Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра информатики и математики

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2023

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161я73
П711

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент ФГБОУ ВО «ИжГТУ» А.Г. Ицков;
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник УдмФИЦ УрО РАН С.Л. Ломаев

Родионова А.Г., Новикова Е.В., Родионова Н.В., Павлова Е.В.

П711 Предел и непрерывность функции : учеб.-метод. пособие. : [Электрон. ресурс] / А.Г. Родионова и др. – Ижевск : Удмуртский университет, 2023. – 59 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, изучающих математический анализ, как в рамках отдельного курса, так и в рамках других курсов высшей математики. Пособие может быть полезно преподавателям для проведения практических занятий и при подготовке индивидуальных заданий студентам.

Основу пособия составляет теоретический материал. В помощь студенту разобрано большое количество примеров, дано их подробное решение. Пособие можно использовать в качестве типового расчета. Нумерация заданий для студентов сквозная.

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161я73

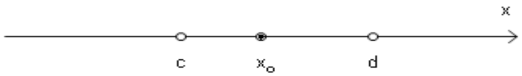
Предисловие

Учебно-методическое пособие состоит из двух глав. В каждой главе кратко изложен материал по заявленной теме. Разобраны примеры. В каждой главе приведены индивидуальные задания для студентов. Количество заданий достаточно как для занятий в аудитории, так и для самостоятельной подготовки студентов. Нумерация заданий сквозная. Уместно отметить, что в пособии особое внимание уделено тем темам, изучение которых вызывает у студентов наибольшие затруднения. Пособие может быть полезно преподавателям, студентам ВУЗов, учителям математики, ведущим занятия в профильных классах.

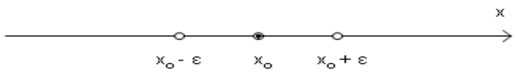
ГЛАВА I. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 1. Множества в пространстве $\mathbb{R}$

Определение 1. Окрестностью $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}$ назовем интервал (c,d), содержащий эту точку $\left(x_0 \in (c,d)\right)$.



Определение 2. ε-окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ назовем интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, и обозначим его $U(x_0;\varepsilon) = U_\varepsilon(x_0)$.



Зафиксируем непустое множество $X \subset \mathbb{R}$.

Определение 3. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется точкой прикосновения множества X, если для любой окрестности $U(x_0)$ выполняется условие $U(x_0) \cap X \neq \varnothing$ (то есть в любой окрестности точки x_0 имеются точки множества X).

Замечание 1. Возможны 2 варианта: $x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$.

Определение 4. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества X, если $U^0(x_0) \cap X \neq \varnothing$ для любой «проколотой» окрестности $U^0(x_0) = U(x_0) \setminus \{x_0\}$ (то есть в любой окрестности точки x_0 имеются точки множества X, отличные от x_0).

Замечание 2. Возможны 2 варианта: $x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$.

Определение 5. Точка x_0 называется изолированной точкой множества X, если существует окрестность точки x_0, для которой выполняется условие $U(x_0) \cap X = \{x_0\}$.

Определение 6. Совокупность точек прикосновения множества X называется замыканием этого множества и обозначается $\overline{X}$ (или $[X]$).

Определение 7. Множество X называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием, то есть $X = \overline{X}$.

Определение 8. Точка $x_0 \in X$ называется внутренней, если существует окрестность $U(x_0)$ такая, что $U(x_0) \subset X$.

Определение 9. Множество X называется открытым, если все его точки внутренние.

Пример 1. Рассмотрим множество $X = (0,2) \cup \{3\}$.

Здесь точки отрезка $[0,2]$ являются предельными точками множества X . Точка $\{3\}$ – изолированная точка. Замыкание множества $\overline{X}$ равно $[0,2] \cup \{3\}$. Легко видеть, что $X \neq \overline{X}$.

Пример 2. Отрезок $[a,b]$ – замкнутое множество.

Пример 3. Интервал (a,b) – открытое множество.

Теорема 1. Пересечение любого числа (конечного или бесконечного) замкнутых множеств – замкнутое множество.

Теорема 2. Объединение конечного числа замкнутых множеств – замкнутое множество.

Теорема 3. Пересечение конечного числа открытых множеств – открытое множество.

Теорема 4. Объединение любого числа открытых множеств – открытое множество.

§ 2. Предел функции

Зафиксируем множество $X \subset \mathbb{R}$ такое, что $X \neq \varnothing$, и функцию $f : X \to \mathbb{R}$.

Определение 1 (по Коши). Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 (при $x \to x_0$), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x \in X$ таких, что $0 < |x - x_0| < \delta$. Другими словами,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x \in X\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

При этом пишем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ (читаем: предел равен A) или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$ (читаем: $f(x)$ стремится к A).

Определение 2 (по Гейне). Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 (при $x \to x_0$), если для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$ $(x_n \neq x_0\ \forall n \in \mathbb{N})$, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к A, то есть $\lim\limits_{\substack{x_n \to x_0 \\ x_n \neq x_0}} f(x_n) = A$.

Замечание 1. Из определения следует, что функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, то есть, вообще говоря, $x_0 \notin X$. Таким образом, понятие предела функции в точке целесообразно вводить только для предельных точек области определения X функции $f(x)$.

Упражнение 1. Напишите отрицание определений 1 и 2.

Теорема 1. Определения 1 и 2 эквивалентны.

§ 3. Односторонние пределы

Определение 1 (по Коши). Число A называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x \in X\colon x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon ,$$

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall x \in X\colon x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

При этом пишем

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A \quad (\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A)$$

или

$$f(x_0+0)=A \quad (f(x_0-0)=A).$$

Замечание 1. Если $x_0=0$, то пишем $f(0+)$ $(f(0-))$.

Определение 2 (по Гейне). Число A называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если

$$\forall\{x_n\}\subset X: x_n>x_0\ (x_n<x_0),\ x_n\to x_0 \ \Rightarrow\ f(x_n)\underset{n\to\infty}{\to} A.$$

Теорема 1. Определения 1 и 2 эквивалентны.

Теорема 2. Если существуют пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$, причем $f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$, то существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Верно и обратное утверждение.

§ 4. Предел функции при $x\to\infty$

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(c,+\infty)$ (или на промежутке $(-\infty,-c)$). Принято считать, что $c>0$.

Определение 1 (по Коши). Число A называют пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$), если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta=\Delta(\varepsilon)>0:\forall x>\Delta\ (\forall x<-\Delta)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon,$$

и пишут $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ (соответственно $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$).

Определение 2 (по Гейне). Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$), если для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n>c$ $(x_n<-c)$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к A.

Заметим, что определения 1 и 2 эквивалентны.

§ 5. Бесконечно большие функции

Определение 1. Функцию $f(x)$ называют бесконечно большой справа (слева) в точке x_0, если

$\forall E > 0 \ \exists \ \delta = \delta(E) > 0:$

$\forall x \in X: \ x_0 < x < x_0 + \delta \ \ (x_0 - \delta < x < x_0 \ ) \Rightarrow | \ f(x)| > E$,

и пишут $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$ (соответственно $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$).

Если в определении 1 выполнено неравенство $f(x) > E$ ($f(x) < -E$), то говорят, что $f(x)$ – бесконечно большая знака плюс (минус) в точке x_0 справа (слева), и пишут

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty,$$

$$(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty).$$

Упражнение 1. Дайте определение бесконечно большой функции по Гейне.

Определение 2. Функцию $f(x)$ называют бесконечно большой при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если

$\forall E > 0 \ \exists \Delta = \Delta(E) > 0: \ \forall \, x > \Delta \ (\forall \, x < -\Delta) \Rightarrow | \ f(x)| > E,$

и пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ (соответственно $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$).

Если в определении $f(x) > E$ ($f(x) < -E$), то говорят, что $f(x)$ – бесконечно большая со знаком плюс (минус).

Упражнение 2. Приведите определение бесконечно большой функции при $x \to \infty$ по Гейне.

§ 6. Свойства пределов функции

Теорема 1. Если функция имеет предел при $x \to x_0$, то он единственный.

Теорема 2. Если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то в некоторой окрестности $U(x_0)$ функция $f(x)$ ограничена.

Теорема 3 (о пределе промежуточной функции). Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ и в некоторой окрестности $U(x_0)$ $(x \neq x_0)$ выполнено $f(x) \le h(x) \le g(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A.$

Теорема 4 (о предельном переходе в неравенствах). Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ и в некоторой окрестности $U(x_0)$ $(x \neq x_0)$ выполнено $f(x) \le g(x),$ то $A \le B.$

Теорема 5 (критерий Коши существования предела). Для того чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x),$ необходимо и достаточно, чтобы функция была определена в некоторой окрестности точки $x_0,$ за исключением, может быть, самой этой точки, и для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0,$ что для всех $x', x'' \in U_\delta(x_0)$ $(x' \neq x_0 \neq x'')$ выполнено $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$

Теорема 6. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B,$ где A и B – конечные числа, тогда $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = A \pm B,$

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\, g(x) \right) = A \cdot B, \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

(В последней формуле требуется, чтобы $g(x) \neq 0$ и $B \neq 0.$)

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$

Докажем это утверждение на языке ε и $\delta,$ то есть воспользуемся определением предела функции по Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0.$ Для всех $x \neq 3$ справедливо

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = \left| \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} - 6 \right| = |x - 3|.$$

Следовательно, полагая $\delta = \varepsilon,$ получаем

$$\forall x:\ 0<|x-3|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right| = |x-3|<\delta=\varepsilon.$$

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$. Доказательство провести двумя способами: по Гейне и по Коши.

По Гейне. Если $x_n \to 3$ $(x_n \neq 3)$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = 3\cdot 3 = 9.$$

По Коши. Зафиксируем какой-либо интервал, содержащий точку 3, в котором определена функция $f(x)=x^2$. Пусть, например, функция определена в интервале

$$U_{1/3}(3) = \left(3-\tfrac{1}{3}, 3+\tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{8}{3}, \tfrac{10}{3}\right) = \left\{\, x : |x-3| < \tfrac{1}{3} \,\right\}.$$

Для любого $x \in U_{1/3}(3)$ справедливо $|x| < \frac{10}{3}$, поэтому

$$|x^2-9| = |x+3||x-3| \le (|x|+3)|x-3| < \tfrac{19}{3}|x-3|.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \min\left\{ \frac{1}{3}, \frac{3}{19}\varepsilon \right\}$. Тогда для всех x таких, что $0<|x-3|<\delta$, имеет место неравенство $|x^2-9| < \frac{19}{3}\cdot\frac{3}{19}\varepsilon = \varepsilon$. Обсудим более подробно, как получилась последняя оценка. Действительно, если $\delta = \frac{1}{3} \le \frac{3}{19}\varepsilon$, то

$$|x^2-9| < \tfrac{19}{3}|x-3| < \tfrac{19}{3}\delta = \tfrac{19}{3}\cdot\tfrac{1}{3} \le \tfrac{19}{3}\cdot\tfrac{3}{19}\varepsilon = \varepsilon.$$

Если же $\delta = \frac{3}{19}\varepsilon < \frac{1}{3}$, то $|x^2-9| < \frac{19}{3}|x-3| < \frac{19}{3}\delta = \frac{19}{3}\cdot\frac{3}{19}\varepsilon = \varepsilon$.

В конце параграфа приведем два важных примера:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1} \qquad \text{(первый замечательный предел);}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x = e} \qquad \text{(второй замечательный предел),}$$

где $e = 2,718281\ldots$.

§ 7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Все функции, рассматриваемые в настоящем параграфе, считаем определенными на множестве $X \subset \mathbb{R}$. Пределы функции, конечные и бесконечные, будут рассматриваться при $x \to x_0$, где точка $x_0 \in X$ может быть как конечно, так и бесконечно удаленной.

Определение 1. Функция $\alpha : X \to \mathbb{R}$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Пример 1. $f(x) = 1/x^2$ – бесконечно малая функция при $x \to \infty$.

Определение 2. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Пример 2. $f(x) = 1/x^2$ – бесконечно большая функция при $x \to 0$.

Теорема 1. Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$ является бесконечно малой.

Пример 3. $f(x) = x^3 + \sin x^2 / x$ – бесконечно малая функция при $x \to 0$. (Легко проверить, что обе функции x^3 и $\sin x^2 / x$ – бесконечно малые при $x \to 0$.)

Теорема 2. Произведение бесконечно малой при $x \to x_0$ на ограниченную функцию является бесконечно малой.

Пример 4. $f(x) = (x-3)^2 \cdot \sin\big(1/(x-3)\big)$ – бесконечно малая функция при $x \to 3$. Здесь $(x-3)^2 \to 0$ при $x \to 3$, а функция $\sin\big(1/(x-3)\big)$ ограничена.

Теорема 3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, $x \in X$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Теорема 4. Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ бесконечно большая при $x \to x_0$, то функция $1/f(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Теорема 5. Если функция $\alpha : X \to \mathbb{R}$ бесконечно малая при $x \to x_0$ и $\alpha(x) \neq 0$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0, то функция $1/\alpha(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$.

Приведем символические обозначения, часто употребляемые для сокращения записи. Пусть $a > 0$, тогда пишут:

$$\frac{a}{-0} = -\infty, \quad \frac{a}{+0} = +\infty, \quad \frac{a}{0} = \infty, \quad \frac{a}{-\infty} = -0, \quad \frac{a}{+\infty} = +0, \quad \frac{a}{\infty} = 0.$$

Отметим также неопределенности следующего вида:

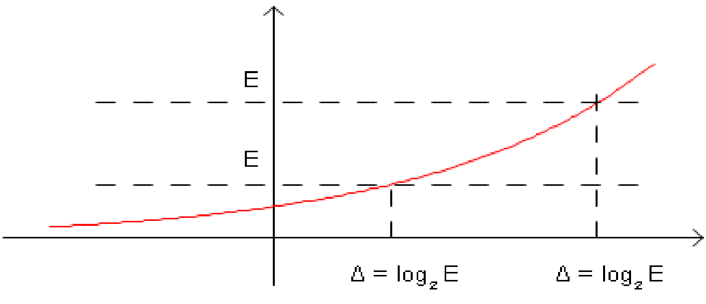
$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \big((+\infty) - (+\infty)\big).$$

Пример 5. Покажите на языке E и Δ, что $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$.

Решение. Считаем, что $x > 0$. Зафиксируем $E > 1$ и рассмотрим неравенство $2^x > E$. Оно равносильно неравенству $x > \log_2 E$. Положив $\Delta \doteq \log_2 E$, получаем, что для всех $x > \Delta$ справедливо $2^x > 2^\Delta = E$. Таким образом,

$$\forall E > 1 \; \exists \, \Delta = \log_2 E > 0 : \; \forall \, x > \Delta \Rightarrow \; 2^x > E.$$

На рисунке показана зависимость между Δ и E.



Пример 6. Покажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

Решение 1. Так как $f(x)=\sin x$ – ограниченная функция, а $g(x)=\dfrac{1}{x}\to 0$ при $x\to+\infty$, то $\dfrac{\sin x}{x}=f(x)\cdot g(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ (в силу теоремы 2).

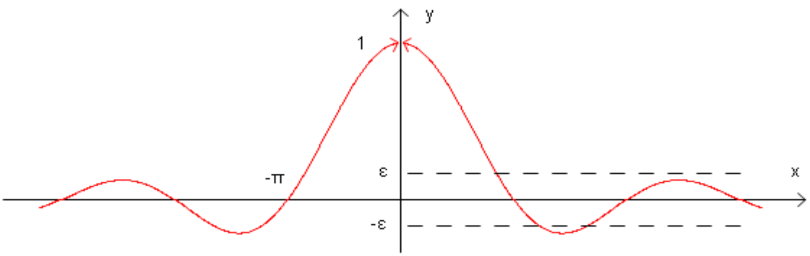
Решение 2. (На языке ε и Δ). Очевидно, $|\sin x|\le 1$ и $x>0$ (так как $x\to+\infty$). Для любого $\varepsilon>0$ справедлива цепочка эквивалентных неравенств:

$$|1/x|<\varepsilon \;\Leftrightarrow\; 1/x<\varepsilon \;(x>0)\;\Leftrightarrow\; x>\varepsilon^{-1}.$$

Положим $\Delta\doteq\varepsilon^{-1}$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\;\exists\,\Delta=\varepsilon^{-1}:\;\forall\,x>\Delta\;\Rightarrow\;\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon.$$

Приводимый рисунок демонстрирует поведение функции.

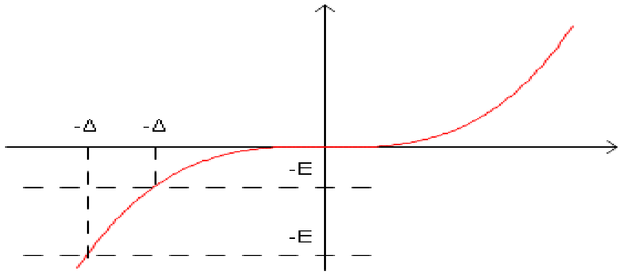


Пример 7. Покажите, что $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty.$

Решение. (На языке E и Δ). Очевидно, $x<0$ (так как $x\to-\infty$). Пусть $E>0$. Неравенства $x^3<-E$ и $x<-\sqrt[3]{E}$ равносильны. Положим $\Delta\doteq\sqrt[3]{E}$. Тогда

$$\forall\,E>0\;\exists\,\Delta=\sqrt[3]{E}:\;\forall\,x<-\Delta\;\Rightarrow\;x^3<-E.$$

На рисунке показана зависимость между Δ и E.



ЗАДАНИЕ 1

Доказать по определению:

1) $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$

2) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2+1) = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4} = 8$

4) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3} = -6$

5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2} = 12$

6) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} = 2$

7) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+4x+3}{x+3} = -2$

8) $\lim\limits_{x\to -1} (x^2+2x) = -1$

9) $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{5}{x-2} = +\infty$

10) $\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{7}{x-3} = -\infty$

11) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{x+4} = 0$

12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$

13) $\lim\limits_{x\to 6+0}\dfrac{1}{x-6}=+\infty$

14) $\lim\limits_{x\to 6-0}\dfrac{1}{x-6}=-\infty$

15) $\lim\limits_{x\to 5+0}2^{\frac{1}{x-5}}=+\infty$

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+7}{x}=5$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4}{3x^2+7}=\dfrac{1}{3}$

18) $\lim\limits_{x\to 3-0}7^{\frac{2}{x-3}}=0$

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2+4}=0$

20) $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{2-x}=0$

21) $\lim\limits_{x\to 0}4^{\frac{1}{x^6}}=+\infty$

22) $\lim\limits_{x\to-1-0}3^{\frac{x-1}{x^2-1}}=0$

23) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=4$

24) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2\dfrac{2x+3}{x+5}=1$

25) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+1}=2$

§ 8. Сравнение функций. О-символика.

Рассмотрим вопрос сравнения функций в окрестности точки, в частности, вопрос сравнения бесконечно больших и бесконечно малых. Зафиксируем функции $f, g : X \to \mathbb{R}$.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется ограниченной по сравнению с функцией $g(x)$ в окрестности точки x_0, если существует такая постоянная $c > 0$, что в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 выполняется неравенство

$$|f(x)| \le c\,|g(x)|.$$

В этом случае пишем $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$, $x \to x_0$. (Читается: $f(x)$ есть О большое от $g(x)$ при $x \to x_0$.)

Пример 1. Так как $|\sin^2 x| \le |x^2|$ при $x \in (-1{,}1)$, то $\sin^2 x = \mathrm{O}(x^2)$ при $x \to 0$, а так как $|\sin^2 x| \le |x^2| \le |x|$ при $x \in (-1{,}1)$, то $\sin^2 x = \mathrm{O}(x)$ при $x \to 0$.

Утверждение 1. Если $f(x) = \varphi(x)\, g(x)$, $x \in X$, и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, то $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$, $x \to x_0$.

Определение 2. Будем говорить, что функции $f(x)$ и $g(x)$ одного порядка при $x \to x_0$, если $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$ и $g(x) = \mathrm{O}\big(f(x)\big)$ при $x \to x_0$. Пишем $f(x) \approx g(x)$, $x \to x_0$.

Утверждение 2. Если существует конечный ненулевой предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, то $f(x) \approx g(x)$, $x \to x_0$.

Замечание 1. Понятие «функции одного порядка» наиболее содержательно тогда, когда функции f и g являются либо бесконечно большими, либо бесконечно малыми при $x \to x_0$.

Если функции f и g бесконечно малые (бесконечно большие) при $x \to x_0$ и $f \approx g$, $x \to x_0$, то говорят, что f и g бесконечно малые (бесконечно большие) одного порядка при $x \to x_0$ (в точке x_0).

Пример 2. $\dfrac{2x^3}{1+x^5} \approx x^3$ при $x \to 0$, так как имеет место равенство $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3}{(1+x^5)\cdot x^3} = 2$.

Пример 3. $\dfrac{1+x^5}{2x^3} \approx x^2$ при $x \to \infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x^5}{2x^5} = \dfrac{1}{2}$.

Определение 3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называют эквивалентными (асимптотически равными) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, и пишут $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$.

Упражнение 1. Докажите следующие свойства.

1) Если $f \sim g$ при $x \to x_0$, то $g \sim f$ при $x \to x_0$ (свойство симметричности).

2) Если $f \sim g$ и $g \sim h$ при $x \to x_0$, то $f \sim h$ при $x \to x_0$ (свойство транзитивности).

3) $f \sim f$ при $x \to x_0$ (свойство рефлексивности).

Таким образом, название «эквивалентные» функции оправдано, так как все свойства, присущие отношению эквивалентности, выполнены.

При $x \to 0$ справедливы следующие эквивалентности бесконечно малых величин:

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

Упражнение 2. Покажите, что при $x \to 0$ справедливо

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \qquad a^x - 1 \sim x\ln a, \qquad \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}.$$

Утверждение 3. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0,$ тогда при $x \to x_0$

$$\varphi(x) \sim \sin\varphi(x) \sim \arcsin\varphi(x) \sim \operatorname{tg}\varphi(x)$$

$$\sim \operatorname{arctg}\varphi(x) \sim \ln\big(1+\varphi(x)\big) \sim e^{\varphi(x)} - 1.$$

Пример 4. Справедливо $1-\cos 7x^2 \sim \frac{49}{2}x^4,\ x\to 0$.

Пример 5. Справедливо $\sin(x-2) \sim (x-2),\ x \to 2$.

Определение 4. Функцию $f(x)$ называют бесконечно малой по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, и пишут $f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big),\ x \to x_0$. (Читается: $f(x)$ есть о малое от $g(x)$ при $x \to x_0$.)

Замечание 2. Запись $f = \mathrm{o}(1),\ x \to x_0$, означает, что функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Замечание 3. Равенство $f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big),\ x \to x_0$, означает, что функция $f(x)$ принадлежит множеству функций, обладающих тем свойством, что предел отношения любой функции из этого множества к функции $g(x)$ при $x \to x_0$ равен нулю.

Пример 6. Доказать, что $\sin x^3 = \mathrm{o}(x^2),\ x \to 0.$

Соотношение имеет место, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^3}{x^2} = 0.$

Приведите примеры функций, которые являются функциями класса $\mathrm{o}(x^3),\ x \to 0.$

Покажите, что имеют место следующие свойства «о малого» и «О большого» при $x \to x_0$.

1^0. $\quad \mathrm{o}(g) \pm \mathrm{o}(g) = \mathrm{o}(g), \qquad \mathrm{O}(g) \pm \mathrm{O}(g) = \mathrm{O}(g),$

2^0. $\quad \mathrm{o}(Cg) = \mathrm{o}(g), C \neq 0, \qquad \mathrm{O}(Cg) = \mathrm{O}(g), C \neq 0,$

3^0. $\quad \mathrm{o}\big(\mathrm{o}(g)\big) = \mathrm{o}(g), \qquad \mathrm{O}\big(\mathrm{O}(g)\big) = \mathrm{O}(g),$

4^0. $\quad \mathrm{o}\big(\mathrm{O}(g)\big) = \mathrm{o}(g), \qquad \mathrm{O}\big(\mathrm{o}(g)\big) = \mathrm{o}(g).$

Упражнение 3. Покажите, что если $f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$, то тем более $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$. Верно ли обратное? Приведите пример.

Теорема 1. Для того чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентными при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы при $x \to x_0$ выполнялось условие

$$f(x) = g(x) + \mathrm{o}\big(g(x)\big),\ x \to x_0. \qquad (*)$$

Замечание 4. Если выполняется $(*)$, то функция $g(x)$ называется главной частью функции $f(x)$ при $x \to x_0$.

Пример 7. Главной частью многочлена

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \quad \big(a_n \neq 0\big)$$

при $x \to \infty$ является функция $a_n x^n$, и можно записать

$$P_n(x) = a_n x^n + \mathrm{o}(x^n),\ \ x \to \infty.$$

Пример 8. Главной частью функции $f(x) = 2x + 3x^2 + x^3$ при $x \to 0$ является функция $g(x) = 2x$. (Легко проверить равенство $2x + 3x^2 + x^3 = 2x + \mathrm{o}(2x)$.) С другой стороны, $2x + 3x^2 + x^3 = 2x + 3x^2 + \mathrm{o}(2x + 3x^2),\ \ x \to 0$ Таким образом, функция $f(x)$ имеет, по крайней мере, две главные части.

Утверждение 4. Если функция $f(x)$ обладает при $x \to x_0$ главной частью вида $A(x - x_0)^n$, $A \neq 0$, где A и n – постоянные, то среди всех главных частей такого вида она определяется однозначно:

$$f(x)=A(x-x_0)^n+\mathrm{o}\left((x-x_0)^n\right),\ \ x\to x_0.$$

Пример 9. Выделить у функции $f(x)=3x^5+4x+7$ главную часть вида Ax^n при $x\to\infty$.

Решение. Полагая $A=3, n=5$, получим равенства

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+4x+7}{Ax^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+4x+7}{3x^5}=1,$$

поэтому главная часть имеет вид $3x^5$.

Пример 10. Выделить у функции $f(x)=3x^5+4x$ главную часть вида Ax^n при $x\to 0$.

Решение. Полагая $A=4, n=1$, получим равенства

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^5+4x}{Ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^5+4x}{4x}=1,$$

поэтому главная часть имеет вид $4x$.

Пример 11. Выделить у функции $f(x)=\sin 3(x^2-1)$ главную часть вида $A(x-1)^n$ при $x\to 1$.

Решение. Справедливы легко проверяемые соотношения

$$\sin 3(x^2-1)\sim 3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)\sim 6(x-1),\qquad x\to 1,$$

следовательно, главная часть имеет вид $6(x-1)$.

Теорема 2. Пусть $f(x)\sim f_1(x),\ g(x)\sim g_1(x)$ при $x\to x_0$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, и они равны: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Замечание 5. Понятие главной части функции полезно при изучении поведения бесконечно малых и бесконечно больших функций сложного аналитического вида с последующей заменой функции на главную часть вида

$A(x-x_0)^n$ в окрестности точки x_0. Приведем пример применения метода выделения главной части при вычислении пределов. Поставим задачу вычисления предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)+\arcsin 6x+x^3}{\operatorname{tg}8x+\sin^2 5x}.$$

При $x\to 0$ справедливо

$$\ln(1+3x)\sim 3x,\quad \arcsin 6x\sim 6x,\quad \operatorname{tg}8x\sim 8x,\quad \sin 5x\sim 5x,$$

следовательно,

$$\ln(1+3x)=3x+o(x),\quad \arcsin 6x=6x+o(x),\quad x^3=o(x),$$

$$\operatorname{tg}8x=8x+o(x),\quad \sin^2 5x=25x^2+o(x^2)=o(x).$$

Таким образом, при $x\to 0$ имеем равенства

$$\ln(1+3x)+\arcsin 6x+x^3=9x+o(x),$$

$$\operatorname{tg}8x+\sin^2 5x=8x+o(x),$$

поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)+\arcsin 6x+x^3}{\operatorname{tg}8x+\sin^2 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{9x+o(x)}{8x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{9x}{8x}=\frac{9}{8}.$$

ЗАДАНИЕ 2

Доказать соотношения:

1) $\sin^2(x-2)\sim(x-2)^2,\ x\to 2$
2) $\sin^2(x-2)=o(x-2),\ x\to 2$
3) $\sqrt[7]{1+x}-1\sim\frac{1}{7}x,\ x\to 0$
4) $\ln(1+3x^2)\approx x^2,\ x\to 0$
5) $7x^5+9x^2+4x\approx x^5,\ x\to\infty$
6) $7x^5+9x^2+4x\sim 4x,\ x\to 0$
7) $\ln\cos 3x\sim-\frac{9}{2}x^2,\ x\to 0$
8) $\cos x^2-1=o(x),\ x\to 0$

9) $\operatorname{tg}^3 3(x+3) \approx (x+3)^3,\ x \to -3$

10) $e^{\sin x^3} - 1 = o(x^2),\ x \to 0$

11) $\arcsin 5\sqrt[3]{x} \sim 5\sqrt[3]{x},\ x \to 0$

12) $\sqrt{\cos 7x} - 1 \approx x^2,\ x \to 0$

13) $x^2 + 3x = O(x),\ x \to 0$

14) $\log_2(1 - x + x^2) \sim -\dfrac{x}{\ln 2},\ x \to 0$

15) $7^{x^2 - x} - 1 \sim (x^2 - x)\ln 7,\ x \to 0$

16) $x^3 + \sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x},\ x \to 0$

17) $x^3 + \sqrt[3]{x} \sim x^3,\ x \to +\infty$

18) $x^2 - 4 \approx \sqrt{x} - \sqrt{2},\ x \to 2$

19) $x^2 \sin\frac{1}{x} = o(x),\ x \to 0$

20) $x \sin\frac{1}{x} = O(x),\ x \to 0$

21) $x^3 \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = o(x^2),\ x \to 0$

22) $x^2 \cos\frac{1}{x} = o(1),\ x \to 0$

23) $\sqrt{2 - x} - 1 \approx \sqrt{5 - x} - 2,\ x \to 1$

24) $\cos 5x - \cos 7x \approx x^2,\ x \to 0$

25) $x \arcsin\sqrt{x} = o(x),\ x \to 0+$

ГЛАВА II. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Приведем эквивалентные определения непрерывности функции в точке x_0.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 2 (на языке $\varepsilon - \delta$, по Коши). Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x из окрестности $U(x_0)$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Другими словами,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in U(x_0) : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение 3 (на языке последовательностей, по Гейне). Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U(x_0)$ такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, справедливо $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Через $\Delta x \doteq x - x_0$, $x \in U(x_0)$, обозначим приращение аргумента. Понятно, что $x = x_0 + \Delta x$.

Разность $\Delta y \doteq f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции $y = f(x)$, соответствующим данному приращению аргумента Δx.

Определение 4 (на языке приращений). Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (бесконечно малому приращения аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции).

Определение 5. Функция $f(x)$ называется непрерывной справа (слева) в точке x_0, если $f(x_0+0)=f(x_0)$ (соответственно $f(x_0-0)=f(x_0)$).

Замечание 1. Наличие различных определений одного и того же понятия удобно тем, что в разных ситуациях полезным оказывается то или иное определение.

Пример 1. Показать непрерывность функции $f(x)=x^3$ в точке $x_0\in\mathbb{R}$.

Решение (на языке приращений). Пусть $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента в точке x_0, тогда

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

– приращение функции. Далее, применяя теоремы о пределах сумм и произведений функций, получаем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

ЗАДАНИЕ 3

Найти ОДЗ:

1) $\log_2(x^2+x-6)+\dfrac{1}{\sqrt{9-x}}$

2) $\arcsin\dfrac{1}{x^2-x-6}+\sqrt[3]{x}$

3) $\log_4(2x^2+5x+2)+\sqrt{5-x}$

4) $\arccos\dfrac{1}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

5) $\log_{x-1}(x^2+x-6)$

6) $\arcsin(x^2-5x+5)+\dfrac{1}{e^{x-2}}$

7) $\log_{x+4}(x^2+5x+6)$

8) $\arccos(x^2 - x - 5) + \dfrac{1}{\sqrt{e^{x-3}}}$

9) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2 - 3x + 4} + \sqrt{x+3}$

10) $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{-x^2 - 5x - 4} + \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

11) $\dfrac{\ln(x^2 - 5x + 4)}{\sqrt{x-5}}$

12) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

13) $\dfrac{\ln(x^2 + 3x - 4)}{\sqrt{x+5}}$

14) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^3 - 3x + 2} + \sqrt{x+5}$

15) $\dfrac{\ln(x^2 + 5x + 4)}{x\sqrt{x+6}}$

16) $\dfrac{9}{\operatorname{arctg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)} + \operatorname{arctg}\sqrt{x+\pi}$

17) $\dfrac{\ln(x^2 - 3x - 4)}{(x+2)\sqrt{x+3}}$

18) $\log_{x-5}(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$

19) $\dfrac{1}{\sqrt{e^{x-5}}} + \ln(-x^2 + x + 6)$

20) $\dfrac{1}{\ln(x^2 - 3x - 4)} + \dfrac{1}{\sqrt{x-7}}$

21) $\sqrt{e^{x+2}}+\arccos(x^2+5x+3)$

22) $\dfrac{1}{\sqrt{e^{x-1}}}+\arcsin(-x^2+x+5)$

23) $\ln(-x^2-5x-6)+\dfrac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{2}}}$

24) $\log_{x-5}(x^2+3x-4)$

25) $\dfrac{7}{\operatorname{arctg} x}+\operatorname{arcctg}\sqrt{x-\dfrac{\pi}{2}}$

ЗАДАНИЕ 4

На языке $\varepsilon-\delta$ доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0:

1) $f(x)=2x^2-8,\ x_0=1$
2) $f(x)=-8x^2+5,\ x_0=-3$
3) $f(x)=-x^2-x+6,\ x_0=-3$
4) $f(x)=2x^2+8,\ x_0=-2$
5) $f(x)=-9x^2-3,\ x_0=4$
6) $f(x)=8x^2+4x-3,\ x_0=3$
7) $f(x)=-4x^2-1,\ x_0=2$
8) $f(x)=7x^2-3,\ x_0=3$
9) $f(x)=-4x^2+3x+1,\ x_0=4$
10) $f(x)=9x^2+3,\ x_0=-1$
11) $f(x)=-2x^2+1,\ x_0=6$

12) $f(x) = -5x^2 + 4x + 2,\ x_0 = -2$

13) $f(x) = 5x^2 - 5,\ x_0 = 4$

14) $f(x) = -3x^2 + 2,\ x_0 = -5$

15) $f(x) = 4x^2 - 3x + 1,\ x_0 = -3$

16) $f(x) = 6x^2 + 4,\ x_0 = -2$

17) $f(x) = -7x^2 + 3,\ x_0 = -1$

18) $f(x) = 3x^2 - 2x - 1,\ x_0 = 1$

19) $f(x) = 8x^2 - 4,\ x_0 = 3$

20) $f(x) = 5x^2 - 4x + 2,\ x_0 = 1$

21) $f(x) = 4x^2 + 1,\ x_0 = -4$

22) $f(x) = -3x^2 + 2x + 1,\ x_0 = -2$

23) $f(x) = -5x^2 + 5,\ x_0 = 2$

24) $f(x) = x^2 - 5x + 6,\ x_0 = 2$

25) $f(x) = -6x^2 - 4,\ x_0 = -3$

ЗАДАНИЕ 5

Пользуясь одним из определений непрерывности функций, доказать, что функция непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$:

1. $f(x) = 3x^3 + 2x$ в точке $x_0 = 1$
2. $f(x) = \ln 3x + e^{2x}$ в точке $x_0 = 2$
3. $f(x) = \cos^2 5x - x^2$ в точке $x_0 = -1$
4. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0, \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$ в точке $x_0 = 0$
5. $f(x) = 2x^3 + 3x$ в точке $x_0 = 2$

6. $f(x)=x^4+2x^2$ в точке $x_0=1$

7. $f(x)=\cos 6x+x^3$ в точке $x_0=-1$

8. $f(x)=\begin{cases}\sin x/x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ в точке $x_0=0$

9. $f(x)=6x^2+7x$ в точке $x_0=-1$

10. $f(x)=\cos 2x+6x^2$ в точке $x_0=2$

11. $f(x)=4x^3+x^2$ в точке $x_0=-1$

12. $f(x)=\ln 5x-e^{3x-1}$ в точке $x_0=1$

13. $f(x)=\cos 3x+e^{4x+1}$ в точке $x_0=-1$

14. $f(x)=\sqrt[3]{x-2}+\cos^2 4x$ в точке $x_0=1$

15. $f(x)=6x+e^{2x}$ в точке $x_0=1$

16. $f(x)=\sqrt{2x-3}+\sin 4x$ в точке $x_0=0$

17. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq 0,\\ e^{2x}, & x>0\end{cases}$ в точке $x_0=0$

18. $f(x)=4x^4+x^3$ в точке $x_0=-1$

19. $f(x)=\cos 7x+e^{5x-1}$ в точке $x_0=-1$

20. $f(x)=6x^2+2x+3$ в точке $x_0=2$

21. $f(x)=5x^2+e^{2x}$ в точке $x_0=1$

22. $f(x)=6x^2+1+\cos 3x$ в точке $x_0=0$

23. $f(x)=3x^2+6x+\sin 4x$ в точке $x_0=1$

24. $f(x)=\cos 4x-x^2$ в точке $x_0=-1$

25. $f(x)=\begin{cases}2^x+1, & x\leq 0,\\ x+2, & x>0\end{cases}$ в точке $x_0=0$

§ 2. Точки разрыва

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если:

1) функция не определена в этой точке;

2) функция определена в этой точке, но не является в ней непрерывной.

Точки разрыва классифицируются следующим образом.

Определение 2. Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, и хотя бы один из них не равен $f(x_0)$.

Величина $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0.

Если скачок функции в точке x_0 равен нулю, то есть $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва. Название «устранимый» оправдано, так как, положив $f(x_0) \doteq f(x_0-0)=f(x_0+0)$, получим непрерывную в точке x_0 функцию.

Определение 3. Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ называется точкой разрыва второго рода, если она не является точкой разрыва первого рода, то есть в этой точке, по крайней мере, один из односторонних пределов не существует.

Замечание 1. Здесь под пределом понимается лишь конечный предел.

Замечание 2. Если в точке x_0 один из односторонних пределов равен бесконечности, то прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$.

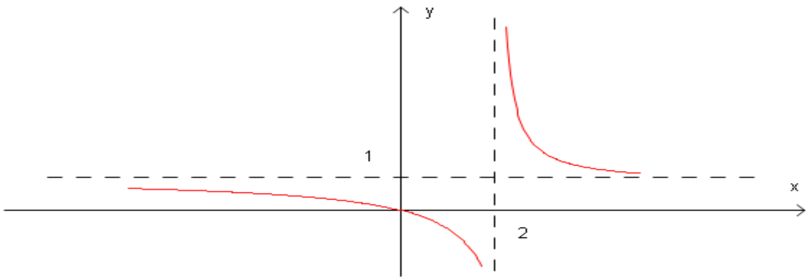
Пример 1. Функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ имеет разрыв второго рода в точке $x_0=0$, так как не существует предела в этой точке. Покажем это. Для последовательности $x_n=\frac{2}{(2n+1)\pi}$ справедливо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, а последовательность из значений функции $f(x_n)=\sin\frac{2n+1}{2}\pi=(-1)^n$ предела не имеет.

Пример 2. Функция $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0=0$ разрыв первого рода, причем устранимый, так как $\lim\limits_{x\to0-}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0+}x\sin\frac{1}{x}=0$. Почему?

Если положить $f(0)=0$, то разрыв будет устранен, функция станет непрерывной в точке $x_0=0$.

Пример 3. Функция $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ имеет разрыв второго рода в точке $x_0=2$, так как $\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{x}{x-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{x}{x-2}=+\infty$.

Прямая $x=2$ – вертикальная асимптота графика рассматриваемой функции. Ниже на рисунке приведено поведение данной функции в окрестности точки $x_0=2$.

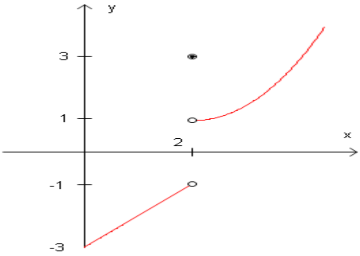


В качестве примера приведем шесть графиков функций $f(x)$, имеющих разрыв первого рода в точке $x_0=2$.

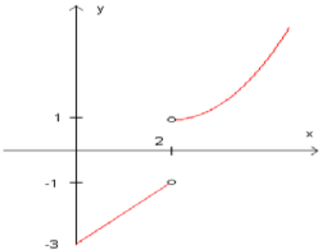
На первом рисунке функция $f(x)$ определена в точке x_0, а на втором не определена в этой точке.

На третьем рисунке $f(x)$ непрерывна слева в точке x_0, на четвертом $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0.

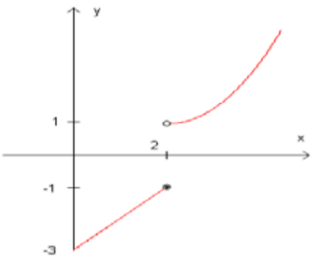
На пятом и шестом рисунках $f(x)$ имеет устранимый разрыв в точке x_0; на пятом рисунке функция определена в точке x_0, а на шестом не определена в этой точке.



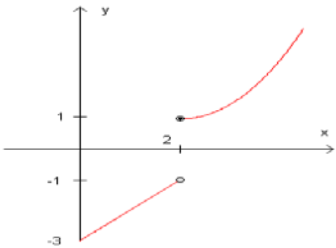
$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x<2 \\ 3, & x=2 \\ x^2-4x+5, & x>2 \end{cases}$$



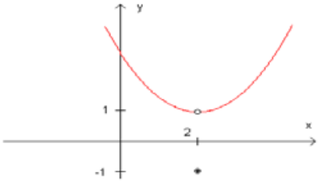
$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x<2 \\ x^2-4x+5, & x>2 \end{cases}$$



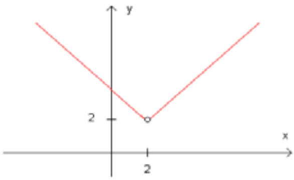
$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x\le 2 \\ x^2-4x+5, & x>2 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x<2 \\ x^2-4x+5, & x\ge 2 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+5, & x\neq 2\\ -1, & x=2\end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} 4-x, & x<2\\ x, & x>2\end{cases}$$

ЗАДАНИЕ 6

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ и указать тип её точек разрыва.

1) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$
2) $f(x)=\log_2(x^2+2x)$
3) $f(x)=2^{\frac{x}{x-3}}$
4) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x^3-4x}$
5) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x-1}$
6) $f(x)=x\ln x$
7) $f(x)=\dfrac{x}{\sin 2x}$
8) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{x/(1-x)}}$
9) $f(x)=x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$
10) $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{x+2}{x}}$

11) $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$

12) $f(x)=\dfrac{\ln(1+3x^2)}{2x}$

13) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-3x}$

14) $f(x)=\dfrac{\sin^2(x-2)}{x^2-4}$

15) $f(x)=\operatorname{ctg}3x+\ln(1+x^2)$

16) $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}+\ln(2x^4+3)$

17) $f(x)=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-5}$

18) $f(x)=\dfrac{4^{1/(x-4)}-1}{4^{1/(x-4)}+1}+\sin x$

19) $f(x)=\lg(x^2+1)+\dfrac{1}{(1-e^x)^{1/x}}$

20) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{3}{10x-2}+e^{x+3}$

21) $f(x)=2^{(x-4)/x}+x^2+3$

22) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3}$

23) $f(x)=\lg\left(\dfrac{1}{\sin x}+1\right)+x^3$

24) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-6x+8}+\ln(5+x^2)$

25) $f(x)=\operatorname{arcctg}(x^2+3)+\ln\dfrac{x}{1-x}$

§ 3. Основные теоремы

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие непрерывности в точке). Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна слева $\left(f(x_0-0)=f(x_0)\right)$ и непрерывна справа $\left(f(x_0+0)=f(x_0)\right)$, то есть

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0).$$

Теорема 2 (об арифметических операциях над непрерывными функциями). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ также непрерывны в точке x_0 (в последнем случае требуется, чтобы $g(x)\neq 0$).

Теорема 3 (непрерывность сложной функции). Пусть функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $u=f(y)$ непрерывна в точке $y_0=\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $u=f\left(\varphi(x)\right)$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 4 (о локальной ограниченности непрерывной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 5 (о сохранении непрерывной функцией постоянного знака в окрестности точки). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)>0$ (или $f(x_0)<0$), то в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)>0$ (соответственно $f(x)<0$).

Пример 1. Функция $f(x) = \cos x$ непрерывна в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$ и $f(x_0) = \cos x_0 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} > 0.$ Существует такая окрестность точки $x_0 = \frac{\pi}{3}$, в которой функция сохраняет знак. Например, $\cos x > 0$ для всех $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{12}\right)$.

§ 4. Свойства непрерывных функций на промежутках

Определение 1. Функция $f: X \to \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R},$ называется непрерывной на множестве $X,$ если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Замечание 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b],$ то её непрерывность в точке $x = a$ (в точке $x = b$) означает непрерывность справа (слева).

Определение 2. Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве $X,$ если множество её значений ограничено сверху (снизу), то есть

$$\exists\, M \in \mathbb{R}\ (\exists\, m \in \mathbb{R}):\ \forall\, x \in X\ \Rightarrow\ f(x) \le M\ \ (f(x) \ge m).$$

При этом число M называется верхней границей, а m – нижней границей функции $f(x)$.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве X, если она ограничена сверху и снизу:

$$\exists\, M > 0:\ \forall\, x \in X\ \Rightarrow\ |\, f(x)| \le M.$$

Упражнение 1. Напишите с помощью кванторов следующие определения: $f(x)$ не ограничена сверху; $f(x)$ не ограничена снизу; $f(x)$ не ограничена. Приведите примеры.

Пример 1. Функция $f(x) = x^2,\ x \in (0; +\infty),$ ограничена снизу и не ограничена сверху, а функция $f(x) = x^2,$ $x \in (0;1)$, ограничена и сверху и снизу.

Определение 4. Пусть функция $f(x)$ задана и ограничена на множестве $X \subset \mathbb{R}$. Наименьшая из верхних границ (обозначим ее β) функции $f(x)$ называется точной верхней гранью (лат. supremum) функции:

$$\beta \doteq \sup_{x\in X} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1)\ \forall x \in X \Rightarrow f(x) \le \beta, \\ 2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in X : f(x') > \beta - \varepsilon. \end{cases}$$

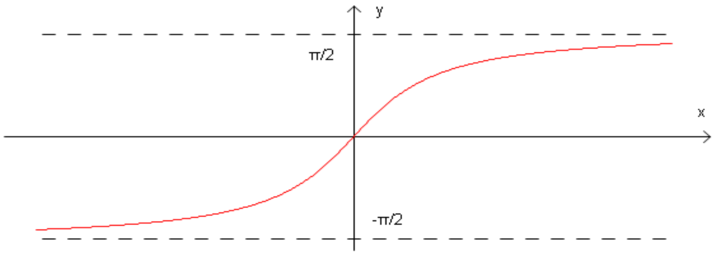
Наибольшая из нижних границ (обозначим ее α) функции $f(x)$ называется точной нижней гранью (лат. infimum):

$$\alpha \doteq \inf_{x\in X} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1)\ \forall x \in X \Rightarrow f(x) \ge \alpha, \\ 2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in X : f(x') < \alpha + \varepsilon. \end{cases}$$

Пример 2. Справедливы равенства

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{arctg} x = \tfrac{\pi}{2}, \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{arctg} x = -\tfrac{\pi}{2}.$$

На рисунке изображен график функции $y = \operatorname{arctg} x$:



Определение 5. Будем говорить, что функция $f(x)$ достигает в точке $x_0 \in X$ точной верхней (нижней) грани, то есть принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение, если $f(x_0) = \sup_{x\in X} f(x)$ $\quad (f(x_0) = \inf_{x\in X} f(x))$.

В этом случае пишут

$$\sup_{x\in X} f(x) = \max_{x\in X} f(x) \qquad (\inf_{x\in X} f(x) = \min_{x\in X} f(x)).$$

Замечание 2. Наибольшее (наименьшее) значение функции называется также её максимальным (минимальным) значением.

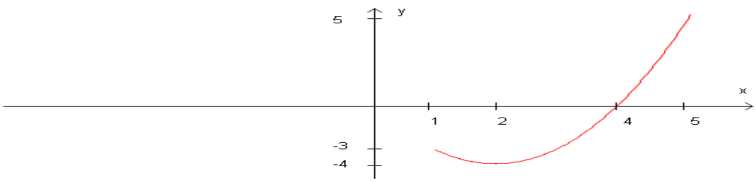
Пример 3. $\sup\limits_{x\in[0;\pi/6]} \sin x = \max\limits_{x\in[0;\pi/6]} \sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. В данном примере функция достигает точной верхней грани.

Пример 4. $\inf\limits_{x\in(0;\pi/6)} \sin x = 0$. В данном примере функция не достигает точной нижней грани.

Теорема 1 (теорема Вейерштрасса). Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на нем точной верхней и точной нижней грани.

Пример 5. Функция $f(x) = x^2 - 4x$ непрерывна на отрезке [1;5] и ограничена на нем: $|x^2 - 4x| \le 5$. Действительно, существуют две точки $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$, принадлежащие отрезку [1;5], такие, что

$$f(x_1) = f(2) = -4 = \inf_{[1;5]} f(x), \qquad f(x_2) = f(5) = 5 = \sup_{[1;5]} f(x).$$



Теорема 2 (теорема Больцано–Коши). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a) = A,\ f(b) = B$ $(A \ne B)$, то для любого C, заключенного между числами A и B, существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что $f(\xi) = C$.

Замечание 3. На теореме Больцано–Коши основан метод интервалов решения неравенств. Находят промежутки знакопостоянства функции (например, дробно-рациональной функции $f(x) = P(x) \big/ Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены), учитывая, что функция может менять знак только в точках разрыва и в тех точках, где $f(x) = 0$.

ЗАДАНИЕ 7

Решить неравенство методом интервалов:

1) $(x^2-4)\,x^3(x+2) > 0$

2) $\dfrac{3-x^2}{x^4-16} \geq 0$

3) $(x^3-8)(x^4-1) \leq 0$

4) $\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6} \geq 0$

5) $(x^5-1)(2x+7)(3x-5) < 0$

6) $\dfrac{1}{x+5} - \dfrac{1}{2x-3} \geq 0$

7) $(3x^2+2x-1)(x^2-4x-5) \leq 0$

8) $\dfrac{2x^2+5x+2}{8+2x-x^2} \leq 0$

9) $\dfrac{x^2}{x^6-1} > 0$

10) $(16-x^4)(27+x^3) < 0$

11) $\dfrac{1}{x^3+8} + \dfrac{1}{x^2-4} \geq 0$

12) $(x^4-4)(12-x^2) > 0$

13) $\dfrac{2}{x^2-9} + \dfrac{1}{x+5} < 0$

14) $3x^4+5x^3+7x^2 > 0$

15) $\dfrac{7x-10}{x^4+4x^2-21}<0$

16) $2x^4-x^5+8x^3>0$

17) $(x^3-1)(4x^2-x-3)\le 0$

18) $\dfrac{x^4-9x^2+8}{4x^2-5x+1}\le 0$

19) $\dfrac{1}{x+6}-\dfrac{1}{x+1}\ge\dfrac{1}{x^2+x}$

20) $15x-x^5-2x^3<0$

21) $\dfrac{2}{(x-3)^2}+\dfrac{5}{(x+7)^2}\ge 0$

22) $x^5-6x^4+12x^3-8x^2<0$

23) $\dfrac{6x-x^2-9}{x^2-x-6}\le 0$

24) $(4x-5x^2-6)(7x^2-x^3)\ge 0$

25) $\dfrac{10x-2}{5x^2+14x-3}>0$

Следствие 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в нуль.

Пример 6. Доказать, что уравнение $x^5-3x^2-7=0$ имеет корень на отрезке $[1,2]$.

Определим функцию $f(x)=x^5-3x^2-7$. Она непрерывна на отрезке $[1,2]$ и на его концах принимает значения разных знаков: $f(1)=-9<0$, $f(2)=13>0$. Значит, она удовлетворяет условиям следствия 1 и обращается в нуль, по крайней мере, в одной точке интервала $(1,2)$. Следовательно, уравнение имеет корень на отрезке $[1,2]$.

Определение 6. Функция $f(x)$ называется строго возрастающей (строго убывающей) на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Функция, строго возрастающая или строго убывающая, называется строго монотонной.

Теорема 3. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна, строго возрастает (убывает) на отрезке $[a,b]$, тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна, строго возрастает (убывает) на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.

Определение 7. Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Пример 7. Доказать, что функция $f(x) = 3x - 2$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Действительно. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta = \varepsilon/3$. Тогда для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |3x_1 - 2 - 3x_2 + 2| = 3|x_1 - x_2| < 3\delta = \varepsilon.$$

Следовательно, функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Замечание 4. В определении функции, непрерывной на множестве X, в каждой точке $x \in X$ величина δ зависит не только от ε, но и от x. (Пишем $\delta = \delta(\varepsilon, x)$.) В случае же функции, равномерно непрерывной на множестве X, величина δ зависит только от ε и не зависит от значений аргумента $x \in X$. (Пишем $\delta = \delta(\varepsilon)$.)

Теорема 4. Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X, то она непрерывна на этом множестве.

Действительно, при $x_1 = x,\ x_2 = x_0$ справедливо
$|x_1 - x_2| = |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Обратное утверждение не всегда истинно.

Теорема 5 (теорема Кантора). Функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, равномерно непрерывна на этом отрезке.

Замечание 5. Теорема неверна, если отрезок $[a,b]$ заменить интервалом или полуинтервалом.

Пример 8. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ на отрезке $[-1;1]$.

Точки разрыва функции $x = \pm 2$ не принадлежат отрезку $[-1;1]$. Функция непрерывна на отрезке $[-1;1]$, значит, по теореме Кантора, она равномерно непрерывна на нем.

Пример 9. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ на интервале $(0;2)$.

Данная функция непрерывна на интервале $(0;2)$, но не является равномерно непрерывной на нем. Чтобы доказать это, достаточно показать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ существует, по крайней мере, одна пара точек x' и x'' из интервала $(0;2)$ такая, что $|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon = 1$, и рассмотрим две последовательности точек из интервала $(0;2)$: $x_n' = \dfrac{1}{2n-1}$ и $x_n'' = \dfrac{1}{2n}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} x_n'' = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n' - x_n'') = 0,$ а это значит, что

$$\forall \delta > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : |x_n' - x_n''| = \left| \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n(2n-1)} < \delta.$$

При этом для разности значений функции имеем

$$|f(x') - f(x'')| = |(2n-1)^2 - (2n)^2| = |1-4n| = 4n-1 > 1 = \varepsilon.$$

Это и означает, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0;2)$.

§ 5. Асимптоты

Определение 1. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} \big(f(x) - (kx+b)\big) = 0$.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} f(x) = b$, то прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$. Верно и обратное: если $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$, то $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} f(x) = b$.

Докажите, что прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда

$$k = \lim_{x\to+\infty\,(-\infty)} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty\,(-\infty)} \big(f(x) - kx\big).$$

Данное утверждение порождает следующий алгоритм вычисления асимптоты графика функции $f(x)$.

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} \dfrac{f(x)}{x}$. Если этот предел не существует или равен ∞, то асимптоты нет, если он существует и равен k, то переходим к пункту 2.

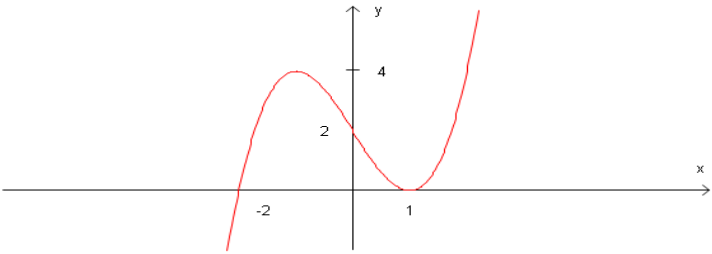
2. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} \left(f(x)-kx\right)$. Если этот предел не существует или равен ∞, то асимптоты нет, если он существует и равен b, то переходим к пункту 3.

3. Выписать уравнение наклонной асимптоты в виде $y = kx + b$.

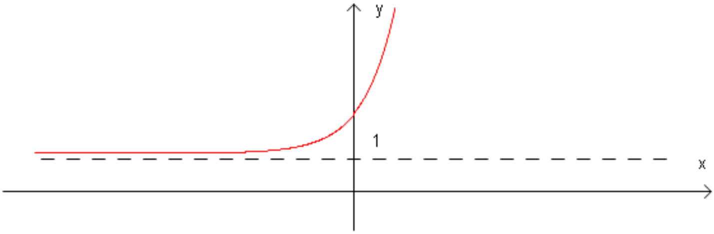
Замечание 1. Если $k = 0$, то имеем горизонтальную асимптоту $y = b$.

Замечание 2. На практике могут возникнуть различные случаи асимптотического поведения функции.

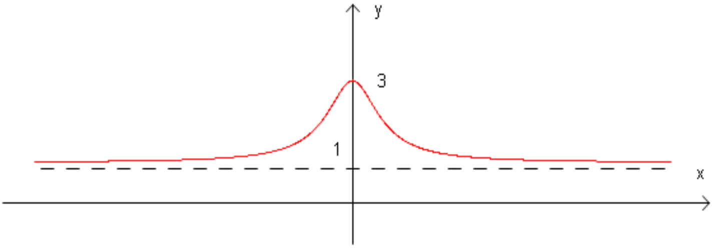
На рисунках изображены графики функций с различным асимптотическим поведением.



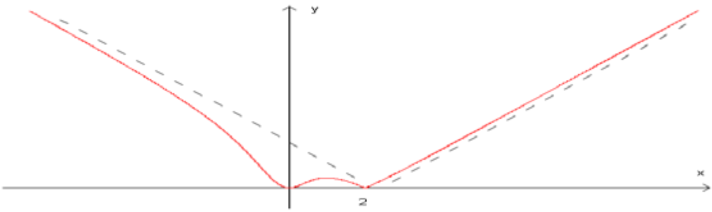
$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$



$$f(x) = e^x + 1$$



$$f(x)=\frac{x^2+3}{x^2+1}$$



$$f(x)=\frac{x^2\,|x-2|}{x^2+1}$$

На первом рисунке наклонных асимптот нет. На втором рисунке имеется горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$. На третьем рисунке имеются горизонтальные асимптоты при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$. На четвертом рисунке имеются наклонные асимптоты при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$.

Пример 1. Найти асимптоту графика функции $f(x)=\dfrac{x^3+3}{3x^2+1}$. Выполним шаги согласно алгоритму.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)}\dfrac{x^3+3}{x(3x^2+1)}=\dfrac{1}{3}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)}\left(\dfrac{x^3+3}{3x^2+1}-\dfrac{1}{3}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)}\dfrac{9-x}{3(3x^2+1)}=0$.

3. Уравнение асимптоты $y=\frac{1}{3}x$ при $x\to+\infty(-\infty)$.

§ 6. Эскиз

Процедура построения эскиза функции. Для построения эскиза необходимо выполнить следующие два шага.

Шаг I. Включает в себя следующие пункты.

1. Найти область определения функции $f(x)$ (ОДЗ, $D(y)$).
2. Определить точки пересечения графика функции с осями координат, а также знаки функции.
3. Исследовать функцию $f(x)$ на чётность.
4. Исследовать на периодичность, если она есть.

Шаг II. Включает в себя следующие пункты.

1. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность с последующей классификацией точек разрыва, если они есть.
2. Найти наклонные и вертикальные асимптоты.

На основании шагов I и II осуществляется построение эскиза графика функции.

Дальнейшее поведение функции уточняется через нахождение первой и второй производной функции.

Пример 1. Построить эскиз функции

$$f(x) = \frac{x-1}{x^3}.$$

Шаг I.

1. Так как функция представляет собой дробь (дробно-рациональная функция), для нахождения ОДЗ нужно найти нули знаменателя, то есть решить уравнение $x^3 = 0$. Решением этого уравнения является $x = 0$. Исключаем единственную точку $x = 0$ из области определения функции и получаем:

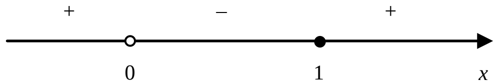
$$D(y) = \left(-\infty; 0\right) \cup \left(0; +\infty\right).$$

2. Пересечение с осями координат:

   1) найдем пересечение с осью абсцисс Ox, для чего положим $y=0$: $0=\dfrac{x-1}{x^3}$ $\Rightarrow x=1$; таким образом, точка пересечения с осью Ox имеет координаты $(1;0)$;

   2) пересечения с осью ординат Oy нет, так как $x \neq 0$;

   3) знаки функции определим методом интервалов.



3. Исследуем на четность. Функция общего вида, так как

$$f(-x)=\frac{-x-1}{(-x)^3}=\frac{x+1}{x^3}, \quad f(-x)\neq f(x), \quad f(-x)\neq -f(x).$$

4. Исследуем функцию на периодичность. Функция не является периодической, так как представляет собой дробно-рациональную функцию.

Шаг II.

1. Исследуем функцию на непрерывность. Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{x-1}{x^3}=+\infty; \quad \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{x-1}{x^3}=-\infty.$$

   Знаки $+\infty$ или $-\infty$ определяются по знакам функции в окрестности точки $x=0$. Так как пределы равны бесконечности, то точка $x=0$ является разрывом второго рода и прямая $x=0$ – вертикальная асимптота.

2. Определим существование наклонных асимптот вида $y=kx+b$ при $x\to+\infty\,(-\infty)$. Вычисляем k и b:

$$k=\lim_{x\to+\infty\,(-\infty)}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to+\infty\,(-\infty)}\big(f(x)-kx\big)$$

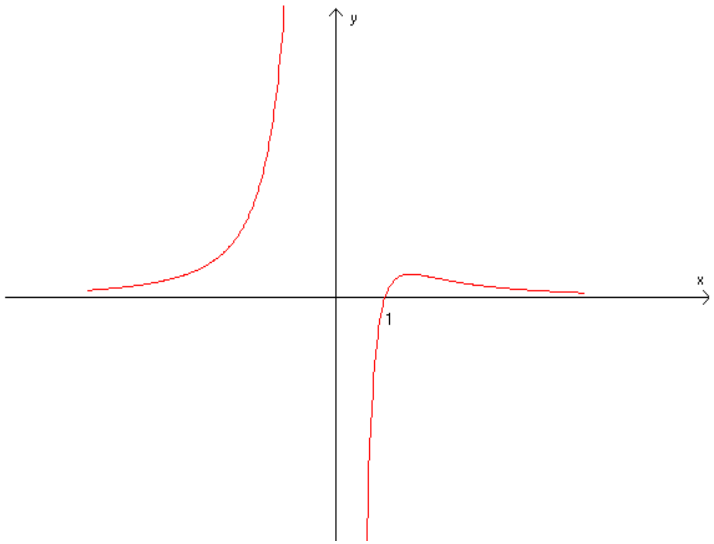
по вышеописанному алгоритму нахождения наклонных асимптот (§ 5):

1) $k = \lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} \dfrac{x-1}{x^4} = 0$,

2) $b = \lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} \left(f(x) - kx\right) = \lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} \left(\dfrac{x-1}{x^3} - 0\cdot x\right) = 0$,

3) уравнение асимптоты $y = 0$. В данном случае это горизонтальная асимптота.

3. Построим эскиз функции:



Пример 2. Построить эскиз функции

$$f(x) = x(x-2)^2(x+3)^3.$$

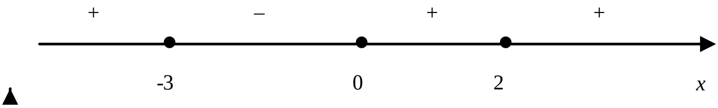
Шаг I.

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. Пересечение с осями координат:

1) найдем пересечение с осью абсцисс Ox, для чего положим $y=0$: $0=x(x-2)^2(x+3)^3$; таким образом, точки пересечения с осью Ox имеют координаты $(0;0)$, $(2;0)$, $(-3;0)$;

2) пересечение с осью ординат Oy, для чего положим $x=0$: $y=0(0-2)^2(0+3)^3$; таким образом, точка пересечения с осью Oy имеет координаты $(0;0)$;

3) знаки функции определим методом интервалов.



3. Исследуем на четность. Функция общего вида, так как

$$f(-x)=-x(-x-2)^2(-x+3)^3=-x(x+2)^2(3-x)^3,$$

$$-f(x)=-x(x-2)^2(x+3)^3,$$

то есть $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$.

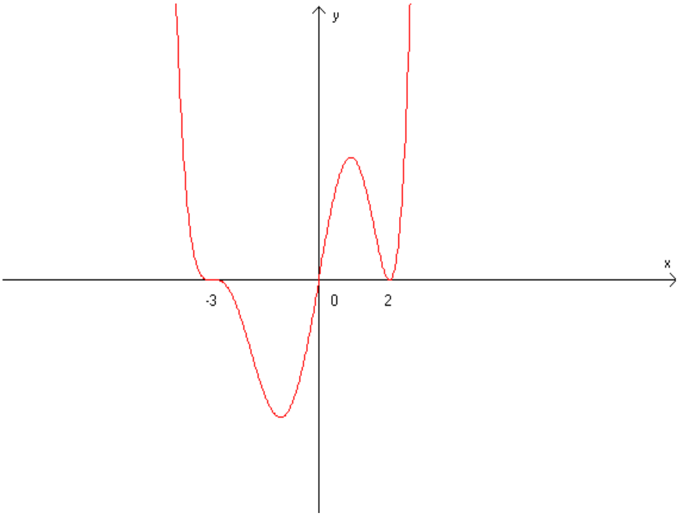
4. Исследуем функцию на периодичность. Функция не является периодической, так как представляет собой многочлен.

Шаг II.

1. Исследуем функцию на непрерывность. Точек разрыва нет, функция непрерывна.
2. Определим существование наклонных асимптот вида $y=kx+b$ при $x\to+\infty(-\infty)$ по вышеописанному алгоритму нахождения наклонных асимптот (§ 5):

$$k=\lim_{x\to+\infty(-\infty)}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty(-\infty)}\frac{x(x-2)^2(x+3)^3}{x}=\pm\infty.$$

Отсюда делаем вывод, что наклонных асимптот нет.



Пример 3. Построить эскиз функции

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}.$$

Шаг I.

1. Так как функция представляет собой дробь (дробно-рациональную функцию), то для нахождения ОДЗ нужно найти нули знаменателя, то есть решить уравнение $x^2-4=0$. Решения этого уравнения: $x=2$ и $x=-2$. Исключаем точки $x=2$ и $x=-2$ из области определения функции и получаем:

$$D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty).$$

Упростим функцию $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-3}{x+2},$$

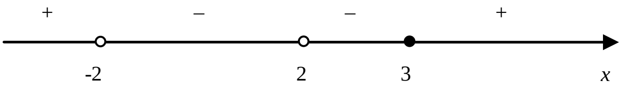
то есть $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$ при $x\neq 2$.

2. Пересечение с осями координат:

   1) найдем пересечение с осью абсцисс Ox, для чего положим $y=0$: $0=\dfrac{x-3}{x+2}$; таким образом, точка пересечения с осью Ox имеет координаты $(3;0)$;

   2) пересечение с осью ординат Oy, для чего положим $x=0$: $y=\dfrac{0-3}{0+2}=-\dfrac{3}{2}$; таким образом, точка пересечения с осью Oy имеет координаты $(0;-1,5)$;

   3) знаки функции определим методом интервалов.



3. Исследуем на четность. Функция общего вида, так как:

$$f(-x)=\frac{-x-3}{-x+2}=\frac{x+3}{x-2},\quad -f(x)=-\frac{x-3}{x+2},$$

$$f(-x)\neq f(x),\quad f(-x)\neq -f(x).$$

4. Исследуем функцию на периодичность. Функция не является периодической, так как представляет собой дробно-рациональную функцию.

Шаг II.

1. Исследуем функцию на непрерывность. Исследуем поведение функции в окрестности точек разрыва. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\frac{x-3}{x+2}=-\frac{1}{4};\quad \lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{x-3}{x+2}=-\frac{1}{4};$$

$$\lim_{x\to -2-0} f(x)=\lim_{x\to -2-0}\frac{x-3}{x+2}=+\infty;\quad \lim_{x\to -2+0} f(x)=\lim_{x\to -2+0}\frac{x-3}{x+2}=-\infty.$$

   Так как пределы при $x\to -2\pm 0$ равны бесконечности, то точка $x=-2$ является разрывом второго рода и прямая $x=-2$ – вертикальная асимптота.

Так как пределы имеют конечное значение при $x \to 2 \pm 0$, то точка $x = 2$ является разрывом первого рода.

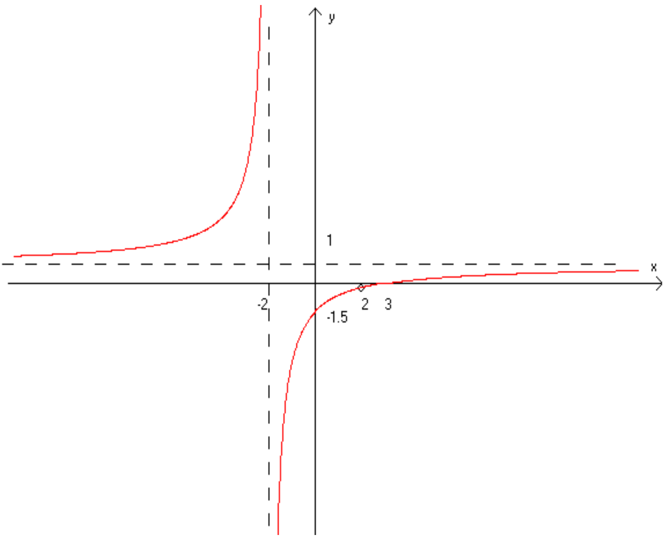
2. Определим существование наклонных асимптот вида $y = kx + b$ при $x \to +\infty(-\infty)$ по вышеописанному алгоритму нахождения наклонных асимптот (§ 5):

1) $k = \lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} \dfrac{x-3}{x(x+2)} = 0$,

2) $b = \lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} \left(f(x) - kx\right) = \lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} \left(\dfrac{x-3}{x+2} - 0 \cdot x\right) = 1$,

3) уравнение асимптоты $y = 1$. В данном случае это горизонтальная асимптота.

3. Построим эскиз функции:



ЗАДАНИЕ 8

Найти вертикальные и наклонные асимптоты графика функции $f(x)$.

1) $f(x)=\dfrac{2x^3+9x+8}{x^2-5}$

2) $f(x)=2^{\frac{x}{x-2}}$

3) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

4) $f(x)=\dfrac{2x^2-8}{x+2}$

5) $f(x)=3^{\frac{x-3}{x}}$

6) $f(x)=\ln(x^2+x)$

7) $f(x)=\ln(x-2)$

8) $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-1}$

9) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$

10) $f(x)=\ln(3x^2+1)$

11) $f(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$

12) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-9}$

13) $f(x)=xe^x$

14) $f(x)=2xe^x$

15) $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$

16) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$

17) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3x+2}$

18) $f(x)=7^{\frac{x+1}{x-2}}$

19) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-16}$

20) $f(x)=\ln\dfrac{1}{x+2}$

21) $f(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$

22) $f(x)=\dfrac{4x-2}{5x^2}$

23) $f(x)=x+\ln x$

24) $f(x)=2x+\dfrac{3}{x}$

25) $f(x)=\ln(x^2-2)$

ЗАДАНИЕ 9

Построить эскиз дробно-рациональной функции:

1) $y=\dfrac{x^2-9}{x^3}$

2) $y=\dfrac{(2-x)(x+4)}{x}$

3) $y=\dfrac{x^2-16}{x^4}$

4) $y=\dfrac{x^3}{(3-x)(x+4)}$

5) $y=\dfrac{x^2-25}{x}$

6) $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x^3}$

7) $y=\dfrac{x^2-81}{x^3}$

8) $y=\dfrac{x^3}{x^2-5x+6}$

9) $y=\dfrac{x^3+1}{x^4}$

10) $y=\dfrac{(x-4)(x-2)}{x^3}$

11) $y=\dfrac{x^4}{-x^3+8}$

12) $y=\dfrac{x^2}{(x+2)(x+4)}$

13) $y=\dfrac{x^2+x-6}{x^3-1}$

14) $y=\dfrac{x^3-8}{x^2}$

15) $y=\dfrac{x^2-x-6}{x^3-1}$

16) $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x}$

17) $y=\dfrac{-x^2+4x-3}{x^3}$

18) $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x^3}$

19) $y=\dfrac{x^2+5x+6}{x^4}$

20) $y=\dfrac{x^3-1}{x}$

21) $y=\dfrac{x^3}{(x-2)(x+4)}$

22) $y=\dfrac{-x^2+2x+3}{x^3}$

23) $y=\dfrac{(x-4)(x+2)}{x}$

24) $y=\dfrac{-x^2+x-2}{x^3}$

25) $y=\dfrac{(x+1)(3-x)}{x^3}$

ЗАДАНИЕ 10

Доопределить по непрерывности функции в указанных точках:

1) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ в точке $x_0=0$

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1}, & x<-1,\\ x, & x>-1\end{cases}$ в точке $x_0=-1$

3) $f(x)=\dfrac{\sin 5x}{3x}$ в точке $x_0=0$

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ в точке $x_0=1$

5) $f(x)=\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$ в точке $x_0=0$

6) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{2+x}$ в точке $x_0=-2$

7) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-x}, & x<4,\\ \dfrac{|x-4|}{x-4}, & x>4\end{cases}$ в точке $x_0=4$

8) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{(x+3)^2}$ в точке $x_0=-3$

9) $f(x)=\dfrac{\ln(1+2x^2)}{4x^2}$ в точке $x_0=0$

10) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{4-x}$ в точке $x_0=4$

11) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{2x}$ в точке $x_0=0$

12) $f(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}$ в точке $x_0=0$

13) $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{e^{2x}-1}$ в точке $x_0=0$

14) $f(x)=\arcsin x\cdot\sin\dfrac{1}{x^2}$ в точке $x_0=0$

15) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$ в точке $x_0=0$

16) $f(x)=\dfrac{\sqrt{6-x}-3}{x^2-9}$ в точке $x_0=-3$

17) $f(x)=\dfrac{x\,\mathrm{arctg}\,x^2}{\arcsin^3 x}$ в точке $x_0=0$

18) $f(x)=\dfrac{\cos 3x-1}{\ln(7x^2+1)}$ в точке $x_0=0$

19) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x<0,\\ -\dfrac{1}{x+1}, & x>0\end{cases}$ в точке $x_0=0$

20) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\sin^2\dfrac{1}{3x}$ в точке $x_0=0$

21) $f(x)=\dfrac{e^{x-3}-1}{x^2-9}$ в точке $x_0=3$

22) $f(x)=\dfrac{\sin(x+5)}{x^3+125}$ в точке $x_0=-5$

23) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+2|}{x+2}, & x<-2,\\ \sqrt{x+2}-1, & x>-2\end{cases}$ в точке $x_0=-2$

24) $f(x)=\cos\left(\pi+\dfrac{x}{2}\right)\cdot\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{(\pi-x)^2}$ в точке $x_0=\pi$

25) $f(x)=\dfrac{1-\cos^3 x}{3x^2}$ в точке $x_0=0$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Дрофа, 2003. 704 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1. М.: Интеграл-Пресс, 2010. 416 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 607 с.
4. Новикова Е.В., Родионова А.Г., Родионова Н.В. Начала математического анализа. Ижевск: Удмуртский университет, 2010. 84 с.
5. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. М.: Физматлит, 2001. 480 с.
6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ: Астрель, 2005. 558 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Родионова Алла Григорьевна
Новикова Елена Вениаминовна
Родионова Надежда Витальевна
Павлова Елена Владимировна

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция
Компьютерный набор: Е.В. Павлова, Е.В. Шиляев
Верстка: В.И. Родионов

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел.: + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru