$B_{2,i} = \{C_s \colon s \in \mathfrak{N}_i\}.$$

Соответсвенно $S\mathfrak{B}_{2,i}$ пространство стоуна булевой алгебры $\mathfrak{B}_{2,i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Анналогично предложению 1.8 определяются базы пространств $S\mathfrak{B}_{2,i}$.

Предложение 1.10 *Семейство*

$$\Big\{ \Big[\Big(\bigcap_{s\in\mathfrak{N}'} C_s\Big) \cap \Big(\bigcap_{s\in\mathfrak{N}''} \mathfrak{N}_i \setminus C_{t_k}\Big)\Big] \colon \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}_i,\, \mathfrak{N}'' \subset \mathfrak{N}_i,\, |\mathfrak{N}'| < \omega,\, |\mathfrak{N}''| < \omega \Big\}$$

есть база пространства $S\mathfrak{B}_{2,i}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Доказательство данного предложения основывается на предположении 1.1 и повторяет доказательство предложения 1.8.

Построим другие базы данных пространств.

Предложение 1.11 *Если $\{s_j \colon j \leqslant n\} \subseteq \mathfrak{N}_i$, то $\bigcap\limits_{j\leqslant n} C_{s_j} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\{s_j \colon j \leqslant n\}$ является цепью.*

Доказательство. Непосредственно из определения C_s следует, что $C_s \cap C_t$ непусто, тогда и только тогда, когда s и t сравнимы (т.е. один является продолжением другого). Отсюда и следует данное предложение. □

Следствие 1.2 *Если $\bigcap\limits_{j\leqslant n} C_{s_j} \neq \varnothing$ для $\{s_j \colon j \leqslant n\} \subseteq \mathfrak{N}_i$, то $\bigcap\limits_{j\leqslant n} C_{s_j} = C_{s_{j_0}}$, где $dom\ s_{j_0} = \max\{dom\ s_j \colon j \leqslant n\}$.*

Определим

$$\Gamma_{2,i} = \Big\{ C_s \setminus \bigcup_{t\in\mathfrak{N}'} C_t : s \in \mathfrak{N}_i,\, \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}_i,\, |\mathfrak{N}'| < \omega, \Big\}\ (i = 1, 2, 3),$$

$$\Theta_{2,3} = \Big\{ \mathfrak{N}_3 \setminus \bigcup_{t \in \mathfrak{N}'} C_t \colon \mathfrak{N}' \subset\in \mathfrak{N}_3,\ |\mathfrak{N}'| < \omega, \Big\}.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3 *Семейства*

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{2,1} = \big\{ [U] : U \in \Gamma_{2,1} \big\}$$

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{2,2} = \big\{ [U] : U \in \Gamma_{2,2} \big\}$$

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_{2,3} = \big\{ [U] : U \in \Gamma_{2,3} \cup \Theta_{2,3} \big\}$$

являются базами пространств $S\mathfrak{B}_{2,1}$, $S\mathfrak{B}_{2,2}$ *и* $S\mathfrak{B}_{2,3}$ *соответсвенно.*

Глава 2

В данной главе рассматриваются свойства пространств Стоуна нескольких булевых алгебр. Основной упор делается на рассмотрение замыканий различных счетных подмножеств подпространств фиксированных ультрафильров исследуемых пространств Стоуна.

Первый параграф посвящен пространству $S\mathfrak{B}_{1,1}$ построенному М. Беллом. Доказано, что замыкания бесконечных антицепей из $\mathfrak{N}_1$ гомеморфно $\beta\omega$, а бесконечные цепи из $\mathfrak{N}_1$ являются сходящимися последовательностями. Также описаны предельные точки цепей и антицепей из $\mathfrak{N}_1$ в терминах центрированных систем множеств.

Во втором параграфе рассматривается пространство $S\mathfrak{B}_{1,2}$. Доказано, что оно вложимо в $S\mathfrak{B}_{1,1}$ в качестве нигде не плотного подмножества. Как и в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,1}$ замыкания бесконечных антицепей из $\mathfrak{N}_2$ гомеморфно $\beta\omega$, а бесконечные цепи из $\mathfrak{N}_2$ являются сходящимися последовательностями. Однако предельные точки цепей здесь являются изолированными точками подпространства свободных ультрафильтров, а замыкания антицепей являются открыто-замкнутыми копиями $\beta\omega$.

Основным результатом данного параграфа является теорема 2.15, дающая критерий такого подмножества $\mathfrak{N}_2$, замыкание которого является открыто-замкнутой копией $\beta\omega$. Также приведены пример подмножества $\mathfrak{N}_2$, замыкание которого является не открыто-замкнутой копией $\beta\omega$, и пример подмножества $\mathfrak{N}_2$, замыкание которого открыто-замкнуто, не содержит изолированных точек и не гомеоморфно $\beta\omega$.

Третий праграф посвящен пространству $S\mathfrak{B}_{1,3}$. Отличительной его чертой от предыдущих пространств является то, что фиксированный ультрафильтр в данном пространстве не является изолированной точкой, а множество свободных ультрафильтров является всюду плотным. Описаны точки данного пространства как ультрафильтры обладающие базисами определенного вида. Основными результатами для данного пространства являются теорема 2.21, дающая оценку числа Суслина подпространства свободных ультрафильтров $S\mathfrak{B}^*_{1,3}$, и теорема 2.22 о плотности $S\mathfrak{B}^*_{1,3}$.

В четвертом параграфе рассматриваются пространства $S\mathfrak{B}_{2,1}$, $S\mathfrak{B}_{2,2}$ и $S\mathfrak{B}_{2,3}$. Описаны точки пространства $S\mathfrak{B}_{2,3}$, как ультрафильтры обладающие базисами определенного вида. Установлено соотношение данных пространств с канторовым совершенным множеством. Доказано, что пространства $S\mathfrak{B}^*_{2,1}$, $S\mathfrak{B}^*_{2,2}$ и $S\mathfrak{B}_{2,3}$ гомеоморфны канторову совершенному множеству.

2.1 Пространство $S\mathfrak{B}_{1,1}$.

В данном параграфе расматривается $S\mathfrak{B}_{1,1}$, построенное Беллом [10]. Здесь приведены результаты Белла о том, что нарост $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ удовлетворяет условию Суслина, но не сепарабелен. Данные результаты доказаны Беллом на основании леммы о представлении булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,1}$ в виде счетного объединения 2-сцепленных семейств множеств.

Также приведены результаты о существовании в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,1}$ сходящихся последовательностей и открыто-замкнутых копий $\beta\omega$. Полученные результаты опубликованы в [26], [27].

Пространство $S\mathfrak{B}_{1,1}$ строилось Беллом, как пространство Стоуна булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,1}$ порожденной семейством

$$B_{1,1} = \{\, C_\pi : \pi \in T_i \,\}$$

Обозначим $\mathfrak{B}'_{1,1} = \{U \in \mathfrak{B}_{1,1} \colon |U| = \omega\,\}$.

Приведем основные результаты полученные Беллом, для данного пространства.

Теорема 2.1 [10] *$S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ не сепарабелно.*

Доказательство. Пусть $X = \{x_n \colon n \in \omega\} \subseteq S\mathfrak{B}^*_{1,1}$. Заметим, что для всех $n \in \omega$ выполнено

$$S\mathfrak{B}^*_{1,1} = \cup\{C^*_s \colon dom\ s = n+1\}.$$

Тогда для каждого $n \in \omega$ найдется $s_n \in \mathfrak{N}_1$ такое, что $x \in [C_{s_n}]$ и $dom\ s_n = n+1$. Тогда можно определить $\pi \in T_1$ следующим образом: $\pi(n) = s_n$.

Получаем $X \subseteq [C_\pi]$ и при этом $(\mathfrak{N}_1 \setminus C_\pi)^*$ является непустым открыто-замкнутым в $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ множеством, котрое не пересекается с X. □

Лемма 2.1 [10] *Алгебра $\mathfrak{B}_{1,1}$ является счетным объединением 2-сцепленных семейств.*

Доказательство. Покажем, что $\mathfrak{B}'_{1,1} = \{U \in \mathfrak{B}_{1,1} \colon |U| = \omega\}$ есть объединение счетного числа 2-сцепленных семейств. Для каждого $j \in \omega$ и $s \in \mathfrak{N}_1$, такого что $dom\ s \geqslant 2j-1$ определим

$$B(j,s) = \{U \in \mathfrak{B}'_{1,1} \colon \text{найдется конечное}\, K \subseteq T_1 \text{ и } L \in exp_j T_1, \text{ такое что}$$
$$s \in (\cap\{C_\pi \colon \pi \in K\}) \cap (\cap\{\mathfrak{N}_1 \setminus C_\pi \colon \pi \in L\}) \in \exp_\omega U\}.$$

Покажем, что каждое $B(j,s)$ является 2-сцепленным семейством.

Зафиксируем $j \in \omega$ и $s \in \mathfrak{N}_1$ такие, что $dom\, s \geqslant 2j-1$. Пусть $U_0, U_1 \in B(j,s)$. Тогда существует конечное $K_i \in T_1$ и $L_i \in exp_j T_1$ $(i = 0,\, 1)$, такие что

$$s \in D_i = (\cap\{C_\pi \colon \pi \in K_i\}) \cap (\cap\{\mathfrak{N}_1 \setminus C_\pi \colon \pi \in L_i\}) \in exp_\omega U_i\ (i = 0, 1).$$

Теперь построим $h \in P_1$ такое, что $\{h|_n \colon n \geqslant dom\, s\} \subseteq D_0 \cap D_1$.

Строить $h \in P_1$ будем по индукции по $n \geqslant dom\ s$. Пусть $h|_{dom\ s} = s$. По построению имеем $h|_{dom\ s} \in D_0 \cap D_1$.

Предположим, что мы определим $h|_n$ для $n \geqslant dom\, s$ так, что $h|_n \in D_0 \cap D_1$.

Определим $h|_{n+1}$ как продолжение $h|_n$ на $n+1$ так, что

$$h|_{n+1} \notin \{\pi(n) \colon \pi \in L_0 \cup L_1\}.$$

Это возможно, поскольку существует $n+2$ различных продолжений $h|_n$ на $n+1$, а $|L_0 \cup L_1| \leqslant 2j \leqslant n+1 < n+2$. Так что найдется требуемое продолжение $h|_n$ до $h|_{n+1}$.

Итак, $h \in P_1$ с нужным нам свойством $\{h|_n \colon n \geqslant dom\, s\} \subseteq D_0 \cap D_1$ построено, и следовательно, $|D_0 \cap D_1| = \omega$. Остается показать, что $\mathfrak{B}'_{1,1} = \cup\{B(j,s) \colon j \in \omega, dom\, s \geqslant 2j-1\}$. Это следует из того, что, во-первых, всякое бесконечное $U \in \mathfrak{B}_{1,1}$, $|U| = \omega$, содержит некоторое бесконечное множество D, являющееся пересечением элементов или дополнений элементов из $B_{1,1}$, и, во-вторых, всякое бесконечное подмножество $\mathfrak{N}_1$ содержит элементы со сколь угодно большими областями определения. □

Непосредственно из данной леммы получаем

Теорема 2.2 [10] *Пространство $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ удовлетворяет условию Суслина.*

Заметим что в доказательстве леммы 2.1 можно изменить условие накладываемое на s при определении $B(j,s)$ заменив $2j-1 \leqslant dom\, s$ на $nj-1 \leqslant dom\, s$. Тогда $\mathfrak{B}'_{1,1}$ представимо в виде счетного объединения n-сцепленных семейств.

Рассмотрим свойтсва пространства $S\mathfrak{B}_{1,1}$, которые существенно отличают данное пространство от $\beta\omega$.

Теорема 2.3 *Пусть семейство $\{C_{s_i} : i \in \omega\}$ такое, что $\{s_i : i \in \omega\}$ — бесконечная строгая антицепь в $\mathfrak{N}_1$ и $X = \{x_i : i \in \omega\}$ такое, что $x_i \in [C_{s_i}]$. Тогда $[X]$ гомеоморфно $\beta\omega$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство $\lambda = \{\, C_{s_i} : i \in \omega \,\}$.

Для ультрафильтра $\xi \in \beta\omega \setminus \omega$ и $F \in \xi$ определим:

$$W_F = \cup\{\, C_{s_i} : i \in F \,\},$$
$$\lambda_\xi = \{\, W_F : F \in \xi \,\},$$
$$L_\xi = \cap\{\, [W_F] : W_F \in \lambda_\xi \,\}.$$

Легко видеть, что

1. $L_\xi \cap L_\eta = \varnothing$ для $\xi \neq \eta$;
2. $\{\, X \cap W_F : F \in \xi \,\}$ — ультрафильтр на множестве X;
3. $|L_\xi \cap [X]| = 1$.

Пусть $x_\xi = \cap\{\, [X \cap W_F] : F \in \xi \,\}$. Из конструкции следует, что $X \cup \{\, x_\xi : \xi \in \beta\omega \setminus \omega \,\} = [X]$ гомеоморфно $\beta\omega$. □

Заметим, что X^* нигде не плотно в $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$, поскольку $c(S\mathfrak{B}^*_{1,1}) = 2^\omega$.

Следствие 2.1 *Существует $A \subseteq \mathfrak{N}_1$ такое, что $[A]$ гомеоморфно $\beta\omega$.*

Доказательство. В качестве A достаточно взять бесконечную строгую антицепь в $\mathfrak{N}_1$. □

Следствие 2.2 *Если $X = \{x_i : i \in \omega\}$ дискретное подмножество $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ такое, что $x_i \in C^*_{s_i}$, и при этом $C^*_{s_i} \cap C^*_{s_j} = \emptyset$ для $i \neq j$. Тогда $[X]$ гомеоморфно $\beta\omega$.*

Доказательство. Для доказательства данного следствия достаточно заметить, что

$$C^*_s = \cup\{C^*_t : \operatorname{dom} t = \operatorname{dom} s + 1,\ s \leqslant t\} \text{ для произвольного } C^*_s.$$

□

Из данных теорем и свойств $\beta\omega$ мы получаем некоторые кардинальные характеристики нашего пространства

Следствие 2.3 *Вес, теснота и наследственное число суслина (спред) пространства $SB_{1,1}$ равны 2^ω, а мощность равна 2^{2^ω}.*

Если замыкание строгой антицепи в $S\mathfrak{B}_{1,1}$ гомеоморфно $\beta\omega$, то цепь из $\mathfrak{N}_1$ является сходящейся последовательностью в $S\mathfrak{B}_{1,1}$.

Теорема 2.4 *Пусть $A = \{s_i : i \in \omega\}$ бесконечная цепь на $\mathfrak{N}_1$. Тогда A является сходящейся последовательностью в $S\mathfrak{B}_{1,1}$.*

Доказательство. Рассмотрим бесконечную цепь $A = \{\, s_i : i \in \omega \,\}$ в $\mathfrak{N}_1$. Предположим $x \in [A] \setminus A$ и

$$Ox = \Big[C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi\Big]$$

— базисная окрестность точки x.

Поскольку $A \subseteq \mathfrak{N}_1$ и $x \in [A]$, имеем $\Big(C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi\Big) \cap A \neq \varnothing$, то есть найдется $i_0 \in \omega$ такое, что $s_{i_0} \in C_{\pi|M}$. Поскольку A — цепь, то $s_i \in C_{\pi|M}$ для всех $i \geqslant i_0$.

С другой стороны, мы имеем:

$$\bigcup_{\pi \in T'} C_\pi \cap A = \varnothing.$$

Действительно, в противном случае, поскольку A — цепь, $\bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi$ содержало бы всё множество A, за исключением конечного числа точек. И тогда $Ox \cap [A] = \varnothing$.

Итак, x — предел сходящейся последовательности $A = \{\, s_i : i \in \omega \,\}$. □

Копий $\beta\omega$ и пределов сходящихся последовательностей в $S\mathfrak{B}_{1,1}$ достаточно много.

Теорема 2.5 *Пусть*

$$Q = \{x \in S\mathfrak{B}^*_{1,1} \colon x \text{ предел сходящейся последовательности точек } \mathfrak{N}_1\},$$

$$\mu = \{A^* \colon A \subseteq \mathfrak{N}_1,\ [A] \text{ гомеоморфно } \beta\omega\}.$$

Тогда Q всюду плотно а семейство μ является π-сетью в $SB^*_{1,1}$.

Доказательство. Рассмотрим $V = C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i\leqslant m} C_{\pi_i}$ — элемент $\Gamma_{1,1}$ такой, что $|V| = \omega$.

По индукции построим две последовательности элементов $\mathfrak{N}_1$ $\{\, s_k : k \in \omega \,\}$ и $\{\, t_k : k \in \omega \,\}$ в V такие, что

1. $\{\, s_k : k \in \omega \,\}$ — цепь в $\mathfrak{N}_1$;
2. $\{\, t_k : k \in \omega \,\}$ — строгая антицепь в $\mathfrak{N}_1$;
3. $s_k < t_{k+1}$ для всех $k \in \omega$.

Положим n_0 и $s \in C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{i\leqslant m} C_{\pi_i}$ такие, что $n_0 \geqslant m+1$ и $\operatorname{dom} s = n_0 + 1$. Определим $s_0 = t_0 = s$.

Пусть мы определили $\{\, s_k : k \leqslant \ell \,\}$ и $\{\, t_k : k \leqslant \ell \,\}$, удовлетворяющие условиям 1–3. Определим s_{l+1} и t_{l+1}. Поскольку $\ell \geqslant n_0 \geqslant m+1$, существует не менее двух продолжений s_ℓ, лежащих в $C_{\pi|M} \setminus (\bigcup\limits_{i\leqslant m} C_{\pi_i})$. Определим одно из них как $s_{\ell+1}$, а другое, как $t_{\ell+1}$. Тогда семейства $\{s_k \colon k \leqslant l+1\}$ и $\{t_k \colon k \leqslant l+1\}$ удовлетворяют условиям 1–3.

В результате получаем две последовательности $\{s_k \colon k \in \omega\}$ и $\{t_k \colon k \in \omega\}$ удовлетворяющие условиям 1–3. Из условий 1–3 и теорем 2.3, 2.4, имеем: $\{\, s_k : k \in \omega \,\} \subseteq V$, $\{\, s_k : k \in \omega \,\}$ — сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{k\to\infty} s_k \in V^*$; $\{\, t_k : k \in \omega \,\} \subseteq V$, $\big[\{\, t_k : k \in \omega \,\}\big]$ гомеоморфно $\beta\omega$ и $\big(\{\, t_k : k \in \omega \,\}\big)^* \subseteq V^*$. □

А.А. Грызловым в [13] были описаны сходящиеся последовательности и множества, замыкания которых гомеоморфны $\beta\omega$.

Теорема 2.6 [13] *Если множество $A \subseteq \mathfrak{N}_1$ такое, что $|[A] \setminus A| = 1$, тогда существует конечное множество $K \subseteq A$ такое, что $A \setminus K$ — цепь.*

Теорема 2.7 [13] *Если замыкание $[A]$ множества $A \subseteq \mathfrak{N}_1$ — копия $\beta\omega$, тогда A — объединение конечного числа антицепей.*

Следствие 2.4 *Если замыкание $[A]$ множества $A \subseteq \mathfrak{N}_1$ — копия $\beta\omega$, тогда длины всех цепей, входящих в A ограничены одной константой.*

Точки пространства $S\mathfrak{B}_{1,1}$ можно рассматривать как максимальные центрированные системы некоторых классов множеств из $\mathfrak{B}_{1,1}$.

Теорема 2.8 *Если $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система элементов семейства*

$$\{\, C_{\pi|M} : \pi \in T_1,\ M \subseteq \omega \,\},$$

то $\big|\bigcap\{\, C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \,\}\big| = 1$.

Доказательство. Из центрированности системы $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ и бикомпактности $S\mathfrak{B}_{1,1}$ следует, что

$$\bigcap\{\, C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \,\} \neq \varnothing.$$

Покажем, что $\big|\bigcap\{\, [C_{\pi|M}] : C_{\pi|M} \in \xi \,\}\big| = 1$. Предположим противное, пусть найдутся две различные точки $x, y \in \bigcap\{\, C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \,\}$. Рассмотрим произвольну базисную окрестность точки x

$$Ox = \Big[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{\pi\in T'} C_\pi\Big] = \big[C_{\pi_0|M_0}\big] \setminus \Big[\bigcup_{\pi\in T'} C_\pi\Big]$$

такую, что $Ox \not\ni y$.

Множество $\big[C_{\pi_0|M_0}\big]$ является открыто-замкнутым множеством, содержащим точку x, отсюда $C_{\pi_0|M_0} \cap C_{\pi|M}$ бесконечно для всякого $C_{\pi|M} \in \xi$. В силу максимальносьт ξ, получаем $C_{\pi_0|M_0} \in \xi$, и, следовательно, $[C_{\pi_0|M_0}] \ni y$.

Так как $Ox \not\ni y$ получаем, что $y \in \big[\bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi\big] = \bigcup\limits_{\pi\in T'} \big[C_\pi\big]$. Тогда найдётся $\pi' \in T'$ такое, что $y \in [C_{\pi'}]$.

Так как $[C_{\pi'}]$ является открыто-замкнутым множеством, содержащим y и $y \in \cap\{\, C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \,\}$ получаем, что $C_{\pi'} \cap C_{\pi|M}$ бесконечно для всякого $C_{\pi|M} \in \xi$, а значит $C_{\pi'} \in \xi$.

Но тогда мы имеем: $\cap\{\, C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \,\} \subseteq C^*_{\pi'}$ и следовательно $x \notin \cap\{\, C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \,\}$. Это противоречие доказывает теорему. □

Теорема 2.9 *Если $\xi = \{G\}$ — максимальная центрированная система элементов семейства*

$$\Big\{ G = \mathfrak{N}_1 \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi : T' \subset T_1,\ |T'| < \omega \Big\},$$

то $\big|\cap\{\, G^* : G \in \xi \,\}\big| = 1$.

Доказательство. Из центрированности системы $\xi = \{G\}$ и бикомпактности $S\mathfrak{B}_{1,1}$ следует, что

$$\cap\{\, G^* : G \in \xi \,\} \neq \varnothing.$$

Предположим, что найдутся $x, y \in \cap\{\, G^* : G \in \xi \,\}$, $x \neq y$.

Рассмотрим произвольную базисную окрестность точки x $Ox = \big[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi\big]$ такую, что $y \notin Ox$. Заметим, что

$$\Big[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi\Big] = \big[C_{\pi_0|M_0}\big] \setminus \Big[\bigcup_{\pi \in T'} C_\pi\Big] = \big[C_{\pi_0|M_0}\big] \setminus \Big(\bigcup_{\pi \in T'} [C_\pi]\Big).$$

Имеем: $[C_{\pi_0|M_0}]$ и $\bigcap\limits_{\pi \in T'} [\mathfrak{N}_1 \setminus C_\pi]$ — открыто-замкнутые множества, содержащие точку x. Отсюда и из максимальности системы ξ следует, что $\bigcap\limits_{\pi \in T'} (\mathfrak{N}_1 \setminus C_\pi) \in \xi$, из этого вытекает, что $y \in \bigcap\limits_{\pi \in T'} [\mathfrak{N}_1 \setminus C_\pi]$. Так как $y \notin Ox$ получаем, что $y \notin [C_{\pi_0|M_0}]$.

По предложению 1.9 существуют $\pi_1, \pi_2 \in T_1$ такие, что $C_{\pi_0|M_0} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$.

Имеем $y \notin [C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}] = [C_{\pi_1}] \cap [C_{\pi_2}]$.

Пусть $y \notin [C_{\pi_1}]$. Тогда $y \in [\mathfrak{N}_1 \setminus C_{\pi_1}]$. Из открыто-замкнутости множества $[\mathfrak{N}_1 \setminus C_{\pi_1}]$ и максимальности ξ следует, что $\mathfrak{N}_1 \setminus C_{\pi_1} \in \xi$. Отсюда $[\mathfrak{N}_1 \setminus C_{\pi_1}] \ni x$, следовательно, $[C_{\pi_1}] \not\ni x$, что противоречит тому, что

$$\big[C_{\pi_1}\big] \supseteq \big[C_{\pi_0|M_0}\big] \ni x.$$

Это противоречие доказывает теорему. □

Данные теоремы послужили основанием для введения следующих определений.

Определение 2.1 Точку $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ назовём u-точкой, если

$$x = \cap\{\, C^*_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi \,\}$$

для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ в семействе множеств

$$\{\, C_{\pi|M} : \pi \in T_1,\ M \subseteq \omega \,\}.$$

Определение 2.2 Точку $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ назовём ℓ-точкой, если

$$x \in \cap\{\, C^* : C \in \xi \,\}$$

для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{C\}$ в семействе множеств

$$\Big\{ \mathfrak{N}_1 \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi : T' \subset T_1,\ |T'| < \omega \Big\}.$$

Из определений следует, что u-точки — суть точки $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$, которые имеют базу окрестностей в $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$, состоящую из множеств вида $C^*_{\pi|M}$, где $\pi \in T_1$, $M \subseteq \omega$, а ℓ-точки — суть точки $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$, которые имеют базу окрестностей в $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$, состоящую из множеств вида $\big(\mathfrak{N}_1 \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi\big)^*$, где $T' \subset T_1$, $|T'| < \omega$.

В [4] доказана теорема об эквивалентных определениях ℓ-точек.

Теорема 2.10 [4] Для точки $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,1}$ следующие утверждения эквивалентны:

(a) точка x есть предел некоторой цепи $\{ s_k : k \in \omega \}$ элементов $\mathfrak{N}_1$;

(b) точка x имеет базу в $S\mathfrak{B}^*_{1,1}$, состоящую из открыто-замкнутых окрестностей вида

$$\Big(\mathfrak{N}_1 \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi\Big)^*;$$

(c) из того, что $x \in [C_{\pi|M}]$ для некоторых $\pi \in T_1$, $M \subseteq \omega$ следует, что существует $i \in M$ такое, что $x \in [C_{\pi(i)}]$.

Данная теорема показывает,что l-точки являются прелами цепей. В [6] доказана теорема 2.11, определяющая предельные точки антицепей в терминах центрированных систем множеств.

Будем говорить, что $C_{\pi|M}$ приведённое, если $\pi(M)$ — строгая антицепь, и положим:

$$\mathcal{M}'_{\pi|M} = \big\{ C_{\pi|M_i} : M_i = M \cap \{ n : n \geqslant i \}, i \in \omega \big\};$$

$$\mathcal{M}_L = \Big\{ G = \mathfrak{N}_3 \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi \colon T' \subset T_1,\ |T'| < \omega \Big\};$$

$$\mathcal{M}_{\pi|M} = \mathcal{M}_L \cup \mathcal{M}'_{\pi|M}.$$

Определение 2.3 Центрированную систему $\xi = \{G\}$ в семействе $\mathcal{M}_{\pi|M}$ будем называть *$\pi|M$-центрированной для $C_{\pi|M}$*, если $\mathcal{M}'_{\pi|M} \subseteq \xi$.

Всякую $\pi|M$-центрированную систему можно дополнить до максимальной $\pi|M$-центрированной системы.

Теорема 2.11 [6] *Пусть множество $C_{\pi|M}$ приведённое и $|M| = \omega$. Если $\xi = \{G\}$ — максимальная $\pi|M$-центрированная система для $C_{\pi|M}$, то*

$$\big|\cap\{ G^* : G \in \xi \}\big| = 1.$$

2.2 Пространство $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Прежде всего выясним соотношение пространств $S\mathfrak{B}_{1,1}$ и $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Лемма 2.2 *Пусть $\mathfrak{B}_{1,1} = \{G\}$ — булева алгебра расширения Белла.*

Тогда семейство $\{G \cap N_2 \colon G \in \mathfrak{B}_{1,1}\}$ — это булева алгебра $\mathfrak{B}_{1,2}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что семейство $\{G \cap N_2 \colon G \in \mathfrak{B}_{1,1}\}$ есть булева алгебра на $\mathfrak{N}_2$. Покажем, что $\{G \cap \mathfrak{N}_2 \colon G \in \mathfrak{B}_{1,1}\} = \mathfrak{B}_{1,2}$. Для этого достаточно заметить, что для всякого $s \in \mathfrak{N}_2$ выполняется:

$$C_s \cap \mathfrak{N}_2 = \{t \in \mathfrak{N}_1 \colon t|_{\mathrm{dom}\ s} = s\} \cap \mathfrak{N}_2 = \{t \in \mathfrak{N}_2 \colon t|_{\mathrm{dom}\ s} = s\}.$$

Отметим, что для $s \in \mathfrak{N}_1 \setminus \mathfrak{N}_2$ справедливо $C_s \cap \mathfrak{N}_2 = \varnothing$. □

Теорема 2.12 *Существует гомеоморфизм $\phi \colon [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \to S\mathfrak{B}_{1,2}$ такой, что $\phi|_{\mathfrak{N}_2}$ — тождественное отображение.*

Доказательство. Расмотрим произвольную точку нароста $x \in [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \setminus \mathfrak{N}_2$.

Точка $x = \{G \in \mathfrak{B}_{1,1} \colon x \in [G]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}\}$ это ультрафильтр в булевой алгебре $\mathfrak{B}_{1,1}$. Тогда $\xi_x = \{G \cap \mathfrak{N}_2 \colon G \in x\}$ является ультрафильтром в $\mathfrak{B}_{1,2}$, то есть точкой расширения $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Определим отображение ϕ по правилу:

$\phi(x) = \xi_x$, для $x \in [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \setminus \mathfrak{N}_2$; на множестве $\mathfrak{N}_2$ отображение ϕ тождественно.

Отображение ϕ является отображением «на».

Пусть $\xi = \{G'\}$ — ультрафильтр в $\mathfrak{B}_{1,2}$. Тогда $|\cap\{[G']_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \colon G' \in \xi\}| = 1$. Действительно, если бы нашлись $x, y \in \cap\{[G']_{S\mathfrak{B}_{1,1}} : G' \in \xi\}$, $x \neq y$, то нашлись бы и $G_x \in x$, $G_y \in y$ (x и y можно рассмотривать как ультрафильтры на $\mathfrak{B}_{1,1}$) такие, что $G_x \cap G_y = \varnothing$.

В силу того, что $[G_x]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$ и $[G_y]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$ — открыто замкнутые множества, получаем: $G'_x = G_x \cap \mathfrak{N}_2 \neq \varnothing$ и $G'_y = G_y \cap \mathfrak{N}_2 \neq \varnothing$, G'_x,$G'_y \in \mathfrak{B}_{1,2}$ и G'_x, $G'_y \in \xi$, что невозможно.

Положим $x = \cap\{[G']_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \colon G' \in \xi\}$. По определению отображения ϕ имеем: $\phi(x) = \xi$.

Анналогично доказывается и взаимная однозначность отображения ϕ. Непрерывность ϕ очевидна. Таким образом $\phi \colon [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \to S\mathfrak{B}_{1,2}$ искомый гомеоморфизм. □

Таким образом $S\mathfrak{B}_{1,2}$ вложимо в $S\mathfrak{B}_{1,1}$ как замкнутое множество. При этом $S\mathfrak{B}_{1,2}$ является нигде не плотным в $S\mathfrak{B}_{1,1}$, в силу вида базисных окресностей.

Оказалось, что в наросте данного пространства есть изолированные точки, а в самом пространстве есть открыто-замкнутые копии $\beta\omega$.

Теорема 2.13 *Для пространства $S\mathfrak{B}_{1,2}$ следующее верно:*

1) $A = \{s_i \in \mathfrak{N}_2 \colon i \in \omega\}$ — полная цепь. Тогда $A \in \mathfrak{B}_{1,2}$, $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и $[A] \setminus A$ состоит из одной точки.

2) Если $A = \{s_n = f|_n \colon n \in M\}$ — цепь, где $f \in P_2$ и $M \subset \omega$ такое, что $|M| = |\omega \setminus M| = \omega$. Тогда $[A]$ не является открыто-замкнутым множеством в $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

3) $A = \{\pi(n) \colon n \in M \subseteq \omega\}$ — строгая антицепь. Тогда $A \in \mathfrak{B}_{1,2}$ и $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и гомеоморфно $\beta\omega$.

Доказательство. 1) Покажем, что $A \in \mathfrak{B}_{1,2}$. Для этого построим $\pi_1, \pi_2 \in T_2$ такие, что $A = C_{\pi_1} \setminus C_{\pi_2}$.

Определим $\pi_1(i) = s_i$, для всякого $i \in \omega$. $\pi_2(0)(0) = (s_0(0)+1) mod\, 2$ и $\pi_2(i)|_i = s_{i-1}$, $\pi_2(i)(i) = (s_i(i)+1) mod\, 2$, при $i > 0$ (другими словами $\pi_2(i)$ — это продолжение s_{i-1} на i отличное от s_i). Из построения очевидно, что $A = C_{\pi_1} \setminus C_{\pi_2}$.

В теореме 2.4 доказано, что бесконечная цепь из $\mathfrak{N}_1$ есть сходящаяся последовательность. Поскольку $S\mathfrak{B}_{1,2}$ вложимо в $S\mathfrak{B}_{1,1}$ как замкнутое множество, и в силу Теоремы 2.12 получаем, что $[A] \setminus A$ состоит из одной точки. Поскольку $A \in \mathfrak{B}_{1,2}$, то $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

2) Предположим противное, пусть $[A]$ — открыто-замкнутое множество в $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Множества A и $A' = \{s_n = f|_n \colon n \in \omega \setminus M\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{s_n \colon n \in \omega\}$. Отсюда $[A] = A \cup \{x\}$ и $[A'] = A' \cup \{x\}$, где x — предел последовательности $\{s_n \colon n \in \omega\}$. При этом $A' \subseteq S\mathfrak{B}_{1,2} \setminus [A]$.

В силу нашего предположения множество $S\mathfrak{B}_{1,2} \setminus [A]$ замкнуто и следовательно $\{x\} \cup A' = [A'] \subseteq S\mathfrak{B}_{1,2} \setminus [A]$. Это противоречит тому, что $x \in [A]$.

3) По предложению 1.9 имеем $C_{\pi|_M} \in \mathfrak{B}_{1,2}$. Положим $M' = \{n+1 \colon n \in M\}$. Построим π_0,$\pi_1 \in T_2$ такие, что $A = C_{\pi|_M} \setminus (C_{\pi_0|_{M'}} \cup C_{\pi_1|_{M'}})$. Для $n \in M$ положим $\pi_0(n+1)|_{n+1} = \pi_1(n+1)|_{n+1} = \pi(n)$ и $\pi_0(n+1)(n+1) = 0$, $\pi_1(n+1)(n+1) = 1$. Другими словами $\pi_0(n+1)$ и $\pi_1(n+1)$ это два различных продолжения $\pi(n)$ на следующий шаг. В точках $n \notin M'$ $\pi_0(n)$ и $\pi_1(n)$ выбираем произвольно.

Требуемое равенство выполнено в силу построения, так как $C_{\pi_0|_{M'}} \cup C_{\pi_1|_{M'}}$ вырезает из $C_{\pi|_M}$ все продолжения элементов антицепи, оставляя только их. В теореме 2.3 доказано, что замыкание бесконечной строгой антицепи из $\mathfrak{N}_1$ гомеоморфно $\beta\omega$. Отсюда и из Теоремы 2.12 следует, что $[A]$ гомеоморфно $\beta\omega$. Поскольку $A \in B_{1,2}$, то $[A]$ является открыто-замкнутым множеством в $S\mathfrak{B}_{1,2}$. □

Заметим, что согласно пункту (1) доказанной теоремы, предел цепи из $\mathfrak{N}_2$ есть изолированныя точка нароста $S\mathfrak{B}^*_{1,2}$.

Для неизолированных точек нароста доказан следующий результат.

Теорема 2.14 *В любой окресности Ox произвольной неизолированной точки из нароста $x \in S\mathfrak{B}^*_{1,2}$ содержится открыто-замкнутая копия $\beta\omega$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную базисную окресность неизолированной точки нароста

$$Ox = [C_{\pi|_M} \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi],\ T' \subset T_2,\ |T'| < \omega.$$

Докажем, что найдется бесконечная строгая антицепь $\{s_i \colon i \in \omega\} \subseteq C_{\pi|_M} \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi = G$.

Поскольку x точка нароста, то $|G| = \omega$. Введем обозначение, $s+1$ — это множество продолжений s на $dom\ s+1$, то есть $s+1 = \{t \in \mathfrak{N}_2 \colon t|_{dom\ s} = s,\ dom\ t = dom\ s+1\}$.

Разобьем $G = I_{Ox} \cup V_{Ox} \cup U_{Ox}$, где $I_{Ox} = \{s \in G \colon |s+1 \cap G| = 0\}$, $V_{Ox} = \{s \in G \colon |s+1 \cap G| = 2\}$, $U_{Ox} = \{s \in G \colon |s+1 \cap G| = 1\}$.

Докажем, что если $|I_{Ox}| = \omega$, то теорема верна. Заметим, что $\mathfrak{N}^n_2 = \{t \in \mathfrak{N}_2 \colon dom\ t = n\}$ конечно для всех $n \in \omega$. Тогда найдется бесконечное $M \subseteq \omega$ такое, что $I_{Ox} \cap \mathfrak{N}^n_2 \neq \varnothing$ для всех $n \in M$, $M = \{n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\}$.

В качестве s_i выбираем произвольный элемент из $I_{Ox} \cap \mathfrak{N}^{n_i}_2$. В итоге получаем бесконечную строгую антицепь $\{s_i \colon i \in \omega\} \subseteq I_{Ox} \subseteq G$. Далее будем считать, что I_{Ox} конечно.

Теперь рассмотрим V_{Ox}. Если оно конечно, то $|U_{Ox}| = \omega$ и найдется n_0 такой, что $dom\ s < n_0$ для всех $s \in I_{Ox} \cup V_{Ox}$. Тогда для всех $m > n_0$ выполнено $\mathfrak{N}^m_2 \cap G = \mathfrak{N}^m_2 \cap U_{Ox}$. Рассмотрим произвольное $s \in \mathfrak{N}^m_2 \cap G$, при $m > n_0$. Поскольку $s \in U_{Ox}$, то $s+1 = \{s', s''\}$, где $s' \in U_{Ox}$ и $s'' \in \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi$. Так как $s \in G$ и $s'' \notin G$, то найдется $\pi \in T'$ такое, что $s'' = \pi_i(m+1)$.

Заметим, что для различных $s_1, s_2 \in \mathfrak{N}^m_2 \cap G$ при $m > n_0$ найдутся различные π', $\pi'' \in T'$ такие, что $s_1 < \pi'(m+1)$ и $s_2 < \pi''(m+1)$, то есть $|\mathfrak{N}^m_2 \cap G| \leqslant |T'|$ для всех $m > n_0$. При этом для любого $s \in \mathfrak{N}^m_2 \cap G$ при $m > n_0$ найдется $s' \in \mathfrak{N}^{m+1}_2 \cap G$, которое является его продолжением.

Таким образом $G \setminus \{s \in G \colon dom\ s \leqslant n_0\}$ представляет собой не более $|T'|$ бесконечных цепей. Согласно пункту 1 теоремы 2.13 нарост G состоит из конечного числа изолированных точек. Это противоречит тому, что x не изолированная точка.

Осталось рассмотреть случай, когда $|V_{Ox}| = \omega$. Возможны два варианта:

1) $|C_s \cap V_{Ox}| < \omega$ для всех $s \in V' \subseteq V_{Ox}$, где $|V'| = \omega$. В качестве s_1 берем произвольный $s \in V'$, при этом $|V' \setminus C_{s_1}| = \omega$. В качестве s_2 берем $s \in V' \setminus C_{s_1}$ такое, что $dom\ s_2 > dom\ s_1$.

На k-ом шаге получаем $\{s_i \colon i \leqslant k\}$ — строгая антицепь и $|V' \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant k} C_{s_i}| = \omega$. После счетного числа шагов получим бесконечную строгую антицепь $\{s_i \colon i \in \omega\} \subseteq V' \subseteq V_{Ox} \subseteq G$.

2) Найдется $s_0 \in V_{Ox}$ такое, что $|C_{s_0} \cap V_{Ox}| = \omega$. Построим бесконечную цепь $\{t_i \colon i \in \omega\} \subseteq V_{Ox}$. В качестве t_1 возьмем s_0. Если для всех $s \in C_{t_1} \cap V_{Ox}$ выполнено $|C_s \cap V_{Ox}| < \omega$ то переходим к пункту 1, где $V' = C_{t_1} \cap V_{Ox}$.

В противном случае найдется $t_2 \in C_{t_1} \cap V_{Ox}$ такое, что $|C_{t_2} \cap V_{Ox}| = \omega$. Для t_2 повторяем рассуждения, что и для t_1. И так далее. В итоге либо будет построена бесконечная строгая цепь $\{t_i \colon i \in \omega\} \subseteq V_{Ox}$, либо на конечном шаге мы обратимся к пункту 1 и построим искомую антицепь.

В качестве s_i будем брать то продолжение t_i на $dom\ t_i + 1$, которое не равно $t_{i+1}|_{dom\ t_i}$. В итоге получим бесконечную строгую антицепь $\{s_i \colon i \in \omega\} \subseteq V_{Ox} \subseteq G$.

Согласно пункту 3 Теоремы 2.13 $[\{s_i \colon i \in \omega\}]$ гомеоморфно $\beta\omega$. □

Следствие 2.5 *Для любой неизолированной точки нароста $x \in SB^*_{1,2}$ и произвольной её окресности Ox справедливо $c(Ox) = 2^\omega$.*

Удалось описать множества из $\mathfrak{N}_2$, замыкания которых являются открыто-замкнутыми копиями $\beta\omega$.

Теорема 2.15 *Пусть $A \subseteq \mathfrak{N}_2$, $|A| = \omega$. Замыкание $[A]$ является открыто-замкнутой копией $\beta\omega$ тогда и только тогда, когда A есть объединение конечного числа строгих антицепей из $\mathfrak{N}_2$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Согласно теореме 2.12 и следствию 2.4 длины всех цепей входящих в A ограничены некоторой константой h. Посколку $[A]$ открыто в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и является бикомпактом, то существует конечное покрытие $[A] = \bigcup_{i\leqslant \tilde{n}} [U_i]$, где $U_i = C_{\pi_i|_{M_i}} \setminus \bigcup_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$.

Напомним, что $U_i = \{C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j} : n \in M_i\}$ и при этом длины цепей входящих в U_i ограничены одной константой h.

Заметим, что для любых $s_1 < s_2 \in U_i$ и произвольного $t \in \mathfrak{N}_2$ такого, что $s_1 \leq t \leq s_2$ выполнено $t \in U_i$ (другими словами, в цепях содержащихся в U_i нет «дырок»), поскольку в противном случае $t \in \bigcup_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$, но тогда $s_2 \in C_t \subseteq \bigcup_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ и $s_2 \notin U_i$. Отсуда следует, что для всех $n \in M_i$ и любого $t \in C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ выполнено $n \leqslant dom\ t \leqslant n + h - 1$.

Поскольку у каждого элемента продолжений на следующий шаг ровно два, то

$$|\{t \in C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j} : dom\ t = n + k\}| \leqslant 2^k.$$

Тогда для всех $n \in M_i$ выполнено $|C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}| \leq 2^h$.

Представим M_i в виде объединения h непересекающихся подмножеств $M_i = \bigcup_{l\leqslant h} M^l_i$, таких, что для всякого $l \leqslant h$ и для любых $m_1, m_2 \in M^l_i$ и $m_1 \neq m_2$ выполнено $|m_2 - m_1| \geqslant h$.

Рассмотрим множество $U^l_i = C_{\pi_i|_{M^l_i}} \setminus \bigcup_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$, заметим, что для любых двух различных $m_1, m_2 \in M^l_i$ и любых $t_1 \in C_{\pi_i(m_1)} \setminus \bigcup_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ и $t_2 \in C_{\pi_i(m_2)} \setminus \bigcup_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ выполнено $dom\ t_1 \neq dom\ t_2$. Тогда построим разбиение U^l_i на конечное число строгих антицепей.

Для каждого $n \in M^l_i$ отметим по точке в $C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}$ (если данное множество не пусто). Это и будет первой строгой антицепью $D^{i,l}_1$.

Затем для каждого $n \in M^l_i$ отмечаем по точке в непустых $(C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}) \setminus D^{i,l}_1$, это будет $D^{i,l}_2$. И так далее.

Процесс остановится не более чем через 2^h шагов, так как $|C_{\pi_i(n)} \setminus \bigcup_{j\leqslant n_i} C_{\pi^i_j}| \leqslant 2^h$, для всех $n \in M_i$. Значит U^l_i можно представить в виде объединения не более чем 2^h строгих антицепей, а U_i в виде объединения не более чем $h \cdot 2^h$ строгих антицепей.

В итоге получаем, что $A = \bigcup_{i\leqslant n_0} D'_i$, где D'_i — строгая антицепь, а $n_0 \leqslant \tilde{n} \cdot h \cdot 2^h$.

Докажем достаточность. Пусть $A = \bigcup_{i\leqslant n} D_i$, где D_i строгая антицепь на $\mathfrak{N}_2$ и $D_i \cap D_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Покажем, что для произвольного $A' \subseteq A$ справедливо $A' \in \mathfrak{B}_{1,2}$. Действительно множество $D'_i = D_i \cap A'$ для всех $i \leqslant n$ является строгой антицепью, а значит по пункту (3) теоремы 2.13 $D'_i \in \mathfrak{B}_{1,2}$. Тогда $A' = \bigcup_{i\leqslant n} D'_i \in \mathfrak{B}_{1,2}$.

Рассмотрим произвольные A_1, $A_2 \subseteq A$ такие, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. По доказанному A_1 и A_2 элементы булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,2}$, а значит $[A_1] \cap [A_2] = \varnothing$. Тогда $[A]$ гомеоморфно βA, и A счетное дискретное множество. □

Следствие 2.6 *Если $U \subseteq S\mathfrak{B}^*_{1,2}$ открыто-замкнутое множество, гомеоморфное $\beta\omega \setminus \omega$. Тогда $U = [A] \setminus A$ и при этом A является объединением конечного числа антицепей из $\mathfrak{N}_2$.*

Доказательство. Данное следствие непосредственно вытекает из теоремы 2.15 и предложения 1.5. □

В связи с доказанной теоремой возникает вопрос о существовании не открыто-замкнутых копий $\beta\omega$ в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и открыто-замкнутых подмножеств не гемеоморфных $\beta\omega$ и не содержащих предельных точек цепей. Ответами на данные вопросы служат следующие примеры.

Пример 2.1 Пример не открыто-замкнутой копии $\beta\omega$ в $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Построим множество $A \subseteq \mathfrak{N}_2$ такое, что $[A]$ гомеоморнфно $\beta\omega$ и $[A]$ не открыто в $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Рассмотрим произвольную бесконечную строгую антицепь $F = \{\pi(i) \colon i \in M, M \subseteq \omega\}$. Представим её в виде счетного объединения конечных не пересекающихся множеств возрастающей мощности, то есть $F = \bigcup_{i\in\omega} F_i$, где $|F_i| = i$.

Для каждого F_i определим мажорирующую ее нестрогую антицепь A_i, для этого каждому $s \in F_i$ сопоставим его продолжение s' такое, что $dom\ s' = max\{dom\ t \colon t \in F_i\} = n(i)$.

Определим $A = \bigcup_{i\in\omega} A_i$. Согласно теоремам 2.3 и 2.12 $[A]$ гомеоморфно $\beta\omega$, при этом открыто-замкнутым в $SB_{1,2}$ оно быть не может, так как в противном случае A, согласно теореме 2.15, можно было бы предствать в виде конечного объединения строгих антицепей, то есть количество элементов антицепи имеющих один и тот же dom не превосходило бы количества строгих антицепей. А это не возможно, в силу того, что для любого $n \in \omega$ найдется $i(n) \in \omega \colon |A_{i(n)}| > n$, а все элементы $A_{i(n)}$ имеют одинаковый dom.

Замечание 2.1 Согласно теореме 2.14 нарост нашего пространства представим следующим образом:

$S\mathfrak{B}^*_{1,2} = [A \cup B]$, где A— множество всех изолированных точек нароста, B— объединение наростов отрыто-замкнутых копий $\beta\omega$, A и B открытые подмножества $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и $A \cap B = \varnothing$. По теореме 2.14 имеем $[B] = S\mathfrak{B}^*_{1,2} \setminus A$ и, в силу приведенного примера 2.1, $[A] \neq S\mathfrak{B}^*_{1,2} \setminus B$.

Пример 2.2 Пример открыто-замкнутого подмножества не гомеоморфного $\beta\omega$ и без изолированных точек в наросте.

Построим множество $A \subseteq \mathfrak{N}_2$ такое, что $[A]$ является открыто-замкнутым в $S\mathfrak{B}_{1,2}$, не гомеоморфно $\beta\omega$ и $[A] \setminus A$ не содержит изолированных точек.

Рассмотрим произвольную бесконечную строгую антицепь $F = \{\pi(i) \colon i \in \omega\}$. По индукции построим семейство конечных цепей со следующими свойствами:

1. $A_i \subset C_{\pi(i)}$ и $|A_i| = i$;
2. A_i - цепь без «дырок» , то есть для любых $s, t \in A_i$ и произвольного $k \in \mathfrak{N}_2$ из того, что $s \leqslant k \leqslant t$ следует $k \in A_i$;
3. для произвольных $i \in \omega$, $t \in A_i$ и $s \in A_{i+1}$ выполнено $dom\ t < dom\ s$.

В качестве A_1 возьмем $\{\pi(1)\}$. Пусть построены A_i для всех $i \leqslant n$, тогда в качестве первого элемента цепи A_{i+1} возьмем то продолжение $\pi(n+1)$, для которого выполнено условие (3), далее нетрудно достроить цепь до нужной длинны ($|A_{i+1}| = i+1$) с выполнением условия (2).

Все элементы цепи A_i, за исключением последнего, имеют в качестве одного продолжения на следующий шаг другой элемент A_i, а в качестве второго продолжения элемент из дополнения к данной цепи. И только оба продолжения последнего элемента цепи, не будут элементом данной цепи.

Определим $A = \bigcup\limits_{i \in \omega} A_i$. Нетрудно показать, что A является элементом булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,2}$. Легко построить $\tilde{\pi} \in T_2$ и $M \subseteq \omega$ такие, что $\tilde{\pi}(M) = A$. Тогда $A = C_{\tilde{\pi}|_M} \setminus (C_{\pi'|_{M'}} \cup C_{\pi''|_{M''}})$, где $C_{\pi'|_{M'}}$ обрезает те продолжения элементов наших цепей, которые туда не попадут, $C_{\pi''|_{M''}}$ нужно для удаления вторых продолжений последних элементов наших цепей.

Согласно теореме 2.15 $[A]$ не гомеоморфно $\beta\omega$. Заметим также, что A не содержит ни одной бесконечной цепи, а значит в силу теорем 2.6 и 2.12, $A^* = [A] \setminus A$ не содержит изолированных точек.

В итоге мы получили подмножество $\mathfrak{N}_2$, замыкание которого открыто в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и не гомеоморфно $\beta\omega$, а нарост не содержит изолированных точек.

Таким образом, нарост нашего пространства $S\mathfrak{B}_{1,2}$ помимо копий $\beta\omega \setminus \omega$ и изолированных точек содержит и другие точки.

Следующие результаты показывают тесную связь полных цепей и полных антцепей в $\mathfrak{N}_2$.

Теорема 2.16 *Для пространства $S\mathfrak{B}_{1,2}$ справедливо:*

1) *Если $\{\pi(n) \colon n \in \omega\}$ — полная строгая антицепь, то множество $\mathfrak{N}_2 \setminus C_\pi = \{t_n \colon n \in \omega\}$ — полная строгая цепь и $t_n = \pi(n+1)|_{n+1}$ для всех $n \in \omega$.*

2) *Пусть $\mathfrak{N}^n_2 = \{t \in \mathfrak{N}_2 \colon dom\ t = n+1\}$ для всех $n \in \omega$. Если $\{\pi(n) \colon n \in M\}$ таково, что $|\mathfrak{N}^n_2 \setminus C_{\pi|_M}| = 1$ для всех $n \in \omega$, то $\{\pi(n) \colon n \in M\}$ — полная строгая антицепь.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{N}^n_2 = \{t \in \mathfrak{N}_2 \colon \operatorname{dom} t = n+1\}$ для всех $n \in \omega$. Покажем, что $|\mathfrak{N}^n_2 \setminus C_\pi| = 1$ для всякого $n \in \omega$ и $\mathfrak{N}_2 \setminus C_\pi = \cup\{\mathfrak{N}^n_2 \colon n \in \omega\} \setminus C_\pi$ — полная строгая цепь.

Доказательство проведем по индукции. Для $n = 0$ верно.

Пусть верно для $n \leqslant \tilde{n}$, то есть $\{t_n\} = \mathfrak{N}^n_2 \setminus C_\pi$ для всех $n \in \{0, \ldots, \widetilde{n}\}$ и они образуют цепь.

Рассмотрим $\mathfrak{N}^{\widetilde{n}+1}_2 = \{t \in \mathfrak{N}_2 \colon dom\ t = \widetilde{n}+2\}$. Для любого $s \in \mathfrak{N}^n_2 \setminus \{t_n\}$ ($n \leqslant \widetilde{n}$) верно $s \in C_\pi$. Тогда всякий элемент $t \in \mathfrak{N}^{\widetilde{n}+1}_2 \setminus C_{t_{\widetilde{n}}}$ является продолжением некоторого $s \in \mathfrak{N}^{\widetilde{n}}_2 \setminus \{t_{\widetilde{n}}\} \subset C_\pi$, и поэтому он не равен $\pi(\widetilde{n}+1)$, так как $\{\pi(n) \colon n \in \omega\}$ есть антицепь.

Следовательно $\pi(\widetilde{n}+1)$ есть одно из продолжений элемента $t_{\widetilde{n}}$ на $\tilde{n}+1$, то есть $\pi(\widetilde{n}+1)|_{\widetilde{n}+1} = t_{\widetilde{n}}$. Тогда другое продолжение $t_{\widetilde{n}}$ на $\widetilde{n}+1$ и есть элемент $t_{\widetilde{n}+1}$, и $\{t_{\widetilde{n}+1}\} = \mathfrak{N}^{\widetilde{n}+1}_2 \setminus C_\pi$.

Построенное таким образом множество $\{t_n \colon n \in \omega\} = \mathfrak{N}_2 \setminus C_\pi$ и есть искомая полная цепь.

2) Обозначим $M_n = \omega \cap \{0, 1, \ldots, n\}$ для всех $n \in \omega$. Заметим, что $\mathfrak{N}^n_2 \setminus C_{\pi|_M} = \mathfrak{N}^n_2 \setminus C_{\pi|_{M_n}}$. Предположим, что $\{\pi(n) \colon n \in M\}$ не является полной строгой цепью. Тогда найдётся

$$n' = \min\{n \colon n \notin M \text{ или } (n \in M \text{ и } \pi(n) \in C_{\pi|_{M_{n-1}}})\}.$$

В случае если $n' = 0$, получаем $C_{\pi|_{M_0}} = \varnothing$, чего быть не может.

Имеем $C_{\pi|_{M_{n'}}} = C_{\pi|_{M_{n'-1}}}$. По условию теоремы $\mathfrak{N}_2^{n'-1} \setminus C_{\pi|_{M_{n'-1}}} = \{t'\}$.

Тогда $\mathfrak{N}_2^{n'} \setminus C_{\pi|_{M_{n'}}} = \mathfrak{N}_2^{n'} \setminus C_{\pi|_{M_{n'-1}}} = \mathfrak{N}_2^{n'} \cap C_{t'}$ состоит из двух продолжений t' на n', а это противоречит $|\mathfrak{N}_2^{n'} \setminus C_{\pi|_{M_{n'}}}| = 1$. Таким образом наше предположение неверно и $\{\pi(n)\colon n \in M\}$ является полной строгой антицепью. □

Следствие 2.7 *Для всякой полной антицепи $A = \{s_n\colon n \in \omega\}$ найдется $f \in P_2$ такое, что*

$$[A] \setminus A \subseteq F_f, \text{ где } F_f = \bigcap_{n\in\omega} [C_{f|_n}].$$

Доказательство. В силу теоремы 2.16, для полной антицепи A найдется полная цепь

$$\{t_n\colon n \in \omega\} = \mathfrak{N}_2 \setminus (\cup\{C_{s_n}\colon s_n \in A\}).$$

При этом для всех $n \in \omega$ справедливо $t_n < s_{n+1}$. Данная полная цепь и опоределяет искомое $f \in P_2$ ($f|_{n+1} = t_n$ для всех $n \in \omega$).

Получаем, что $A \cap C_{f|_n} = \{s_i\colon i > n\}$. То есть $C_{f|_{n+1}} = C_{t_n}$ содержит все элементы нашей антицепи начиная с некоторого. Но $[C_{f|_{n+1}}]$ открыто-замкнуто в $S\mathfrak{B}_{1,2}$ и $\{(C_{f|_{n+1}})^*\colon n \in \omega\}$ образуют базу F_f в $S\mathfrak{B}^*_{1,2}$. Отсюда следует, что $[A] \setminus A \subseteq F_f$. □

Предложение 2.1 *Для всякой полной цепи $A = \{\pi(n)\colon n \in \omega\}$ найдётся полная антицепь $\{\pi'(n)\colon n \in \omega\}$ такая, что $A = \mathfrak{N}_2 \setminus C_{\pi'}$.*

Доказательство. Определим $\pi' \in T_2$ следующим образом: $\pi'(n)|_n = \pi(n-1)$ для всякого $n \in \omega \setminus \{0\}$ и $\pi'(n)(n) = (\pi(n)(n) + 1)\ mod\ 2$ для всех $n \in \omega$.

Таким образом $\pi'(n+1)$ является продолжением $\pi(n)$ на $n+1$ отличным от $\pi(n+1)$ для всех $n \in \omega$, а значит $\{\pi'(n)\colon n \in \omega\}$ является полной антицепью. Заметим, что $A \cap C_{\pi'} = \varnothing$ и в силу теоремы 2.14 имеем $A = \mathfrak{N}_2 \setminus C_{\pi'}$. □

Следствие 2.8 *$A = \{\pi(n)\colon n \in M \subseteq \omega\}$ — строгая антицепь. A можно дополнить до полной антицепи тогда и только тогда, когда $G = \{\pi(n)|_n\colon n \in M \setminus \{0\}\}$ образует цепь.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $A' = \{\pi(n)\colon n \in \omega\}$ — полная антицепь и $A \subseteq A'$. Тогда в силу теоремы 2.16 получаем $G' = \mathfrak{N}_2 \setminus C_\pi = \{t_n = \pi(n+1)|_{n+1}\colon n \in \omega\}$ есть полная цепь. Очевидно, что $G \subseteq G'$, а значит G является цепью.

Докажем достаточность. Найдется полная цепь $G' = \{\pi_1(n)\colon n \in \omega\}$ такая, что $G \subseteq G'$ и $A \cap G' = \varnothing$. Тогда по предложению 2.1 найдется π_2 такое, что $G' = \mathfrak{N}_2 \setminus C_{\pi_2}$ и $A' = \{\pi_2(n)\colon n \in \omega\}$ является полной антицепью.

Поскольку $\pi(n)|_n = \pi_1(n-1) = \pi_2(n)|_n$ для всех $n \in M \setminus \{0\}$ и A, A' антицепи, то $\pi(n)(n) \neq \pi_1(n)(n)$ и $\pi_2(n)(n) \neq \pi_1(n)(n)$ для всех $n \in M$. Тогда $\pi(M) = \pi_2(M)$, то есть $A \subseteq A'$. □

Также приведем пример строгой антицепи, которую нельзя продолжить до полной антицепи.

Пример 2.3 Для начала пронумеруем произвольным образом элементы $\mathfrak{N}_2$, то есть $\mathfrak{N}_2 = \{s_n\colon n \in \omega\}$. Строит нашу антицепь $A = \{t_n\colon n \in \omega\}$ будем по индуции. Положим $s_{n_1} = s_1$, в качестве t_1 берем произвольное собственное продолжение s_{n_1}. Пусть выбраны $s_{n_1}, \ldots, s_{n_k}$ и их собственные продолжения $t_1, \ldots, t_k$ такие, что $dom\ t_1 < \ldots < dom\ t_k$ и $\{t_i\colon i \leqslant k\}$ — антицепь.

Тогда положим $n_{k+1} = min\{n\colon s_n \nleqslant t_i \text{ и } t_i \nleqslant s_n \text{ для всех } 1 \leqslant i \leqslant k\}$. В качестве t_{k+1} берем собственное продолжение $s_{n_{k+1}}$: $dom\ t_k < dom\ t_{k+1}$.

В силу выбора n_{k+1}, $\{t_i\colon i \leqslant k+1\}$ — строгая антицепь.

Этот процесс продолжается до бесконечности. В итоге получим строгую антицепь $A = \{t_n\colon n \in \omega\}$.

Докажем следующие свойства полученной антицепи:

1) Для любого $s \notin \bigcup\limits_{t_n \in A} C_{t_n}$ найдется номер $k \in \omega$ такой, что $s < t_k$.

2) Для всякого $f \in P_A = \{f \in P_2\colon f|_n \notin \bigcup\limits_{t\in A} C_t \text{ для всех } n \in \omega\}$ выполнено $A^* \cap F_f \neq \varnothing$.

3) Существует ультрафильтр $\xi \in A^*$ такой, что для любой строгой полной антицепи D найдётся $A' \in \xi$ такое, что $A' \cap D = \varnothing$.

1) Предположим противное. Пусть нашелся $s_{\widetilde{n}}$ такой, что $s_{\widetilde{n}} \notin \bigcup\limits_{t_n \in A} C_{t_n}$ и $s_{\widetilde{n}} \not< t_k$ для всех $k \in \omega$. Но тогда для $n_k > \widetilde{n}$ (такое n_k найдётся, в силу бесконечности $\{s_{n_k}\colon k \in \omega\}$) получаем противоречие с выбором n_k, так как его роль должен был играть $\widetilde{n}$, в силу его минимальности.

2) Достаточно доказать, что для любого $f \in P_A$ и $n \in \omega$ выполнено $|C_{f|_n} \cap A| = \omega$. Предположим противное $|C_{f|_n} \cap A| < \omega$. Данное пересечение не пусто, поскольку $f \in P_A$. Пусть $C_{f|_n} \cap A = \{t_{k_1}, \ldots, t_{k_m}\}$. В силу $dom\ f|_n < dom\ t_{k_1} < \ldots < dom\ t_{k_m}$ получаем $|C_{f|_n} \setminus \bigcup\limits_{i=1,\ldots,m} C_{t_{k_i}}| = \omega$. То есть найдется s такое, что $f|_n < s$, $dom\ s > dom\ t_m$ и $s \in C_{f|_n} \setminus \bigcup\limits_{i=1,\ldots,m} C_{t_{k_i}}$. Значит $s \notin \bigcup\limits_{t_n \in A} C_{t_n}$.

Тогда из построения A следует, что найдется $k \notin \{k_1, \ldots, k_m\}$ такое, что $s < t_k$. Получаем $t_k \in C_{f|_n} \cap A$. Что противоречит предположению.

Множество P_A бесконечно. Из следствия 2.7 и того факта, что нарост A пересекается со многими F_f, следует, что A нельзя продолжить до полной антицепи.

3) Рассмотрим систему $\gamma = \{A^* \setminus D^* \colon D$ — строгая полная антицепь$\}$. По следствию 2.7 для любой строгой полной антицепи D найдётся $f \in P_2$ такое, что $D^* \subseteq F_f$.

В силу доказанного свойства 2, имеем $A^* \setminus \bigcup\limits_{i \leqslant n} D_i^* \neq \varnothing$. Тогда система γ центрирована и её элементы замкнуты, в силу пункта 3 теоремы 2.13. В бикомпактном расширении $S\mathfrak{B}_{1,2}$ пересечение центрированной системы замкнутых множеств не пусто, а значит найдется $\xi \in \cap\{U \colon U \in \gamma\}$. ξ и есть искомый ультрафильтр.

В $S\mathfrak{B}_{1,1}$ были введены понятия u-точки и l-точки. Анналогичные построения можно провести и для $S\mathfrak{B}_{1,2}$.

Определение 2.4 Точку $x \in S\mathfrak{B}_{1,2}^*$ назовем u-точкой, если $x = \cap\{C^*_{\pi|_M} \colon C_{\pi|_M} \in \xi\}$ для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{C_{\pi|_M} \in \xi\}\}$ в семействе множеств

$$\{C_{\pi|_M} \colon \pi \in T_2,\ M \subseteq \omega\}.$$

Определение 2.5 Точку $x \in S\mathfrak{B}_{1,2}^*$ назовем l-точкой, если $x = \cap\{C^* \colon C \in \xi\}$ для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{C\}$ в семействе множеств

$$\{\mathfrak{N}_2 \setminus \bigcup_{\pi \in T'} C_\pi \colon T' \subset T_2,\ |T'| < \omega\}.$$

Доказательства существования u и l-точек в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,2}$ полностью поторяют соответсвующие доказательсва проведенные для пространства $S\mathfrak{B}_{1,1}$ (теоремы 2.8, 2.9).

В $SB_{1,2}$, как и в пространсве $SB_{1,1}$ (теорема 2.10), полностью перенеся соответствующее доказательство, можно доказать следующую теорему:

Теорема 2.17 *Для точки $x \in S\mathfrak{B}_{1,2}^*$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Точка x является l-точкой, то есть имеет базу открыто-замкнутых окрестностей вида $[\mathfrak{N}_2 \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi]$.*

2. *Точка x является пределом сходящейся последовательности $\{\, f|_n \colon n \in \omega \,\} \subseteq \mathfrak{N}_2$.*

Отсюда получаем, что каждое из условий (1) или (2) является необходимым и достаточным, для того чтобы точка $x \in S\mathfrak{B}_{1,2}^*$ была l-точкой.

Так как $S\mathfrak{B}_{1,2}$ по теореме 2.12 вложимо в пространство $S\mathfrak{B}_{1,1}$, возникает вопрос, как соотносятся понятия u и l-точек в данных пространствах? Ответом на данный вопрос служат следующие теоремы.

Теорема 2.18 *Если $x \in S\mathfrak{B}_{1,2}$, тогда x не является u-точкой в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,1}$.*

Доказательство. Построим строгую антицепь $D \subseteq \mathfrak{N}_1 \setminus \mathfrak{N}_2$. Сначала упорядочим $\mathfrak{N}_2 = \{t_n \colon n \in \omega\}$. Для всякого $t_n \in \mathfrak{N}_2$ фиксируем $\tilde{t}_n \in \mathfrak{N}_1 \setminus \mathfrak{N}_2$ такое, что $t_n < \tilde{t}_n$, $dom\ \tilde{t}_n > dom\ \tilde{t}_n - 1$ и $\tilde{t}_n(m) = 2$, где $m = dom\ t_n + 1$. Таким образом в качестве $\tilde{t}_n$ берем достаточно длинное продолжение t_n, котрое уже в точке $m = dom\ t_n + 1$ выходит из $\mathfrak{N}_2$.

Построенное таким образом D является строгой антицепью, поскольку в противном случае нашлись бы $t_{n_1} \neq t_{n_2}$ из $\mathfrak{N}_2$ такие, что $\tilde{t}_{n_1} < \tilde{t}_{n_2}$. Поэтому либо $\tilde{t}_{n_1} \leqslant t_{n_2}$ (чего быть не может, поскольку $\tilde{t}_{n_1} \notin \mathfrak{N}_2$), либо $t_{n_2} < \tilde{t}_{n_1}$. Тогда либо $t_{n_1} < t_{n_2}$ (в этом случае $t_{n_2}(dom\ t_{n_1} + 1) = 2$), либо $t_{n_2} < t_{n_1}$.

Получаем, что $\tilde{t}_{n_2}|_m = t_{n_1}|_m$, где $m = dom\ t_{n_2} + 1$. А это противоречит тому, что $t_{n_1} \in \mathfrak{N}_2$. Антицепь D является строгой в силу того, что $dom\ \tilde{t}_n < dom\ \tilde{t}_{n+1}$.

Тогда найдутся $\pi \in T_1$ и $M \subseteq \omega$ такие, что $\pi(M) = D$. При этом $[D]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \subseteq [C_{\pi|M}]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$, $[C_{\pi|M}]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$ открыто-замкнутое множество и $[C_{\pi|M}]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \cap [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} = \varnothing$. Тогда $[D]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \cap [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} = \varnothing$.

Докажем, что $x \in [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$ не может быть u-точкой в $S\mathfrak{B}_{1,1}$. Предположим противное, тогда у точки x есть база из множеств вида $C_{\pi|_M}$. Поэтому если $t \in \mathfrak{N}_2 \cap Ox$, то $\tilde{t} \in D \cap Ox$.

Поскольку $x \in [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$, то $x \in [D]_{S\mathfrak{B}_{1,1}}$, а это противоречит тому, что $[D]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \cap [\mathfrak{N}_2]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} = \varnothing$. $\square$

Следствие 2.9 *Если x является u-точкой из $S\mathfrak{B}_{1,2}$, тогда x не является u-точкой в пространстве $S\mathfrak{B}_{1,1}$.*

Теорема 2.19

1) *Если x является l-точкой в $S\mathfrak{B}_{1,2}$, тогда x является l-точкой и в объемлющем пространстве $S\mathfrak{B}_{1,1}$.*
2) *Если x является l-точкой в $S\mathfrak{B}_{1,2}$, тогда для любого $X \subseteq \mathfrak{N}_1 \colon [X]_{S\mathfrak{B}_{1,1}} \setminus X = \{x\}$ выполнено $|X \setminus \mathfrak{N}_2| < \omega$.*

Доказательство.

1. Поскольку любая цепь из $\mathfrak{N}_2$ также является цепью и в $\mathfrak{N}_1$, а $S\mathfrak{B}_{1,2}$ вложимо в $SB_{1,1}$ как замкнутое подмножество (теорема 2.12), то теорема верна согласно эквивалентному определению l-точки (теорема 2.17).

2. Из теоремы 2.6 получаем что найдется бесконечное $X' \subseteq X$ такое, что $|X \setminus X'| < \omega$ и X' авляется цепью из $\mathfrak{N}_1$ которая сходится к x. С другой стороны согласно теореме 2.17, найдется бесконечная цепь $X'' \subset \mathfrak{N}_2$ которая также сходится к x.

   Если $|X' \setminus \mathfrak{N}_2| = \omega$, тогда найдется $s' \in X'$ такое, что $C_{s'} \cap X'' = \varnothing$ и $|X' \setminus C_{s'}| < \omega$. Таким образом, цепи X' и X'' можно отделить базисными окресностями, что противоречит тому, что они сходятся к одной точке. Получаем, что $|X' \setminus \mathfrak{N}_2| < \omega$, а значит и $|X \setminus \mathfrak{N}_2| < \omega$.

$\square$

2.3 Пространство $S\mathfrak{B}_{1,3}$.

Данное пространство отличается от двух рассмотренных ранее, тем что множество фиксированных ультрафильтров $\hat{\mathfrak{N}}_3$ не является его дискретным подпространством.

Лемма 2.3 *Множество свободных ультрафильтров $S\mathfrak{B}^*_{1,3}$ всюду плотно в $S\mathfrak{B}_{1,3}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное $U \in \Gamma_{1,3} \cup \Theta_{1,3}$.

Легко построить бесконечную цепь $\{s_n : n \in \omega\} \subseteq U$. Для этого достаточно заметить, что для произвольного $s \in U$ количество его продолжений на следующий шаг бесконечно, а по определению $\Gamma_{1,3}$и $\Theta_{1,3}$, только конечное их число может не содержаться в U.

Для каждого $k \in \omega$ определим $A_k = \{s_n : n \geqslant k\}$. Тогда для всякого A_k $(k \in \omega)$ выполнены следующие свойства:

1. $[A_k] \cap \hat{\mathfrak{N}}_3 = A_k$;
2. $[A_k] \subseteq U$.

Получаем центрированную систему замкнутых множеств $\{[A_k] : k \in \omega\}$ и, в силу бикомпактности $S\mathfrak{B}_{1,3}$, $\bigcap\limits_{k\in\omega} [A_k] \neq \varnothing$ и при этом $\bigcap\limits_{k\in\omega} [A_k] \subseteq S\mathfrak{B}^*_{1,3}$. □

Выделим несколько типов точек данного пространства, с базами определенного вида.

Лемма 2.4 $\Theta_{1,3} = \{\mathfrak{N}_3 \setminus (\bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi) : T' \subset T_3,\ |T'| < \omega\}$ *является базисом некоторого ультрафильтра ξ_0.*

Доказательство. Семейство $\Theta_{1,3}$ центрированно. Пусть $\xi_0 \in S\mathfrak{B}_{1,3}$ — ультрафильтр, мажорирующий $\Theta_{1,3}$. Никакое множество из $\Gamma_{1,3}$ вида $C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi$ $(T' \subset T_3,\ |T'| < \omega)$ ультрафильтру ξ_0 не принадлежит, поскольку $\mathfrak{N}_3 \setminus C_{\pi|M} \in \Theta_{1,3}$. Таким образом, $\Theta_{1,3}$—базис ультрафильтра ξ_0. □

Лемма 2.5 *Пусть $s \in \mathfrak{N}_3$. Семейство множеств*

$$\sigma_s = \{C_s \setminus \bigcup_{\pi\in T'} C_\pi : T' \subseteq T_3,\ |T'| < \omega,\ s \notin \bigcup_{\pi\in T'} C_\pi\}$$

является базисом фиксированного по s ультрафильтра $\hat{s}$.

Доказательство. Во-первых, отметим, что всякое множество семейства σ_s содержит s и является элементом булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,3}$, следовательно принадлежит ультрафильтру $\hat{s}$.

Если множество $C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi \in \hat{s}$ для некоторых $\pi \in T_3$, $T' \subseteq T_3$, $|T'| < \omega$, $M \subseteq \omega$, то $C_{\pi|M} \in \hat{s}$, а это значит, что $C_{\pi(n)} \ni s$ для некоторого $n \in M$.

Таким образом $C_{\pi(n)} \setminus \bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi \in \sigma_s$ и $C_{\pi(n)} \setminus \bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi \subseteq C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi$ □

Лемма 2.6 *Пусть $\alpha = \{s_n : n \in \omega\}$— бесконечная цепь в $\mathfrak{N}_3$. Тогда семейство непустых множеств*

$$\sigma_\alpha = \{C_s \setminus \bigcup_{\pi\in T'} C_\pi : T' \subseteq T_3,\ |T'| < \omega,\ \alpha \cap (\bigcup_{\pi\in T'} C_\pi) = \varnothing\}$$

является базисом свободного ультрафильтра ξ_α.

Доказательство. Из определения семейства σ_α следует, что семейство σ_α центрировано. Дополним σ_α до ультрафильтра, обозначим его ξ_α. Покажем, что σ_α является базисом этого ультрафильтра.

Пусть $C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi \in \xi_\alpha$ для некоторых $\pi \in T_3$, $T' \subseteq T_3$, $|T'| < \omega$ и $M \subseteq \omega$. Тогда найдутся $s_n \in \alpha$ и $m \in M$ такие, что $C_{\pi(m)} \ni s_n$. Действительно, в противном случае $\alpha \cap C_{\pi|M} = \varnothing$ и найдется $\pi' \in T_3$ такое, что $\pi'|M = \pi|M$ и $\alpha \cap C_{\pi'} = \varnothing$.

Тогда для $s_n \in \alpha$ имеем $U = C_{s_n} \setminus \big((\bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi) \cup C_{\pi'}\big) \in \sigma_\alpha$ и следовательно $U \in \xi_\alpha$. С другой стороны, поскольку $C_{\pi'} \supseteq C_{\pi|M}$, имеем $U \cap (C_{\pi|M} \setminus \bigcup\limits_{\pi\in T'} C_\pi) = \varnothing$, что противоречит центрированности ξ_α как ультрафильтра.

Поскольку α— бесконечная цепь, то ξ_α является свободным ультрафильтром. При этом для всякой бесконечной цепи $\alpha' \subseteq \alpha$ имеем $\xi_{\alpha'} = \xi_\alpha$. □

Множество свободных ультрафильтров ξ_α построенных по бесконечным цепям $\alpha \subseteq \mathfrak{N}_3$ будем обозначать $\hat{F}_1$, а сами ультрафильтры ξ_α будем называть ультрафильтрами первого рода.

Лемма 2.7 *Если $\xi \in S\mathfrak{B}^*_{1,3}$ свободный ультрафильтр и $\xi \notin \hat{F}_1 \cup \{\xi_0\}$, то найдется множество $C_{\pi|M}$ такое, что $\pi \in T_3$, $M \subseteq \omega$, $|M| = \omega$ и $\{\pi(n) \colon n \in M\}$ есть строгая антицепь и*

$$\xi \ni C_{\pi|M} \text{ и } C_{\pi(n)} \notin \xi \text{ для всякого } n \in M.$$

Доказательство. Предположим, что для всякого $C_{\pi|M}$ такого, что $C_{\pi|M} \in \xi$ найдется $n \in M$ такое,что $C_{\pi(n)} \in \xi$.

Рассмотрим семейство $\lambda = \{s \in \mathfrak{N}_3 \colon C_s \in \xi\}$. Тогда λ— цепь. В силу нашего предположения у ультрафильтра ξ есть базис $\sigma = \{C_s \setminus \bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi \colon \lambda \cap (\bigcup\limits_{\pi \in T'} C_\pi) = \varnothing,\ T' \subseteq T_3,\ |T'| < \omega\}$. Тогда ξ есть или фиксированный ультрафильтр или свободный ультрафильтр 1 рода, что противоречит условию леммы. □

Свободные ультрафильтры из множества $\hat{F}_2 = S\mathfrak{B}^*_{1,3} \setminus (\hat{F}_1 \cup \{\xi_0\})$ будем называть свободными ультрафильтрами второго рода.

Из лемм 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 следует

Теорема 2.20 $S\mathfrak{B}_{1,3} = \{\xi_0\} \cup \hat{\mathfrak{N}}_3 \cup \hat{F}_1 \cup \hat{F}_2$.

Лемма 2.8 *Пусть $\xi \in \hat{F}_1 \cup \hat{F}_2$ свободный ультрафильтр. Тогда существует $C_{\pi|M} \in \mathfrak{B}_{1,3}$ такое, что*

1. *$|M| = \omega$;*
2. *$\xi \ni C_{\pi|M}$;*
3. *если $\{M_k \colon k \leqslant k_0\}$— конечное разбиение M, то найдется k', $k' \leqslant k_0$ такое, что $|M_{k'}| = \omega$ и $\xi \ni C_{\pi|M_{k'}}$.*

Доказательство. Если $\xi \in \hat{F}_1$— свободный ультрафильтр 1 рода, который порожден полной цепью $\alpha = \{s_n \colon n \in \omega\}$, то определим $\pi \in T_3$ по правилу: $\pi(n) = s_n$. Положим $M = \omega$. Тогда C_π искомое множество.

Если $\xi \in \hat{F}_2$— свободный ульрафильтр 2 рода, то по лемме 2.7 существует $C_{\pi|M} \in \mathfrak{B}_{1,3}$ такое, что $|M| = \omega$, $\{\pi(n) \colon n \in M\}$ есть строгая антицепь и $\xi \in [C_{\pi|M}] \setminus \cup\big\{[C_{\pi(n)}] \colon n \in M\big\}$. Тогда $C_{\pi|M}$— искомое. □

Теорема 2.21 $c(S\mathfrak{B}^*_{1,3}) = \omega$.

Доказательство. Рассмотрим пройзвольную дизъюнктную систему открытых множеств $\nu = \{U_\alpha \colon \alpha \in A\}$ в $S\mathfrak{B}^*_{1,3}$. По теореме 1.2 найдется система множеств $\nu' = \{V_\alpha \colon \alpha \in A\}$ такая, что $V_\alpha \in \Gamma_{1,3} \cup \Theta_{1,3}$ и $[V_\alpha] \cap S\mathfrak{B}^*_{1,3} \subseteq U_\alpha$ для всех $\alpha \in A$.

Покажем, что ν' дизъюнктно. Предположим противное. Тогда найдутся α, $\beta \in A$ такие, что $V_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$. Заметим, $V_\alpha \cap V_\beta \in \mathfrak{B}_{1,3}$, а значит $[V_\alpha \cap V_\beta]$ открыто-замкнутое множество, и по лемме 2.3 справедливо $[V_\alpha \cap V_\beta] \cap S\mathfrak{B}^*_{1,3} \neq \varnothing$.

Получаем $\varnothing \neq [V_\alpha \cap V_\beta] \cap S\mathfrak{B}^*_{1,3} \subseteq [V_\alpha] \cap [V_\beta] \cap S\mathfrak{B}^*_{1,3} \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$, что противоречит дизъюнктности ν.

Предположим, что $|A| > \omega$. Тогда из дизъюнктности ν следует существование на счетном $\mathfrak{N}_3$ несчетной системы дизъюнктных множеств, чего быть не может. □

Теорема 2.22 *Подпространство свободных ультрафильтров $S\mathfrak{B}^*_{1,3}$ не сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $A = \{\xi_n \colon n \in \omega\}$— счетное подмножество $S\mathfrak{B}^*_{1,3} \setminus \{\xi_0\}$. Мы покажем, что существует строгая антицепь $\{s_n \colon n \in \omega\}$ такая, что $A \subseteq \big[\cup\{C_{s_n} \colon n \in \omega\}\big]$.

Рассмотрим произвольное $n \in \omega$ и $\xi_n \in A$. Обозначим $C_{\pi_n|M_n}$ множество булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,3}$ удовлетворяющее условиям леммы 2.8.

Тогда существует число $m_n \in \{0, \ldots, 10^{n+1} - 1\}$ такое, что для класса вычетов $\overline{m_n}$ по $mod\ 10^{n+1}$, определяемого числом m_n, выполняется $C_{\pi_n|\overline{m_n} \cap M} \in \xi$. Класс вычетов $\overline{m_n}$ состоит из точек вида $p^r_n = 10^{n+1} \cdot r + m_n$, где $r \in \omega$, $n \in \omega$. Обозначим $\overline{m_n}' = \{p^r_n \in \overline{m_n} \colon r \geqslant 1\}$.

Для любых чисел p^r_n, $p^{r-1}_n \in \overline{m_n}'$ $(r \geqslant 1)$ мы определим число k^r_n и $t^r_n \in \mathfrak{N}_3$ такие, что выполнены следующие условия:

(1) $p^{r-1}_n \leqslant k^r_n < p^r_n$;

(2) $dom\ t^r_n = k^r_n + 1$;

(3) $\pi_n(p^r_n) \geqslant t^r_n$;

(4) $k^r_n \neq k^{r'}_{n'}$ если не выполнено $n = n'$ и $r = r'$.

Мы будем обозначать $\widetilde{M_n} = \{k_n^r \colon r \geqslant 1\}$. Построение множеств $\{\widetilde{M_n} \colon n \in \omega\}$ будем осуществлять по индукции.

Для $n = 0$ положим $\widetilde{M_0} = \{\overline{m_0}'\}$.

Пусть построены множества $\widetilde{M_i}$ для $i < n$. Построим множество $\widetilde{M_n}$. Рассмотрим произвольные $r \geqslant 1$ и $p_n^r \in \overline{m_n}'$, то есть $p_n^r = 10^{n+1} \cdot r + m_n$. Рассмотрим также $p_n^{r-1} = 10^{n+1} \cdot (r-1) + m_n$.

Обозначим $I = \left[10^{n+1} \cdot (r-1) + m_n,\ 10^{n+1} \cdot r + m_n\right]$ отрезок натуральных чисел. Нетрудно видеть, что $|I \bigcap (\cup\{\widetilde{M_i} \colon i < n\})| < 10^{n+1}$. Тогда найдется число $k_n^r \in I \setminus \bigcup\{\widetilde{M_i} \colon i < n\}$. Обозначим $\widetilde{M_n} = \{k_n^r \colon r \geqslant 1\}$.

Для чисел k_n^r выберем и зафиксируем элемент $t_n^r \in \mathfrak{N}_3$ такой, что

$$t_n^r \leqslant \pi_n(p_n^r) \text{ и } dom\ t_n^r = k_n^r + 1.$$

Тогда для множеств $\{\widetilde{M_i} \colon i \leqslant n\}$ и $\{t_i^r \colon i \leqslant n,\ r \geqslant 1\}$ выполнены условия (1)-(4).

Таким образом построены множество $\widetilde{M} = \bigcup\limits_{n \in \omega} \widetilde{M_n}$ и множество $\{t(k_n^r) = t_n^r \colon k_n^r \in \widetilde{M}\}$.

В силу условия (4) множество $\bigcup\{C_{t(k_n^r)} \colon k_n^r \in \widetilde{M}\}$ есть элемент булевой алгебры $\mathfrak{B}_{1,3}$.

В силу условия (3) мы имеем

$$\xi_n \ni \bigcup\{C_{t(k_n^r)} \colon k_n^r \in \widetilde{M}\} \text{ для всех } n \in \omega,$$

и следовательно $\{\xi_n \colon n \in \omega\}$ лежит в открыто-замкнутом множестве $\left[\cup\{C_{t(k_n^r)} \colon k_n^r \in \widetilde{M}\}\right]$.

При этом $S\mathfrak{B}_{1,3} \setminus \left[\cup\{C_{t(k_n^r)} \colon k_n^r \in \widetilde{M}\}\right] \neq \varnothing$. $\square$

2.4 Пространства $S\mathfrak{B}_{2,1}$, $S\mathfrak{B}_{2,2}$ и $S\mathfrak{B}_{2,3}$.

Данные пространства существенно отличаются от рассмотренных ранее. Это связано с тем, что булевы алгебры здесь порождены другими семействами множеств. Пространство $S\mathfrak{B}_{2,3}$ отличается от двух других рассматриваемых в данном параграфе тем, что фиксированные ультрафильтры в нем не являются изолированными точками.

Рассмотрим пространство $S\mathfrak{B}_{2,2}$.

Лемма 2.9 *Для всякого свободного ультрафильтра $\xi \in S\mathfrak{B}^*_{2,2}$ найдется функция $f \in P_2$ такая, что семейство $\sigma_f = \{C_{f|_n} : n \in \omega\}$ является базисом ультрафильтра ξ.*

Доказательство. Покажем, что для всякого $n \in \omega$, $n \geqslant 1$, найдется $r \in \mathfrak{N}_2$ такой, что $dom\ r = n$ и $C_r \in \xi$.

Действительно, пусть найдется $n_0 \in \omega$ такое, что $C_r \notin \xi$ для всякого $r \in \mathfrak{N}_2$, $dom\ r = n_0$. Тогда множество $\mathfrak{N}_2 \setminus \cup\{C_r : dom\ r = n_0\}$ или пусто, если $n_0 = 1$, или есть элемент ультрафильтра ξ, и следовательно, ξ — фиксированный ультрафильтр, что противоречит нашему предположению.

По предложению 1.11 множество $\{r : C_r \in \xi\}$ является цепью и, следовательно, найдется $f \in P_2$ такая, что $\{C_r : C_r \in \xi\} = \{C_{f|_n} : n \in \omega\} = \sigma_f$. Будем обозначать ультрафильтр ξ как ξ_f.

Покажем, что σ_f является базисом ультрафильтра ξ_f. Пусть $C_s \setminus (\bigcup\limits_{t \in N'} C_t)$ $(N' \subset \mathfrak{N}_2,\ |N'| < \omega)$ — элемент базиса ультрафильтра ξ_f. Пусть $k = max\{dom\ s, dom\ t : t \in N'\}$. Тогда $C_{f|_{k+1}} \subseteq C_s \setminus (\bigcup\limits_{t \in N'} C_t)$, поскольку по предложению 1.11 $C_{f|_{k+1}} \subseteq C_s$ и $C_{f|_{k+1}} \cap (\bigcup\limits_{t \in N'} C_t) = \varnothing$. □

Очевидно, что если f, $g \in P_2$ различны, то $\xi_f \neq \xi_g$ и всякая функция $f \in P_2$ определяет свободный ультрафильтр, для которого семейство $\sigma_f = \{C_{f|_n} : n \in \omega\}$ является базисом.

Таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между множеством P_2 и множеством свободных ультрафильтров $S\mathfrak{B}^*_{2,2}$.

Теорема 2.23 *Пространства $S\mathfrak{B}^*_{2,1}$ и $S\mathfrak{B}^*_{2,2}$ гомеоморфны канторову совершенному множеству.*

Доказательство. Сперва докажем данную теорему для пространства $S\mathfrak{B}^*_{2,2}$. Пространство P_2 является произведением счетного числа двоеточий $\{0, 1\}$. Семейство множеств вида $O(s) = \{f \in P_2 : f|_{dom\ s} = s\}$, где $s \in \mathfrak{N}_2$, определяет базу тихоновской топологии на P_2. Пространство P_2 с тихоновской топологией гомеоморфно канторову совершенному множеству (см., например [1]).

Отображение $h : P_2 \to S\mathfrak{B}^*_{2,2}$ определим по правилу: если $f \in P_2$, то $h(f) = \xi_f$. Нетрудно видеть, что h является взаимно-однозначным, непрерывным, вместе с обратным, отображением пространства P_2 на $S\mathfrak{B}^*_{2,2}$.

Теперь докажем теорему для пространства $S\mathfrak{B}^*_{2,1}$. Хорошо известно ([1]), что всякое совершенное ограниченное нигде не плотное подмножество прямой гомеоморфно канторову совершенному множеству. Несложно построить ограниченное совершенное нигде не плотное множество на прямой, гомеоморфное пространству $S\mathfrak{B}^*_{2,1}$.

Нужно соответствующим образом изменить построение канторова множества, выкидывая на каждом i-ом шаге не один средний интервал из каждого отрезка а i интервалов. Тем самым будет построено совершенное ограниченное нигде не плотное подмножество прямой гомеоморфное пространству P_1 с тихоновской топологией. При этом анналогично лемме 2.9, легко показать, что P_1 с тихоновской топологией гомеоморфно пространству свободных ультрафильтров $S\mathfrak{B}^*_{2,1}$. □

Рассмотрим пространство $S\mathfrak{B}_{2,3}$. Сперва рассмотрим внутреннюю структуру пространства, дав характеристики его точкам.

Рассмотрим три вида ультрафильтров из $S\mathfrak{B}_{2,3}$. Для всякого $s \in \mathfrak{N}_3$ обозначим через $\hat{s}$ фиксированный ультрафильтр из $S\mathfrak{B}_{2,3}$, определяемый s, то есть состоящий из всех элементов булевой алгебры $\mathfrak{B}_{2,3}$, содержащих s.

Обозначим $\hat{\mathfrak{N}}_3 = \{\hat{s} : s \in \mathfrak{N}_3\}$ — множество всех фиксированных ультрафильтров из $S\mathfrak{B}_{2,3}$.

Лемма 2.10 *Пусть $\hat{s} \in \hat{\mathfrak{N}}_3$. Тогда семейство*

$$\sigma_s = \{C_s \setminus \bigcup_{t \in N'} C_t : s \notin \bigcup_{t \in N'} C_t,\ N' \subset \mathfrak{N}_3,\ |N'| < \omega\}$$

является базисом ультрафильтра $\hat{s}$.

Доказательство. Отметим, прежде всего, что $\sigma_s \subseteq \hat{s}$, поскольку всякий элемент семейства σ_s содержит s. Рассмотрим базис ультрафильтра $\hat{s}$, состоящий из элементов вида $C_r \setminus \bigcup\limits_{t\in N'} C_t$, где $r \in \mathfrak{N}_3$, $N' \subset \mathfrak{N}_3$, $|N'| < \omega$. И пусть $C_r \setminus \bigcup\limits_{t\in N'} C_t$ один из элементов этого базиса.

Поскольку $C_r \setminus \bigcup\limits_{t\in N'} C_t \ni s$, то $r \leqslant s$ и всякий элемент $t \in N'$ либо не сравним с s, либо $s < t$. Следовательно для множества $C_s \setminus \bigcup\limits_{t\in N'} C_t \in \sigma_s$ выполняется $C_s \setminus \bigcup\limits_{t\in N'} C_t \subseteq C_r \setminus \bigcup\limits_{t\in N'} C_t$. Таким образом, семейство σ_s есть базис ультрафильтра $\hat{s}$. □

Лемма 2.11 *Пусть $f \in P_3$ и $\{s_n = f|_n : n \in \omega\}$ полная цепь в $\mathfrak{N}_3$. Тогда семейство $\sigma_f = \{C_{s_n} : n \in \omega\}$ является базисом некоторого ультрафильтра $\xi_f \in S\mathfrak{B}_{2,3}$.*

Доказательство. Поскольку σ_f является центрированной системой множеств, её можно дополнить до ультрафильтра $\xi_f \in S\mathfrak{B}_{2,3}$. Покажем, что σ_f является базисом этого ультрафильтра. Отметим, что отсюда будет следовать единственность ультрафильтра ξ_f, мажорирующего σ_f.

Рассмотрим базис ультрафильтра ξ_f, состоящий из элементов семейства $\Gamma_{2,3} \cup \Theta_{2,3}$.

$$\Gamma_{2,3} = \Big\{ C_s \setminus \bigcup_{t\in N'} C_t : s \in \mathfrak{N}_i,\ N' \subset \mathfrak{N}_3,\ |N'| < \omega, \Big\}$$

$$\Theta_{2,3} = \Big\{ \mathfrak{N}_3 \setminus \bigcup_{t\in N'} C_t : N' \subset \mathfrak{N}_3,\ |N'| < \omega, \Big\}.$$

Пусть $C_r \setminus \bigcup\limits_{t\in N'} C_t$ — одно из множеств этого базиса.

Рассмотрим множество $C_{s_{n_0}} \in \sigma_f$ такое, что $dom\ s_{n_0} > max\{dom\ r,\ dom\ t\ (t \in N')\}$. Так как $\sigma_f \subseteq \xi_f$, то по предложению 1.11 имеем $C_r \supseteq C_{s_{n_0}}$ и $C_{s_{n_0}} \cap C_t = \varnothing$ для всех $t \in N'$. Следовательно, $C_{s_{n_0}} \subseteq C_r \setminus \bigcup\limits_{t\in N'} C_t$. Таким образом,семейство σ_f есть базис ультрафильтра ξ_f. □

Заметим, что, если $f, g \in P_3$ различны, то ультрафильтры ξ_f и ξ_g, определяемые цепями $\sigma_f = \{C_{f|_n} : n \in \omega\}$ и $\sigma_g = \{C_{g|_n} : n \in \omega\}$, различны.

Отметим также, что всякая полная цепь в $\mathfrak{N}_3$ — это множество вида $\{f|_n : n \in \omega\}$ для некоторой $f \in P_3$.

Обозначим $\hat{F} = \{\xi_f : f \in P_3\}$, где ξ_f — ультрафильтр, мажорирующий семейство $\sigma_f = \{C_{f|_n} : n \in \omega\}$ для $f \in P_3$.

Лемма 2.12 *Семейство $\Theta_{2,3} = \Big\{ \mathfrak{N}_3 \setminus \bigcup\limits_{t\in N'} C_t : N' \subset \mathfrak{N}_3,\ |N'| < \omega, \Big\}$ является базисом некоторого ультрафильтра $\xi_0 \in S\mathfrak{B}_{2,3}$.*

Доказательство. Семейство $\Theta_{2,3}$ центрированно. Пусть $\xi_0 \in S\mathfrak{B}_{2,3}$— ультрафильтр, мажорирующий $\Theta_{2,3}$. Имеем, с одной стороны, $\Theta_{2,3} \subseteq (\Gamma_{2,3} \cup \Theta_{2,3})$, с другой стороны, никакое множество из $\Gamma_{2,3}$ вида $C_s \setminus \bigcup\limits_{t\in N'} C_t$ ультрафильтру ξ_0 не принадлежит. Таким образом, $\Theta_{2,3}$— базис ультрафильтра ξ_0. □

Как итог этих лемм, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.24 $S\mathfrak{B}_{2,3} = \{\xi_0\} \cup \hat{F} \cup \hat{\mathfrak{N}}_3$.

Доказательство. Пусть $\xi \in SB_{2,3}$ — произвольный ультрафильтр.

Положим $A = \{C_s : C_s \in \xi,\ s \in \mathfrak{N}_3\}$. Возможны три случая:

(1) $A = \varnothing$;

(2) A конечно;

(3) A бесконечно.

(1) Пусть $A = \varnothing$. Тогда $\sigma_0 = \{\mathfrak{N}_3 \setminus C_s : s \in N_3\} \subseteq \xi$ и следовательно $\xi = \xi_0$.

(2) Пусть A конечно, $A = \{C_{s_i} : i \leqslant k\}$. По предложению 1.11 множество A является конечной цепью, будем считать, что $C_{s_0} \subseteq \ldots \subseteq C_{s_k}$. Тогда $\bigcap\limits_{i\leqslant k} C_{s_i} = C_{s_k}$ и $C_{s_k} \in \xi$.

Покажем, что ξ есть фиксированный ультрафильтр $\hat{s_k}$, что означает, что всякий элемент ξ содержит s_k. Рассмотрим базис ультрафильтра ξ, состоящий из элементов семейства $\Gamma_{2,3} \cup \Theta_{2,3}$.

Пусть $C_r \setminus \bigcup\limits_{t\in N'} C_t$ — одно из множеств этого базиса. Отметим, во-первых, что $r \leqslant s_k$. Действительно, если r не сравним с s_k, то $(C_r \setminus \bigcup\limits_{t\in N'} C_t) \cap C_{s_k} = \varnothing$, если $s_k < r$, то получаем противоречие с максимальностью s_k в A.

Итак, $r \leqslant s_k$, следовательно $s \in C_r$. Для всякого $t \in N'$ имеем либо $s_k < t$, либо t не сравним с s_k. В противном случае $C_{s_k} \notin \xi$.

Следовательно, $s_k \in C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t$. Таким образом, всякий элемент $C_r \setminus \bigcup\limits_{t \in N'} C_t$ базиса ультрафильтра ξ содержит s_k и $\xi = \hat{s_k}$.

(3) Пусть A бесконечно. Тогда по предложению 1.11 A является бесконечной цепью. Пусть $\sigma_f = \{f|_n : n \in \omega\}$ для некоторой функции $f \in \omega^\omega$ — полная цепь, содержащая A. Тогда σ_f является базисом ультрафильтра $\xi_f \in \hat{F}$ и $\xi_f = \xi$. □

Таким образом пространство $S\mathfrak{B}_{2,3}$ состоит из точки ξ_0, множества пределов цепей элементов из $\mathfrak{N}_3$ и множества фиксированных ультрафильтров.

Основными результатами для данного пространства являются теоремы о связи подпространства $\hat{F}$ и пространства $S\mathfrak{B}_{2,3}$ с подмножествами прямой.

Теорема 2.25 *Подпространство $\hat{F}$ пространства $S\mathfrak{B}_{2,3}$ гомеоморфно множеству иррациональных чисел.*

Доказательство. Множество P_3 является счетным произведением счетных множеств. Для всякого $s \in \mathfrak{N}_3$ определим множество $O(s) = \{f \in P_3 : f|_{dom\ s} = s\}$. Тогда семейство $\{O(s) : s \in N_3\}$ является базой тихоновской топлогии на P_3. Хорошо известно, что $P_3 = \omega^\omega$ с тихоновской топологией гомеоморфно множеству $\mathbb{P}$ иррациональных чисел (см., например, [1]).

Покажем, что подмножество $\hat{F} \subseteq S\mathfrak{B}_{2,3}$ гомеоморфно P_3 с тихоновской топологией. Построим отображение $\phi : P_3 \to \hat{F}$ по правилу: если $f \in P_3$, то $\phi(f) = \xi_f$. Не трудно видеть, что ϕ есть взаимно-однозначное отображение P_3 на $\hat{F}$. Его непрерывность и непрерывность обратного отображения следует из того, что $\phi(O(s)) = [C_s] \cap \hat{F}$. □

Теорема 2.26 *Пространство $S\mathfrak{B}_{2,3}$ гомеоморфно канторову совершенному множеству.*

Доказательство. Напомним, что всякое совершенное ограниченное нигде не плотное подмножество прямой гомеоморфно канторову совершенному множеству (смотри например [1]).

Построим нигде не плотное совершенное подмножество J отрезка [0,1], гомеоморфное пространству $SB_{2,3}$.

Для произвольного отрезка $[a,b]$ семейство отрезков $\{[a_i,b_i] : i \in \omega\}$ назовем правильным, если $a_0 = \frac{a+b}{2}$, $a_{i+1} > b_i$ для всякого $i \in \omega$, и последовательность $\{a_i : i \in \omega\}$ сходится к точке b.

Рассмотрим отрезок [0,1]. Обозначим $\Delta_0 = \{[a_{i^0},b_{i^0}] : i^0 \in \omega\}$ — правильное семейство для отрезка [0,1]. Положим $\tilde{\Delta}_0 = \cup\{[a_{i^0},b_{i^0}] : i^0 \in \omega\}$ — тело семейства Δ_0, $\bar{\Delta}_0 = [\tilde{\Delta}_0]$. Очевидно, $\bar{\Delta}_0 = \tilde{\Delta}_0 \cup \{1\}$.

Пусть $\delta_{i^0} = \{[a_{i^0 i^1},b_{i^0 i^1}] : i^1 \in \omega\}$ — правильное семейство для отрезка $[a_{i^0},b_{i^0}]$ $(i^0 \in \omega)$.

Положим $\Delta_1 = \cup\{\delta_{i^0} : i^0 \in \omega\}$, $\tilde{\Delta}_1$ — тело семейства Δ_1, $\bar{\Delta}_1 = [\tilde{\Delta}_1]$.

Нетрудно видеть, что $\bar{\Delta}_1 = \tilde{\Delta}_1 \cup \{1\} \cup \{b_{i^0} : i^0 \in \omega\}$.

Пусть $\delta_{i^0 i^1} = \{[a_{i^0 i^1 i^2},b_{i^0 i^1 i^2}] : i^2 \in \omega\}$ — правильное семейство для отрезка $[a_{i^0 i^1},b_{i^0 i^1}] \in \Delta_1$, $(i^0,i^1 \in \omega)$. Тогда $\Delta_2 = \cup\{\delta_{i^0 i^1} : i^0,i^1 \in \omega\}$, $\tilde{\Delta}_2$ — тело Δ_2, $\bar{\Delta}_2 = [\tilde{\Delta}_2]$.

Нетрудно видеть, что $\bar{\Delta}_2 = \tilde{\Delta}_2 \cup \{1\} \cup \{b_{i^0} : i^0 \in \omega\} \cup \{b_{i^0 i^1} : i^0,i^1 \in \omega\}$.

Продолжая этот процесс построения, получим для всякого $k \in \omega$ семейство

$$\Delta_k = \cup\{\delta_{i^0 \ldots i^k} : i^0, \ldots, i^k \in \omega\},$$

где $\delta_{i^0 \ldots i^k}$ — правильное семейство для отрезка $[a_{i^0 \ldots i^k},b_{i^0 \ldots i^k}]$,

$$\delta_{i^0 \ldots i^k} = \{[a_{i^0 \ldots i^k i^{k+1}},b_{i^0 \ldots i^k i^{k+1}}] : i^{k+1} \in \omega\},$$

$\tilde{\Delta}_k$ — тело Δ_k, $\bar{\Delta}_k = [\tilde{\Delta}_k]$.

Имеем $\bar{\Delta}_k = \tilde{\Delta}_k \cup \{1\} \cup \{b_{i^0} : i^0 \in \omega\} \cup \ldots \cup \{b_{i^0 \ldots i^k} : i^0, \ldots, i^k \in \omega\}$.

Положим $J = \cap\{\bar{\Delta}_k : k \in \omega\}$. Нетрудно видеть, что J—совершенное нигде не плотное подмножество отрезка [0,1]. Точками множества J являются точки $\{1\}$, $\{b_{i^0 \ldots i^k} : i^0, \ldots, i^k \in \omega, k \in \omega\}$ а также точки $x(f)$, где $f \in P_3$, определяемые следующим образом

$$x(f) = [a_{f(0)},b_{f(0)}] \cap \ldots \cap [a_{f(0) \ldots f(k)},b_{f(0) \ldots f(k)}] \cap \ldots \ .$$

Базу окресностей в точке $\{1\}$ образуют множества вида $([0,1] \setminus [a_{i^0 \ldots i^k},b_{i^0 \ldots i^k}]) \cap J$. Базу окресностей в точке $\{b_{i^0 \ldots i^k}\}$ образуют множества вида $([a_{i^0 \ldots i^k},b_{i^0 \ldots i^k}] \setminus [a_{i^0 \ldots i^k i^{k+1}},b_{i^0 \ldots i^k i^{k+1}}]) \cap J$. Базу окрестностей в точках $x(f)$, $f \in P_3$ образуют множества вида $[a_{f(0) \ldots f(k)},b_{f(0) \ldots f(k)}] \cap J$.

Рассмотрим отображение $h : S\mathfrak{B}_{2,3} \to J$, определяемое по следующему правилу:

- $h(\xi_0) = 1$;

- для фиксированного ультрафильтра $\hat{s} \in \hat{\mathfrak{N}}_3$, где $s \in \mathfrak{N}_3$, то есть $s = f|_n$ для некоторой функции $f \in P_3$ и $n \in \omega$, положим $h(\hat{s}) = b_{f(0)\ldots f(n-1)}$;
- для ультрафильтра $\xi_f \in \hat{F}$, определяемого функцией $f \in P_3$, положим $h(\xi_f) = x(f)$.

Из конструкции и определения топологий пространств $S\mathfrak{B}_{2,3}$ и J следует, что $h\colon S\mathfrak{B}_{2,3} \to J$ — взаимно-однозначное и непрерывное вместе с обратным отображение $S\mathfrak{B}_{2,3}$ на J. $\square$

Литература

[1] Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П. С. Александров // Москва: «Наука », 1977.

[2] Архангельский А. В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты / А. В. Архангельский // Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, № 6. — С. 29–34.

[3] Архангельский А. В. Основы общей топологии в задачах и упражнениях / А. В. Архангельский, В. И. Пономарёв // Москва: «Наука», 1974.

[4] Бастрыков Е. С. О некоторых точках расширения Белла счётного дискретного пространства / Е. С. Бастрыков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Т. 4. — С. 3–6. — URL: http://vestnik.udsu.ru/2009/2009-014/vuu_09_014_01.pdf.

[5] Грызлов А. А. О бикомпактых расширениях дискретных пространств / А. А. Грызлов // Фундаментальная и прикладная математика. — 1996. — Т. 2, № 3. — С. 803–848.
URL: http://www.math.msu.su/~fpm/rus/96/963/96306t.htm.

[6] Грызлов А. А. Некоторые центрированные системы множеств и определяемые ими точки / А. А. Грызлов, Е. С. Бастрыков // Труды ИММ. — 2011. — Т. 4.

[7] Малыхин В. И. Ненормальность некоторых подпространств βX, где X-дискретное пространство / В. И. Малыхин // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 211. — С. 781–783.

[8] Сикорский Р. Булевы алгебры / Р. Сикорский // Москва: «Мир», 1969.

[9] Энгелькинг Р. Общая топология / Р. Энгелькинг // Москва: «Мир», 1986. — С. 751.

[10] Bell M. G. Compact ccc non-separable spaces of small weight / M. G. Bell // Topology Proceedings. — 1980. — Vol. 5. — P. 11–25.
URL: http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf.

[11] Gryzlov A. A. On the Rudin – Keisler order on ultrafilters / A. A. Gryzlov // Topol. Appl. — 1997. — Vol. 76. — P. 151–155.

[12] Gryzlov A. A. Independent matrices and some points of $\beta\tau$ / A. A. Gryzlov // Topol. Appl. — 2002. — Vol. 107. — P. 79–81.

[13] Gryzlov A. A. On convergent sequences and copies of βN in the Stone space of one boolean algebra / A. A. Gryzlov // Topology Proceedings. — 2013. — jul. — Vol. 42. — P. 165–171.
URL: http://topology.auburn.edu/tp/reprints/v42/.

[14] Frolik Z. Homogenity problems for extremally disconnected spaces / Z. Frolik // Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1967. — Vol. 8. — P. 757–763.

[15] Frolik Z. Sums of ultrafilters / Z. Frolik // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — Vol. 73. — P. 87–91.

[16] Kunen K. Ultrafilters and independent sets / K. Kunen // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 172. — P. 295–306.

[17] Kunen K. Some points in βN / K. Kunen // Math. Proc. Cambrige Phil. Soc. — 1976. — Vol. 80. — P. 385–398.

[18] Kunen K. Weak p-points in N^* / K. Kunen // Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 23 Topology. — Budapest, 1978. — P. 741–749.

[19] van Mill J. Weak p-points in compact P-spaces / J. van Mill // Topology Proceedings. — 1979. — Vol. 4, no. 2. — P. 605–628.

[20] van Mill J. An introduction to $\beta\omega \setminus \omega$. / J. van Mill // — Amsterdam: Vrige Univ., 1981.

[21] van Mill J. Weak p-points in Chech – Stone compactifications / J. van Mill // Trans. Amer. Math. Soc. — 1982. — Vol. 173, no. 2. — P. 657–678.

[22] Rudin M. E. Types of ultrafilters / M. E. Rudin // Topology Seminar. — Wisconsin, 1965. — P. 145.

[23] Rudin M. E. Partial orders on the types in βN / M. E. Rudin // Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 155, no. 2. — P. 353–362.

[24] Rudin M. E. Lectures on set-theoretic topology / M. E. Rudin // Reg. Conf. Ser. Math.23, Univ. Wyoming. — 1974.

[25] Rudin W. Homogenety problems in the theory of Čech compactifications / W. Rudin // Duke Math. J. — 1956. — Vol. 23, no. 3. — P. 409–426.

[26] Golovastov R. A. On Bell's compactification of N / A. A. Gryzlov, E. S. Bastrykov, R. A. Golovastov // Topology Proceedings. — 2010. jul. — Vol. 35. — P. 177–185. — URL: http://topology.auburn.edu/tp/reprints/v35/.

[27] Головастов Р. А. О точках одного бикомпактного расширения N / А. А. Грызлов, Е. С. Бастрыков, Р. А. Головастов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2010. — Т. 3. — С. 10–17.

[28] Головастов Р. А. Об одном бикомпактном расширении счетного дискретного пространства / Р. А. Головастов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2011. — Т. 1. — С. 14–19.

[29] Головастов Р. А. О пространстве Стоуна одной булевой алгебры / Р. А. Головастов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2012. — Т. 3. — С. 19–24.

[30] Головастов Р. А. О пространствах Стоуна булевых алгебр и канторовом совершенном множестве / А. А. Грызлов, Р. А. Головастов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2013. — Т. 1. — С. 11–16.

[31] Головастов Р. А. О плотности и числе Суслина подмножеств одного пространства Стоуна / А. А. Грызлов, Р. А. Головастов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2015. — Т. 1. — С. 3–8.

[32] Головастов Р. А. О некоторых бикомпактных расширениях счётных дискретных пространств / Е. С. Бастрыков, Р. А. Головастов // Труды мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — Т. 36. — 2007. — С. 23–24.

[33] Головастов Р. А. О расширении Белла / Р. А. Головастов // XXXVI итоговая студенческая научная конференция, посвященная 450-летию добровольного вхождения Удмуртии в состав Российского государства: материалы конф. — Удмуртский государственный университет, 2008. апр. — С. 7–8.

[34] Golovastov R. A. On a compactification of N / A. A. Gryzlov, E. S. Bastrykov, R. A. Golovastov // 23th Summer Conference on Topology and Its Applications. — Mexico: National Autonomous University of Mexico, 2008. jul.

[35] Головастов Р. А. О некоторых классах точек расширения Белла счетного дискретного пространства / Р. А. Головастов // Тезисы 41-й всероссийской школы-конференции. — Екатеринбург, 2010. февр. — С. 110–113.

[36] Головастов Р. А. Об одной компактификации счетного дискретного пространства / Р. А. Головастов // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2011». — М.: МАКС Пресс, Электронный ресурс, 2011. апр.

[37] Головастов Р. А. О пространствах Стоуна некоторых булевых алгебр / Р. А. Головастов // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2013».— М.: МАКС Пресс, Электронный ресурс, 2013. апр.

[38] Golovastov R. A. On the Stone spaces of some boolean algebras / A. A. Gryzlov, R. A. Golovastov // Problems of modern topology and applications: abstracts of the international conference. — Tashkent, 2013. may.

Учебное издание

Грызлов Анатолий Александрович,

Головастов Роман Александрович,

Бастрыков Евгений Станиславович

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ СТОУНА НЕКОТОРЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел.: + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru