Л. П. Сметанина, О. В. Максимова

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Ижевск
2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра математического анализа

Л. П. **Сметанина**, О. В. **Максимова**

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Методические рекомендации

Ижевск
2023

УДК 517.27
ББК 22.161.5
С502

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензенты: канд. физ.-мат .наук, ст. науч. сотрудник УдмФИЦ УрО РАН А.Ю. Дроздов,

учитель математики МБОУ «СОШ №69 с углубленным изучением отдельных предметов» О. В. Коновалова.

Сметанина Л. П., Максимова О. В.

С502 Функции и графики : метод. рек. - Ижевск : Удмуртский университет, 2023. — 40с.

В методических рекомендациях приведены краткие теоретические сведения, изложена методика исследования функций и построение графиков, а также представлены индивидуальные работы.

Данные рекомендации предназначены для студентов уровня бакалавриата всех направлений и всех форм обучения Института нефти и газа им. М.С.Гуцериева и Института экономики и управления в Удмуртском государственном университете.

УДК 517.27
ББК 22.161.5

Содержание

Введение

Данные методические рекомендации подготовлены преподавателями кафедры математического анализа и отражают многолетний опыт при проведении занятий и организации самостоятельной работы студентов Института нефти и газа им. М.С.Гуцириева и Института экономики и управления в Удмуртском государственном университете.

Пособие предназначено для методического обеспечения раздела «Дифференциальное исчисление» курса «Высшая математика».

В пособии содержатся краткие теоретические сведения, изложена методика выполнения работ по исследованию функций, приведены примеры и индивидуальные задания. Индивидуальные задания могут быть использованы для организации работы на практических занятиях, а также как индивидуальные домашние задания.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения раздела:

— универсальные компетенции

УК-1 способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

— общепрофессиональные компетенции

ОПК-1 способность решать задачи, относящиеся к профессиональной деятельности, применяя методы моделирования, математического анализа, естественнонаучные и общеинженерные знания.

Пособие предназначено обеспечить студентов наглядным вспомогательным материалом и индивидуальными заданиями при изучении курса «Высшая математика» и может быть использовано для студентов других нематематических направлений УдГУ.

1 Основные элементарные функции и их графики

Рассмотрим числовые множества X и Y.

Функция $y = f(x)$ — это правило или закон f, по которому каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие единственное число $y \in Y$.

x — аргумент или независимая переменная,

y — функция или зависимая переменная.

$D(f)$ = область определения функции $f(x)$ = Множество X = Все возможные значения независимой переменной x.

$E(f)$ = Область значений функции $f(x)$ = Множество Y, состоящее из всевозможных чисел $f(x)$ при $x \in X$.

График функции $y = f(x), \quad x \in X$ — это множество всех точек (x, y) плоскости xOy, для которых значение аргумента x — абсцисса, значение функции y — ордината.

Прямая пропорциональность — это функция, заданная формулой $y = kx$, где $k \neq 0$ — коэффициент пропорциональности, равный $\operatorname{tg}\alpha$, α — угол наклона, который образует прямая с положительным направлением оси абсцисс.

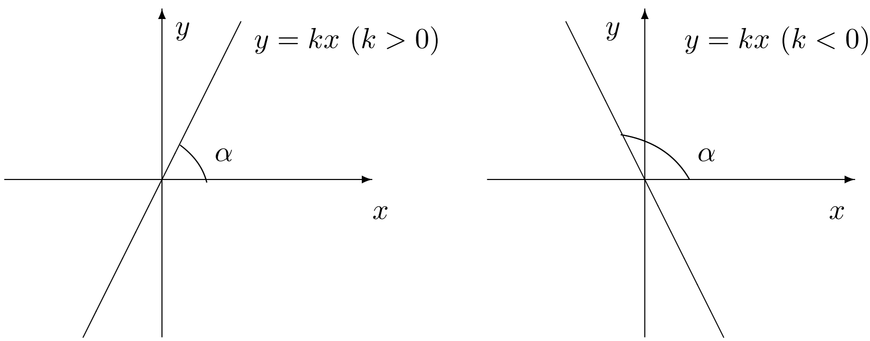


Рис. 1: График прямой пропорциональности

Линейная функция — это функция, заданная формулой $y = kx + b$, где k, $b \in \mathbb{R}$ — некоторые числа. График функции — прямая.

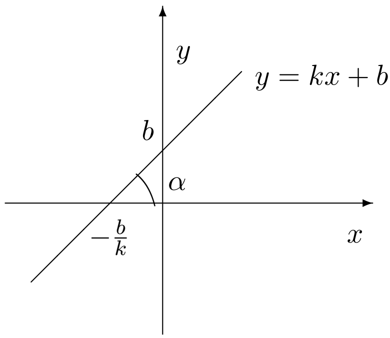


Рис. 2: График линейной функции

Обратная пропорциональность — это функция, определяемая формулой $y = \dfrac{k}{x}$, где $k \neq 0$ — коэффициент обратной пропорциональности. Графиком функции является гипербола.

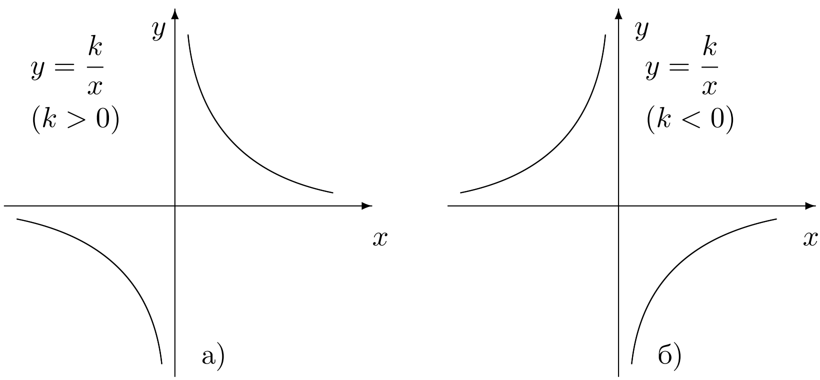


Рис. 3: График обратной пропорциональности — гипербола

Квадратичная функция — это функция, заданная с помощью формулы $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$ — некоторые числа. Графиком функции является парабола

В общем случае для исследования квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

требуется найти вершину параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = y(x_0) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Отметим, что парабола имеет ось симметрии $x = x_0$.

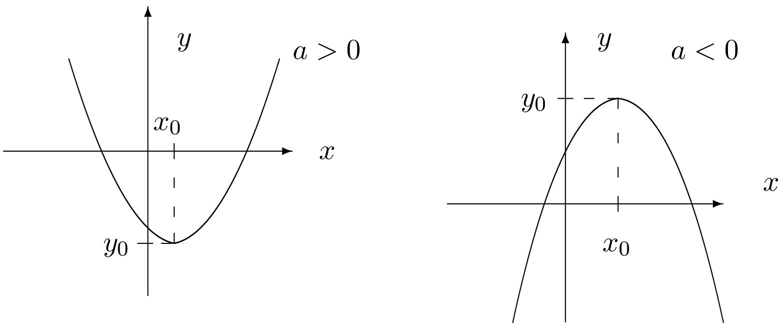


Рис. 4: График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$

Кубическая функция — функция, заданная формулой $y = x^3$. Графиком функции является кубическая парабола.

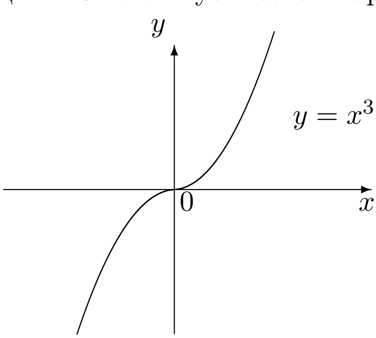


Рис. 5: График кубической функции

Степенная функция с натуральным показателем — это функция, заданная формулой $y = x^n,\ n \in \mathbb{N}$.

При $n = 1$ функция $y = x$ — прямая пропорциональность.

При $n = 2$ квадратичная функция $y = x^2$.

При $n = 3$ получаем кубическая функция $y = x^3$.

При четных n $(4, 6, 8, \ldots)$ график функции $y = x^n$ напоминает параболу $y = x^2$.

При нечетных n $(5, 7, 9, \ldots)$ график функции $y = x^n$ напоминает кубическую параболу $y = x^3$.

Степенная функция с целым отрицательным показателем — это функция, заданная формулой $y = x^{-n},\ n \in \mathbb{N}$.

При $n = 1$ получаем $y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ — обратная пропорциональность.

При нечетных n $(3, 5, 7, \ldots)$ график функции $y = \dfrac{1}{x^n}$ напоминает гиперболу $y = \dfrac{1}{x}$, только располагается ближе к осям.

При четных n $(2, 4, 6, \ldots)$ график функции $y = \dfrac{1}{x^n}$ напоминает гиперболу, но расположен в первой и второй координатных четвертях, и располагается ближе к осям.

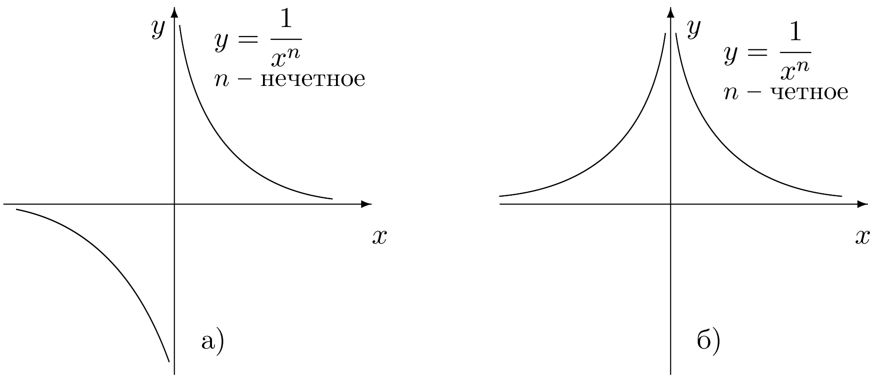


Рис. 6: График степенной функции с целым отрицательным показателем

Функция корня n-й степени — функция, заданная формулой $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

При $n = 2$ функция имеет вид $y = \sqrt{x}$. График представляет собой одну ветвь «перевернутой» параболы.

При $n = 3$ функция имеет вид $y = \sqrt[3]{x}$. График представляет собой «перевернутую» кубическую параболу.

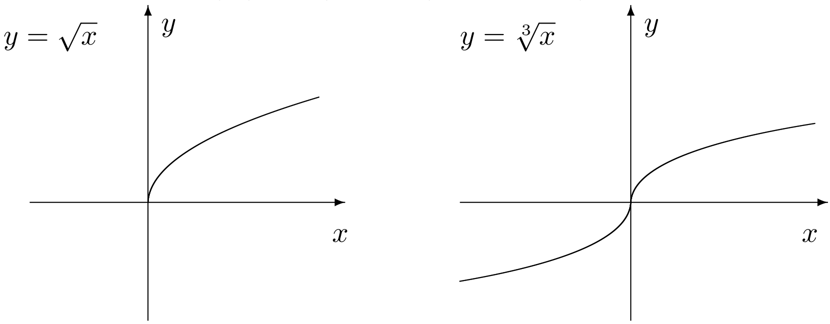


Рис. 7: График функции $y = \sqrt[n]{x}$ ($n = 2$, $n = 3$)

При четном n график функции $y = \sqrt[n]{x}$ напоминает график функции $y = \sqrt{x}$.

При нечетном n график функции $y = \sqrt[n]{x}$ напоминает график функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Показательная функция — это функция, заданная формулой $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Логарифмическая функция — это функция, заданная с помощью формулы $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Логарифмическая функция является обратной к показательной функции $y = a^x$ (поэтому график логарифмической функции симметричен графику показательной функции относительно прямой $y = x$).

Тригонометрические функции — семейство элементарных функций, в которое входят функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

График функции $y = \sin x$ называется синусоида.

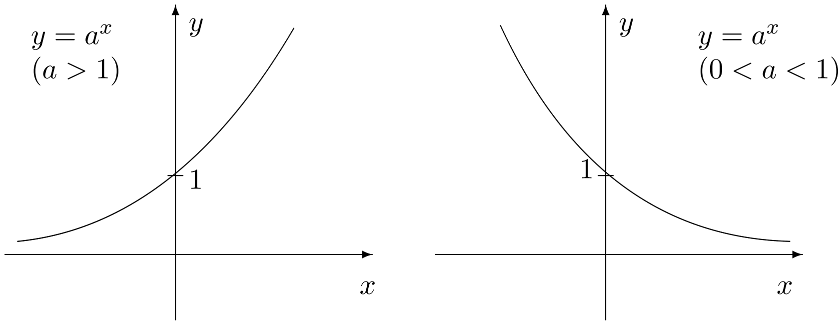


Рис. 8: График показательной функции

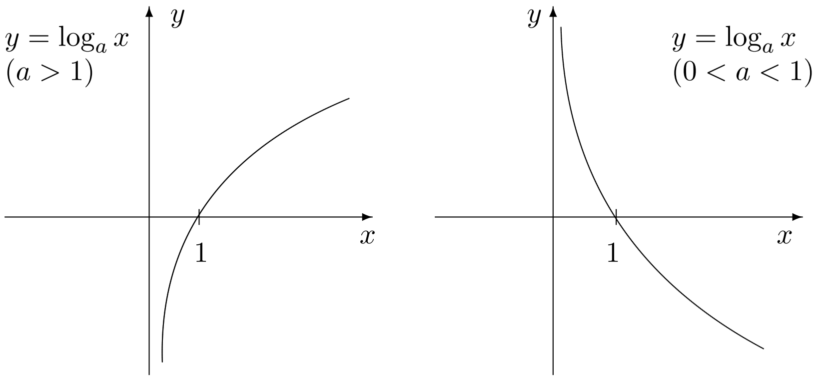


Рис. 9: График логарифмической функции

График функции $y = \cos x$ называется косинусоида.

Обратные тригонометрические функции — семейство функций, в которое входят функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

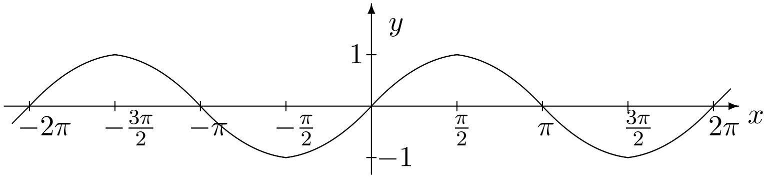


Рис. 10: График функции $y = \sin x$

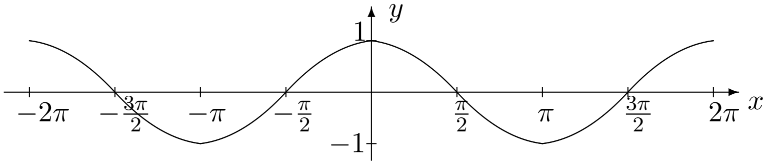


Рис. 11: График функции $y = \cos x$

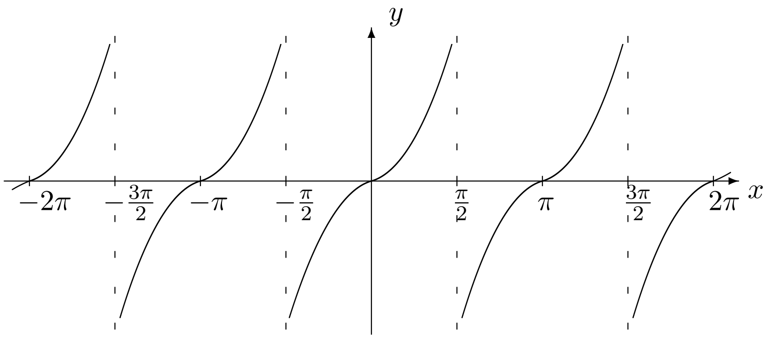


Рис. 12: График функции $y = \operatorname{tg} x$

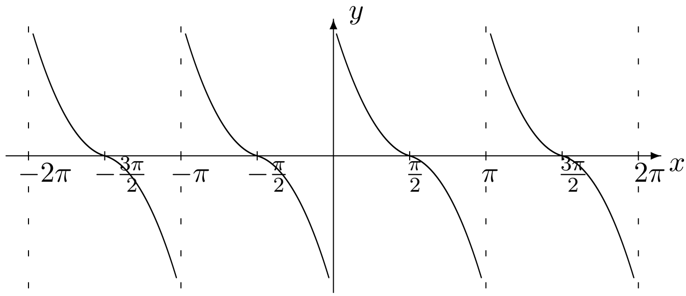


Рис. 13: График функции $y = \operatorname{ctg} x$

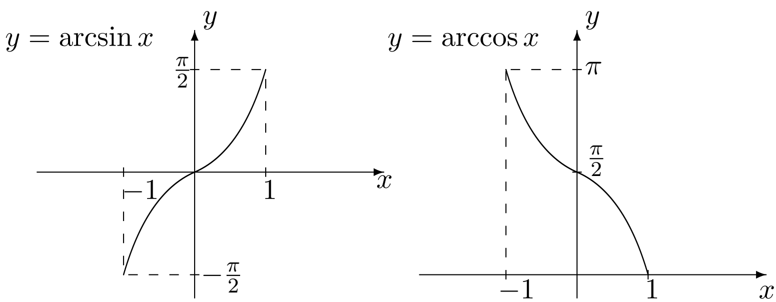


Рис. 14: Графики арксинуса и арккосинуса

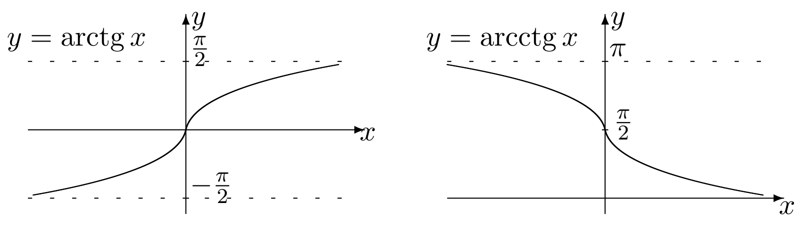


Рис. 15: Графики арктангенса и арккотангенса

2 Преобразования графиков функций

Виды преобразований:

1) параллельный перенос;
2) симметрическое отображение;
3) растяжение и сжатие.

2.1 Параллельный перенос

(А) Построение график функции $y = f(x) + a$ — сдвиг графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на a единиц вверх.

(Б) Построение график функции $y = f(x) - a$ — сдвиг графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на a единиц вниз.

Пример 1. Построить график функции $y = 2^x - 1$.

Получим искомый график $g(x) = 2^x - 1$ из графика функции $f(x) = 2^x$ с помощью сдвига на 1 единицу вниз (g(x)=f(x)-1).

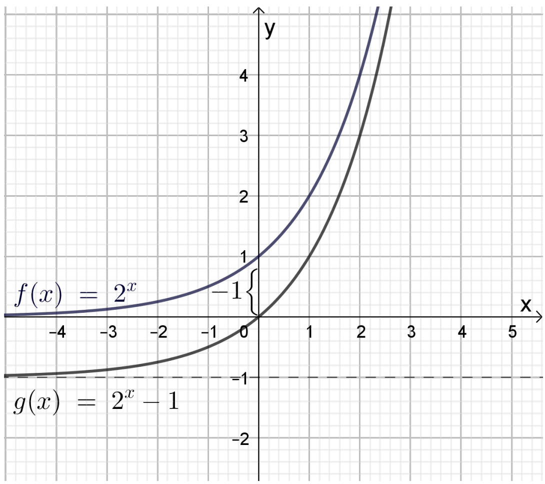


Рис. 16: Пример 1. График функции $y = 2^x - 1$

(В) Построение графика функции $y = f(x + a)$ — сдвиг (параллельный перенос) графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на a

единиц влево.

(Г) Построение графика функции $y = f(x - a)$ — сдвиг графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на a вправо.

Пример 2. Построить график функции $y = (x - 2)^2 + 1$.

Получим искомый график из графика функции $y = x^2$ с помощью сдвига на 1 единицу вверх и на две единицы вправо.

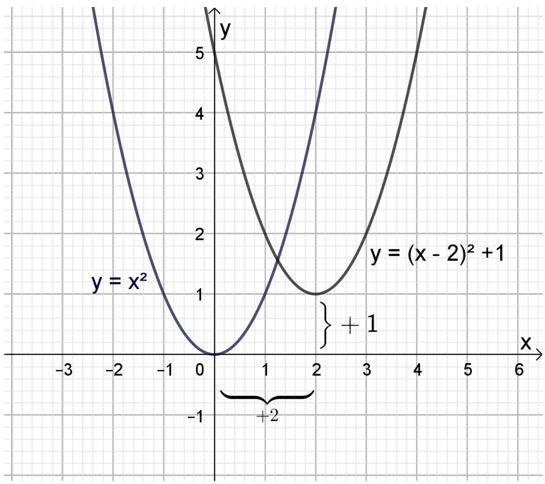


Рис. 17: Пример 2. График функции $y = (x - 2)^2 + 1$

2.2 Отображение относительно осей

(А) Для построении графика функции $y = -f(x)$ следует график функции $y = f(x)$ отобразить симметрично относительно оси Ox.

(Б) Для того, чтобы построить график функции $y = f(-x)$, следует график функции $y = f(x)$ симметрично отобразить относительно оси Oy.

График функции с модулем можно получить, если отображать части графика $y = f(x)$ относительно той или иной координатной оси.

(В) Для построения графика функции $y = f(|x|)$ необходимо выполнить следующие шаги:

1) построить график функции $y = f(x)$ при $x \geqslant 0$;

2) полученную линию отобразить относительно оси Oy.

Пример 3. Построить график функции $y = \sqrt[3]{|x|}$.

График функции $y = \sqrt[3]{|x|}$ получим из графика функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Часть графика при $x < 0$ пропадает, часть графика при $x \geqslant 0$ оставляем без изменения и отображаем симметрично относительно оси ординат.

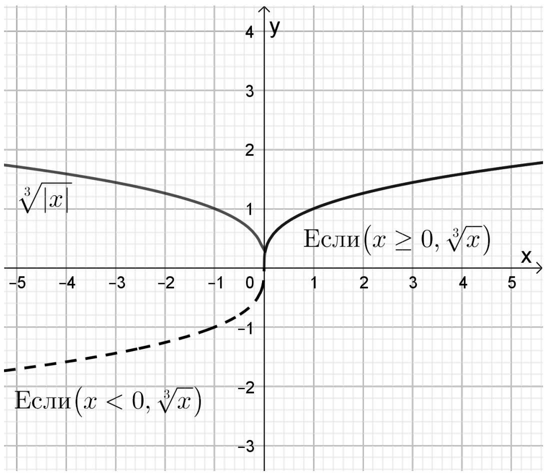


Рис. 18: Пример 3. График функции $y = \sqrt[3]{|x|}$

(Г) Для построения графика функции $y = |f(x)|$ необходимо выполнить следующие шаги:

1) построить график функции $y = f(x)$;

2) часть графика при $y \geqslant 0$ остается без изменений, а часть графика при $y < 0$ отобразить симметрично относительно оси Ox.

Пример 4. Построить график функции $y = |\log_2 x|$.

График функции $y = |\log_2 x|$ получим из графика функции $y = \log_2 x$.

Часть графика при $y < 0$ отображаем симметрично относительно оси абсцисс.

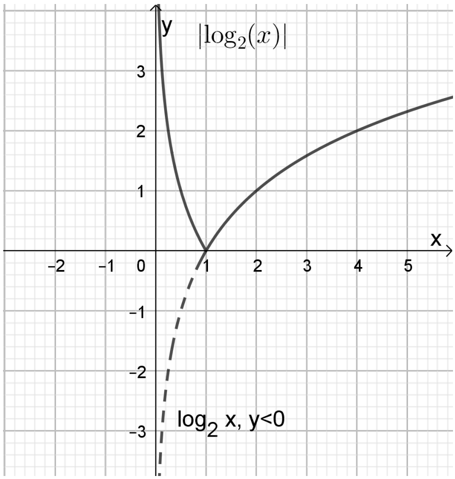


Рис. 19: Пример 4. График функции $y = |\log_2 x|$

2.3 Растяжение и сжатие

(А) Для построения графика функции $y = kf(x)$, где k — положительное число, каждую ординату точек графика функции $y = f(x)$ нужно умножить на k.

В случае $k > 1$ — растяжение относительно оси Oy.

В случае $0 < k < 1$ — сжатие относительно оси Oy.

(Б) Для построения графика функции $y = f(kx)$, где $k > 0$ — необходимо абсциссы всех точек графика функции $y = f(x)$:

уменьшить в $k > 1$ раз, если $k < 1$ (сжатие графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox);

увеличить в $\dfrac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$ (растяжение графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox).

3 Простейшие неэлементарные функции

3.1 Сигнум

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

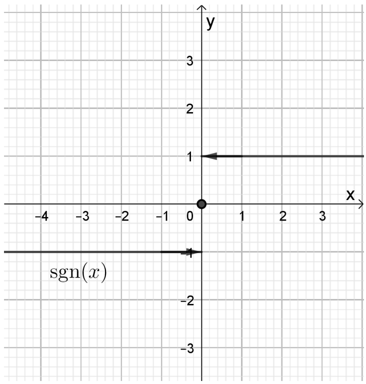


Рис. 20: График функции $y = \operatorname{sgn} x$

3.2 Целая часть числа

Целая часть числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x.

Обозначение $y = [x]$.

Если x — целое число, то $[x] = x$;

если x — нецелое число, то $[x] < x$, то есть $[x] \leqslant x$.

3.3 Дробная часть числа

Дробная часть числа x — это разность между числом x и его целой частью.

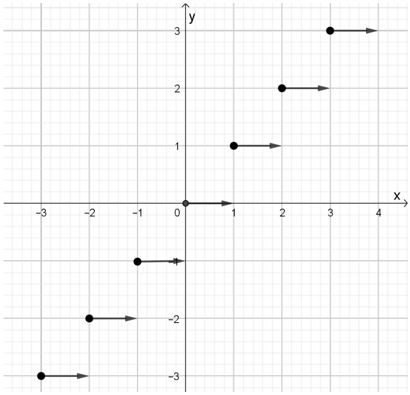


Рис. 21: График целой части числа

Обозначение $y = \{x\}$.
Если x — целое число, то $\{x\} = 0$;
если x — нецелое число, то $0 < \{x\} < 1$.

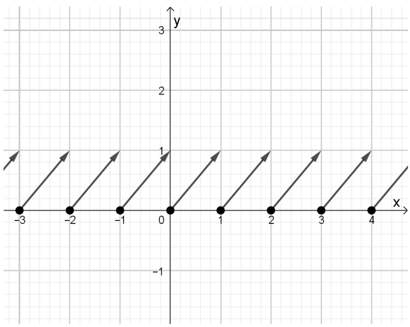


Рис. 22: График дробной части числа

3.4 Функция Хевисайда

$$y = \eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

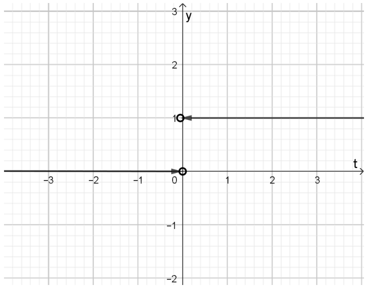


Рис. 23: График функции Хевисайда

График функций, заданных с помощью пределов
$y = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - x^{2n}),\ |x| \leqslant 1.$
Если $x = \pm 1$, то $y = 0$.
Если $x = 0$, $y = 1$.
Если $|x| < 1$, то $x^{2n} \to 0$ при $n \to \infty$ и $y = 1$.

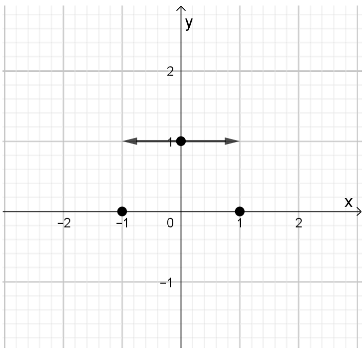


Рис. 24: График функции, заданной с помощью пределов

4 Исследование функции, асимптоты

Асимптота кривой (графика функции) — прямая, расстояние до которой от точек кривой (графика функции) стремится к нулю при неограниченном удалении этих точек от начала координат.

1) Вертикальные асимптоты.
2) Горизонтальные асимптоты.
3) Наклонные асимптоты.

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \text{ - предел справа}$$

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \text{ - предел слева}$$

Прямая $x = a$ — вертикальная асимптота графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$.

Пример 1. Исследовать функцию $y = \dfrac{2}{x+1}$.

1. Область определения функции $D(y) = (\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
2. Рассмотрим поведении функции при $x \to -1$.

$$\lim_{x\to -1+} \frac{2}{x+1} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to -1-} \frac{2}{x+1} = -\infty$$

$$x = -1 \text{ — вертикальная асимптота}$$

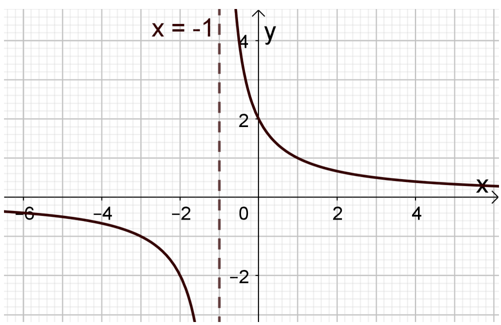


Рис. 25: Пример 1. $y = \dfrac{2}{x+1}$

Прямая $y = b$ — горизонтальная асимптота графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

Пример 2. Исследовать функцию $y = \dfrac{4+x^2}{x^2+1}$.

1. Область определения функции $D(y) = \mathbf{R} = (\infty;\, +\infty)$.

2. Рассмотрим поведении функции при неограниченном возрастании аргумента $(x \to \pm\infty)$.

$y = \dfrac{4+x^2}{x^2+1} = \dfrac{(x^2+1)+3}{x^{+}1} = 1 + \dfrac{3}{x^2+1}$

При $x \to \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad x^2 \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad x^2+1 \to +\infty \quad \Longrightarrow$ $\dfrac{3}{x^2+1} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad y \to 1.$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4+x^2}{x^2+1} = 1.$

Следовательно, $y = 1$ — горизонтальная асимптота графика функции $y = \dfrac{4+x^2}{x^2+1}$.

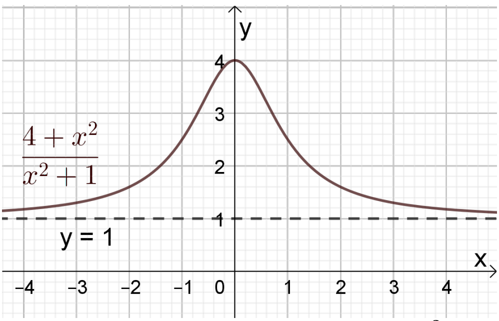


Рис. 26: Пример 2. $y = \dfrac{4+x^2}{x^2+1}$

Уравнение наклонной асимптоты для графика функции $y = f(x)$ определяется в виде $y = kx + b$, где k, b — числа.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx).$$

При $k = 0$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. Следовательно $y = b$ — горизонтальная асимптота.

Замечание. Асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть разными.

Пример 3. Исследовать функцию $y = \dfrac{|x|\cdot(x-2)}{x+1}$.

1. Вертикальные асимптоты. Область определения функции $D(y) = (\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

$$\lim_{x\to -1+} \frac{|x|\cdot(x-2)}{x+1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to -1-} \frac{|x|\cdot(x-2)}{x+1} = +\infty$$
$$x = -1 \text{ — вертикальная асимптота}$$

2. Наклонные и горизонтальные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$$

Рассмотрим два случая $x > 0$ и $x < 0$.

$$\text{Если } x > 0 \implies k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot(x-2)}{(x+1)\cdot x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\cdot\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = 1$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x\cdot(x-2)}{x+1} - x\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2} - 2x - \cancel{x^2} - x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{x+1} = -3$$

$$y = x - 3 \text{ — наклонная асимптота правой ветви графика функции } (x > 0)$$

$$\text{Если } x < 0 \implies k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(-x) \cdot (x-2)}{(x+1) \cdot x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x+2}{x+1} = -1$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x \cdot (x-2)}{x+1} + x \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\cancel{x^2} + 2x + \cancel{x^2} + x}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x+1} = 3$$

$y = -x + 3$ — наклонная асимптота левой ветви графика функции $(x < 0)$

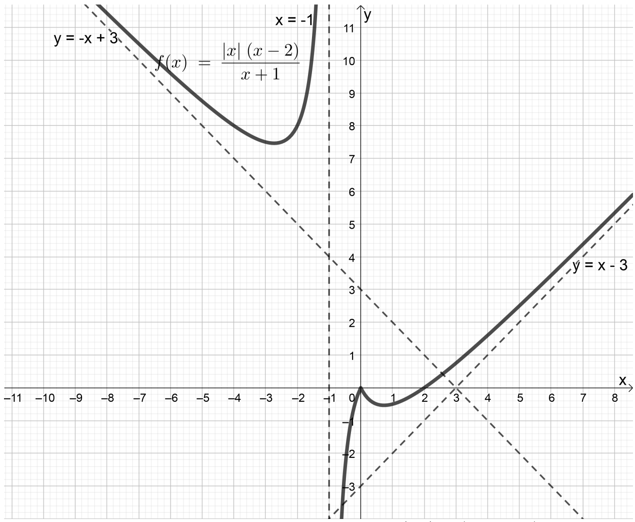


Рис. 27: Пример 3. $y = \dfrac{|x| \cdot (x-2)}{x+1}$

5 Полное исследование функции

Пример 1. Провести исследование функции $y = e^{\frac{1}{x-1}}$. Построить график.

1. Область определения функции $D(y) = (\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. В точке $x = 1$ функция терпит разрыв.

$$\lim_{x\to 1+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$$

$x = -1$ — вертикальная асимптота графика функции

2. Функция непериодическая.

Функция $y = f(x)$ — периодическая функция на множестве D, если существует такое число $T > 0$, что выполнено $f(x+T) = f(x)$ для любого $x \in D$.

Для заданной функции

$$f(x+T) \neq f(x), \qquad \text{для любого } T > 0.$$

3. Находим наклонные (горизонтальные) асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x} = \begin{bmatrix} x-1 \to \infty \\ \frac{1}{x-1} \to 0 \\ e^{\frac{1}{x-1}} \to 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1$$

$y = 1$ — горизонтальная асимптота графика

4. Убывание и возрастание функции на интервале. Точки максимума и минимума функции.

Если для функции $f(x)$ на $(a; b)$ выполнено $f'(x) \leqslant 0$ $(f'(x) \geqslant 0)$ тогда функция убывает (возрастает) на $(a; b)$.

Найдем $y'(x)$.

$$y' = e^{\frac{1}{x-1}} \left(-\frac{1}{(x-1)^2} \right)$$

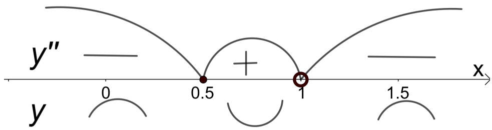
Производная отрицательна на всей числовой оси, кроме $x = 1$. Следовательно, функция убывает всюду, где она определена. Точек экстремума (максимума, минимума) нет.

5. Выпуклость графика функции на интервале.

Если для функции $f(x)$ на $(a;\, b)$ выполнено $f''(x) \leqslant 0$ ($f''(x) \geqslant 0$) тогда функция выпукла вверх (выпукла вниз) на $(a;\, b)$.

Найдем y'';

$$y'' = \frac{2x-1}{(x-1)^4} e^{\frac{1}{x-1}}$$



$x = \dfrac{1}{2}$ — точка перегиба, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = e^{-2}$.

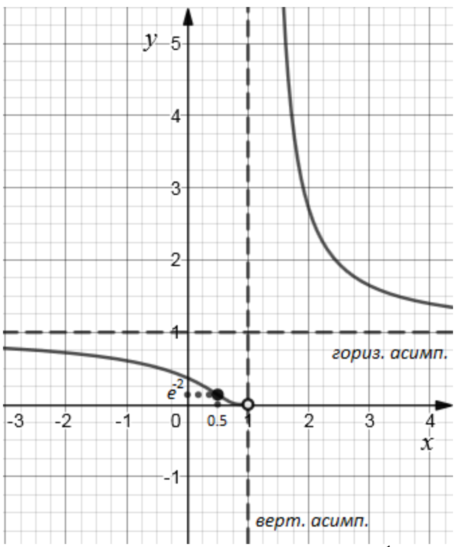


Рис. 28: Пример 1. $y = e^{\frac{1}{x-1}}$

Пример 2. Провести исследование и построить график функции $y = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}$.

1. Область определения функции $D(y) = \mathrm{R} = (\infty; +\infty)$. Вертикальных асимптот нет.

2. Функция непериодическая.

3. Находим наклонные (горизонтальные) асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{2/3} \cdot \left(\boxed{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}}^{\to 1} + \boxed{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}-1\right)^2}}^{\to 1} \right)}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} \right) = \infty$$

Нет наклонных (горизонтальных) асимптот.

4. Убывание и возрастание функции на интервале. Точки максимума и минимума функции.

Найдем y'.

$$y' = \frac{2}{3}(1+x)^{-1/3} + \frac{2}{3}(1-x)^{-1/3} \cdot (-1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$$

$$y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 - x = 1 + x \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

y' не существует в точках $x = \pm 1$

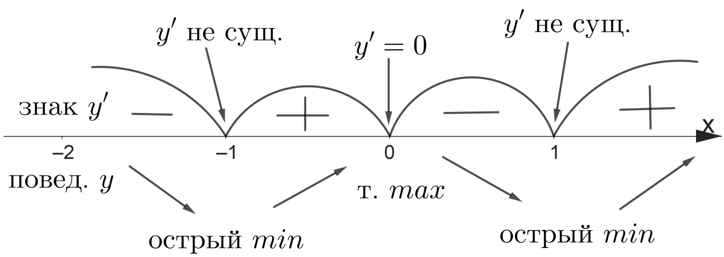


Рис. 29: Пример 2. Монотонность и точки экстремума

5. Выпуклость графика функции на интервале.

Найдем y''

$$y'' = -\frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^4}}\right)$$

$$y'' < 0 \text{ при всех } x \neq \pm 1$$

Функция выпукла вверх на $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

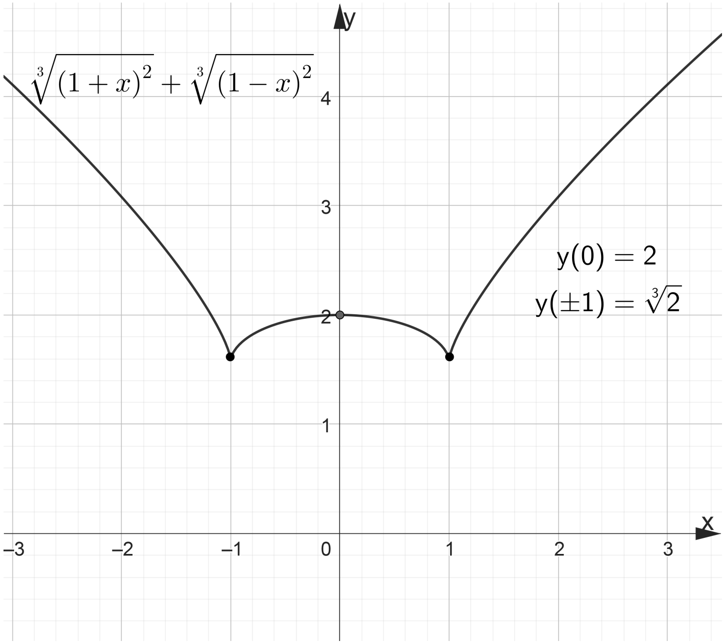


Рис. 30: Пример 2. $y = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}$

Пример 3. Провести исследование и построить график функции $y = e^{-\sin x - \cos x}$.

Применим формулу

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Тогда $y = e^{-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$

1. Область определения функции $D(y) = \mathrm{R} = (\infty; +\infty)$. Вертикальных асимптот нет.

2. Функция периодическая с периодом 2π.

3. Наклонных (горизонтальных) асимптот нет.

4. Убывание и возрастание функции на интервале. Точки максимума и минимума функции.

Найдем y'.

$$y' = e^{-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \quad \Longrightarrow$
$x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$

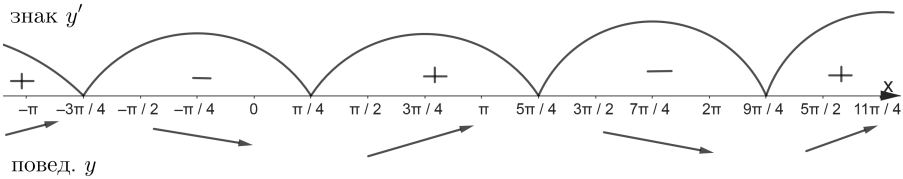


Рис. 31: Пример 3. Монотонность и точки экстремума

5. Выпуклость графика функции на интервале.

Найдем y''

$$y'' = e^{-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)} \cdot \left(-\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+e^{-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\left(-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=e^{-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\left(-\sqrt{2}\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=-e^{-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$y''=0$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=t,\quad |t|\leqslant 1$$

$$\sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2}=0$$

$$D=9,\quad t_{1,\,2}=\frac{1\pm 3}{2\sqrt{2}}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\text{ — п.р.}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x+\frac{\pi}{4}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \mathrm{Z}$$

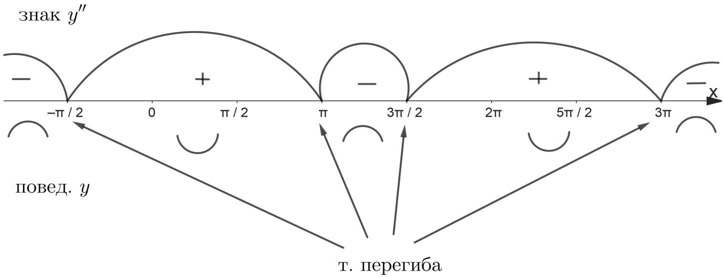


Рис. 32: Пример 3. Выпуклость функции

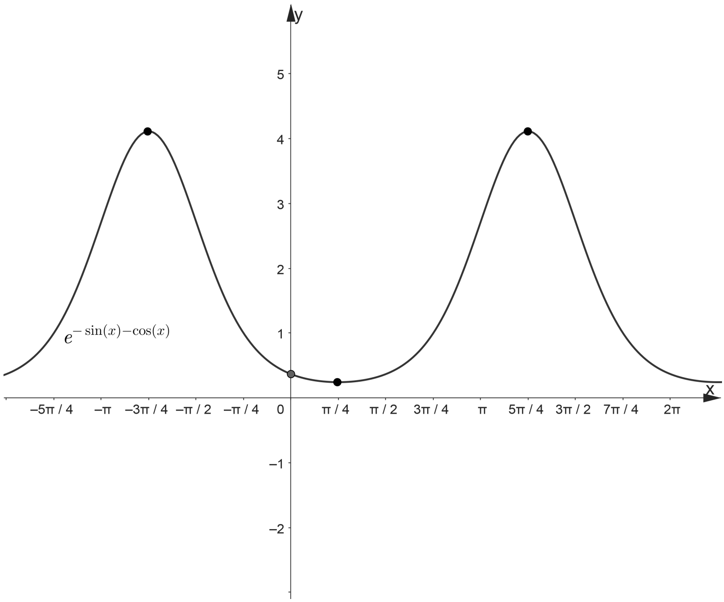


Рис. 33: Пример 3. $y = e^{-\sin x - \cos x}$

6 Тестовые задания

1. Если x_1 и x_2 — абсциссы точек экстремума функции $y = (x+6)^2 \cdot (5x-1)$, то произведение $x_1 \cdot x_2$ равно

1) $\dfrac{58}{5}$ 2) $-\dfrac{57}{5}$ 3) $\dfrac{56}{5}$

2. Если у графика $y = 4x^3 + 3x^2 + x - 1$ есть точка перегиба, то абсцисса этой точки равна

1) $\dfrac{1}{2}$ 2) $-\dfrac{1}{4}$ 3) $-\dfrac{1}{2}$

3. Дана производная функции $f(x)$ $\quad f'(x) = (x-2)(x-3)$. Если x_0 — точка максимума, то x_0 равна

1) -3 2) -2 3) 2

4. Дана производная функции $f(x)$ $\quad f'(x) = x(3-x)$. Функция убывает на промежутке (промежутках)

1) $(0;\, 3)$ 2) $(-\infty;\, 0)$ 3) $(-\infty;\, 0) \cup (3;\, +\infty)$

5. Дана вторая производная функции $f(x)$ $\quad f''(x) = (x-2)^2(x-3)$. Найдите абсциссу точки перегиба

1) -3 2) 2 3) 3

6. Вертикальной асимптотой графика функции $y = \frac{3x}{2x-1}$ является прямая

1) $x = 0$ 2) $x = \dfrac{1}{2}$ 3) $x = 2$

7. Горизонтальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{3x}{2x-1}$ является прямая

1) $y = x$ 2) $y = \dfrac{1}{2}$ 3) $y = \dfrac{3}{2}$

8. Наклонной асимптотой графика функции $y = \dfrac{2x^2}{3x-1}$ является прямая

1) $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{9}$ 2) $y = \dfrac{2}{3}x$ 3) $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}$

9. $f''(x) = (x+1)(x-3)$, тогда график функции $f(x)$ является выпуклым на

1) $(-1;\, 3)$ 2) $(-\infty;\, -1)$ 3) $(3;\, \infty)$

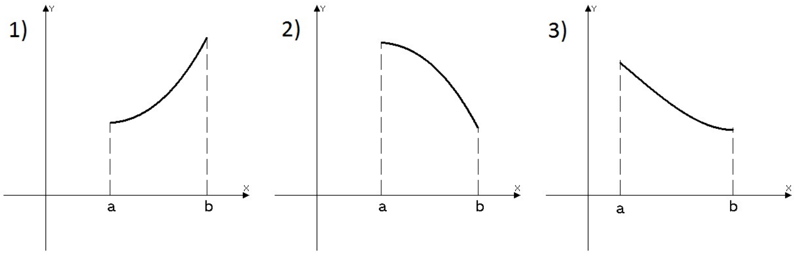
10. Число экстремумов для функции $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5}{2}x^2 + 4x$ равно

1) 1 2) 2 3) 3

11. Необходимым условием минимума дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 является

1) $f'(x_0) < 0$ 2) $f'(x_0) \geqslant 0$ 3) $f'(x_0) = 0$

12. График какой функции одновременно удовлетворяет условиям $y > 0$, $y' < 0$, $y'' < 0$



13. Найти точку максимума функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 72x + 7$

1) -4 2) 3 3) 4

14. Найти точку минимума функции $f(x) = 2x^3 - 24x + 3$

1) -2 2) -1 3) 2

15. Длина промежутка убывания функции $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 10x + 4$ равна

1) 6 2) 7 3) 8

16. Длина промежутка возрастания функции $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 - 28x - 7$ равна

1) 5 2) 3 3) 1

17. Наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x + 1$ на отрезке $[0; 3]$ равно

1) -5 2) -4 3) 0

18. Наибольшее значение функции $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ на отрезке $[0; 5]$ равно

1) 0 2) 8 3) 9

19. График функции $y = (x-3)^2 + 4$ получается из графика $y = f(x)$

1) сдвигом на 4 ед вверх

2) сдвигом на 3 ед влево

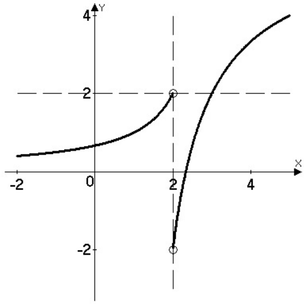
3) сдвигом на 3 ед вправо и 4 ед вверх

20. График функции $y = |x^2 - 4|$ получается из графика $y = f(x)$

1) сдвигом на 4 ед вверх
2) сдвигом на 3 ед влево
3) сдвигом на 3 ед вправо и 4 ед вверх

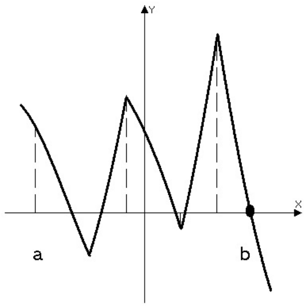
21. Если графику функции $y = f(x)$ отвечает условие $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = a$, то a равно

1) -2 2) $-\infty$ 3) 2

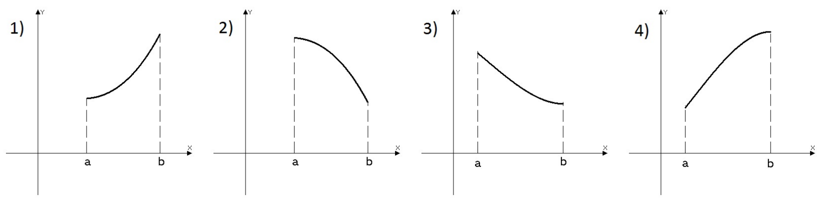


22. Функция задана графически. Определить на $(a; b)$ число точек, в которых производная не существует

1) 6 2) 4 3) 3



23. График функции на $[a; b]$ удовлетворяет условию $y > 0$, $y' < 0$, $y'' > 0$



24. Точкой максимума функции $y = \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$ является точка

1) $2 + 2\sqrt{2}$ 2) $2 - 2\sqrt{2}$ 3) -2

7 Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Построить график функции $\begin{cases} 0, & x \in (-\infty;\ -1] \\ 2^x - 3, & x \in (-1;\ 2) \\ 3 - x, & x \in [2;\ +\infty) \end{cases}$

2. Для функции $y = x + \dfrac{4}{x^2}$ провести полное исследование и построить график.

3. Для функции $y = (x-2)^2 \cdot (x+3)$ провести полное исследование и построить график.

4. Для функции $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$ провести полное исследование и построить график.

Вариант 2

1. Построить график функции $\begin{cases} 0, & x \in (-\infty;\ -1] \\ \log_2(x+2), & x \in (-1;\ 2) \\ 2 + x, & x \in [2;\ +\infty) \end{cases}$

2. Для функции $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ провести полное исследование и построить график.

3. Для функции $y = (x-2)(x+3)(x-1)$ провести полное исследование и построить график.

4. Для функции $y = x^2 - 2\ln x$ провести полное исследование и построить график.

Вариант 3

1. Построить график функции $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & x \in (-\infty;\ -1] \\ 2\,\mathrm{arctg}\,x, & x \in (-1;\ 1) \\ 1 - x^2, & x \in [1;\ +\infty) \end{cases}$

2. Для функции $y = x - \dfrac{1}{2x^2}$ провести полное исследование и построить график.

3. Для функции $y = (x+1)^2 \cdot (x-2)$ провести полное исследование и построить график.

4. Для функции $y = x - \ln(1 + x^2)$ провести полное исследование и построить график.

Вариант 4

1. Построить график функции $\begin{cases} -1, & x \in (-\infty;\ -2] \\ \sqrt[3]{x+1}, & x \in (-2;\ 0) \\ 2 + x^2, & x \in [0;\ +\infty) \end{cases}$

2. Для функции $y = 2x^2 + \dfrac{1}{x}$ провести полное исследование и построить график.

3. Для функции $y = (x-1)^2 \cdot (x+3)$ провести полное исследование и построить график.

4. Для функции $y = x + \ln(x^2 - 4)$ провести полное исследование и построить график.

Вариант 5

1. Построить график функции $\begin{cases} 0, & x \in (-\infty;\ -1] \\ \sin \pi x, & x \in (-1;\ 1) \\ (x-2)^2 + 1, & x \in [1;\ +\infty) \end{cases}$

2. Для функции $y = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 9}$ провести полное исследование и построить график.

3. Для функции $y = (x - 2)(x + 4)(x + 1)$ провести полное исследование и построить график.

4. Для функции $y = x \cdot \ln^2 x$ провести полное исследование и построить график.

Вариант 6

1. Построить график функции $\begin{cases} 0, & x \in (-\infty;\ -1] \\ \log_3(x+2), & x \in (-1;\ 1) \\ 1 - x^2, & x \in [1;\ +\infty) \end{cases}$

2. Для функции $y = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$ провести полное исследование и построить график.

3. Для функции $y = x(x-3)(x+5)$ провести полное исследование и построить график.

4. Для функции $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ провести полное исследование и построить график.

Вариант 7

1. Построить график функции $\begin{cases} 1, & x \in (-\infty;\ -1] \\ 3^{x+2}, & x \in (-1;\ 0) \\ 3x^2 - 1, & x \in [0;\ +\infty) \end{cases}$

2. Для функции $y = \dfrac{3-x^2}{x+2}$ провести полное исследование и построить график.

3. Для функции $y = (x+2)^2 \cdot (x-4)$ провести полное исследование и построить график.

4. Для функции $y = x \cdot e^{x}$ провести полное исследование и построить график.

Вариант 8

1. Построить график функции $\begin{cases} 0, & x \in (-\infty;\ -1] \\ \cos \pi x, & x \in (-1;\ 1) \\ (x-1)^2 + 1, & x \in [1;\ +\infty) \end{cases}$

2. Для функции $y = \dfrac{x}{3-x^2}$ провести полное исследование и по-

строить график.

3. Для функции $y=(x-3)^2\cdot(x+1)$ провести полное исследование и построить график.

4. Для функции $y=1-\ln^3 x$ провести полное исследование и построить график.

Вариант 9

1. Построить график функции $\begin{cases} 0, & x\in(-\infty;\,-1] \\ \sqrt[4]{x+1}, & x\in(-1;\,0) \\ 2+x^2, & x\in[0;\,+\infty) \end{cases}$

2. Для функции $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$ провести полное исследование и построить график.

3. Для функции $y=(x+2)(x-3)(x+4)$ провести полное исследование и построить график.

4. Для функции $y=(x-1)\cdot e^{3x}$ провести полное исследование и построить график.

Вариант 10

1. Построить график функции $\begin{cases} 0, & x\in(-\infty;\,-1] \\ \operatorname{arcctg} x-\pi, & x\in(-1;\,1) \\ (x-2)^2, & x\in[1;\,+\infty) \end{cases}$

2. Для функции $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$ провести полное исследование и построить график.

3. Для функции $y=(x+1)(x+2)(x+3)$ провести полное исследование и построить график.

4. Для функции $y=e^x+\dfrac{1}{e^x}$ провести полное исследование и построить график.

Вариант 11

1. Построить график функции $\begin{cases} 0, & x \in (-\infty;\ -1] \\ -2\arcsin x, & x \in (-1;\ 1) \\ (x-3)^2+1, & x \in [1;\ +\infty) \end{cases}$

2. Для функции $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ провести полное исследование и построить график.

3. Для функции $y = (x+2)(x-3)(x-5)$ провести полное исследование и построить график.

4. Для функции $y = e^{2x-x^2}$ провести полное исследование и построить график.

Вариант 12

1. Построить график функции $\begin{cases} -1, & x \in (-\infty;\ -1] \\ 4-3^{x+1}, & x \in (-1;\ 1) \\ (x-2)^3, & x \in [1;\ +\infty) \end{cases}$

2. Для функции $y = \dfrac{5x^2+5}{x}$ провести полное исследование и построить график.

3. Для функции $y = (x-1)^2 \cdot (x+2)$ провести полное исследование и построить график.

4. Для функции $y = e^{\frac{1}{5+x}}$ провести полное исследование и построить график.

Вариант 13

1. Построить график функции $\begin{cases} 0, & x \in (-\infty;\ -1] \\ 3\log_2 x, & x \in (-1;\ 2) \\ (x-3)^3+1, & x \in [2;\ +\infty) \end{cases}$

2. Для функции $y = \dfrac{1-x}{(x-2)^2}$ провести полное исследование и

построить график.

3. Для функции $y = (x-2)^2 \cdot (x-4)$ провести полное исследование и построить график.

4. Для функции $y = (x+2) \cdot e^{1-x}$ провести полное исследование и построить график.

Вариант 14

1. Построить график функции $\begin{cases} \sqrt{-x}, & x \in (-\infty; -1] \\ 0, & x \in (-1; 2) \\ \ln(x-2)+1, & x \in [2; +\infty) \end{cases}$

2. Для функции $y = \dfrac{x-2}{2x^2}$ провести полное исследование и построить график.

3. Для функции $y = (x+3)^2 \cdot (x+1)$ провести полное исследование и построить график.

4. Для функции $y = x^3 \cdot e^x$ провести полное исследование и построить график.

Вариант 15

1. Построить график функции $\begin{cases} e^{x+1}, & x \in (-\infty; -1] \\ 1, & x \in (-1; 1) \\ 2\sqrt{x}-3, & x \in [1; +\infty) \end{cases}$

2. Для функции $y = \dfrac{x^2-1}{2x}$ провести полное исследование и построить график.

3. Для функции $y = (x-2)^2 \cdot (x+1)$ провести полное исследование и построить график.

4. Для функции $y = \ln\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$ провести полное исследование и построить график.

Список литературы

1. Конспект лекций по высшей математике : [в 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 10-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2010. - 279, [1] с. ; 70x100/16. - ISBN 978-5-8112-3999-3 (Ч. 1). 978-5-8112-4000-5.

2. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин [и др.]. - Москва : Айрис Пресс, 2013. - 574, [1] с. : рис. ; 60x90/16. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-5166-7..

3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа, Изд. 8-е, Москва : Наука, 2005. - 416с

4. Лунгу, К.Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Том 1 [Электронный ресурс] : учебное пособие / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров. — Москва : Физматлит, 2013. — 216 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/59697.

Учебное издание

Максимова Ольга Васильевна
Сметанина Людмила Петровна

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Методические рекомендации

Авторская редакция

Подписано в печать 10.04.2023 Формат $60 \times 84\ {}^{1}{}_{16}$.
Усл. печ. л. 2,5.
Тираж 28 экз. Заказ № 617.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021.
Тел. +7 (3412) 916-364 E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра
«Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18