Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»

В.А. Зайцев, И.Г. Ким

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ВЫХОДУ

Ижевск
2022

УДК 517.977
ББК 22.161.6
З 120

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УдГУ.

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор Е.К. Макаров;
доктор физико-математических наук, профессор С.Н. Попова

З 120 **Зайцев В.А., Ким И.Г.**
Модальное управление и стабилизация линейных систем статической обратной связью по выходу. Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2022. 184 с.

ISBN 978-5-4312-1013-6

Исследуются проблемы модального управления, задачи назначения спектра и стабилизации посредством линейной статической обратной связи по выходу для различных классов линейных систем управления: а) систем с запаздываниями; б) систем высших порядков; в) систем с переменными неопределенными коэффициентами.

Для специалистов в области математической теории управления и теории дифференциальных уравнений, студентов и аспирантов университетов..

УДК 517.977
ББК 22.161.6

ISBN 978-5-4312-1013-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список основных обозначений

$:=$ и $=:$ — «равно по определению» (двоеточие — со стороны определяемого объекта).
$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества вещественных, комплексных чисел.
$\overline{\alpha}$ — комплексное сопряжение к числу $\alpha \in \mathbb{C}$.
$\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.
$\mathbb{R}^n$ — вещественное пространство векторов-столбцов размерности n.
$\mathbb{C}^n$ — комплексное пространство векторов-столбцов размерности n.
$\mathbb{K}$ — поле $\mathbb{R}$ или поле $\mathbb{C}$.
$\operatorname{col}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ — вектор-столбец с координатами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ из поля $\mathbb{K}$.
T — операция транспонирования вектора или матрицы.
$*$ — операция комплексного сопряжения вектора или матрицы, то есть $x^* = \overline{x}^T$.
$(\mathbb{K}^n)^T = \{x^T : x \in \mathbb{K}^n\}$ — пространство векторов-строк размерности n.
$e_1 = \operatorname{col}(1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = \operatorname{col}(0, 0, \ldots, 1)$ — базис в $\mathbb{K}^n$.
$|x| = \sqrt{x^* x}$ — норма в $\mathbb{K}^n$.
$M_{n,m}(\mathbb{K})$ — пространство $n \times m$-матриц с элементами из поля $\mathbb{K}$; $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$.
$\|A\| = \max\limits_{|x|=1} |Ax|$ — норма в пространстве $M_{n,m}(\mathbb{K})$.
$[h_1, h_2, \ldots, h_n]$ — $m \times n$-матрица, образованная вектор-столбцами h_1, h_2, $\ldots$, $h_n \in \mathbb{K}^m$.
$I = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ — единичная $n \times n$-матрица.
$\operatorname{Sp} A$ — след матрицы A.
$\operatorname{rank} A$ — ранг матрицы A.
$\det A$ — определитель матрицы A.
$\chi(A; \lambda) := \det(\lambda I - A)$ — характеристический многочлен матрицы A.
$A \otimes B$ — правое кронекерово произведение матриц A и B.
$\operatorname{vecc} : M_{n,m}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{nm}$ — отображение, «разворачивающее» матрицу $H = \{h_{ij}\}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, по строкам в вектор-столбец $\operatorname{vecc} H := \operatorname{col}(h_{11}, \ldots, h_{1m}, \ldots, h_{n1}, \ldots, h_{nm})$.
J — первый единичный косой ряд, то есть $J := \sum\limits_{i=1}^{n-1} e_i e_{i+1}^* \in$ $\in M_n(\mathbb{K})$.
$A^0 := I$ для всякой матрицы $A \in M_n(\mathbb{K})$.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из классических задач теории управления является задача стабилизации линейной стационарной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{K}, \quad u \in \mathbb{K}^m, \tag{0.1}$$

посредством линейной стационарной обратной связи

$$u = Ux, \quad U \in M_{m,n}(\mathbb{K}). \tag{0.2}$$

Замкнутая система

$$\dot{x} = (A + BU)x, \quad x \in \mathbb{K}^n, \tag{0.3}$$

является линейной однородной и стационарной, следовательно, асимптотическое поведение решений замкнутой системы (0.3) характеризуется вещественными частями собственных чисел $\lambda_j(A + BU)$ матрицы $A + BU$. Если $\operatorname{Re}\lambda_j(A + BU) < < -\alpha$, где $\alpha > 0$ — некоторое заданное число, то $||x(t)|| = = O(e^{-\alpha t})$ при $t \to +\infty$, то есть система (0.3) экспоненциально устойчива с показателем α. Более общая задача — это задача о размещении (или о назначении) спектра собственных значений [36, с. 159], или, по-другому, задача управления спектром. При $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ в этой задаче для произвольного набора $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ требуется построить матрицу $U \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ обратной связи так, чтобы были выполнены равенства

$$\lambda_j(A + BU) = \mu_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{0.4}$$

При $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ задача назначения спектра формулируется следующим образом: для произвольного набора $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ вещественного типа (то есть набора инвариантного относительно комплексного сопряжения) требуется построить матрицу $U \in \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, обеспечивающую выполнение равенств (0.4).

Обозначим через $\chi(A + BU; \lambda)$ характеристический многочлен матрицы системы (0.3). Сформулируем теперь задачу назначения коэффициентов характеристического многочлена (или, по-другому, задачу модального управления [50, с. 435]) системы (0.3) посредством линейной статической обратной связи по состоянию (0.2): для любых чисел $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, требуется построить матрицу $U \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ обратной связи так, чтобы характеристический многочлен $\chi(A + BU; \lambda)$ совпадал с многочленом

$$p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n.$$

Задача назначения спектра системы (0.3) равносильна задаче модального управления. Действительно, разложим многочлен $p(\lambda)$ на множители:

$$\lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \mu_i).$$

Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то всякому набору $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ корней многочлена $p(\lambda)$ однозначно отвечает вектор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^n$ коэффициентов многочлена $p(\lambda)$, и наоборот. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то всякому набору $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ вещественного типа однозначно отвечает вектор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$, и наоборот. Таким образом, задача назначения спектра и задача модального управления (для систем без запаздываний) отождествляются.

В 1964 году В.М. Попов доказал [49] для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, что задача модального управления разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\operatorname{rank} [B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n. \tag{0.5}$$

В 1967 году Уонэм доказал это утверждение для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ [136].

Задача модального управления системы (0.1) посредством линейной обратной связи по состоянию (0.2) достаточно хорошо изучена.

Пусть теперь система управления имеет следующий вид

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = C^* x, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{0.6}$$

Здесь $x \in \mathbb{K}^n$ — это фазовый вектор, $u \in \mathbb{K}^m$ — вектор управления, $y \in \mathbb{K}^k$ — вектор выходных величин. Если $C = I$, то $y = x$, то есть измерению доступны все координаты вектора состояния. В этом случае управление может быть построено в виде линейной обратной связи по состоянию (0.2). Если $\operatorname{rank} C < n$, то измерению доступны не все координаты вектора состояния, а лишь некоторые его линейные комбинации. Тогда управление строится по неполным данным о состоянии вектора x. Пусть управление строится в виде линейной статической обратной связи по выходу

$$u = Uy. \tag{0.7}$$

Тогда система (0.6) замкнутая управлением (0.7) принимает вид

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x, \quad x \in \mathbb{K}^n. \tag{0.8}$$

Обозначим через $\chi(A + BUC^*; \lambda)$ характеристический многочлен матрицы системы (0.8). Задача модального управления для системы (0.6) посредством линейной статической обратной связи по выходу (0.7) имеет следующую формулировку: для любых чисел $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, требуется построить матрицу обратной связи $U \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ так, чтобы характеристический многочлен $\chi(A + BUC^*; \lambda)$ совпадал с многочленом

$$p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n.$$

Отождествим множество всех приведенных многочленов $p(\lambda)$ с пространством $\mathbb{K}^n = \{\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\}$. Для заданной системы (0.8) введем отображение, которое ставит в соответствие управлению U характеристический многочлен системы с этим управлением:

$$\sigma : M_{m,k}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n, \qquad \sigma(U) = \chi(\lambda; A + BUC^*).$$

Таким образом, если для системы (0.8) отображение σ сюръективно, то это означает, что для системы (0.8) разрешима задача модального управления.

Отметим, что задача модального управления для системы (0.6) посредством линейной статической обратной связи по выходу (0.7), в отличие от задачи модального управления для системы (0.1) посредством линейной обратной связи по состоянию (0.2), является одной из трудных задач теории управления и до настоящего момента не имеет полного решения в общем случае. Сложность заключается в том, что задача модального управления системы (0.8) сводится к задаче о разрешимости некоторой системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов матрицы U. Если $C = I$, то есть обратная связь — полная, то условие (0.5), во-первых, позволяет свести эту систему к линейной системе алгебраических уравнений, во-вторых, является достаточным условием разрешимости этой системы. Если $\operatorname{rank} C < n$ (и $\operatorname{rank} B < n$), то такая система уравнений является, вообще говоря, нелинейной, что затрудняет получить условия ее разрешимости.

Задаче управления спектром для системы (0.8) посвящено огромное количество работ. Обзор известных результатов можно найти в работах [36, 54, 64, 118, 119, 125]. Приведем некоторые основные результаты. Будем считать, что $m = \operatorname{rank} B$, $k = \operatorname{rank} C$.

Первые результаты о частичном размещении $\max\{m, k\}$ собственных значений системы (0.8) с циклической матрицей A получили A. Jameson [88], E. J. Davison [70], E. J. Davison, R. A. Chatterjee [71], B. Sridhar, D. P. Lindorff [124] в предположении, что открытая стационарная система (0.6) вполне управляема и вполне наблюдаема (эти условия необходимы для сюръективности отображения σ). Позже E. J. Davison, S. H. Wang [72] и H. Kimura [98] доказали для случая $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ результаты, из которых вытекает, что если

$$m + k \geqslant n + 1, \tag{0.9}$$

то образ отображения σ является всюду плотным для типичного множества матриц $(A, B, C) \in M_{n,n+m+k}(\mathbb{R})$.

В более поздних работах R. Hermann, C. Martin доказали [85], что в случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ условие (0.9) можно ослабить до условия

$$mk \geqslant n.$$

В 1981 году R. Brockett и C. Byrnes показали [63] для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, что, если $mk \geqslant n$, то отображение σ полностью сюръективно (а не только почти сюръективно) для типичного множества систем $(A, B, C) \in M_{n,n+m+k}(\mathbb{C})$. Этот результат является наилучшим для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

В 1992 году X. Wang [129] в случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ получил достаточное условие для произвольного размещения собственных значений: *если $mk > n$, то отображение σ сюръективно для типичного множества систем $(A, B, C) \in M_{n,n+m+k}(\mathbb{R})$.* Этот результат является наилучшим для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Позднее, в 1995 году J. Rosenthal, J. M. Schumacher, J. C. Willems в работе [117] предложили более простое доказательство этого результата (см. также ссылки в работе [119]).

Некоторые результаты, объединяющие сразу несколько подходов к задаче размещения собственных значений, можно найти в работе [97].

Несмотря на то, что большое количество работ посвящено задачам стабилизации и модального управления линейных систем посредством статической обратной связи по выходу, тем не менее, как отмечено в обзоре [120], до сих пор не было найдено точного решения этой важной проблемы в общем случае, которое могло бы гарантировать построение статической обратной связи по выходу или определить, что такой обратной связи не существует.

Задача модального управления посредством статической обратной связи по выходу была решена положительно в нескольких специальных случаях.

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка, на вход которого подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $n-p$ включительно, а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния объекта и его производных до порядка $p-1$ включительно $(1 \leqslant p \leqslant n)$ [12]:

$$\begin{gathered} x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx= \\ =b_{p1}u_1^{(n-p)}+b_{p+1,1}u_1^{(n-p-1)}+\ldots+b_{n1}u_1+\ldots \\ +b_{pm}u_m^{(n-p)}+b_{p+1,m}u_m^{(n-p-1)}+\ldots+b_{nm}u_m, \end{gathered} \tag{0.10}$$

$$\begin{gathered} y_1=\overline{c}_{11}x+\overline{c}_{21}x'+\ldots+\overline{c}_{p1}x^{(p-1)}, \quad \ldots, \\ y_k=\overline{c}_{1k}x+\overline{c}_{2k}x'+\ldots+\overline{c}_{pk}x^{(p-1)}. \end{gathered} \tag{0.11}$$

Здесь $u=\mathrm{col}(u_1,\ldots,u_m)\in\mathbb{K}^m$ — вектор управления, $y= =\mathrm{col}(y_1,\ldots,y_k)\in\mathbb{K}^k$ — вектор выходных величин. Система (0.10), (0.11) является частным случаем системы (0.6).

Говорят, что для системы (0.10), (0.11) *разрешима задача модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу* (0.7), если для любых чисел $\gamma_i\in\mathbb{K}$, $i=\overline{1,n}$, существует управление (0.7) такое, что замкнутая система (0.10), (0.11), (0.7) имеет вид

$$x^{(n)}+\gamma_1x^{(n-1)}+\ldots+\gamma_nx=0.$$

Построим по системе (0.10), (0.11) матрицы $B=\{b_{l\alpha}\}$, $l=\overline{1,n}$, $\alpha=\overline{1,m}$, $C=\{c_{\nu\beta}\}$, $\nu=\overline{1,n}$, $\beta=\overline{1,k}$, где $b_{l\alpha}=0$ при $l<p$ и $c_{\nu\beta}=0$ при $\nu>p$. В работах [12, 15] получены следующие результаты.

Т е о р е м а 0.1 ([12]). *Для системы* (0.10), (0.11) *разрешима задача модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу* (0.7) *тогда и только тогда, когда матрицы*

$$C^*B, \quad C^*JB, \quad \ldots, \quad C^*J^{n-1}B$$

линейно независимы.

Система (0.10), (0.11) может быть записана в форме (0.6), где матрица A имеет форму Фробениуса. Позже теорема 0.1 для системы (0.10), (0.11) была обобщена на системы (0.6), где A имеет форму Хессенберга.

Т е о р е м а 0.2 ([15]). *Пусть коэффициенты системы* (0.8) *имеют следующий специальный вид: матрица* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ *имеет форму Хессенберга* (*то есть* $a_{ij} = 0$, $i > j+1$; $a_{i,i+1} \neq 0$, $i = \overline{1, n-1}$); *первые* $p-1$ *строк матрицы* B *и последние* $n-p$ *строк матрицы* C *равны нулю. Для системы* (0.6) *разрешима задача модального управления посредством линейной обратной связи по выходу* (0.7) *тогда и только тогда, когда матрицы*

$$C^*B, \quad C^*AB, \quad \ldots, \quad C^*A^{n-1}B$$

линейно независимы.

Из этих теорем, в частности, вытекают достаточные условия стабилизации системы (0.6) посредством линейной обратной связи по выходу (0.7). В связи с этими результатами возникают вопросы о справедливости аналогичных утверждений для систем более общего вида. Работа посвящена исследованию этих вопросов.

Распространение задачи модального управления посредством статической обратной связи по выходу, в частности, задачи стабилизации, на более широкий класс систем может происходить в различных направлениях. Одно из направлений относится к распространению этих результатов на системы с запаздываниями.

Рассмотрим управляемую систему, заданную дифференциальным уравнением n-го порядка с запаздываниями в состоянии

$$
\begin{gathered}
x^{(n)}(t)+a_{10}x^{(n-1)}(t)+a_{11}x^{(n-1)}(t-h_1)+\ldots\\
+a_{1s}x^{(n-1)}(t-h_s)+\ldots+a_{n0}x(t)+\\
+a_{n1}x(t-h_1)+\ldots+a_{ns}x(t-h_s)+\\
+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\eta=1}^{s}\int_{-h_\eta}^{-h_{\eta-1}} g_{i\eta}(\tau)x^{(n-i)}(t+\tau)\,d\tau=\\
=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=p}^{n} b_{l\alpha}u_\alpha^{(n-l)}(t),\quad t>0,
\end{gathered}
\tag{0.12}
$$

$$
y_\beta(t)=\sum_{\nu=1}^{p}\overline{c}_{\nu\beta}x^{(\nu-1)}(t),\quad \beta=\overline{1,k}. \tag{0.13}
$$

Рассмотрим также управляемую систему, заданную системой дифференциальных уравнений с запаздываниями в состоянии

$$
\begin{gathered}
\dot{x}(t)=\sum_{\nu=0}^{\ell}A_\nu x(t-h_\nu)+\\
+\sum_{\nu=1}^{\ell}\int_{-h_\nu}^{-h_{\nu-1}} S_\nu(\tau)x(t+\tau)\,d\tau+Bu(t),\quad t>0,
\end{gathered}
\tag{0.14}
$$

$$
y(t)=C^*x(t). \tag{0.15}
$$

Задачам устойчивости систем с запаздываниями и стабилизации управляемых систем с запаздываниями посвящено большое количество работ [30, 37–39, 76, 92, 94, 104 и др.] (см. обзоры в [82, 110, 115, 123]). Один из методов исследования задач устойчивости и стабилизации управляемых систем с запаздываниями исторически восходит ко второму методу Ляпунова. Этот метод известен как метод функционала Ляпунова–Красовского [30, 94]. Он позволяет получать достаточные условия асимптотической и экспоненциальной стабилизации систем с запаздываниями [76, 92, 94]. Другой подход восходит к первому методу Ляпунова и представляется в терминах собственных значений системы [104]. В нем требуется найти условия, обеспечивающие размещение спектра системы (множество нулей характеристической функции системы) желаемым образом.

Для систем с запаздываниями спектр состоит, вообще говоря, из бесконечного множества значений. Для систем с запаздываниями взаимосвязь между задачей назначения произвольного спектра и задачей модального управления является более сложной, чем для систем без запаздываний, и эти задачи не являются равносильными. Для систем с запаздываниями (даже с одним) задача назначения произвольного спектра является непреодолимой по многим причинами: во-первых, в силу бесконечности спектра; во-вторых, в силу отсутствия простой взаимосвязи между корнями характеристического уравнения и коэффициентами характеристического уравнения. Кроме того, несмотря на наличие для систем с запаздываниями аналогов критерия Рауса–Гурвица, таких как теорема Эрмита–Билера, теоремы Чеботарева и Понтрягина (см. [47, 48, 53]), использование этих результатов для решения задачи назначения спектра зачастую вызывает трудности. В связи с этим для систем с запаздываниями обычно исследуются такие задачи, как, например, задача перемещения спектра в левую полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda < -\alpha$ (что равносильно экспоненциальной стабилизации с показателем α), задача частичного назначения спектра, задача назначения произвольного конечного спектра и т.п. В свою очередь, задача модального управления (задача назначения коэффициентов характеристической функции) не является непреодолимой и активно исследуется на протяжении многих лет. При этом каждый отдельный вид системы с запаздываниями (с одним или с несколькими, с соизмеримыми или несоизмеримыми, с сосредоточенными или распределенными и т.п.) и вид регулятора порождают свою постановку задачи модального управления. В [1] для систем с несколькими сосредоточенными запаздываниями были получены достаточные условия модальной управляемости, в [109] была изучена задача стабилизации и назначения спектра линейной автономной системы с запаздываниями общего вида; в [90] были разработаны методы стабилизации независимой от запаздывания для класса дифференциальных систем с соизмеримыми запаздываниями; в [101] задача модального управления была изучена с применением кольца операторов запаздываний.

В [105] был развит подход для назначения произвольного конечного спектра линейных систем с запаздываниями. Позднее, задача назначения конечного спектра для систем с запаздыванием посредством линейной обратной связи по состоянию была изучена в [132] для систем с одним сосредоточенным запаздыванием в состоянии с помощью скалярного регулятора, в [133] для систем с несколькими соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями в состояниях при помощи скалярного регулятора, в [134] для систем с несколькими соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями в состояниях и управлении при помощи многомерного регулятора, в [42] для систем с несколькими соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состояниях при помощи скалярного регулятора, в [43] для систем нейтрального типа с несколькими соизмеримыми сосредоточенными запаздывании в состояниях при помощи скалярного регулятора.

Задача модального управления для систем с несоизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состояниях и управлении посредством обратной связи по состоянию была изучена в [2], посредством динамической обратной связи по выходу — в [40]. В [52] рассмотрена задача модального управления для систем нейтрального типа с одним сосредоточенным запаздыванием в состоянии посредством обратной связи по состоянию. В [41] решена задача модального управления для системы, где $s = 1$, $m = 1$, $k = 1$ с запаздываниями ($B_1 = 0$) посредством динамической обратной связи по выходу. В [44] была изучена задача модального управления для системы с одним входом и одним выходом с соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями в состоянии посредством динамической обратной связи по выходу. В [151] была изучена задача стабилизации линейных систем с с запаздываниями в состоянии и управлении посредством предиктора–наблюдателя.

Другой метод для стабилизации системы с сосредоточенными несоизмеримыми запаздываниями посредством динамической обратной связи по выходу представлен в [102], где используются H_∞ методология и уравнения Риккати. В работах Н.Н. Красовского [31, 32, 33, 34] изучались задачи оптимальной стабилизации для линейных автономных систем с запаздыванием при квадратичных критериях качества. Предлагалось решение этих задач в классе квадратичных функционалов; в качестве пространства состояний выбиралось пространство непрерывных функций, а в качестве квадратичных функционалов определенно положительные. Были получены достаточные условия существования стабилизирующего управления. Ю.С. Осипов установил их связь с вполне управляемостью специальной конечномерной системы [45]. Идеи, предложенные в [34], были развиты в работах [9, 73] для исследования задачи оптимальной стабилизации системы с распределенным запаздыванием, в [10] — для задачи оптимальной стабилизации автономных систем с сосредоточенным запаздыванием.

Задачи стабилизации и модального управления систем с запаздыванием посредством статической обратной связи по выходу являются более сложными для исследований и менее изученными. В развитие этих задач фундаментальный вклад внес Н.Н. Красовский. Одним из основных направлений его деятельности явилась разработка математического аппарата для решения проблем гарантированного управления в условиях динамических и информационных помех. Особенностью исследуемых задач является то, что управление формируется в зависимости от поступающей информации, которая может быть неполной вследствие действия неизвестных помех и информационных ошибок наблюдения текущего состояния объекта. Работа Н.Н. Красовского [33] была одной из первых работ по стабилизации линейных управляемых систем с запаздыванием с неполной обратной связью. В работе [108] рассматривается задача стабилизации системы (0.6) посредством статической обратной связи по выходу с запаздыванием $u(t) = Ky(t-\tau)$. В [93] для систем с одним входом и одним выходом с запаздываниями были получены необходимые условия существования стабилизирующего регулятора, построенного по принципу статической обратной связи по выходу. В [103] была изучена задача стабилизации линейной нестационарной системы с запаздываниями в управлении посредством статической обратной связи по выходу.

В главах I, II монографии исследуется проблема модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра для линейной системы (0.12), (0.13) и для линейной системы (0.14), (0.15) с линейной неполной обратной связью посредством линейной статической обратной связи по выходу с запаздываниями. Теоремы 0.1, 0.2 обобщаются на различные классы систем с запаздываниями.

Другое направление в распространении задачи модального управления посредством статической обратной связи по выходу на более широкий класс систем относится к распространению теоремы 0.1 на линейные системы высших порядков. Рассмотрим следующую систему

$$\begin{aligned} &x^{(n)} + A_1 x^{(n-1)} + \ldots + A_n x = \\ &= B_{p1} u_1^{(n-p)} + B_{p+1,1} u_1^{(n-p-1)} + \ldots + B_{n1} u_1 + \ldots \\ &+ B_{pm} u_m^{(n-p)} + B_{p+1,m} u_m^{(n-p-1)} + \ldots + B_{nm} u_m, \end{aligned} \tag{0.16}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= C_{11} x + C_{21} x' + \ldots + C_{p1} x^{(p-1)}, \quad \ldots, \\ y_k &= C_{1k} x + C_{2k} x' + \ldots + C_{pk} x^{(p-1)}, \end{aligned} \tag{0.17}$$

где $s, n, m, k \in \mathbb{N}$ — заданные числа и $p \in \{\overline{1,n}\}$; $x \in \mathbb{K}^s$ — фазовый вектор, $u_\alpha \in \mathbb{K}^s$ — векторы управления, $y_\beta \in \mathbb{K}^s$ — векторы выходных величин, A_i, $B_{l\alpha}$, $C_{\nu\beta} \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{p,n}$, $\nu = \overline{1,p}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$.

Рассмотрим также следующую систему

$$\begin{gathered} x^{(n)} + A_1 x^{(n-1)} + \ldots + A_n x = B_1 u, \\ x, u \in \mathbb{K}^s,\ A_i, B_1 \in M_s(\mathbb{K}). \end{gathered} \tag{0.18}$$

Система (0.18) является частным случаем системы (0.16), (0.17), когда $m = 1$, $p = n$, $k = n$, $y = x$; $C_{\nu\beta} = I \in M_s(\mathbb{K})$, $\nu = \beta$; $C_{\nu\beta} = 0 \in M_s(\mathbb{K})$, $\nu \neq \beta$; $\nu = \overline{1,n}$, $\beta = \overline{1,n}$.

Пусть управление в системе (0.18) строится по принципу линейной обратной связи по состоянию

$$u = K_1 x^{(n-1)} + \ldots + K_n x, \tag{0.19}$$

где $K_i \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$.

Используя стандартную замену $z_1 = x$, $z_2 = x'$, $\ldots$, $z_n = x^{(n-1)}$, можно переписать систему (0.18), (0.19) в виде **большой системы**

$$\dot{z} = Fz + Gv, \quad v = Lz, \tag{0.20}$$

где $z = \operatorname{col}[z_1, \ldots, z_n] \in \mathbb{K}^{ns}$, $v = u \in \mathbb{K}^s$,

$$F = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I \\ -A_n & -A_{n-1} & -A_{n-2} & \ldots & -A_1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_1 \end{bmatrix},$$

$$L = [K_n, K_{n-1}, \ldots, K_1], \qquad r = ns, \quad q = s.$$

Здесь $0, I \in M_s(\mathbb{K})$. Говорят, что для системы (0.18) *разрешима задача модального управления посредством линейной статической обратной связи по состоянию* (0.19), если соответствующая задача модального управления (или, что равносильно, задача назначения произвольного спектра) посредством линейной стационарной статической обратной связи по состоянию разрешима для большой системы (0.20).

Для системы (0.18) задача назначения произвольного спектра посредством статической обратной связи по состоянию была решена в [122]. Задача назначения собственных значений и собственных векторов (eigenstructure assignment problem) для системы (0.18) изучалась в [74]. Задача назначения произвольного спектра для системы (0.18) второго порядка посредством линейной статической обратной связи по состоянию изучалась в [69, 75, 96], задачи робастного управления спектром — в [84]. Задача назначения произвольного спектра системы (0.16), (0.17) посредством линейной статической обратной связи по выходу

$$u = Qy, \quad Q \in M_{ms,ks}(\mathbb{K}).$$

при $n = 2$, $s = 2$, $m = 1$, $k = 1$, $p = 1$ рассмотрена в [46], для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ при $p = n$, $m = 1$, $k = n$ — в [139, 140, 141]. Для системы (0.16), (0.17) задача назначения произвольного спектра посредством статической обратной связи по состоянию изучалась в [152], были получены необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи в терминах отображения Сильвестра.

По аналогии с задачей модального управления для линейного скалярного уравнения n-го порядка можно дать соответствующую формулировку задачи матричного модального управления для многомерного дифференциального уравнения n-го порядка.

Задача матричного модального управления системы (0.18) посредством линейной статической обратной связи по состоянию формулируется следующим образом: *для произвольного набора матриц $\Gamma_i \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, требуется построить матрицы $K_i \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, обратной связи* (0.19) *так, что замкнутая система* (0.18), (0.19) *имеет вид*

$$x^{(n)} + \Gamma_1 x^{(n-1)} + \ldots + \Gamma_n x = 0. \tag{0.21}$$

Задача матричного модального управления системы (0.16), (0.17) посредством линейной статической обратной связи по выходу формулируется следующим образом: *для произвольного набора матриц* $\Gamma_i \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, *требуется построить матрицу* $Q \in M_{ms,ks}(\mathbb{K})$ *обратной связи*

$$u = Qy \tag{0.22}$$

так, что замкнутая система (0.16), (0.17), (0.22) *имеет вид* (0.21).

В главе III поставлена и решена проблема матричного модального управления для системы (0.16), (0.17) посредством линейной статической обратной связи по выходу (0.22).

Третье направление относится к распространению результатов теоремы 0.1 на системы вида (0.10), (0.11) с переменными коэффициентами. Рассмотрим систему, заданную нестационарным дифференциальным уравнением n-го порядка с переменными коэффициентами в левой части уравнения

$$\begin{gathered} x^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) x^{(n-i)} = \sum_{\tau=1}^{m} \sum_{l=p}^{n} b_{l\tau} w_\tau^{(n-l)}, \\ x \in \mathbb{R}, \quad b_{l\tau} \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{gathered} \tag{0.23}$$

$$y_j = \sum_{\nu=1}^{p} c_{\nu j} x^{(\nu-1)}, \quad j = \overline{1,k}, \quad c_{\nu j} \in \mathbb{R}, \tag{0.24}$$

$w = \mathrm{col}(w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления; $y = \mathrm{col}(y_1, \ldots$ $\ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ — выходной вектор. Функции $p_i(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, являются измеримыми и ограниченными:

$$\alpha_i \leqslant p_i(t) \leqslant \beta_i, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad i = \overline{1,n}.$$

Управление в системе (0.23), (0.24) строится по принципу линейной статической обратной связи по выходу с постоянными коэффициентами

$$w = Uy, \quad U \in M_{m,k}(\mathbb{R}). \tag{0.25}$$

Задача экспоненциальной стабилизации системы (0.23), (0.24) посредством линейной стационарной статической обратной связи по выходу (0.25) формулируется следующим образом: *требуется найти матрицу* U *обратной связи* (0.25) *так,* *что замкнутая система* (0.23), (0.24), (0.25) *является экспоненциально устойчивой с наперед заданным показателем.* Помимо вышесказанного, предполагается также, что коэффициенты $p_i(t)$ являются неопределенными, то есть точные значения этих функций в момент времени t неизвестны, а известны лишь их границы α_i, β_i, $i = \overline{1,n}$. Таким образом, рассматриваемая задача относится к задачам робастной стабилизации.

Рассмотрим систему (0.23), (0.24), (0.25), когда $m = 1$, $p = n$, $k = n$, $y = x$, $C = I$. В этом случае система примет вид

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = u, \quad x, u \in \mathbb{R}, \tag{0.26}$$

$$v = v_1 x^{(n-1)} + \ldots + v_n x. \tag{0.27}$$

Используя стандартную замену $z_1 = x$, $z_2 = x'$, …, $z_n = x^{(n-1)}$, можно свести систему (0.26), (0.27) к виду

$$\dot{z} = A(t)z + Bu, \tag{0.28}$$

$$u = Vz. \tag{0.29}$$

Здесь $A(t)$ — сопровождающая матрица для многочленов с коэффициентами $p_i(t)$, $B = \mathrm{col}[0, \ldots, 0, 1]$, $V = [v_n, \ldots, v_1]$.

Задачам робастной асимптотической устойчивости и стабилизации линейных систем посвящено большое количество работ. Отметим известные работы [11, 51, 65, 83, 89, 91, 111, 137, 149], а также недавние результаты [60, 120]. Задачи стабилизации неопределенных линейных систем с использованием линейных матричных неравенств изучались в работах [58, 61, 67, 68, 78, 80, 81, 86, 106, 114, 138]. Стабилизируемость и управляемость спектром нестационарных линейных алгебро-дифференциальных систем управления рассмотрена в работах [55, 121].

Неопределенные системы (0.28), (0.29) изучались в [5, 6, 7, 148] и в других работах Гелига А. Х. и Зубер И.Е. В частности, из результатов [5] следует, что система (0.28) экспоненциально стабилизируема посредством обратной связи (0.29) с некоторым показателем устойчивости.

Глава IV посвящена решению проблемы экспоненциальной стабилизации системы (0.23), (0.24) с неопределенными переменными коэффициентами посредством линейной стационарной статической обратной связи по состоянию и по выходу. В частности, результаты § 19 дополняют и обобщают результаты работы [5]. Отличие между результатами § 19 и работой

[5] состоит в следующем: во-первых, здесь установлена экспоненциальная стабилизация системы (0.26), (0.27) не только с некоторым показателем устойчивости, как это следует из [5], но и с произвольным наперед заданным показателем устойчивости. Во-вторых, в отличие от работы [5], в которой используется второй метод Ляпунова (метод функций Ляпунова), здесь используется первый метод Ляпунова и теория неосцилляции. Кроме того, результаты о стабилизации, доказанные в § 19, обобщаются в § 20 на нестационарные дифференциальные уравнения со статической обратной связью по выходу. Эти результаты дополняют и обобщают результаты, полученные в работе [12] для стационарных систем.

Целью монографии является исследование проблемы модального управления, задачи назначения спектра и стабилизации посредством линейной статической обратной связи по выходу для различных классов линейных систем управления:
а) систем с запаздываниями;
б) систем высших порядков;
в) систем с переменными неопределенными коэффициентами.

Основные результаты монографии опубликованы в 19 научных работах [17–29, 95, 143–147].

Глава I посвящена изучению задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра для линейной управляемой системы, заданной дифференциальным уравнением с запаздываниями. Показано, что условие линейной независимости матриц

$$C^*B, \quad C^*JB, \quad \ldots, \quad C^*J^{n-1}B$$

является необходимым и достаточным условием для разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу, и как следствие, достаточным условием стабилизации рассматриваемых систем.

В первом параграфе для линейной управляемой системы, заданной дифференциальным уравнением n-го порядка с m входами и k выходами с соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями в состоянии, рассматривается задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу с соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями.

В § 2 для линейной управляемой системы, заданной дифференциальным уравнением n-го порядка с m входами и k выходами с несоизмеримыми сосредоточенными запаздываниями в состоянии, рассматривается задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу с несоизмеримыми сосредоточенными запаздываниями.

В § 3 для линейной управляемой системы, заданной дифференциальным уравнением n-го порядка с m входами и k выходами с распределенными запаздываниями в состоянии, рассматривается задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу с распределенными запаздываниями.

В § 4 для линейной управляемой системы, заданной дифференциальным уравнением n-го порядка с m входами и k выходами с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии, рассматривается задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями.

В § 5 для линейной управляемой системы, заданной дифференциальным уравнением n-го порядка с m входами и k выходами с несоизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии, рассматривается задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу с несоизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями. Приводятся доказательства всех утверждений, сформулированных в § 1–5.

В § 6 приведены примеры, иллюстрирующие результаты, представленные в § 4, 5.

В главе II исследуется задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра для линейных стационарных систем с запаздываниями. Результаты получены для систем с коэффициентами, имеющими специальный вид. К системам такого вида могут быть приведены системы, исследуемые в главе I. Результаты главы I частично распространяются в главе II на более широкий класс систем.

В § 7 для линейной управляемой стационарной системы, заданной системой дифференциальных уравнений n-го порядка ка с соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями в состоянии, рассматривается задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу с соизмеримыми запаздываниями. Получено необходимое и достаточное условие разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу. Приводится следствие о стабилизации системы.

В § 8 для линейной управляемой стационарной системы, заданной системой дифференциальных уравнений n-го порядка с несоизмеримыми сосредоточенными запаздываниями в состоянии, рассматривается задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу с несоизмеримыми запаздываниями. Доказано, что условие линейной независимости матриц

$$C^*B, \quad C^*AB, \quad \dots, \quad C^*A^{n-1}B \tag{0.30}$$

является необходимым и достаточным для разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу. Приводятся доказательства утверждений § 7, 8.

В § 9 для линейной управляемой стационарной системы, заданной системой дифференциальных уравнений n-го порядка с несоизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии, рассматривается задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу с сосредоточенными и распределенными запаздываниями в тех же узлах. Доказано, что условие линейной независимости матриц (0.30) является необходимым и достаточным для разрешимости задачи назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу.

В главе III вводится понятие и исследуется задача матричного модального управления для систем высших порядков посредством линейной статической обратной связи. Предполагается, что s — фиксированное число.

В § 10 для системы высшего порядка

$$x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_nx = B_1u, \quad x, u \in \mathbb{K}^s,\ A_i, B_1 \in M_s(\mathbb{K})$$

вводится постановка задачи матричного модального управления посредством линейной статической обратной связи по состоянию. Приводится необходимое и достаточное условие разрешимости этой задачи и достаточное условие разрешимости задачи скалярного модального управления рассматриваемой системы. Показано, что это достаточное условие не является необходимым.

В § 11 для систем высших порядков вводится постановка задачи матричного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу.

В § 12 вводятся вспомогательные обозначения, определения, утверждения, которые понадобятся для доказательства основных результатов главы III.

В § 13 получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи матричного модального управления для систем высших порядков посредством линейной статической обратной связи по выходу.

В § 14 доказано, что разрешимость задачи матричного модального управления для систем высших порядков влечет разрешимость задачи скалярного модального управления. Показано, что обратное, вообще говоря, не верно.

В § 15 получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи матричного модального управления и достаточные условия разрешимости задачи скалярного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу, когда блоки матрицы B и (или) C являются скалярными матрицами.

В § 16 обсуждаются связь и различия между задачами матричного модального управления и скалярного модального управления. Доказано одно свойство системы, для которой разрешима задача матричного модального управления, согласно которому можно назначить не только собственные значения замкнутой системы, но и собственные векторы с высокой степенью свободы.

В § 17 приведены примеры, иллюстрирующие результаты, полученные в § 13, 15.

В главе IV исследуется задача экспоненциальной стабилизации с произвольным наперед заданным показателем устойчивости для линейного нестационарного дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами посредством линейной стационарной обратной связи по состоянию и по выходу.

В § 18 приводится постановка задачи экспоненциальной стабилизации дифференциального уравнения посредством линейной обратной связи по состоянию.

В § 19 доказана разрешимость задачи экспоненциальной стабилизации дифференциального уравнения посредством линейной обратной связи по состоянию. Приведен пример, иллюстрирующий полученный результат.

В § 20 исследована задача экспоненциальной стабилизации с наперед заданным показателем устойчивости для линейного нестационарного дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами посредством линейной обратной связи по выходу. Получены достаточные условия разрешимости рассматриваемой задачи. Приведен пример, иллюстрирующий полученный результат.

В заключение вынесены краткие формулировки основных результатов, полученных в работе, и описаны возможные перспективы дальнейшей разработки темы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 16–01–00346-а, 18–51–41005, 20–01–00293) и Минобрнауки РФ (проект FEWS-2020-0010).

Глава I
МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ВЫХОДУ

В данной главе исследована задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра для линейной управляемой системы, заданной дифференциальным уравнением n-го порядка с m входами и k выходами с запаздываниями в состоянии, посредством статической обратной связи по выходу. Получено необходимое и достаточное условие разрешимости рассматриваемых задач, и как следствие, достаточное условие стабилизации систем.

В § 1, 2 рассмотрена задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра для системы с соизмеримыми (несоизмеримыми) сосредоточенными запаздываниями в состоянии посредством линейной статической обратной связи по выходу с соизмеримыми (несоизмеримыми) сосредоточенными запаздываниями, в § 3 — для системы с распределенными запаздываниями в состоянии посредством линейной статической обратной связи по выходу с распределенными запаздываниями, в § 4, 5 — для системы с соизмеримыми (несоизмеримыми) сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии посредством линейной статической обратной связи по выходу с соизмеримыми (несоизмеримыми) сосредоточенными и распределенными запаздываниями. Доказательства всех утверждений даны в § 5.

В § 6 приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

§ 1. Модальное управление дифференциальным уравнением с соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями

Для линейной стационарной управляемой системы, которая задана дифферецициальным уравнением n-го порядка с несколькими соизмеримыми запаздываниями в состоянии, получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи модального управления *и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством статической обратной связи по выходу* [28].

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему, которая задана дифференциальным уравнением n-го порядка с s соизмеримыми запаздываниями в состоянии, на вход которой подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $(n-p)$ включительно $(1 \leqslant p \leqslant n)$, а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния $x(t)$ и его производных до порядка $(p-1)$ включительно:

$$\begin{gathered} x^{(n)}(t) + a_{10}x^{(n-1)}(t) + \\ + a_{11}x^{(n-1)}(t-h) + \ldots + a_{1s}x^{(n-1)}(t-sh) + \ldots \\ + a_{n0}x(t) + a_{n1}x(t-h) + \ldots + a_{ns}x(t-sh) = \\ = b_{p1}u_1^{(n-p)} + b_{p+1,1}u_1^{(n-p-1)} + \ldots + b_{n1}u_1 + \ldots \\ + b_{pm}u_m^{(n-p)} + b_{p+1,m}u_m^{(n-p-1)} + \ldots + b_{nm}u_m, \end{gathered} \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} y_1 = \overline{c}_{11}x + \overline{c}_{21}x' + \ldots + \overline{c}_{p1}x^{(p-1)}, \quad \ldots, \\ y_k = \overline{c}_{1k}x + \overline{c}_{2k}x' + \ldots + \overline{c}_{pk}x^{(p-1)}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

с начальными условиями $x^{(n-i)}(\tau) = \phi_i(\tau)$, $\tau \in [-sh, 0]$; здесь $h > 0$ — постоянное запаздывание, $\phi_i : [-sh, 0] \to \mathbb{K}$ — непрерывные функции; $a_{ij}, b_{l\alpha}, c_{\nu\beta} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,s}$, $l = \overline{p,n}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\nu = \overline{1,p}$, $\beta = \overline{1,k}$; $u = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{K}^m$ — вектор управления, $y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{K}^k$ — выходной вектор; $p \in \{\overline{1,n}\}$; $\overline{c}_{\nu\beta}$ означает комплексное сопряжение к $c_{\nu\beta}$ и используется для удобства обозначений.

Пусть управление в системе (1.1), (1.2) имеет вид линейной статической обратной связи по выходу с соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями

$$u(t) = Q_0(t) + Q_1 y(t-h) + \ldots + Q_\theta(t - \theta h), \tag{1.3}$$

$y(t) = 0$, $t < -sh$. Здесь $Q_\rho = \{q^\rho_{\alpha\beta}\} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ — постоянные матрицы $(\rho = \overline{0,\theta})$.

Замкнутая система (1.1), (1.2), (1.3) примет вид

$$x^{(n)}(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{s}a_{ij}x^{(n-i)}(t-jh)-$$
$$\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=p}^{n}b_{l\alpha}\Big(\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{\rho=0}^{\theta}q^{\rho}_{\alpha\beta}\big(\sum_{\nu=1}^{p}\overline{c}_{\nu\beta}x^{(\nu-1)}(t-\rho h)\big)\Big)^{(n-l)}=0. \quad (1.4)$$

Обозначим через $\varphi(\lambda,e^{-\lambda})$ характеристический квазиполином замкнутой системы (1.4). Тогда

$$\varphi(\lambda,e^{-\lambda})=\lambda^{n}+\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{j=0}^{s}a_{ij}e^{-\lambda jh}\Big)-$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=p}^{n}b_{l\alpha}\Big(\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{\rho=0}^{\theta}q^{\rho}_{\alpha\beta}\overline{c}_{\nu\beta}e^{-\lambda\rho h}\lambda^{n-l+\nu-1}\Big). \quad (1.5)$$

Множество $\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{C}:\varphi(\lambda,e^{-\lambda})=0\}$ образует спектр системы (1.4). Если спектр системы (1.4) лежит в левой полуплоскости, то система (1.4) экспоненциально устойчива. Спектр системы (1.4) однозначно определяется коэффициентами системы (1.4). Исследуется задача назначения коэффициентов характеристического квазиполинома (1.5) системы (1.4), то есть задача модального управления. Если $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, то спектр Λ симметричен относительно вещественной оси. В общем случае спектр Λ системы (1.4) состоит из бесконечного числа точек $\lambda_{\varkappa}\in\mathbb{C}$. Если характеристический квазиполином обращается в полином $\lambda^{n}+\gamma_1\lambda^{n-1}+\ldots+\gamma_n$, то спектр Λ является конечным множеством.

Определение 1.1. *Для системы* (1.1), (1.2) *разрешима задача модального управления посредством регулятора* (1.3), *если для любого целого $\ell\geqslant 0$, любых чисел $\gamma_{i\mu}\in\mathbb{K}$, $i=\overline{1,n}$, $\mu=\overline{0,\ell}$, найдутся целое число $\theta\geqslant 0$ и матрицы $Q_{\rho}\in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho=\overline{0,\theta}$, такие, что характеристический квазиполином* (1.5) *замкнутой системы* (1.4) *удовлетворяет равенству*

$$\varphi(\lambda,e^{-\lambda})=\lambda^{n}+\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{\mu=0}^{\ell}\gamma_{i\mu}e^{-\lambda\mu h}\Big).$$

Определение 1.2. *Для системы* (1.1), (1.2) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора* (1.3), *если для любых чисел* $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, *найдутся целое число* $\theta \geqslant 0$ *и матрицы* $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0, \theta}$, *такие, что характеристический квазиполином* (1.5) *замкнутой системы* (1.4) *удовлетворяет равенству*

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda}) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n.$$

По системе (1.1), (1.2) построим матрицы $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,k}(\mathbb{K})$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ b_{p1} & \ldots & b_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \ldots & c_{pk} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \; p \in \{1, \ldots, n\}.$$

Теорема 1.1. *Задача модального управления для системы* (1.1), (1.2) *посредством регулятора* (1.3) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы*

$$C^* B, \quad C^* J B, \quad \ldots, \quad C^* J^{n-1} B \tag{1.6}$$

линейно независимы.

Теорема 1.2. *Задача назначения произвольного конечного спектра для системы* (1.1), (1.2) *посредством регулятора* (1.3) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы* (1.6) *линейно независимы.*

Следствие 1.1. *Если матрицы* (1.6) *линейно независимы, то система* (1.1), (1.2) *экспоненциально стабилизируема посредством статической обратной связи по выходу* (1.3).

§ 2. Модальное управление дифференциальным уравнением с несоизмеримыми сосредоточенными запаздываниями

Для линейной стационарной управляемой системы, которая задана диффферецициальным уравнением n-го порядка с несколькими несоизмеримыми запаздываниями в состоянии, получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством статической обратной связи по выходу [143].

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему, которая задана дифференциальным уравнением n-го порядка с s несоизмеримыми запаздываниями в состоянии, на вход которой подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $(n-p)$ включительно $(1 \leqslant p \leqslant n)$, а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния $x(t)$ и его производных до порядка $(p-1)$ включительно:

$$\begin{aligned} & x^{(n)}(t) + a_{10}x^{(n-1)}(t) + \\ & + a_{11}x^{(n-1)}(t-h_1) + \ldots + a_{1s}x^{(n-1)}(t-h_s) + \ldots \\ & + a_{n0}x(t) + a_{n1}x(t-h_1) + \ldots + a_{ns}x(t-h_s) = \\ & = b_{p1}u_1^{(n-p)} + b_{p+1,1}u_1^{(n-p-1)} + \ldots + b_{n1}u_1 + \ldots \\ & + b_{pm}u_m^{(n-p)} + b_{p+1,m}u_m^{(n-p-1)} + \ldots + b_{nm}u_m, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \bar{c}_{11}x + \bar{c}_{21}x' + \ldots + \bar{c}_{p1}x^{(p-1)}, \quad \ldots, \\ y_k &= \bar{c}_{1k}x + \bar{c}_{2k}x' + \ldots + \bar{c}_{pk}x^{(p-1)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

с начальными условиями $x^{(n-i)}(\tau) = \phi_i(\tau)$, $\tau \in [-h_s, 0]$; здесь $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_s$ — постоянные запаздывания, $\phi_i : [-h_s, 0] \to \mathbb{K}$ — непрерывные функции; $a_{ij}, b_{l\alpha}, c_{\nu\beta} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,s}$, $l = \overline{p,n}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\nu = \overline{1,p}$, $\beta = \overline{1,k}$; $u = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{K}^m$ — вектор управления, $y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{K}^k$ — выходной вектор; $p \in \{\overline{1,n}\}$.

Пусть управление в системе (2.1), (2.2) имеет вид линейной статической обратной связи по выходу с несоизмеримыми сосредоточенными запаздываниями

$$u(t) = Q_0y(t) + Q_1y(t-\sigma_1) + \ldots + Q_\theta y(t-\sigma_\theta), \tag{2.3}$$

$y(t) = 0$, $t < -h_s$. Здесь $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$ — постоянные запаздывания, $Q_\rho = \{q^\rho_{\alpha\beta}\} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ — постоянные матрицы ($\rho = \overline{0,\theta}$).

Замкнутая система (2.1), (2.2), (2.3) примет вид

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{s} a_{ij}x^{(n-i)}(t-h_j) -$$
$$\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=p}^{n} b_{l\alpha}\Big(\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{\rho=0}^{\theta} q^\rho_{\alpha\beta}\big(\sum_{\nu=1}^{p}\overline{c}_{\nu\beta}x^{(\nu-1)}(t-\sigma_\rho)\big)\Big)^{(n-l)} = 0. \quad (2.4)$$

Обозначим через $\varphi(\lambda, e^{-\lambda})$ характеристический квазиполином замкнутой системы (2.4). Тогда

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda}) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{j=0}^{s} a_{ij}e^{-\lambda h_j}\Big) -$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=p}^{n} b_{l\alpha}\Big(\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{\rho=0}^{\theta} q^\rho_{\alpha\beta}\overline{c}_{\nu\beta}e^{-\lambda\sigma_\rho}\lambda^{n-l+\nu-1}\Big). \quad (2.5)$$

Определение 2.1. *Для системы* (2.1), (2.2) *разрешима задача модального управления посредством регулятора* (2.3), *если для любого целого $\ell \geqslant 0$, любых заданных чисел $0 = \omega_0 < < \omega_1 < \ldots < \omega_\ell$ и любых чисел $\gamma_{i\mu} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $\mu = \overline{0,\ell}$, найдутся целое число $\theta \geqslant 0$, числа $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$ и матрицы $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\theta}$, такие, что характеристический квазиполином замкнутой системы* (2.5) *удовлетворяет равенству*

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda}) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{\mu=0}^{\ell}\gamma_{i\mu}e^{-\lambda\omega_\mu}\Big).$$

Определение 2.2. *Для системы* (2.1), (2.2) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора* (2.3), *если для любых чисел $\gamma_i \in \mathbb{K}$,*

$i = \overline{1,n}$, найдутся целое число $\theta \geqslant 0$, числа $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$ и матрицы $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\theta}$, такие, что характеристический квазиполином (2.5) *замкнутой системы* (2.4) *удовлетворяет равенству*

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda}) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n.$$

По системе (2.1), (2.2) построим матрицы $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,k}(\mathbb{K})$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ b_{p1} & \ldots & b_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \ldots & c_{pk} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad p \in \{1, \ldots, n\}.$$

Т е о р е м а 2.1. *Задача модального управления для системы* (2.1), (2.2) *посредством регулятора* (2.3) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы*

$$C^* B, \quad C^* J B, \quad \ldots, \quad C^* J^{n-1} B \tag{2.6}$$

линейно независимы.

Т е о р е м а 2.2. *Задача назначения произвольного конечного спектра для системы* (2.1), (2.2) *посредством регулятора* (2.3) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы* (2.6) *линейно независимы.*

С л е д с т в и е 2.1. *Если матрицы* (2.6) *линейно независимы, то система* (2.1), (2.2) *экспоненциально стабилизируема посредством статической обратной связи по выходу* (2.3).

§ 3. Модальное управление дифференциальным уравнением с распределенными запаздываниями

Для линейной стационарной управляемой системы, которая задана диффереціальным уравнением n-го порядка с распределенными запаздываниями в состоянии, получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством статической обратной связи по выходу [24].

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему, которая задана дифференциальным уравнением n-го порядка с распределенными запаздываниями в состоянии, на вход которой подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $(n-p)$ включительно $(1 \leqslant p \leqslant n)$, а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния $x(t)$ и его производных до порядка $(p-1)$ включительно:

$$\begin{gathered}
x^{(n)}(t)+a_{10}x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n0}x(t)+\\
+\int_{-h_1}^{0} g_{11}(\tau)x^{(n-1)}(t+\tau)\,d\tau+\ldots\\
+\int_{-h_s}^{-h_{s-1}} g_{1s}(\tau)x^{(n-1)}(t+\tau)\,d\tau+\ldots\\
+\int_{-h_1}^{0} g_{n1}(\tau)x(t+\tau)\,d\tau+\ldots\\
+\int_{-h_s}^{-h_{s-1}} g_{ns}(\tau)x(t+\tau)\,d\tau=\\
=b_{p1}u_1^{(n-p)}+b_{p+1,1}u_1^{(n-p-1)}+\ldots+b_{n1}u_1+\ldots\\
+b_{pm}u_m^{(n-p)}+b_{p+1,m}u_m^{(n-p-1)}+\ldots+b_{nm}u_m,\quad t>0,
\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}
y_1=\bar{c}_{11}x+\bar{c}_{21}x'+\ldots+\bar{c}_{p1}x^{(p-1)},\quad \ldots,\\
y_k=\bar{c}_{1k}x+\bar{c}_{2k}x'+\ldots+\bar{c}_{pk}x^{(p-1)}.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

с начальными условиями $x^{(n-i)}(\tau)=\phi_i(\tau)$, $\tau\in[-h_s,0]$; здесь $0=h_0<h_1<\ldots<h_s$ — постоянные запаздывания,

$g_{i\eta} : [-h_\eta, -h_{\eta-1}] \to \mathbb{K}$ — интегрируемые функции ($i = \overline{1,n}$, $\eta = \overline{1,s}$); $\phi_i : [-h_s, 0] \to \mathbb{K}$ — непрерывные функции; a_{i0}, $b_{l\alpha}$, $c_{\nu\beta} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{p,n}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\nu = \overline{1,p}$, $\beta = \overline{1,k}$; $u = \operatorname{col}(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{K}^m$ — вектор управления, $y = \operatorname{col}(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{K}^k$ — выходной вектор; $p \in \{\overline{1,n}\}$.

Пусть управление в системе (3.1), (3.2) имеет вид линейной статической обратной связи по выходу с распределенными запаздываниями

$$u(t) = Q_0 y(t) + \sum_{\varkappa=1}^{\theta} \int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} R_\varkappa(\tau) y(t+\tau)\, d\tau, \tag{3.3}$$

$y(t) = 0$, $t < -h_s$. Здесь $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$ — постоянные запаздывания, $Q_0 = \{q_{\alpha\beta}\} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ — постоянная матрица, $R_\varkappa(\tau) = \{r^\varkappa_{\alpha\beta}(\tau)\} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $r^\varkappa_{\alpha\beta} : [-\sigma_\varkappa, -\sigma_{\varkappa-1}] \to \mathbb{K}$ — интегрируемые функции ($\varkappa = \overline{1,\theta}$), $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$. Таким образом, для всех $\alpha = \overline{1,m}$

$$u_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{k} \Big[q_{\alpha\beta} \big(\sum_{\nu=1}^{p} \overline{c}_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}(t) \big) + \\ + \sum_{\varkappa=1}^{\theta} \int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} r^\varkappa_{\alpha\beta}(\tau) \big(\sum_{\nu=1}^{p} \overline{c}_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}(t+\tau) \big)\, d\tau \Big].$$

Замкнутая система (3.1), (3.2), (3.3) примет вид

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} a_{i0} x^{(n-i)}(t) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\eta=1}^{s} \int_{-h_\eta}^{-h_{\eta-1}} g_{i\eta}(\tau) x^{(n-i)}(t+\tau)\, d\tau - \\ - \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{l=p}^{n} b_{l\alpha} \Big(\sum_{\beta=1}^{k} \Big[q_{\alpha\beta} \big(\sum_{\nu=1}^{p} \overline{c}_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}(t) \big) + \\ \sum_{\varkappa=1}^{\theta} \int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} r^\varkappa_{\alpha\beta}(\tau) \big(\sum_{\nu=1}^{p} \overline{c}_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}(t+\tau) \big)\, d\tau \Big] \Big)^{(n-l)} = 0. \tag{3.4}$$

Обозначим через $\varphi(\lambda)$ характеристическую функцию замкнутой системы (3.4). Тогда

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i}\Big(a_{i0} + \sum_{\eta=1}^{s} \int_{-h_\eta}^{-h_{\eta-1}} g_{i\eta}(\tau)e^{\lambda\tau}\, d\tau\Big) -$$
$$- \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{l=p}^{n} b_{l\alpha}\Big(\sum_{\nu=1}^{p}\Big[\sum_{\beta=1}^{k} q_{\alpha\beta}\overline{c}_{\nu\beta} +$$
$$+ \sum_{\varkappa=1}^{\theta} \int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} r^{\varkappa}_{\alpha\beta}(\tau)\overline{c}_{\nu\beta}e^{\lambda\tau}\, d\tau\Big]\lambda^{n-l+\nu-1}\Big). \quad (3.5)$$

О п р е д е л е н и е 3.1. *Для системы* (3.1), (3.2) *разрешима задача модального управления посредством регулятора* (3.3), *если для любого целого* $\ell \geqslant 0$, *любых чисел* $\gamma_{i0} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, *любых чисел* $0 = \omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_\ell$ *и любых интегрируемых функций* $\delta_{i\xi} : [-\omega_\xi, -\omega_{\xi-1}] \to \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $\xi = \overline{1,\ell}$, *найдутся целое число* $\theta \geqslant 0$, *числа* $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$, *матрица* $Q_0 \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ *и интегрируемые функции* $R_\varkappa : [-\sigma_\varkappa, -\sigma_{\varkappa-1}] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\varkappa = \overline{1,\theta}$, *такие, что характеристическая функция* (3.5) *замкнутой системы* (3.4) *удовлетворяет равенству*

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i}\Big(\gamma_{i0} + \sum_{\xi=1}^{\ell} \int_{-\omega_\xi}^{-\omega_{\xi-1}} \delta_{i\xi}(\tau)e^{\lambda\tau}\, d\tau\Big).$$

О п р е д е л е н и е 3.2. *Для системы* (3.1), (3.2) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора* (3.3), *если для любых чисел* $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, *найдутся целое число* $\theta \geqslant 0$, *числа* $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$, *матрица* $Q_0 \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ *и интегрируемые функции* $R_\varkappa : [-\sigma_\varkappa, -\sigma_{\varkappa-1}] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\varkappa = \overline{1,\theta}$, *такие, что характеристическая функция* (3.5) *замкнутой системы удовлетворяет равенству*

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n.$$

По системе (3.1), (3.2) построим матрицы $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,k}(\mathbb{K})$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ b_{p1} & \dots & b_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pk} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \; p \in \{1, \dots, n\}.$$

Теорема 3.1. *Задача модального управления для системы* (3.1), (3.2) *посредством регулятора* (3.3) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы*

$$C^*B, \quad C^*JB, \quad \dots, \quad C^*J^{n-1}B \tag{3.6}$$

линейно независимы.

Теорема 3.2. *Задача назначения произвольного конечного спектра для системы* (3.1), (3.2) *посредством регулятора* (3.3) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы* (3.6) *линейно независимы.*

Следствие 3.1. *Если матрицы* (3.6) *линейно независимы, то система* (3.1), (3.2) *экспоненциально стабилизируема посредством статической обратной связи по выходу* (3.3).

§ 4. Модальное управление дифференциальным уравнением с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями

Для линейной стационарной управляемой системы, которая задана дифферециальным уравнением n-го порядка с несколькими соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии, получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством статической обратной связи по выходу [25, 145].

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему, которая задана дифференциальным уравнением n-го порядка с сосредоточенными и распределенными соизмеримыми запаздываниями в состоянии, на вход которой подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $(n-p)$ включительно $(1 \leqslant p \leqslant n)$, а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния $x(t)$ и его производных до порядка $(p-1)$ включительно:

$$\begin{gathered}
x^{(n)}(t) + a_{10}x^{(n-1)}(t) + \\
+ a_{11}x^{(n-1)}(t-h) + \ldots + a_{1s}x^{(n-1)}(t-sh) + \ldots \\
+ a_{n0}x(t) + a_{n1}x(t-h) + \ldots + a_{ns}x(t-sh) + \\
+ \int_{-h}^{0} g_{11}(\tau)x^{(n-1)}(t+\tau)\,d\tau + \ldots \\
+ \int_{-sh}^{-(s-1)h} g_{1s}(\tau)x^{(n-1)}(t+\tau)\,d\tau + \ldots \\
+ \int_{-h}^{0} g_{n1}(\tau)x(t+\tau)\,d\tau + \ldots \\
+ \int_{-sh}^{-(s-1)h} g_{ns}(\tau)x(t+\tau)\,d\tau = \\
= b_{p1}u_1^{(n-p)} + b_{p+1,1}u_1^{(n-p-1)} + \ldots + b_{n1}u_1 + \ldots \\
+ b_{pm}u_m^{(n-p)} + b_{p+1,m}u_m^{(n-p-1)} + \ldots + b_{nm}u_m, \quad t > 0,
\end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}
y_1 = \overline{c}_{11}x + \overline{c}_{21}x' + \ldots + \overline{c}_{p1}x^{(p-1)}, \quad \ldots, \\
y_k = \overline{c}_{1k}x + \overline{c}_{2k}x' + \ldots + \overline{c}_{pk}x^{(p-1)}.
\end{gathered} \tag{4.2}$$

с начальными условиями $x^{(n-i)}(\tau) = \phi_i(\tau)$, $\tau \in [-sh, 0]$; здесь $h > 0$ — постоянное запаздывание, $\phi_i : [-sh, 0] \to \mathbb{K}$ — непрерывные функции; $a_{ij}, b_{l\alpha}, c_{\nu\beta} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, s}$, $l = \overline{p, n}$, $\alpha = \overline{1, m}$, $\nu = \overline{1, p}$, $\beta = \overline{1, k}$; $g_{i\eta} : [-\eta h, -(\eta-1)h] \to \mathbb{K}$ — интегрируемые функции $(i = \overline{1, n}, \eta = \overline{1, s})$; $u = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{K}^m$ — вектор управления, $y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{K}^k$ — выходной вектор; $p \in \{\overline{1, n}\}$.

Пусть управление в системе (4.1), (4.2) имеет вид линейной статической обратной связи по выходу с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями

$$u(t)=\sum_{\rho=0}^{\theta} Q_\rho y(t-\rho h)+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h} R_\varkappa(\tau) y(t+\tau)\,d\tau, \quad (4.3)$$

$y(t)=0$, $t<-sh$. Здесь $Q_\rho=\{q^\rho_{\alpha\beta}\}\in M_{m,k}(\mathbb{K})$ — постоянные матрицы ($\rho=\overline{0,\theta}$), $R_\varkappa(\tau)=\{r^\varkappa_{\alpha\beta}(\tau)\}$, $r^\varkappa_{\alpha\beta}\colon[-\varkappa h,-(\varkappa-1)h]\to\mathbb{K}$ — интегрируемые функции ($\varkappa=\overline{1,\theta}$), $\alpha=\overline{1,m}$, $\beta=\overline{1,k}$. Таким образом, для всех $\alpha=\overline{1,m}$

$$u_\alpha(t)=\sum_{\beta=1}^{k}\Big[\sum_{\rho=0}^{\theta} q^\rho_{\alpha\beta}\big(\sum_{\nu=1}^{p}\bar c_{\nu\beta}x^{(\nu-1)}(t-\rho h)\big)+$$
$$+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h} r^\varkappa_{\alpha\beta}(\tau)\big(\sum_{\nu=1}^{p}\bar c_{\nu\beta}x^{(\nu-1)}(t+\tau)\big)\,d\tau\Big].$$

Замкнутая система (4.1), (4.2), (4.3) примет вид

$$x^{(n)}(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{s}a_{ij}x^{(n-i)}(t-jh)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\eta=1}^{s}\int_{-\eta h}^{-(\eta-1)h} g_{i\eta}(\tau)x^{(n-i)}(t+\tau)\,d\tau- \quad (4.4)$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=p}^{n} b_{l\alpha}\Bigg(\sum_{\beta=1}^{k}\Big[\sum_{\rho=0}^{\theta} q^\rho_{\alpha\beta}\big(\sum_{\nu=1}^{p}\bar c_{\nu\beta}x^{(\nu-1)}(t-\rho h)\big)+$$
$$\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h} r^\varkappa_{\alpha\beta}(\tau)\big(\sum_{\nu=1}^{p}\bar c_{\nu\beta}x^{(\nu-1)}(t+\tau)\big)\,d\tau\Big]\Bigg)^{(n-l)}=0.$$

Обозначим через $\varphi(\lambda)$ характеристическую функцию замкнутой системы (4.4). Тогда

$$\varphi(\lambda)=\lambda^n+\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{j=0}^{s}a_{ij}e^{-\lambda jh}+$$

$$+\sum_{\eta=1}^{s}\int_{-\eta h}^{-(\eta-1)h} g_{i\eta}(\tau)e^{\lambda\tau}\,d\tau\Big) -$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=p}^{n} b_{l\alpha}\Big(\sum_{\nu=1}^{p}\Big[\sum_{\beta=1}^{k}\big(\sum_{\rho=0}^{\theta} q_{\alpha\beta}^{\rho}\overline{c}_{\nu\beta}e^{-\lambda\rho h}\big) +$$

$$+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h} r_{\alpha\beta}^{\varkappa}(\tau)\overline{c}_{\nu\beta}e^{\lambda\tau}\,d\tau\Big]\lambda^{n-l+\nu-1}\Big). \quad (4.5)$$

Определение 4.1. *Для системы* (4.1), (4.2) *разрешима задача модального управления посредством регулятора* (4.3), *если для любого целого* $\ell \geqslant 0$, *любых чисел* $\gamma_{i\mu} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $\mu = \overline{0,\ell}$, *и любых интегрируемых функций* $\delta_{i\xi} : [-\xi h, -(\xi-1)h] \to \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $\xi = \overline{1,\ell}$, *найдутся целое число* $\theta \geqslant 0$, *матрицы* $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\theta}$, *и интегрируемые матричные функции* $R_\varkappa : [-\varkappa h, -(\varkappa-1)h] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\varkappa = \overline{1,\theta}$, *такие, что характеристическая функция замкнутой системы* (4.5) *удовлетворяет равенству*

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{\mu=0}^{\ell}\gamma_{i\mu}e^{-\lambda\mu h} + \sum_{\xi=1}^{\ell}\int_{-\xi h}^{-(\xi-1)h}\delta_{i\xi}(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau\Big).$$

Определение 4.2. *Для системы* (4.1), (4.2) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора* (4.3), *если для любых чисел* $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, *найдутся целое число* $\theta \geqslant 0$, *матрицы* $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\theta}$, *и интегрируемые функции* $R_\varkappa : [-\varkappa h, -(\varkappa-1)h] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\varkappa = \overline{1,\theta}$, *такие, что характеристическая функция замкнутой системы* (4.5) *удовлетворяет равенству*

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n.$$

По системе (4.1), (4.2) построим матрицы $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$,

$C \in M_{n,k}(\mathbb{K})$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ b_{p1} & \dots & b_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pk} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \ p \in \{1, \dots, n\}.$$

Теорема 4.1. *Задача модального управления для системы* (4.1), (4.2) *посредством регулятора* (4.3) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы*

$$C^*B, \quad C^*JB, \quad \dots, \quad C^*J^{n-1}B \tag{4.6}$$

линейно независимы.

Теорема 4.2. *Задача назначения произвольного конечного спектра для системы* (4.1), (4.2) *посредством регулятора* (4.3) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы* (4.6) *линейно независимы.*

Следствие 4.1. *Если матрицы* (4.6) *линейно независимы, то система* (4.1), (4.2) *экспоненциально стабилизируема посредством статической обратной связи по выходу* (4.3).

§ 5. Модальное управление дифференциальным уравнением с несоизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями

Для линейной стационарной управляемой системы, которая задана диффереициальным уравнением n-го порядка с несколькими несоизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством статической обратной связи по выходу [147].

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему, которая задана дифференциальным уравнением n-го порядка с несоизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии, на вход которой подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $(n-p)$ включительно $(1 \leqslant p \leqslant n)$, а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния $x(t)$ и его производных до порядка $(p-1)$ включительно:

$$\begin{gathered}
x^{(n)}(t) + a_{10}x^{(n-1)}(t) + \\
+ a_{11}x^{(n-1)}(t-h_1) + \ldots + a_{1s}x^{(n-1)}(t-h_s) + \ldots \\
+ a_{n0}x(t) + a_{n1}x(t-h_1) + \ldots + a_{ns}x(t-h_s) + \\
+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{\eta=1}^{s}\int_{-h_\eta}^{-h_{\eta-1}} g_{i\eta}(\tau)x^{(n-i)}(t+\tau)\,d\tau = \\
= \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=p}^{n} b_{l\alpha}u_\alpha^{(n-l)}(t), \quad t>0,
\end{gathered} \tag{5.1}$$

$$y_\beta(t) = \sum_{\nu=1}^{p} \overline{c}_{\nu\beta}x^{(\nu-1)}(t), \quad \beta = \overline{1,k}, \tag{5.2}$$

с начальными условиями $x^{(n-i)}(\tau) = \phi_i(\tau)$, $\tau \in [-h_s, 0]$; здесь $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_s$ — постоянные запаздывания, $\phi_i : [-h_s, 0] \to \mathbb{K}$ — непрерывные функции; $a_{ij}, b_{l\alpha}, c_{\nu\beta} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,s}$, $l = \overline{p,n}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\nu = \overline{1,p}$, $\beta = \overline{1,k}$; $g_{i\eta} : [-h_\eta, -h_{\eta-1}] \to \mathbb{K}$ — интегрируемые функции ($i = \overline{1,n}, \eta = \overline{1,s}$); $u = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{K}^m$ — вектор управления, $y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{K}^k$ — выходной вектор; $p \in \{\overline{1,n}\}$.

Пусть управление в системе (5.1), (5.2) имеет вид линейной статической обратной связи по выходу с несоизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями

$$u(t) = \sum_{\rho=0}^{\theta} Q_\rho y(t-\sigma_\rho) + \sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} R_\varkappa(\tau)y(t+\tau)\,d\tau, \tag{5.3}$$

$y(t) = 0$, $t < -h_s$, $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$ — постоянные запаздывания. Здесь $Q_\rho = \{q_{\alpha\beta}^\rho\} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ — постоянные матрицы $(\rho = \overline{0,\theta})$, $R_\varkappa(\tau) = \{r_{\alpha\beta}^\varkappa(\tau)\} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$,

$r^{\varkappa}_{\alpha\beta}\colon [-\sigma_{\varkappa}, -\sigma_{\varkappa-1}] \to \mathbb{K}$ — интегрируемые функции ($\varkappa = \overline{1,\theta}$), $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$. Таким образом, для всех $\alpha = \overline{1,m}$

$$u_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{k} \Big[\sum_{\rho=0}^{\theta} q^{\rho}_{\alpha\beta} \big(\sum_{\nu=1}^{p} \overline{c}_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}(t-\sigma_\rho) \big) + \\ + \sum_{\varkappa=1}^{\theta} \int_{-\sigma_{\varkappa}}^{-\sigma_{\varkappa-1}} r^{\varkappa}_{\alpha\beta}(\tau) \big(\sum_{\nu=1}^{p} \overline{c}_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}(t+\tau) \big)\, d\tau \Big].$$

Замкнутая система (5.1), (5.2), (5.3) примет вид

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{s} a_{ij} x^{(n-i)}(t-h_j) + \\ + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\eta=1}^{s} \int_{-h_\eta}^{-h_{\eta-1}} g_{i\eta}(\tau) x^{(n-i)}(t+\tau)\, d\tau - \\ - \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=p}^{n} b_{l\alpha} \Bigg(\sum_{\beta=1}^{k} \Big[\sum_{\rho=0}^{\theta} q^{\rho}_{\alpha\beta} \big(\sum_{\nu=1}^{p} \overline{c}_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}(t-\sigma_\rho) \big) + \\ + \sum_{\varkappa=1}^{\theta} \int_{-\sigma_{\varkappa}}^{-\sigma_{\varkappa-1}} r^{\varkappa}_{\alpha\beta}(\tau) \big(\sum_{\nu=1}^{p} \overline{c}_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}(t+\tau) \big)\, d\tau \Big] \Bigg)^{(n-l)} = 0. \tag{5.4}$$

Обозначим через $\varphi(\lambda)$ характеристическую функцию замкнутой системы (5.4). Тогда

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \Big(\sum_{j=0}^{s} a_{ij} e^{-\lambda h_j} + \\ + \sum_{\eta=1}^{s} \int_{-h_\eta}^{-h_{\eta-1}} g_{i\eta}(\tau) e^{\lambda\tau}\, d\tau \Big) - \\ - \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=p}^{n} b_{l\alpha} \Big(\sum_{\nu=1}^{p} \Big[\sum_{\beta=1}^{k} \big(\sum_{\rho=0}^{\theta} q^{\rho}_{\alpha\beta} \overline{c}_{\nu\beta} e^{-\lambda\sigma_\rho} \big) + \\ + \sum_{\varkappa=1}^{\theta} \int_{-\sigma_{\varkappa}}^{-\sigma_{\varkappa-1}} r^{\varkappa}_{\alpha\beta}(\tau) \overline{c}_{\nu\beta} e^{\lambda\tau}\, d\tau \Big] \lambda^{n-l+\nu-1} \Big). \tag{5.5}$$

Определение 5.1. *Для системы* (5.1), (5.2) *разрешима задача модального управления посредством регулятора* (5.3), *если для любого целого* $\ell \geqslant 0$, *любых чисел* $0 = \omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_\ell$, *любых чисел* $\gamma_{i\mu} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $\mu = \overline{0,\ell}$, *и любых интегрируемых функций* $\delta_{i\xi} : [-\omega_\xi, -\omega_{\xi-1}] \to \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $\xi = \overline{1,\ell}$, *найдутся целое число* $\theta \geqslant 0$, *числа* $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$, *матрицы* $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\theta}$, *и интегрируемые функции* $R_\varkappa : [-\sigma_\varkappa, -\sigma_{\varkappa-1}] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\varkappa = \overline{1,\theta}$, *такие, что характеристическая функция замкнутой системы* (5.5) *удовлетворяет равенству*

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i}\Big(\sum_{\mu=0}^{\ell} \gamma_{i\mu} e^{-\lambda\omega_\mu} + \sum_{\xi=1}^{\ell} \int_{-\omega_\xi}^{-\omega_{\xi-1}} \delta_{i\xi}(\tau) e^{\lambda\tau}\, d\tau\Big).$$

Определение 5.2. *Для системы* (5.1), (5.2) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора* (5.3), *если для любых чисел* $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, *найдутся целое число* $\theta \geqslant 0$, *числа* $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$, *матрицы* $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\theta}$, *и интегрируемые функции* $R_\varkappa : [-h_\varkappa, -h_{\varkappa-1}] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\varkappa = \overline{1,\theta}$, *такие, что характеристическая функция замкнутой системы* (5.5) *удовлетворяет равенству*

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n.$$

По системе (5.1), (5.2) построим матрицы $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,k}(\mathbb{K})$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ b_{p1} & \ldots & b_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \ldots & c_{pk} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \ p \in \{1, \ldots, n\}.$$

Приведем вспомогательное утверждение (см. [143]).

Лемма 5.1. *Пусть* $F = \{f_{l\alpha}\} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $G = \{g_{\beta\nu}\} \in M_{k,n}(\mathbb{K})$ — *произвольные матрицы* ($l = \overline{1,n}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$, $\nu = \overline{1,n}$) *и* $D_j = GJ^jF$ ($j \in \{\overline{0,n-1}\}$), $D_j = \{d^j_{\beta\alpha}\}$, $\beta = \overline{1,k}$, $\alpha = \overline{1,m}$. *Тогда* $d^j_{\beta\alpha} = \sum\limits_{l=j+1}^{n} g_{\beta,l-j} f_{l\alpha}$.

Доказательство. Для каждого $j \in \{\overline{0,n-1}\}$ обозначим $J^j =: \{\eta^j_{st}\}^n_{s,t=1}$. Тогда $\eta^j_{s,s+j} = 1$ для всех $s = \overline{1,n-j}$, а остальные η^j_{st} равны нулю. Пусть $R_j = GJ^j$. Тогда $R_j = \{r^j_{\beta l}\}$, $\beta = \overline{1,k}$, $l = \overline{1,n}$, где $r^j_{\beta l} = \sum\limits_{s=1}^{n} g_{\beta s}\eta^j_{sl}$. Так как $\eta^j_{l-j,l} = 1$ (при $l > j$) и оставшиеся η^j_{sl} равны нулю (и $\eta^j_{sl} = 0$ при $l \leqslant j$), то $r^j_{\beta l} = g_{\beta,l-j}\operatorname{sgn}\max\{0, l-j\}$. Таким образом, $d^j_{\beta\alpha} = \sum\limits_{l=j+1}^{n} g_{\beta,l-j} f_{l\alpha}$. Лемма доказана. □

Теорема 5.1. *Задача модального управления для системы* (5.1), (5.2) *посредством регулятора* (5.3) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы*

$$C^*B, \quad C^*JB, \quad \ldots, \quad C^*J^{n-1}B \tag{5.6}$$

линейно независимы.

Теорема 5.2. *Задача назначения произвольного конечного спектра для системы* (5.1), (5.2) *посредством регулятора* (5.3) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы* (5.6) *линейно независимы.*

Доказательство теоремы 5.1. Рассмотрим задачу модального управления для системы (5.1), (5.2) посредством регулятора (5.3). Пусть задана функция

$$\psi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i}\left(\sum_{\mu=0}^{\ell} \gamma_{i\mu} e^{-\lambda\omega_\mu} + \sum_{\xi=1}^{\ell} \int_{-\omega_\xi}^{-\omega_{\xi-1}} \delta_{i\xi}(\tau) e^{\lambda\tau}\, d\tau\right), \tag{5.7}$$

где $\ell \geqslant 0$ — произвольное число, $0 = \omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_\ell$ — произвольные запаздывания, $\gamma_{i\mu} \in \mathbb{K}$ — произвольные числа,

$\delta_{i\xi}\colon [-\omega_\xi, -\omega_{\xi-1}] \to \mathbb{K}$ — произвольные интегрируемые функции. Требуется найти число $\theta \geqslant 0$, числа $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots$ $\ldots < \sigma_\theta$, матрицы $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\theta}$, и интегрируемые функции $R_\varkappa\colon [-\sigma_\varkappa, -\sigma_{\varkappa-1}] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\varkappa = \overline{1,\theta}$, такие, что характеристическая функция (5.5) замкнутой системы (5.4) удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda) = \psi(\lambda). \tag{5.8}$$

Запишем характеристическую функцию (5.5) замкнутой системы (5.4) в виде

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i}\Big(\sum_{j=0}^{s} a_{ij}e^{-\lambda h_j} + \\ + \sum_{\eta=1}^{s} \int_{-h_\eta}^{-h_{\eta-1}} g_{i\eta}(\tau)e^{\lambda\tau}\,d\tau\Big) - \Delta, \tag{5.9}$$

где

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{l=p}^{n}\sum_{\nu=1}^{p} b_{l\alpha}\overline{c}_{\nu\beta}\lambda^{n-l+\nu-1}\Big(\sum_{\rho=0}^{\theta} q_{\alpha\beta}^{\rho}e^{-\lambda\sigma_\rho} + \\ + \sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} r_{\alpha\beta}^{\varkappa}(\tau)e^{\lambda\tau}\,d\tau\Big). \tag{5.10}$$

Заменим в (5.10) последний индекс ν на $i = l-\nu+1$. Поскольку ν изменяется от 1 до p, следовательно, i изменяется от $l-p+1$ до l. Поэтому

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{l=p}^{n}\sum_{i=l-p+1}^{l} b_{l\alpha}\overline{c}_{l+1-i,\beta}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{\rho=0}^{\theta} q_{\alpha\beta}^{\rho}e^{-\lambda\sigma_\rho} + \\ + \sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} r_{\alpha\beta}^{\varkappa}(\tau)e^{\lambda\tau}\,d\tau\Big).$$

Если $i \in \{\overline{1, l-p}\}$, то $l+1-i \geqslant p+1$, следовательно, $c_{l+1-i,\beta} =$

$= 0$. Поэтому

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{l=p}^{n}\sum_{i=1}^{l} b_{l\alpha}\overline{c}_{l+1-i,\beta}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{\rho=0}^{\theta} q^{\rho}_{\alpha\beta}e^{-\lambda\sigma_\rho} + \\ + \sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} r^{\varkappa}_{\alpha\beta}(\tau)e^{\lambda\tau}\,d\tau\Big).$$

Если $l \in \{\overline{1, p-1}\}$, то $b_{l\alpha} = 0$, поэтому

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{l} b_{l\alpha}\overline{c}_{l+1-i,\beta}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{\rho=0}^{\theta} q^{\rho}_{\alpha\beta}e^{-\lambda\sigma_\rho} + \\ + \sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} r^{\varkappa}_{\alpha\beta}(\tau)e^{\lambda\tau}\,d\tau\Big).$$

Поменяем местами порядок суммирования $\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{l}$ на $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{l=i}^{n}$; получим

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=i}^{n} b_{l\alpha}\overline{c}_{l+1-i,\beta}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{\rho=0}^{\theta} q^{\rho}_{\alpha\beta}e^{-\lambda\sigma_\rho} + \\ + \sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} r^{\varkappa}_{\alpha\beta}(\tau)e^{\lambda\tau}\,d\tau\Big). \tag{5.11}$$

Пусть $D_{i-1} = C^*J^{i-1}B$, $D_{i-1} = \{d^{i-1}_{\beta\alpha}\}$, $i \in \{\overline{1, n}\}$, $\beta = \overline{1, k}$, $\alpha = \overline{1, m}$. Применим лемму 5.1 к $G = C^*$, $F = B$; имеем $g_{\beta\nu} = \overline{c}_{\nu\beta}$, $f_{l\alpha} = b_{l\alpha}$. Таким образом, по лемме 5.1 для $j = i - 1$ имеем

$$d^{i-1}_{\beta\alpha} = \sum_{l=i}^{n}\overline{c}_{l+1-i,\beta}b_{l\alpha}. \tag{5.12}$$

Для каждого $i \in \{\overline{1, n}\}$ рассмотрим матрицы $C^*J^{i-1}BQ_\rho$, $\rho = \overline{0, \theta}$, $C^*J^{i-1}BR_\varkappa(\tau)$, $\varkappa = \overline{1, \theta}$. Найдем их следы. Учитывая

(5.12), получим для всякого $\rho = \overline{0,\theta}$

$$\begin{gathered}\operatorname{Sp}(C^* J^{i-1} B Q_\rho) = \operatorname{Sp}(D_{i-1} Q_\rho) = \\ = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{k} d_{\beta\alpha}^{i-1} q_{\alpha\beta}^{\rho} = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{l=i}^{n} \overline{c}_{l+1-i,\beta} b_{l\alpha} q_{\alpha\beta}^{\rho}.\end{gathered} \tag{5.13}$$

Аналогично, для всякого $\varkappa = \overline{1,\theta}$

$$\begin{gathered}\int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} \operatorname{Sp}(C^* J^{i-1} B R_\varkappa(\tau)) e^{\lambda\tau}\, d\tau = \\ = \int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{l=i}^{n} \overline{c}_{l+1-i,\beta} b_{l\alpha} r_{\alpha\beta}^{\varkappa}(\tau) e^{\lambda\tau}\, d\tau.\end{gathered} \tag{5.14}$$

Из (5.11), (5.13) и (5.14) следует, что

$$\begin{gathered}\Delta = \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \Bigg(\sum_{\rho=0}^{\theta} \operatorname{Sp}(C^* J^{i-1} B Q_\rho) e^{-\lambda\sigma_\rho} + \\ + \sum_{\varkappa=1}^{\theta} \int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} \operatorname{Sp}(C^* J^{i-1} B R_\varkappa(\tau)) e^{\lambda\tau}\, d\tau \Bigg).\end{gathered} \tag{5.15}$$

Подставляя (5.15) в (5.9), получим

$$\begin{gathered}\varphi(\lambda) = \lambda^n + \\ + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \Bigg(\sum_{j=0}^{s} a_{ij} e^{-\lambda h_j} + \sum_{\eta=1}^{s} \int_{-h_\eta}^{-h_{\eta-1}} g_{i\eta}(\tau) e^{\lambda\tau}\, d\tau \Bigg) \\ - \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \Bigg(\sum_{\rho=0}^{\theta} \operatorname{Sp}(C^* J^{i-1} B Q_\rho) e^{-\lambda\sigma_\rho} + \\ + \sum_{\varkappa=1}^{\theta} \int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} \operatorname{Sp}(C^* J^{i-1} B R_\varkappa(\tau)) e^{\lambda\tau}\, d\tau \Bigg).\end{gathered} \tag{5.16}$$

Учитывая равенства (5.16), (5.8), (5.7), получаем, что для системы (5.1), (5.2) задача модального управления посредством регулятора (5.3) разрешима тогда и только тогда, когда найдутся $\theta \geqslant 0$, числа $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$, матрицы $Q_\rho \in \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\theta}$, и интегрируемые матричные функции $R_\varkappa\colon [-\sigma_\varkappa, -\sigma_{\varkappa-1}] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\varkappa = \overline{1,\theta}$, такие, что для всех $i = \overline{1,n}$ выполнены равенства

$$\begin{gathered}\sum_{\mu=0}^{\ell} \gamma_{i\mu} e^{-\lambda\omega_\mu} = \sum_{j=0}^{s} a_{ij} e^{-\lambda h_j} - \\ - \sum_{\rho=0}^{\theta} \mathrm{Sp}\,(C^* J^{i-1} B Q_\rho) e^{-\lambda\sigma_\rho},\end{gathered} \tag{5.17}$$

$$\begin{gathered}\sum_{\xi=1}^{\ell} \int_{-\omega_\xi}^{-\omega_{\xi-1}} \delta_{i\xi}(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau = \sum_{\eta=1}^{s} \int_{-h_\eta}^{-h_{\eta-1}} g_{i\eta}(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau \\ - \sum_{\varkappa=1}^{\theta} \int_{-\sigma_\varkappa}^{-\sigma_{\varkappa-1}} \mathrm{Sp}\,\bigl(C^* J^{i-1} B R_\varkappa(\tau)\bigr) e^{\lambda\tau} d\tau.\end{gathered} \tag{5.18}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
&T_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_\ell\},\\
&T_2 = \{h_1, \ldots, h_s\},\\
&S_1 = \{\mu \in \{\overline{1,\ell}\} : \omega_\mu \in T_1 \setminus T_2\},\\
&S_2 = \{\mu \in \{\overline{1,\ell}\} : \omega_\mu \in T_1 \cap T_2\},\\
&S_3 = \{j \in \{\overline{1,s}\} : h_j \in T_1 \cap T_2\},\\
&S_4 = \{j \in \{\overline{1,s}\} : h_j \in T_2 \setminus T_1\}.
\end{aligned}$$

Положим $T := T_1 \cup T_2$, $\theta = |T|$. Положим $\sigma_0 := 0$. Обозначим элементы множества T через $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_\theta$.

Пусть

$$\begin{aligned}
K_1 &:= \{\rho \in \{\overline{1,\theta}\} : \exists\, \mu \in S_1 \quad \sigma_\rho = \omega_\mu\},\\
K_2 &:= \{\rho \in \{\overline{1,\theta}\} : \exists\, j \in S_3 \quad \sigma_\rho = h_j\},\\
K_3 &:= \{\rho \in \{\overline{1,\theta}\} : \exists\, j \in S_4 \quad \sigma_\rho = h_j\}.
\end{aligned}$$

Тогда равенства (5.17) примут вид

$$\gamma_{i0} + \Big(\sum_{\mu\in S_1} + \sum_{\mu\in S_2}\Big)\gamma_{i\mu}e^{-\lambda\omega_\mu} =$$
$$= a_{i0} - \mathrm{Sp}\,(C^* J^{i-1} B Q_0) + \Big(\sum_{j\in S_3} + \sum_{j\in S_4}\Big) a_{ij} e^{-\lambda h_j} -$$
$$- \Big(\sum_{\rho\in K_1} + \sum_{\rho\in K_2} + \sum_{\rho\in K_3}\Big)\mathrm{Sp}\,(C^* J^{i-1} B Q_\rho) e^{-\lambda\sigma_\rho}. \quad (5.19)$$

Обозначим $R\colon [-\sigma_\theta, 0] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$:

$$R(\tau) := \begin{cases} R_1(\tau), & \tau \in [-\sigma_1, 0], \\ R_2(\tau), & \tau \in [-\sigma_2, -\sigma_1), \\ \ldots\ldots, & \\ R_\theta(\tau), & \tau \in [-\sigma_\theta, -\sigma_{\theta-1}). \end{cases}$$

Положим

$$\delta_i(\tau) := \begin{cases} \delta_{i1}(\tau), & \tau \in [-\omega_1, 0], \\ \delta_{i2}(\tau), & \tau \in [-\omega_2, -\omega_1), \\ \ldots\ldots, & \\ \delta_{i\ell}(\tau), & \tau \in [-\omega_\ell, -\omega_{\ell-1}), \\ 0, & \tau \in [-\sigma_\theta, -\omega_\ell), \end{cases}$$

$$g_i(\tau) := \begin{cases} g_{i1}(\tau), & \tau \in [-h_1, 0], \\ g_{i2}(\tau), & \tau \in [-h_2, -h_1), \\ \ldots\ldots, & \\ g_{is}(\tau), & \tau \in [-h_s, -h_{s-1}), \\ 0, & \tau \in [-\sigma_\theta, -h_s), \end{cases}$$

Тогда равенства (5.18) примут вид

$$\int_{-\sigma_\theta}^{0} \delta_i(\tau) e^{\lambda\tau}\,d\tau =$$
$$= \int_{-\sigma_\theta}^{0} g_i(\tau) e^{\lambda\tau}\,d\tau - \int_{-\sigma_\theta}^{0} \mathrm{Sp}\,\big(C^* J^{i-1} B R(\tau)\big) e^{\lambda\tau}\,d\tau. \quad (5.20)$$

Равенства (5.19) имеют место для всех $i = \overline{1,n}$ тогда и только тогда, когда для всех $i = \overline{1,n}$ выполнены следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{i0} = a_{i0} - \mathrm{Sp}\,(C^* J^{i-1} B Q_0);\\
&\gamma_{i\mu} = -\mathrm{Sp}\,(C^* J^{i-1} B Q_\rho),\\
&\quad \mu \in S_1, \quad \rho \in K_1, \quad \sigma_\rho = \omega_\mu;\\
&\gamma_{i\mu} = a_{ij} - \mathrm{Sp}\,(C^* J^{i-1} B Q_\rho),\\
&\quad \mu \in S_2, \quad j \in S_3, \quad \rho \in K_2, \quad \sigma_\rho = h_j = \omega_\mu;\\
&\ \ 0 = a_{ij} - \mathrm{Sp}\,(C^* J^{i-1} B Q_\rho),\\
&\quad j \in S_4, \quad \rho \in K_3, \quad \sigma_\rho = h_j.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Равенства (5.20) имеют место для всех $i = \overline{1, n}$ тогда и только тогда, когда для почти всех $\tau \in [-\sigma_\theta, 0]$ выполнены равенства

$$\delta_i(\tau) = g_i(\tau) - \mathrm{Sp}\left(C^* J^{i-1} B R(\tau)\right), \quad i = \overline{1, n}. \tag{5.22}$$

Каждая ρ-я система в (5.21) состоит из n уравнений с mk неизвестными элементами матриц Q_ρ, $\rho = \overline{0, \theta}$. Система (5.22) состоит из n уравнений с mk неизвестными элементами матричной функции $R(\tau)$, $\tau \in [-\sigma_\theta, 0]$. Перепишем системы (5.21), (5.22) в векторном виде. По определению отображения vec имеем $\mathrm{Sp}\,(XY) = (\mathrm{vec}\, X)^T \cdot (\mathrm{vec}\, Y^T)$ для любых $X \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $Y \in M_{q,p}(\mathbb{K})$. Применим это равенство в системе (5.21) для всякого $i = \overline{1, n}$ к матрице $X = C^* J^{i-1} B$ и к матрицам $Y = Q_\rho$, $\rho = \overline{0, \theta}$, а в системе (5.22) для всякого $i = \overline{1, n}$ к матрице $X = C^* J^{i-1} B$ и к $Y = R(\tau)$. Построим матрицу

$$P := [\mathrm{vec}\,(C^* B), \mathrm{vec}\,(C^* J B), \ldots, \mathrm{vec}\,(C^* J^{n-1} B)] \in \\ \in M_{mk,n}(\mathbb{K}). \tag{5.23}$$

Обозначим $v_\rho := \mathrm{vec}\,(Q_\rho^T) \in \mathbb{K}^{mk}$, $\rho = \overline{0, \theta}$, $f(\tau) :=$

$:= \mathrm{vec}\,(R^T(\tau)) \in \mathbb{K}^{mk}$, $\tau \in [-\sigma_\theta, 0]$,

$$\begin{aligned}
&w_0 := \mathrm{col}\,(a_{10} - \gamma_{10}, \ldots, a_{n0} - \gamma_{n0}) \in \mathbb{K}^n;\\
&w_\rho := \mathrm{col}\,(-\gamma_{1\mu}, \ldots, -\gamma_{n\mu}) \in \mathbb{K}^n,\\
&\quad \mu \in S_1, \quad \rho \in K_1, \quad \sigma_\rho = \omega_\mu;\\
&w_\rho := \mathrm{col}\,(a_{1j} - \gamma_{1\mu}, \ldots, a_{nj} - \gamma_{n\mu}) \in \mathbb{K}^n,\\
&\quad \mu \in S_2, \quad j \in S_3, \quad \rho \in K_2, \quad \sigma_\rho = h_j = \omega_\mu;\\
&w_\rho := \mathrm{col}\,(a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n,\\
&\quad j \in S_4, \quad \rho \in K_3, \quad \sigma_\rho = h_j;\\
&\vartheta(\tau) := \mathrm{col}\,\big(g_1(\tau) - \delta_1(\tau), \ldots, g_n(\tau) - \delta_n(\tau)\big) \in \mathbb{K}^n.
\end{aligned}$$

Тогда системы (5.21), (5.22) можно записать в векторном виде

$$P^T v_\rho = w_\rho, \quad \rho = \overline{0, \theta}, \tag{5.24}$$

$$P^T f(\tau) = \vartheta(\tau) \ \text{ п.в. } \tau \in [-\sigma_\theta, 0]. \tag{5.25}$$

Для системы (5.1), (5.2) задача модального управления посредством регулятора (5.3) разрешима тогда и только тогда, когда система (5.24), (5.25) разрешима относительно v_ρ, $\rho = \overline{0, \theta}$, и $f(\tau)$, $\tau \in [-\sigma_\theta, 0]$, для любых чисел $\gamma_{i\mu} \in \mathbb{K}$ и для любых интегрируемых функций $\delta_{i\xi} \colon [-\omega_\xi, -\omega_{\xi-1}] \to \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, $\mu = \overline{0, \ell}$, $\xi = \overline{1, \ell}$. Условие линейной независимости матриц (5.6) является необходимым и достаточным для разрешимости системы (5.24), (5.25). В частности, если матрицы (5.6) линейно независимы, система (5.24), (5.25) имеет решение

$$v_\rho = P(P^T P)^{-1} w_\rho, \quad \rho = \overline{0, \theta}, \tag{5.26}$$

$$f(\tau) = P(P^T P)^{-1} \vartheta(\tau), \quad \tau \in [-\sigma_\theta, 0]. \tag{5.27}$$

Искомые матрицы Q_ρ, $\rho = \overline{0, \theta}$, и $R(\tau)$, $\tau \in [-\sigma_\theta, 0]$, находятся из равенств

$$Q_\rho = (\mathrm{vec}^{-1} v_\rho)^T, \quad \rho = \overline{0, \theta}, \qquad R(\tau) = (\mathrm{vec}^{-1} f(\tau))^T.$$

Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 5.2 вытекает из доказательства теоремы 5.1 при $\ell = 0$, $\gamma_{i0} = \gamma_i$, $i = \overline{1, n}$. □

Следствие 5.1. *Если матрицы* (5.6) *линейно независимы, то система* (5.1), (5.2) *экспоненциально стабилизируема посредством статической обратной связи по выходу* (5.3).

Доказательство теоремы 4.1 повторяет доказательство теоремы 5.1 с

$$h_j = jh, \quad j = \overline{0, s},$$
$$\omega_\mu = \mu h, \quad \mu = \overline{0, \ell}.$$

В этом случае

$$T_1 = \{h, 2h, \ldots, \ell h\}, \quad T_2 = \{h, 2h, \ldots, sh\},$$
$$S_1 = \begin{cases} \{s+1, \ldots, \ell\}, & \ell > s, \\ \varnothing, & \ell \leqslant s, \end{cases} \quad S_2 = S_3 = \{1, \ldots, \min\{\ell, s\}\},$$
$$S_4 = \begin{cases} \{\ell+1, \ldots, s\}, & s > \ell, \\ \varnothing, & \ell \leqslant s, \end{cases}$$
$$\theta = \max\{\ell, s\}, \quad T = \{h, 2h, \ldots, \theta h\}, \quad \sigma_\rho = \rho h, \quad \rho = \overline{0, \theta},$$
$$K_1 = S_1, \quad K_2 = S_2 = S_3, \quad K_3 = S_4.$$

□

Доказательство теоремы 4.2 вытекает из доказательства теоремы 4.1 при $\ell = 0$, $\gamma_{i0} = \gamma_i$, $i = \overline{1, n}$. □

Доказательство теоремы 3.1 повторяет доказательство теоремы 5.1 с

$$a_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, s},$$
$$\gamma_{i\mu} \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \mu = \overline{1, \ell},$$
$$q^\rho_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha = \overline{1, m}, \quad \beta = \overline{1, k}, \quad \rho = \overline{1, \theta}.$$

□

Доказательство теоремы 3.2 вытекает из доказательства теоремы 3.1 при $\ell = 0$, $\gamma_{i0} = \gamma_i$, $i = \overline{1, n}$. □

Доказательство теоремы 2.1 повторяет доказательство теоремы 5.1 с

$$g_{i\eta}(\tau) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \eta = \overline{1, s}, \quad \tau \in [-h_\eta, -h_{\eta-1}],$$

$$\begin{gathered}\delta_{i\xi}(\tau)\equiv 0,\quad i=\overline{1,n},\quad \xi=\overline{1,\ell},\quad \tau\in[-\omega_\xi,-\omega_{\xi-1}],\\ r^{\varkappa}_{\alpha\beta}(\tau)\equiv 0,\quad \alpha=\overline{1,m},\quad \beta=\overline{1,k},\quad \varkappa=\overline{1,\theta},\\ \tau\in[-\sigma_\varkappa,-\sigma_{\varkappa-1}].\end{gathered}$$

□

Доказательство теоремы 2.2 вытекает из доказательства теоремы 2.1 при $\ell=0$, $\gamma_{i0}=\gamma_i$, $i=\overline{1,n}$. □

Доказательство теоремы 1.1 повторяет доказательство теоремы 5.1 с

$$\begin{gathered}h_j=jh,\quad j=\overline{0,s},\\ \omega_\mu=\mu h,\quad \mu=\overline{0,\ell},\\ g_{i\eta}(\tau)\equiv 0,\quad i=\overline{1,n},\quad \eta=\overline{1,s},\quad \tau\in[-\eta h,-(\eta-1)h],\\ \delta_{i\xi}(\tau)\equiv 0,\quad i=\overline{1,n},\quad \xi=\overline{1,\ell},\quad \tau\in[-\xi h,-(\xi-1)h],\\ r^{\varkappa}_{\alpha\beta}(\tau)\equiv 0,\quad \alpha=\overline{1,m},\quad \beta=\overline{1,k},\quad \varkappa=\overline{1,\theta},\\ \tau\in[-\varkappa h,-(\varkappa-1)h].\end{gathered}$$

В этом случае

$$\begin{gathered}T_1=\{h,2h,\ldots,\ell h\},\quad T_2=\{h,2h,\ldots,sh\},\\ S_1=\begin{cases}\{s+1,\ldots,\ell\}, & \ell>s,\\ \varnothing, & \ell\leqslant s,\end{cases}\quad S_2=S_3=\{1,\ldots,\min\{\ell,s\}\},\\ S_4=\begin{cases}\{\ell+1,\ldots,s\}, & s>\ell,\\ \varnothing, & \ell\leqslant s,\end{cases}\\ \theta=\max\{\ell,s\},\quad T=\{h,2h,\ldots,\theta h\},\quad \sigma_\rho=\rho h,\quad \rho=\overline{0,\theta},\\ K_1=S_1,\quad K_2=S_2=S_3,\quad K_3=S_4.\end{gathered}$$

□

Доказательство теоремы 1.2 вытекает из доказательства теоремы 1.1 при $\ell=0$, $\gamma_{i0}=\gamma_i$, $i=\overline{1,n}$. □

Следствия 1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1 вытекают из теорем 1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2 соответственно, если взять, к примеру, числа γ_i, $i=\overline{1,n}$, такие, что $\lambda^n+\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i\lambda^{n-1}=(\lambda+1)^n$.

§ 6. Примеры

Приведены примеры, иллюстрирующие результаты, представленные в § 4, 5.

Пример 6.1. (см. [25]). Рассмотрим систему

$$\begin{gathered}x'''(t) - x''(t-h) + 4x''(t-2h) + x'(t) - \\ - 2x'(t-2h) - x(t) + x(t-h) + \\ + \int_{-h}^{0} x''(t+\tau)\sin\tau\,d\tau + \int_{-2h}^{-h} x''(t+\tau)\,d\tau - \\ - 2\int_{-h}^{0} x'(t+\tau)\sin\tau\,d\tau + \int_{-2h}^{-h} x'(t+\tau)\sin 2\tau\,d\tau + \\ + \int_{-h}^{0} x(t+\tau)\cos\tau\,d\tau + \int_{-2h}^{-h} x(t+\tau)\sin\tau\,d\tau = \\ = u_1'(t) - u_2'(t) - u_2(t),\end{gathered} \tag{6.1}$$

$$y_1(t) = x'(t), \quad y_2(t) = -x(t) - x'(t), \tag{6.2}$$

$x \in \mathbb{R}$, $u = \mathrm{col}\,(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = \mathrm{col}\,(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Система (6.1), (6.2) имеет вид (4.1), (4.2), где $n = 3$, $k = 2$, $m = 2$, $p = 2$, $s = 2$;

$$\begin{gathered}a_{10} = 0, \ \ a_{11} = -1, \ \ a_{12} = 4, \ \ a_{20} = 1, \ \ a_{21} = 0, \ \ a_{22} = -2, \\ a_{30} = -1, \ \ a_{31} = 1, \ \ a_{32} = 0; \\ g_{11}(\tau) = \sin\tau, \ g_{12}(\tau) = 1, \ g_{21}(\tau) = -2\sin\tau, \ g_{22}(\tau) = \sin 2\tau, \\ g_{31}(\tau) = \cos\tau, \ g_{32}(\tau) = \sin\tau; \\ b_{21} = 1, \ \ b_{22} = -1, \ \ b_{31} = 0, \ \ b_{32} = -1; \\ c_{11} = 0, \ \ c_{21} = 1, \ \ c_{12} = -1, \ \ c_{22} = -1.\end{gathered}$$

По системе (6.1), (6.2) построим матрицы B, C: получим $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда

$$\begin{gathered}C^*B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^*JB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \\ C^*J^2B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\end{gathered} \tag{6.3}$$

Построим матрицу (5.23), получим

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Имеем $\operatorname{rank} P = 3 = n$, следовательно, матрицы (6.3) линейно независимы. Таким образом, по теореме 4.1 для системы (6.1), (6.2) разрешима задача модального управления посредством регулятора (4.3). Построим такой регулятор. Пусть к примеру $\ell = 1$, $\omega_1 = h$ и

$$\begin{gathered} \varphi(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2\Big(2 + e^{-\lambda h} - \int_{-h}^{0} e^{\lambda\tau}(\sin\tau - \cos\tau)\,d\tau\Big) + \\ + \lambda\Big(1 + 2e^{-\lambda h} + \int_{-h}^{0} e^{\lambda\tau}(2\cos\tau - \sin 2\tau)\,d\tau\Big) + e^{-\lambda h}. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Тогда

$$\begin{gathered} T_1 = \{h\}, \quad T_2 = \{h, 2h\}, \\ \gamma_{10} = 2, \quad \gamma_{11} = 1, \quad \gamma_{20} = 1, \quad \gamma_{21} = 2, \quad \gamma_{30} = 0, \quad \gamma_{31} = 1, \\ \delta_{11}(\tau) = -\sin\tau + \cos\tau,\ \delta_{21}(\tau) = -\sin 2\tau + 2\cos\tau,\ \delta_{31}(\tau) = 0. \end{gathered}$$

Из доказательства теоремы 5.1 получим

$$\begin{gathered} S_1 = \varnothing, \quad S_2 = \{1\}, \quad S_3 = \{1\}, \quad S_4 = \{2\}, \\ T = \{h, 2h\}, \quad \theta = 2, \\ \sigma_1 = h, \quad \sigma_2 = 2h, \\ K_1 = \varnothing, \quad K_2 = \{1\}, \quad K_3 = \{2\}. \end{gathered}$$

Имеем

$$\begin{gathered} g_1(\tau) = \begin{cases} \sin\tau, & \tau \in [-h, 0], \\ 1, & \tau \in [-2h, -h), \end{cases} \\ g_2(\tau) = \begin{cases} -2\sin\tau, & \tau \in [-h, 0], \\ \sin 2\tau, & \tau \in [-2h, -h), \end{cases} \\ g_3(\tau) = \begin{cases} \cos\tau, & \tau \in [-h, 0], \\ \sin\tau, & \tau \in [-2h, -h), \end{cases} \end{gathered}$$

$$\delta_1(\tau) = \begin{cases} \cos\tau - \sin\tau, & \tau \in [-h, 0], \\ 0, & \tau \in [-2h, -h), \end{cases}$$
$$\delta_2(\tau) = \begin{cases} 2\cos\tau - \sin 2\tau, & \tau \in [-h, 0], \\ 0, & \tau \in [-2h, -h), \end{cases}$$
$$\delta_3(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in [-h, 0], \\ 0, & \tau \in [-2h, -h). \end{cases}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} w_0 &= \operatorname{col}(a_{10} - \gamma_{10}, a_{20} - \gamma_{20}, a_{30} - \gamma_{30}) = (-2, 0, -1), \\ w_1 &= \operatorname{col}(a_{11} - \gamma_{11}, a_{21} - \gamma_{21}, a_{31} - \gamma_{31}) = (-2, -2, 0), \\ w_2 &= \operatorname{col}(a_{12}, a_{22}, a_{32}) = (4, -2, 0), \\ \vartheta(\tau) &= \operatorname{col}\big(g_1(\tau) - \delta_1(\tau), g_2(\tau) - \delta_2(\tau), g_3(\tau) - \delta_3(\tau)\big) = \\ &= \begin{cases} \operatorname{col}(2\mathcal{S} - \mathcal{C}, -2\mathcal{S} + \sin 2\tau - 2\mathcal{C}, \mathcal{C}), & \tau \in [-h, 0], \\ \operatorname{col}(1, \sin 2\tau, \mathcal{S}), & \tau \in [-2h, -h), \end{cases} \end{aligned}$$

где $\mathcal{C} = \cos\tau$, $\mathcal{S} = \sin\tau$. Вычисляя v_0, v_1, v_2, $f(\tau)$ по формулам (5.26), (5.27), получим

$$v_0 = \operatorname{col}(-3, -1, -1, -1),\ v_1 = \operatorname{col}(0, 1, 1, 0),\ v_2 = \operatorname{col}(6, 1, 1, 0);$$
$$f(\tau) = \begin{cases} f_1(\tau), & \tau \in [-h, 0], \\ f_2(\tau), & \tau \in [-2h, -h), \end{cases}$$
$$f_1(\tau) = \operatorname{col}(4\sin\tau + 2\cos\tau - \sin 2\tau, \sin\tau - \sin\tau\cos\tau + 2\cos\tau, \\ \sin\tau - \sin\tau\cos\tau + 2\cos\tau, \cos\tau),$$
$$f_2(\tau) = \operatorname{col}(1 - \sin 2\tau + \sin\tau, -\sin\tau\cos\tau + \sin\tau, \\ -\sin\tau\cos\tau + \sin\tau, \sin\tau).$$

Отсюда находим

$$Q_0 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$R(\tau) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 4\mathcal{S} + 2\mathcal{C} - \sin 2\tau & \mathcal{S} - \mathcal{S}\mathcal{C} + 2\mathcal{C} \\ \mathcal{S} - \mathcal{S}\mathcal{C} + 2\mathcal{C} & \mathcal{C} \end{bmatrix}, & \tau \in [-h, 0], \\ \begin{bmatrix} 1 - \sin 2\tau + \mathcal{S} & -\mathcal{S}\mathcal{C} + \mathcal{S} \\ -\mathcal{S}\mathcal{C} + \mathcal{S} & \mathcal{S} \end{bmatrix}, & \tau \in [-2h, -h), \end{cases}$$

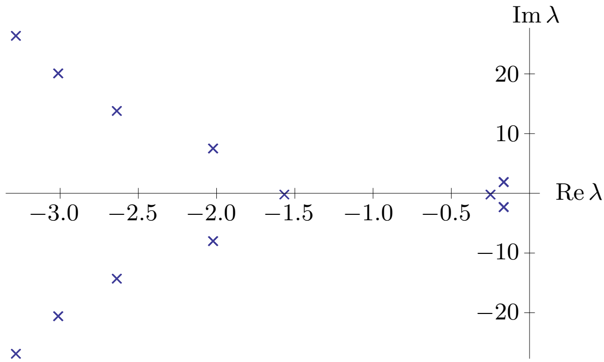

Рисунок 1: Спектр замкнутой системы (6.6) при $h = 1$

где $\mathcal{C} = \cos\tau$, $\mathcal{S} = \sin\tau$.

Регулятор (5.3)

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = Q_0 \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + Q_1 \begin{bmatrix} y_1(t-h) \\ y_2(t-h) \end{bmatrix} + \\ + Q_2 \begin{bmatrix} y_1(t-2h) \\ y_2(t-2h) \end{bmatrix} + \\ + \int_{-h}^{0} R_1(\tau) y(t+\tau) d\tau + \int_{-2h}^{-h} R_2(\tau) y(t+\tau) d\tau \tag{6.5}$$

имеет компоненты

$$u_1(t) = -2x'(t) + x(t) - x'(t-h) - x(t-h) + 5x'(t-2h) - \\ - x(t-2h) + \int_{-h}^{0} x'(t+\tau)(3\sin\tau - \sin\tau\cos\tau)\, d\tau + \\ + \int_{-h}^{0} x(t+\tau)(\sin\tau\cos\tau - \sin\tau - 2\cos\tau)\, d\tau + \\ + \int_{-2h}^{-h} x'(t+\tau)(1 - \sin\tau\cos\tau)\, d\tau +$$

$$+\int_{-2h}^{-h} x(t+\tau)(\sin\tau\cos\tau-\sin\tau)\,d\tau,$$

$$u_2(t)=x(t)+x'(t-h)+x'(t-2h)+$$

$$+\int_{-h}^{0} x'(t+\tau)(\sin\tau-\sin\tau\cos\tau+\cos\tau)\,d\tau-$$

$$-\int_{-h}^{0} x(t+\tau)\cos\tau\,d\tau-\int_{-2h}^{-h} x'(t+\tau)\sin\tau\cos\tau\,d\tau-$$

$$-\int_{-2h}^{-h} x(t+\tau)\sin\tau\,d\tau.$$

Система (6.1), (6.2) замкнутая регулятором (6.5) принимает вид

$$\begin{gathered} x'''(t)+2x''(t)+x'(t)+x''(t-h)+2x'(t-h)+ \\ +x(t-h)-\int_{-h}^{0} x''(t+\tau)(\sin\tau-\cos\tau)\,d\tau+ \\ +\int_{-h}^{0} x'(t+\tau)(2\cos\tau-\sin 2\tau)\,d\tau. \end{gathered} \tag{6.6}$$

Характеристическая функция замкнутой системы (6.6) совпадает с (6.4). В частности, (при $h=1$) система (6.6) экспоненциально устойчива. На рисунке 1 изображен спектр системы (6.6) при $h=1$ (спектр найден численно). На рисунке 2 изображены решения системы (6.6) при $h=1$ с начальными условиями $x(\tau)=1$ (синяя кривая), $x(\tau)=\tau$ (фиолетовая кривая), $x(\tau)=\tau^2$ (серая кривая), $\tau\in[-h,0]$.

Пример 6.2. (см. [147]). Пусть $h_1=1$, $h_2=\sqrt{2}$. Рассмотрим систему

$$\begin{gathered} x'''(t)+x''(t-h_1)+x''(t-h_2)+x'(t)+x(t)+ \\ +x(t-h_1)-x(t-h_2)+\int_{-h_1}^{0} x''(t+\tau)\cos\tau\,d\tau- \\ -2\int_{-h_2}^{-h_1} x'(t+\tau)\sin\tau\,d\tau-\int_{-h_1}^{0} x(t+\tau)\cos 2\tau\,d\tau= \\ =u_1'(t)+u_1(t)+u_2'(t), \end{gathered} \tag{6.7}$$

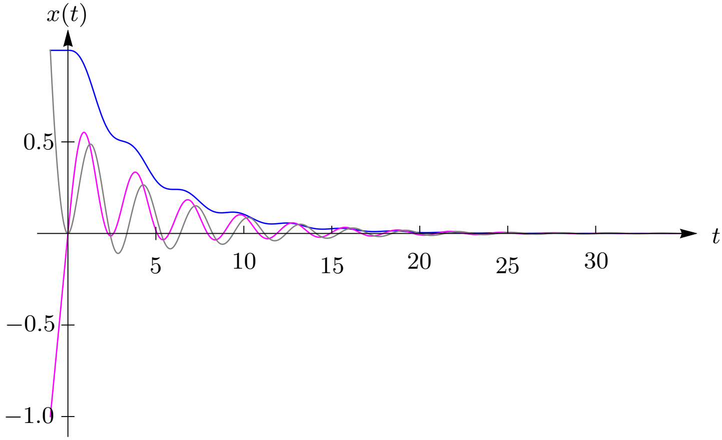

Рисунок 2: Решения замкнутой системы (6.6) при различных начальных условиях

$$y_1(t) = -x(t) - x'(t), \quad y_2(t) = x'(t), \tag{6.8}$$

$x \in \mathbb{R}$, $u = \mathrm{col}\,(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = \mathrm{col}\,(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Система (6.7), (6.8) имеет вид (5.1), (5.2), где $n = 3$, $m = 2$, $k = 2$, $p = 2$, $s = 2$;

$$\begin{array}{llll}
a_{10} = 0, & a_{11} = 1, & a_{12} = 1, & a_{20} = 1, \\
a_{21} = 0, & a_{22} = 0, & a_{30} = 1, & a_{31} = 1, \\
a_{32} = -1; & g_{11}(\tau) = \cos\tau, & g_{12}(\tau) = 0, & g_{21}(\tau) = 0, \\
g_{22}(\tau) = -2\sin\tau, & g_{31}(\tau) = -\cos 2\tau, & g_{32}(\tau) = 0; & \\
b_{21} = 1, & b_{22} = 1, & b_{31} = 1, & b_{32} = 0; \\
c_{11} = -1, & c_{21} = -1, & c_{12} = 0, & c_{22} = 1.
\end{array}$$

По системе (6.7), (6.8) построим матрицы B, C: $B =$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Следовательно,

$$\begin{gathered} C^*B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^*JB = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ C^*J^2B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{6.9}$$

Построим матрицу (5.23):

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Имеем $\operatorname{rank} P = 3 = n$, следовательно, матрицы (6.9) линейно независимы. Поэтому, по теореме 5.1, задача модального управления для системы (6.7), (6.8) посредством регулятора (5.3) разрешима. Построим этот регулятор. Пусть, к примеру, $\ell = 2$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{3}$, и

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2\Big(2 + e^{-\lambda\omega_2} - \int_{-\omega_1}^{0} e^{\lambda\tau}(\sin\tau - \cos\tau)\,d\tau\Big) \\ + \lambda\Big(1 + 2e^{-\lambda\omega_1} - \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} e^{\lambda\tau}\sin 2\tau\,d\tau\Big) + e^{-\lambda\omega_1}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Тогда

$$\begin{gathered} T_1 = \{\omega_1, \omega_2\} = \{1, \sqrt{3}\}, \quad T_2 = \{h_1, h_2\} = \{1, \sqrt{2}\}; \\ \gamma_{10} = 2, \quad \gamma_{11} = 0, \quad \gamma_{12} = 1, \quad \gamma_{20} = 1, \quad \gamma_{21} = 2, \\ \gamma_{22} = 0, \quad \gamma_{30} = 0, \quad \gamma_{31} = 1, \quad \gamma_{32} = 0; \\ \delta_{11}(\tau) = \cos\tau - \sin\tau, \quad \delta_{12}(\tau) = 0, \quad \delta_{21}(\tau) = 0, \\ \delta_{22}(\tau) = -\sin 2\tau, \qquad \delta_{31}(\tau) = 0, \quad \delta_{32}(\tau) = 0. \end{gathered}$$

Из доказательства теоремы 5.1, получим

$$\begin{gathered} S_1 = \{2\}, \quad S_2 = \{1\}, \quad S_3 = \{1\}, \quad S_4 = \{2\}, \\ T = \{h_1, h_2, \omega_2\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}, \quad \theta = 3, \\ \sigma_1 = h_1 = \omega_1 = 1, \quad \sigma_2 = h_2 = \sqrt{2}, \quad \sigma_3 = \omega_2 = \sqrt{3}, \\ K_1 = \{3\}, \quad K_2 = \{1\}, \quad K_3 = \{2\}. \end{gathered}$$

Имеем

$$g_1(\tau)=\begin{cases}\cos\tau, & \tau\in[-\sigma_1,0],\\ 0, & \tau\in[-\sigma_2,-\sigma_1),\\ 0, & \tau\in[-\sigma_3,-\sigma_2),\end{cases}$$
$$g_2(\tau)=\begin{cases}0, & \tau\in[-\sigma_1,0],\\ -2\sin\tau, & \tau\in[-\sigma_2,-\sigma_1),\\ 0, & \tau\in[-\sigma_3,-\sigma_2),\end{cases}$$
$$g_3(\tau)=\begin{cases}-\cos 2\tau, & \tau\in[-\sigma_1,0],\\ 0, & \tau\in[-\sigma_2,-\sigma_1),\\ 0, & \tau\in[-\sigma_3,-\sigma_2),\end{cases}$$

$$\delta_1(\tau)=\begin{cases}\cos\tau-\sin\tau, & \tau\in[-\sigma_1,0],\\ 0, & \tau\in[-\sigma_2,-\sigma_1),\\ 0, & \tau\in[-\sigma_3,-\sigma_2),\end{cases}$$
$$\delta_2(\tau)=\begin{cases}0, & \tau\in[-\sigma_1,0],\\ -\sin 2\tau, & \tau\in[-\sigma_2,-\sigma_1),\\ -\sin 2\tau, & \tau\in[-\sigma_3,-\sigma_2),\end{cases}$$
$$\delta_3(\tau)=\begin{cases}0, & \tau\in[-\sigma_1,0],\\ 0, & \tau\in[-\sigma_2,-\sigma_1),\\ 0, & \tau\in[-\sigma_3,-\sigma_2).\end{cases}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}
w_0 &= \mathrm{col}\,(a_{10}-\gamma_{10}, a_{20}-\gamma_{20}, a_{30}-\gamma_{30}) = (-2,0,1),\\
w_1 &= \mathrm{col}\,(a_{11}-\gamma_{11}, a_{21}-\gamma_{21}, a_{31}-\gamma_{31}) = (1,-2,0),\\
w_2 &= \mathrm{col}\,(a_{12}, a_{22}, a_{32}) = (1,0,-1),\\
w_3 &= \mathrm{col}\,(-\gamma_{12}, -\gamma_{22}, -\gamma_{32}) = (-1,0,0),\\
\vartheta(\tau) &= \mathrm{col}\,\big(g_1(\tau)-\delta_1(\tau), g_2(\tau)-\delta_2(\tau), g_3(\tau)-\delta_3(\tau)\big) =\\
&= \begin{cases}\mathrm{col}\,(\sin\tau, 0, -\cos 2\tau), & \tau\in[-\sigma_1,0],\\ \mathrm{col}\,(0, -2\sin\tau+\sin 2\tau, 0), & \tau\in[-\sigma_2,-\sigma_1),\\ \mathrm{col}\,(0,\sin 2\tau, 0), & \tau\in[-\sigma_3,-\sigma_2).\end{cases}
\end{aligned}$$

Вычисляя v_0, v_1, v_2, v_3, и $f(\tau)$ по формулам (5.26), (5.27), получим

$$v_0 = \operatorname{col}(-1, 1, -1, -1), \quad v_1 = \operatorname{col}(0, 1, -1, 3),$$
$$v_2 = \operatorname{col}(1, -1, 1, 0), \qquad v_3 = \operatorname{col}(0, 0, 0, -1);$$

$$f(\tau) =$$
$$= \begin{cases} \operatorname{col}(\cos 2\tau, -\cos 2\tau, \cos 2\tau, \mathcal{S} - \cos 2\tau), & \tau \in [-\sigma_1, 0], \\ \operatorname{col}(0, \mathcal{S} - \mathcal{SC}, -\mathcal{S} + \mathcal{SC}, 2\mathcal{S} - \sin 2\tau), & \tau \in [-\sigma_2, -\sigma_1), \\ \operatorname{col}(0, -\mathcal{SC}, \mathcal{SC}, -\sin 2\tau), & \tau \in [-\sigma_3, -\sigma_2), \end{cases}$$

где $\mathcal{C} = \cos\tau$, $\mathcal{S} = \sin\tau$. Отсюда следует, что

$$Q_0 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$
$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$R(\tau) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \cos 2\tau & \cos 2\tau \\ -\cos 2\tau & \mathcal{S} - \cos 2\tau \end{bmatrix}, & \tau \in [-\sigma_1, 0], \\ \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{S} + \mathcal{SC} \\ \mathcal{S} - \mathcal{SC} & 2\mathcal{S} - \sin 2\tau \end{bmatrix}, & \tau \in [-\sigma_2, -\sigma_1), \\ \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{SC} \\ -\mathcal{SC} & -\sin 2\tau \end{bmatrix}, & \tau \in [-\sigma_3, -\sigma_2), \end{cases}$$

где $\mathcal{C} = \cos\tau$, $\mathcal{S} = \sin\tau$. Регулятор (5.3)

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = Q_0 \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + Q_1 \begin{bmatrix} y_1(t-\sigma_1) \\ y_2(t-\sigma_1) \end{bmatrix} +$$
$$+ Q_2 \begin{bmatrix} y_1(t-\sigma_2) \\ y_2(t-\sigma_2) \end{bmatrix} + Q_3 \begin{bmatrix} y_1(t-\sigma_3) \\ y_2(t-\sigma_3) \end{bmatrix} + \tag{6.11}$$
$$+ \int_{-\sigma_3}^{0} R(\tau) y(t+\tau) d\tau$$

имеет компоненты

$$u_1(t) = -x'(t-h_1) + x(t) - x(t-h_2) -$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_{-h_1}^{0} x(t+\tau)\cos 2\tau\, d\tau + \\
&+ \int_{-h_2}^{-h_1} x'(t+\tau)(\sin\tau\cos\tau - \sin\tau)\, d\tau + \\
&+ \int_{-\omega_2}^{-h_2} x'(t+\tau)\sin\tau\cos\tau\, d\tau,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2(t) = &-2x'(t) + 2x'(t-h_1) + x'(t-h_2) - x'(t-\omega_2) - \\
&- x(t) - x(t-h_1) + x(t-h_2) + \\
&+ \int_{-h_1}^{0} x(t+\tau)\cos 2\tau\, d\tau + \int_{-h_1}^{0} x'(t+\tau)\sin\tau\, d\tau + \\
&+ \int_{-h_2}^{-h_1} x(t+\tau)(\sin\tau\cos\tau - \sin\tau)\, d\tau + \\
&+ \int_{-h_2}^{-h_1} x'(t+\tau)(\sin\tau - \sin\tau\cos\tau)\, d\tau + \\
&+ \int_{-\omega_2}^{-h_2} x(t+\tau)\sin\tau\cos\tau\, d\tau - \int_{-\omega_2}^{-h_2} x'(t+\tau)\sin\tau\cos\tau\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Система (6.7), (6.8) замкнутая регулятором (6.11) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&x'''(t) + 2x''(t) + x''(t-\omega_2) + x'(t) + 2x'(t-\omega_1) + \\
&+ x(t-\omega_1) - \int_{-\omega_1}^{0} x''(t+\tau)(\sin\tau - \cos\tau)\, d\tau - \\
&- \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} x'(t+\tau)\sin 2\tau\, d\tau = 0.
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Характеристическая функция системы (6.12) совпадает с функцией (6.10). В частности, система (6.12) (с $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{3}$) экспоненциально устойчива. На рисунке 3 изображен спектр системы (6.12) при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{3}$ (спектр найден численно). На рисунке 4 изображены решения системы (6.12) при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{3}$ с начальными условиями $x(\tau) = 1$ (синяя кривая), $x(\tau) = \tau$ (фиолетовая кривая), $x(\tau) = \tau^2$ (серая кривая), $\tau \in [-\sqrt{3}, 0]$.

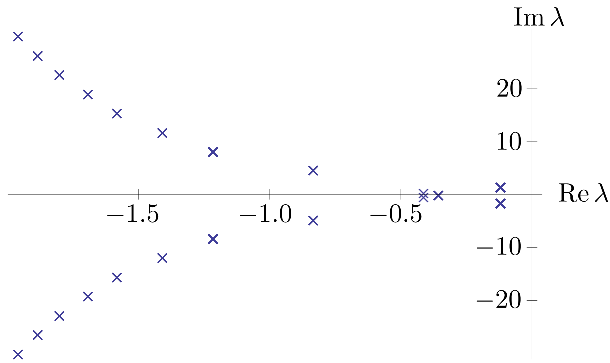

Рисунок 3: Спектр системы (6.12) при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{3}$

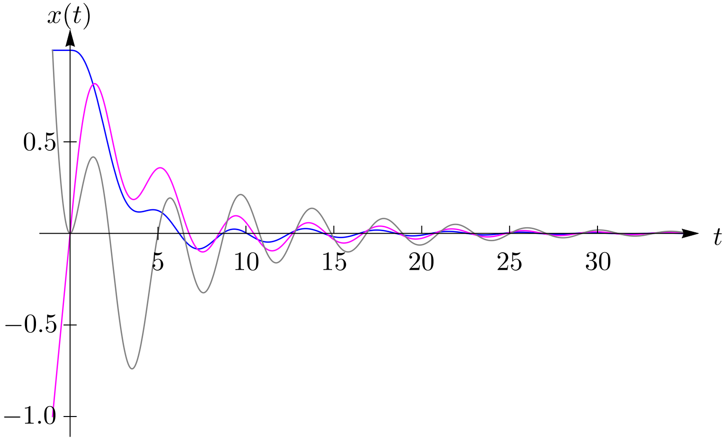

Рисунок 4: Решения системы (6.12) при $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{3}$

Глава II
МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ВЫХОДУ

В этой главе исследована задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра для линейных управляемых стационарных систем, заданных системой дифференциальных уравнений с запаздываниями в состоянии, с коэффициентами, имеющими специальный вид. Получено необходимое и достаточное условие разрешимости рассматриваемых задач, и как следствие, достаточное условие стабилизации систем.

В § 7, 8 рассмотрена задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра для системы с соизмеримыми (несоизмеримыми) сосредоточенными запаздываниями в состоянии посредством линейной статической обратной связи по выходу с соизмеримыми (несоизмеримыми) сосредоточенными запаздываниями. В § 9 исследуется задача назначения произвольного конечного спектра для системы с несоизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии посредством линейной статической обратной связи по выходу с несоизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в тех же узлах.

В конце § 8, 9 приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

§ 7. Модальное управление в линейных системах с соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями

Для линейной стационарной дифференциальной системы с несколькими соизмеримыми запаздываниями в состоянии получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством статической обратной связи по выходу с соизмеримыми запаздываниями [17, 20].

Рассмотрим линейную стационарную дифференциальную систему с несколькими соизмеримыми запаздываниями в состоянии

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{s} A_j x(t - jh) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{7.1}$$

$$y(t) = C^* x(t) \tag{7.2}$$

с начальными условиями $x(\tau) = \phi(\tau)$, $\tau \in [-sh, 0]$; здесь $A, A_j \in M_n(\mathbb{K})$, $j = \overline{1, s}$; $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,k}(\mathbb{K})$; $h > 0$ — постоянное запаздывание, $\phi\colon [-sh, 0] \to \mathbb{K}^n$ — непрерывная функция; $x \in \mathbb{K}^n$ — фазовый вектор, $u \in \mathbb{K}^m$ — вектор управляющего воздействия, $y \in \mathbb{K}^k$ — вектор выходных величин.

Пусть управление в системе (7.1), (7.2) строится в виде линейной статической обратной связи по выходу с соизмеримыми запаздываниями

$$u(t) = \sum_{\rho=0}^{\theta} Q_\rho y(t - \rho h), \quad t > 0, \quad y(\tau) = 0, \quad \tau < -sh. \tag{7.3}$$

Здесь $\theta \geqslant 0$ — некоторое целое число, $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0, \theta}$, — постоянные матрицы. Замкнутая система (7.1), (7.2), (7.3) принимает вид

$$\dot{x}(t) = (A + BQ_0C^*)x(t) + \sum_{j=1}^{s} A_j x(t - jh) + \\ + \sum_{\rho=1}^{\theta} BQ_\rho C^* x(t - \rho h). \tag{7.4}$$

Обозначим через

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda}) = \det\Big[\lambda I - \Big((A + BQ_0C^*) + \\ + \sum_{j=1}^{s} e^{-\lambda jh} A_j + \sum_{\rho=1}^{\theta} e^{-\lambda h\rho} BQ_\rho C^*\Big)\Big]$$

характеристический квазиполином замкнутой системы (7.4).

Определение 7.1. *Для системы* (7.1), (7.2) *разрешима задача модального управления посредством регулятора* (7.3), *если для любого целого* $\ell \geqslant 0$ *и для любых наперед заданных* $\gamma_{i\mu} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, $\mu = \overline{0, \ell}$, *найдутся целое число* $\theta \geqslant 0$ *и матрицы* $Q_0, \ldots, Q_\theta \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ *такие, что характеристический квазиполином* $\varphi(\lambda, e^{-\lambda})$ *замкнутой системы* (7.4) *удовлетворяет равенству*

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda}) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{\ell} \gamma_{i\mu} \lambda^{n-i} e^{-\lambda\mu h}.$$

Определение 7.2. Для системы (7.1), (7.2) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора* (7.3), если для любых наперед заданных $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, найдутся целое число $\theta \geqslant 0$ и матрицы $Q_0, \ldots$ $\ldots, Q_\theta \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ такие, что характеристический квазиполином $\varphi(\lambda, e^{-\lambda})$ замкнутой системы (7.4) удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda}) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n.$$

Пусть коэффициенты A, B, C системы (7.1), (7.2) имеют следующий специальный вид (см. [13]): матрица A имеет форму Хессенберга; первые $p-1$ строк матрицы B и последние $n-p$ строк матрицы C равны нулю, то есть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{7.5}$$

$$a_{i,i+1} \neq 0, \qquad i = \overline{1, n-1};$$

$$B = \begin{bmatrix} O_1 \\ L \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} N \\ O_2 \end{bmatrix},$$

$$O_1 = 0 \in M_{p-1,m}(\mathbb{K}), \quad L \in M_{n-p+1,m}(\mathbb{K}), \tag{7.6}$$

$$N \in M_{p,k}(\mathbb{K}), \quad O_2 = 0 \in M_{n-p,k}(\mathbb{K}),$$

$$p \in \{1, \ldots, n\}.$$

Будем предполагать, что матрицы A_j, $j = \overline{1,s}$, системы (7.1) также имеют специальный вид (см. [14, 142]): первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц A_j равны нулю, то есть

$$\begin{gathered} A_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{A}_j & 0 \end{bmatrix}, \qquad \widehat{A}_j \in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}), \\ j = \overline{1,s}, \qquad p \in \{1, \ldots, n\}. \end{gathered} \tag{7.7}$$

Здесь число p то же самое, что и в (7.6).

Теорема 7.1. *Пусть матрицы A, B, C, A_j, $j = \overline{1,s}$, системы* (7.1), (7.2) *имеют специальный вид* (7.5), (7.6), (7.7). *Тогда равносильны следующие утверждения.*

1. *Матрицы*

$$C^*B, \quad C^*AB, \quad \ldots, \quad C^*A^{n-1}B \tag{7.8}$$

линейно независимы.

2. *Для системы* (7.1), (7.2) *разрешима задача модального управления посредством регулятора* (7.3).

Теорема 7.2. *Пусть матрицы A, B, C, A_j, $j = \overline{1,s}$, системы* (7.1), (7.2) *имеют специальный вид* (7.5), (7.6), (7.7). *Задача назначения произвольного конечного спектра для системы* (7.1), (7.2) *посредством регулятора* (7.3) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы* (7.8) *линейно независимы.*

Следствие 7.1. *Пусть матрицы A, B, C, A_j, $j = \overline{1,s}$, системы* (7.1), (7.2) *имеют специальный вид* (7.5), (7.6), (7.7). *Если матрицы* (7.8) *линейно независимы, то система* (7.1), (7.2) *экспоненциально стабилизируема посредством статической обратной связи по выходу* (7.3).

Пример 7.1. (см. [20]). Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $n = 4$, $m = 2$, $k = 2$, $s = 2$, и коэффициенты системы (7.1), (7.2) имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \\ -i & 1 \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты системы (7.1), (7.2) удовлетворяют условиям теоремы 7.1, то есть имеют специальный вид (7.5), (7.6), (7.7), где $p = 2$. Имеем $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = 1$. Построим матрицы (7.8):

$$\begin{gathered} C^*B = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^*AB = \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ 1 & i \end{bmatrix}, \\ C^*A^2B = \begin{bmatrix} -2i & 2+i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}, \quad C^*A^3B = \begin{bmatrix} -1 & 1-i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{7.9}$$

Построим матрицы (см. (8.24), (8.25))

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} i & 2 & -2i & -1 \\ -1 & 2i & 2+i & 1-i \\ 0 & 1 & 1-i & 0 \\ 0 & i & 1+i & 1 \end{bmatrix}.$$

Имеем $\det P = 1$. Значит, $\operatorname{rank} P = 4 = n$, следовательно, матрицы (7.9) линейно независимы. Таким образом, по теореме 7.1 для системы (7.1), (7.2) разрешима задача модального управления посредством регулятора (7.3). Построим такой регулятор. Пусть, к примеру, $\ell = 3$, $\omega_1 = h$, $\omega_2 = 2h$, $\omega_3 = 3h$, и

$$\begin{aligned} q(\lambda, e^{-\lambda}) = (\lambda+1)(\lambda+e^{-\lambda h})^3 = \\ = \lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^3 e^{-\lambda h} + 3\lambda^2 e^{-\lambda h} + \\ + 3\lambda^2 e^{-2\lambda h} + 3\lambda e^{-2\lambda h} + \lambda e^{-3\lambda h} + e^{-3\lambda h}. \end{aligned}$$

Тогда, в обозначениях доказательства теоремы 8.1,

$$\begin{gathered} T_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{h, 2h, 3h\}, \quad T_2 = \{h, 2h\}; \\ \gamma_{10} = 1,\ \gamma_{11} = 3,\ \gamma_{12} = 0,\ \gamma_{13} = 0, \\ \gamma_{20} = 0,\ \gamma_{21} = 3,\ \gamma_{22} = 3,\ \gamma_{23} = 0, \\ \gamma_{30} = 0,\ \gamma_{31} = 0,\ \gamma_{32} = 3,\ \gamma_{33} = 1, \\ \gamma_{40} = 0,\ \gamma_{41} = 0,\ \gamma_{42} = 0,\ \gamma_{43} = 1. \end{gathered}$$

Из доказательства теоремы 8.1 получим

$$S_1 = \{3\}, \quad S_2 = \{1, 2\}, \quad S_3 = \{1, 2\}, \quad S_4 = \varnothing,$$
$$T = \{h, 2h, 3h\}, \quad \theta = 3,$$
$$\sigma_1 = h, \quad \sigma_2 = 2h, \quad \sigma_3 = 3h,$$
$$K_1 = \{3\}, \quad K_2 = \{1, 2\}, \quad K_3 = \varnothing.$$

Вычислим матрицы F_0, F_1, F_2, F_3 (см. (8.8)), получим $F_0 = I$,

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \; F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Далее, вычислим

$$\mathrm{Sp}\,(A_1F_0) = 1, \quad \mathrm{Sp}\,(A_1F_1) = 1, \quad \mathrm{Sp}\,(A_1F_2) = -2,$$
$$\mathrm{Sp}\,(A_1F_3) = 1, \quad \mathrm{Sp}\,(A_2F_0) = -1, \quad \mathrm{Sp}\,(A_2F_1) = 2,$$
$$\mathrm{Sp}\,(A_2F_2) = 0, \quad \mathrm{Sp}\,(A_2F_3) = -1.$$

Далее находим (см. (8.26))

$$\begin{aligned}
w_0 &= \mathrm{col}\,(\alpha_1 - \gamma_{10}, \alpha_2 - \gamma_{20}, \alpha_3 - \gamma_{30}, \alpha_4 - \gamma_{40}) = \\
&= \mathrm{col}\,(-2, 1, -1, 1), \\
w_1 &= \mathrm{col}\,(-\gamma_{11} - \mathrm{Sp}\,(A_1F_0), -\gamma_{21} - \mathrm{Sp}\,(A_1F_1), \\
&- \gamma_{31} - \mathrm{Sp}\,(A_1F_2), -\gamma_{41} - \mathrm{Sp}\,(A_1F_3)) = \\
&= \mathrm{col}\,(-4, -4, 2, -1), \\
w_2 &= \mathrm{col}\,(-\gamma_{12} - \mathrm{Sp}\,(A_2F_0), -\gamma_{22} - \mathrm{Sp}\,(A_2F_1), \\
&- \gamma_{32} - \mathrm{Sp}\,(A_2F_2), -\gamma_{42} - \mathrm{Sp}\,(A_2F_3)) = \\
&= \mathrm{col}\,(1, -5, -3, 1), \\
w_3 &= \mathrm{col}\,(-\gamma_{13}, -\gamma_{23}, -\gamma_{33}, -\gamma_{43}) = \mathrm{col}\,(0, 0, -1, -1).
\end{aligned}$$

Вычисляя v_ρ по формулам $v_\rho = P(P^TP)^{-1}G^{-1}w_\rho$, $\rho = \overline{0, 3}$ (см.

(8.28)), получаем

$$
\begin{aligned}
v_0 &= \operatorname{col}(-1-i, 3-i, 2-i, -3+3i),\\
v_1 &= \operatorname{col}(-6+4i, -6i, 2-9i, 1+10i),\\
v_2 &= \operatorname{col}(4+5i, -6+4i, -9-2i, 4-5i),\\
v_3 &= \operatorname{col}(1, i, -1+2i, -2-i).
\end{aligned}
$$

Отсюда находим

$$
Q_0 = \begin{bmatrix} -1-i & 2-i \\ 3-i & -3+3i \end{bmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{bmatrix} -6+4i & 2-9i \\ -6i & 1+10i \end{bmatrix}, \quad (7.10)
$$

$$
Q_2 = \begin{bmatrix} 4+5i & -9-2i \\ -6+4i & 4-5i \end{bmatrix}, \qquad Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1+2i \\ i & -2-i \end{bmatrix}. \quad (7.11)
$$

Система (7.1), (7.2) замкнутая управлением (7.3) с матрицами (7.10), (7.11) принимает вид

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) = &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2-2i & -2 & 1 & 0 \\ -1+i & 2i & 0 & 1 \\ 1+i & 1+i & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7-4i & -3 & 0 & 0 \\ -5+8i & 1+4i & 0 & 0 \\ 6-4i & 6-4i & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-h) + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3+i & 0 & 0 & 0 \\ 4i & -i & 0 & 0 \\ -3-5i & -3-5i & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-2h) + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-3h). \quad (7.12)
\end{aligned}
$$

Вычисляя характеристическую функцию $\varphi(\lambda, e^{-\lambda})$ замкнутой системы (7.12), получаем, что

$$
\varphi(\lambda, e^{-\lambda}) = \lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^3 e^{-\lambda h} + 3\lambda^2 e^{-2\lambda h} + 3\lambda^2 e^{-\lambda h} +
$$

$$+\lambda e^{-3\lambda h} + 3\lambda e^{-2\lambda h} + e^{-3\lambda h} = (\lambda+1)(\lambda + e^{-\lambda h})^3.$$

В частности, система (7.12) экспоненциально устойчива, если $h < \dfrac{\pi}{2}$ (см., к примеру, [4]).

§ 8. Модальное управление в линейных системах с несоизмеримыми сосредоточенными запаздываниями

Для линейной стационарной дифференциальной системы с несколькими несоизмеримыми запаздываниями в состоянии получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством статической обратной связи по выходу с несоизмеримыми запаздываниями [17, 95].

Рассмотрим линейную стационарную дифференциальную систему с несколькими несоизмеримыми запаздываниями в состоянии

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^{s} A_j x(t-h_j) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{8.1}$$

$$y(t) = C^* x(t) \tag{8.2}$$

с начальными условиями $x(\tau) = \phi(\tau)$, $\tau \in [-h_s, 0]$; здесь $A, A_j \in M_n(\mathbb{K})$, $j = \overline{1,s}$; $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,k}(\mathbb{K})$; $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_s$ — постоянные запаздывания, $\phi\colon [-h_s, 0] \to \mathbb{K}^n$ — непрерывная функция; $x \in \mathbb{K}^n$ — фазовый вектор, $u \in \mathbb{K}^m$ — вектор управляющего воздействия, $y \in \mathbb{K}^k$ — вектор выходных величин.

Пусть управление в системе (8.1), (8.2) строится в виде линейной статической обратной связи по выходу с несоизмеримыми запаздываниями

$$u(t) = \sum_{\rho=0}^{\theta} Q_\rho y(t-\sigma_\rho), \quad t > 0, \quad y(\tau) = 0, \quad \tau < -h_s. \tag{8.3}$$

Здесь $\theta \geqslant 0$ — некоторое целое число, $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$ — постоянные запаздывания, $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\theta}$, — постоянные матрицы. Замкнутая система (8.1), (8.2), (8.3) принимает вид

$$\dot{x}(t) = (A + BQ_0C^*)x(t) + \sum_{j=1}^{s} A_j x(t - h_j) + \sum_{\rho=1}^{\theta} BQ_\rho C^* x(t - \sigma_\rho). \quad (8.4)$$

Обозначим через

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda}) = \det\Big[\lambda I - \Big((A + BQ_0C^*) + \sum_{j=1}^{s} e^{-\lambda h_j} A_j + \sum_{\rho=1}^{\theta} e^{-\lambda\sigma_\rho} BQ_\rho C^*\Big)\Big]$$

характеристический квазиполином замкнутой системы (8.4).

Определение 8.1. *Для системы* (8.1), (8.2) *разрешима задача модального управления посредством регулятора* (8.3), *если для любого целого $\ell \geqslant 0$, для любых наперед заданных чисел $0 = \omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_\ell$ и для любых наперед заданных $\gamma_{i\mu} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $\mu = \overline{0,\ell}$, найдутся целое число $\theta \geqslant 0$, числа $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$ и матрицы $Q_0, \ldots, Q_\theta \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ такие, что характеристический квазиполином $\varphi(\lambda, e^{-\lambda})$ замкнутой системы* (8.4) *удовлетворяет равенству*

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda}) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{\ell} \gamma_{i\mu}\lambda^{n-i}e^{-\lambda\omega_\mu}.$$

Определение 8.2. Для системы (8.1), (8.2) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора* (8.3), если для любых наперед заданных $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, найдутся целое число $\theta \geqslant 0$, числа $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$ и матрицы $Q_0, \ldots, Q_\theta \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ такие, что характеристический квазиполином $\varphi(\lambda, e^{-\lambda})$ замкнутой системы (8.4) удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda}) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n.$$

Пусть коэффициенты A, B, C системы (8.1), (8.2) имеют следующий специальный вид (см. [13]): матрица A имеет форму Хессенберга; первые $p-1$ строк матрицы B и последние $n-p$ строк матрицы C равны нулю, то есть

$$
\begin{gathered}
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots} & a_{nn} \end{bmatrix}, \\
a_{i,i+1} \neq 0, \qquad i = \overline{1, n-1};
\end{gathered} \tag{8.5}
$$

$$
\begin{gathered}
B = \begin{bmatrix} O_1 \\ L \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} N \\ O_2 \end{bmatrix}, \\
O_1 = 0 \in M_{p-1,m}(\mathbb{K}), \quad L \in M_{n-p+1,m}(\mathbb{K}), \\
N \in M_{p,k}(\mathbb{K}), \quad O_2 = 0 \in M_{n-p,k}(\mathbb{K}), \\
p \in \{1, \dots, n\}.
\end{gathered} \tag{8.6}
$$

Будем предполагать, что матрицы A_j, $j = \overline{1, s}$, системы (8.1) также имеют специальный вид (см. [14, 142]): первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц A_j равны нулю, то есть

$$
\begin{gathered}
A_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{A}_j & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{A}_j \in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}), \\
j = \overline{1, s}, \qquad p \in \{1, \dots, n\}.
\end{gathered} \tag{8.7}
$$

Здесь число p то же самое, что и в (8.6).

Пусть $\chi(A; \lambda) =: \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n$. Положим $\alpha_0 := 1$. Построим по матрице A матрицы

$$
F_\nu = \alpha_0 A^\nu + \alpha_1 A^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu I, \quad \nu = \overline{0, n-1}. \tag{8.8}
$$

Л е м м а 8.1. *Пусть матрица A имеет вид* (8.5), *а мат-*

рица $D \in M_n(\mathbb{K})$ *имеет следующий вид:*

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_{p1} & \dots & d_{pp} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{np} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad p \in \{1, \dots, n\}. \qquad (8.9)$$

Пусть $\chi(A + D; \lambda) = \lambda^n + \varkappa_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \varkappa_n$. *Тогда* $\varkappa_i = \alpha_i - \operatorname{Sp}(DF_{i-1})$ *для всех* $i = \overline{1, n}$.

Доказательство. Вычеркнем из матрицы A последнюю строку и припишем сверху строку e_1^*. Обозначим полученную матрицу через S_1. Тогда в силу (8.5) матрица S_1 нижняя треугольная и невырожденная. Далее для каждого $i = \overline{2, n-1}$ по матрице S_{i-1} построим матрицу S_i следующим образом: вычеркиваем в матрице S_{i-1} последнюю строку и последний столбец и приписываем к полученной матрице из $M_{n-1}(\mathbb{K})$ слева первый столбец $e_1 \in \mathbb{R}^n$ и сверху первую строку $e_1^* \in (\mathbb{R}^n)^T$, полученную матрицу обозначаем $S_i \in M_n(\mathbb{K})$ (то есть левый верхний угловой элемент в матрице S_i равен 1, остальные элементы первой строки и первого столбца матрицы S_i равны 0). Тогда в силу построения матрицы S_i, $i = \overline{1, n-1}$, нижние треугольные и невырожденные. Положим $S = S_{n-1} \cdot \ldots \cdot S_1$. Тогда S также нижняя треугольная и невырожденная, а значит, и S^{-1} нижняя треугольная и невырожденная. Построим матрицы

$$\widetilde{A} = SAS^{-1}, \quad \widetilde{D} = SDS^{-1}. \qquad (8.10)$$

Тогда

$$\chi(\widetilde{A}, \lambda) = \chi(A, \lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n. \qquad (8.11)$$

Из [13, лемма 3] следует, что матрица $\widetilde{A}$ имеет форму Фробениуса: её наддиагональ состоит из единиц, в последней строке содержатся некоторые числа (а именно, числа $-\alpha_{n+1-i}$ в силу равенства (8.11)), остальные элементы равны нулю, то есть

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \dots\dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & & \dots\dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}.$$

Построим, аналогично (8.8) по матрице $\widetilde{A}$ матрицы

$$\widetilde{F}_\nu = \alpha_0 \widetilde{A}^\nu + \alpha_1 \widetilde{A}^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu I, \quad \nu = \overline{0, n-1}. \qquad (8.12)$$

Далее, в силу структуры матрицы D и того, что S, S^{-1} нижние треугольные, матрица $\widetilde{D}$ имеет вид (8.9). Применим лемму 3 [142]. Матрицы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{D}$ имеют вид, предписанный в лемме 3 [142]. Пусть $\chi(\widetilde{A}+\widetilde{D};\lambda) = \lambda^n + \widetilde{\varkappa}_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \widetilde{\varkappa}_n$. Тогда в силу леммы 3 [142] имеют место равенства

$$\widetilde{\varkappa}_i = \alpha_i - \operatorname{Sp}(\widetilde{D}\widetilde{F}_{i-1}), \quad i = \overline{1, n}. \qquad (8.13)$$

Из равенств (8.10) следует, что $\widetilde{A} + \widetilde{D} = S(A + D)S^{-1}$, то есть матрицы $\widetilde{A} + \widetilde{D}$ и $A + D$ подобны. Значит их характеристические многочлены совпадают. Поэтому

$$\varkappa_i = \widetilde{\varkappa}_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Далее, из равенств (8.12), (8.10), (8.8) следует, что $\widetilde{F}_\nu = SF_\nu S^{-1}$ для всех $\nu = \overline{0, n-1}$. Отсюда и из (8.10) следует, что для всякого $i = \overline{1, n}$ имеют место равенства

$$\operatorname{Sp}(\widetilde{D}\widetilde{F}_{i-1}) = \operatorname{Sp}(SDS^{-1} \cdot SF_{i-1}S^{-1}) = \qquad (8.14)$$
$$= \operatorname{Sp}(SDF_{i-1}S^{-1}) = \operatorname{Sp}(S^{-1}SDF_{i-1}) = \operatorname{Sp}(DF_{i-1}).$$

Теперь из равенств (8.12), (8.13), (8.14) вытекает требуемое утверждение. □

Теорема 8.1. *Пусть матрицы A, B, C, A_j, $j = \overline{1, s}$, системы* (8.1), (8.2) *имеют специальный вид* (8.5), (8.6), (8.7). *Тогда равносильны следующие утверждения.*

1. *Матрицы*

$$C^*B, \quad C^*AB, \quad \ldots, \quad C^*A^{n-1}B \tag{8.15}$$

линейно независимы.

2. *Для системы* (8.1), (8.2) *разрешима задача модального управления посредством регулятора* (8.3).

Доказательство. Предположим, что матрицы A, B, C, A_j, $j = \overline{1,s}$, системы (8.1), (8.2) имеют специальный вид (8.5), (8.6), (8.7). Рассмотрим задачу модального управления для системы (8.1), (8.2) посредством регулятора (8.3). Пусть заданы целое число $\ell \geqslant 0$, числа $0 = \omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_\ell$, и квазиполином

$$q(\lambda, e^{-\lambda}) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{\ell} \gamma_{i\mu}\lambda^{n-i}e^{-\lambda\omega_\mu} \tag{8.16}$$

с коэффициентами $\gamma_{i\mu} \in \mathbb{K}$. Требуется найти целое число $\theta \geqslant 0$, числа $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$ и построить матрицы $Q_0, \ldots$ $\ldots, Q_\theta \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ так, чтобы характеристическая функция $\varphi(\lambda, e^{-\lambda})$ замкнутой системы (8.4) удовлетворяла равенству

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda}) = q(\lambda, e^{-\lambda}). \tag{8.17}$$

Обозначим

$$D = BQ_0C^* + \sum_{\nu=1}^{s} e^{-\lambda h_\nu}A_\nu + \sum_{\rho=1}^{\theta} e^{-\lambda\sigma_\rho}BQ_\rho C^*. \tag{8.18}$$

Имеем

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda}) = \det\bigl(\lambda I - (A + D)\bigr) = \chi(A + D; \lambda). \tag{8.19}$$

В силу (8.6), (8.7) матрица (8.18) имеет вид (8.9), где

$$D_1 = LQ_0N^* + \sum_{\nu=1}^{s} e^{-\lambda h_\nu}\widehat{A}_\nu + \sum_{\rho=1}^{\theta} e^{-\lambda\sigma_\rho}LQ_\rho N^*.$$

Учитывая (8.19), (8.17), (8.16), условие (8.5) и применяя лемму 8.1, получаем, что задача модального управления для системы (8.1), (8.2) посредством регулятора (8.3) разрешима тогда и только тогда, когда найдутся целое число $\theta \geqslant 0$, числа $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_\theta$, и матрицы $Q_0, \ldots, Q_\theta \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ такие, что для всех $i = \overline{1,n}$ выполнены следующие равенства

$$\sum_{\mu=0}^{\ell} \gamma_{i\mu} e^{-\lambda\omega_\mu} = \alpha_i - \mathrm{Sp}\,(BQ_0C^*F_{i-1}) - \sum_{\nu=1}^{s} e^{-\lambda h_\nu}\mathrm{Sp}\,(A_\nu F_{i-1}) - \sum_{\rho=1}^{\theta} e^{-\lambda\sigma_\rho}\mathrm{Sp}\,(BQ_\rho C^* F_{i-1}). \tag{8.20}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} T_1 &= \{\omega_1, \ldots, \omega_\ell\},\\ T_2 &= \{h_1, \ldots, h_s\},\\ S_1 &= \{\mu \in \{\overline{1,\ell}\} : \omega_\mu \in T_1 \setminus T_2\},\\ S_2 &= \{\mu \in \{\overline{1,\ell}\} : \omega_\mu \in T_1 \cap T_2\},\\ S_3 &= \{\nu \in \{\overline{1,s}\} : h_\nu \in T_1 \cap T_2\},\\ S_4 &= \{\nu \in \{\overline{1,s}\} : h_\nu \in T_2 \setminus T_1\}. \end{aligned}$$

Положим $T := T_1 \cup T_2$, $\theta = |T|$. Положим $\sigma_0 := 0$. Обозначим элементы множества T через $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_\theta$.

Положим

$$\begin{aligned} K_1 &:= \{\rho \in \{\overline{1,\theta}\} : \exists\, \mu \in S_1 \quad \sigma_\rho = \omega_\mu\},\\ K_2 &:= \{\rho \in \{\overline{1,\theta}\} : \exists\, \nu \in S_3 \quad \sigma_\rho = h_\nu\},\\ K_3 &:= \{\rho \in \{\overline{1,\theta}\} : \exists\, \nu \in S_4 \quad \sigma_\rho = h_\nu\}. \end{aligned}$$

Тогда равенства (8.20) имеют вид

$$\gamma_{i0} + \sum_{\mu\in S_1} \gamma_{i\mu} e^{-\lambda\omega_\mu} + \sum_{\mu\in S_2} \gamma_{i\mu} e^{-\lambda\omega_\mu} = \alpha_i - \mathrm{Sp}\,(BQ_0C^*F_{i-1}) -$$
$$- \Big(\sum_{\nu\in S_3} e^{-\lambda h_\nu}\mathrm{Sp}\,(A_\nu F_{i-1}) + \sum_{\nu\in S_4} e^{-\lambda h_\nu}\mathrm{Sp}\,(A_\nu F_{i-1}) \Big) -$$
$$- \Big(\sum_{\rho\in K_1} e^{-\lambda\sigma_\rho}\mathrm{Sp}\,(BQ_\rho C^*F_{i-1}) + \sum_{\rho\in K_2} e^{-\lambda\sigma_\rho}\mathrm{Sp}\,(BQ_\rho C^*F_{i-1}) +$$

$$+\sum_{\rho\in K_3} e^{-\lambda\sigma_\rho}\mathrm{Sp}\,(BQ_\rho C^* F_{i-1})\Big). \quad (8.21)$$

Равенства (8.21) имеют место для всех $i=\overline{1,n}$ тогда и только тогда, когда для всех $i=\overline{1,n}$ выполнены равенства

$$\begin{aligned}
&\gamma_{i0}=\alpha_i-\mathrm{Sp}\,(BQ_0C^*F_{i-1});\\
&\gamma_{i\mu}=-\mathrm{Sp}\,(BQ_\rho C^*F_{i-1}),\\
&\quad \mu\in S_1,\ \rho\in K_1,\ \sigma_\rho=\omega_\mu;\\
&\gamma_{i\mu}=-\mathrm{Sp}\,\big((A_\nu+BQ_\rho C^*)F_{i-1}\big),\\
&\quad \mu\in S_2,\ \nu\in S_3,\ \rho\in K_2,\ \sigma_\rho=h_\nu=\omega_\mu;\\
&\ 0=-\mathrm{Sp}\,\big((A_\nu+BQ_\rho C^*)F_{i-1}\big),\\
&\quad \nu\in S_4,\ \rho\in K_3,\ \sigma_\rho=h_\nu.
\end{aligned} \quad (8.22)$$

Для всякого ρ и i имеем:

$$\mathrm{Sp}\,(BQ_\rho C^*F_{i-1})=\mathrm{Sp}\,(Q_\rho C^*F_{i-1}B).$$

Следовательно, равенства (8.22) равносильны $(1+\theta)$ системам линейных уравнений $(i=\overline{1,n})$:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{i0}=\alpha_i-\sum_{r=0}^{i-1}\alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_0C^*A^rB);\\
&\gamma_{i\mu}=-\sum_{r=0}^{i-1}\alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_\rho C^*A^rB),\\
&\quad \mu\in S_1,\ \rho\in K_1,\ \sigma_\rho=\omega_\mu;\\
&\gamma_{i\mu}=-\mathrm{Sp}\,(A_\nu F_{i-1})-\sum_{r=0}^{i-1}\alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_\rho C^*A^rB),\\
&\quad \mu\in S_2,\ \nu\in S_3,\ \rho\in K_2,\ \sigma_\rho=h_\nu=\omega_\mu;\\
&\ 0=-\mathrm{Sp}\,(A_\nu F_{i-1})-\sum_{r=0}^{i-1}\alpha_{i-1-r}\mathrm{Sp}\,(Q_\rho C^*A^rB),\\
&\quad \nu\in S_4,\ \rho\in K_3,\ \sigma_\rho=h_\nu.
\end{aligned} \quad (8.23)$$

Каждая ρ-я система в (8.23) состоит из n уравнений с mk неизвестными элементами матрицы Q_ρ, $\rho=\overline{0,\theta}$. Перепишем системы (8.23) в векторном виде. Для этого воспользуемся равенством $\mathrm{Sp}\,(XY) = (\mathrm{vec}\,Y)^T \cdot (\mathrm{vec}\,X^T)$. Применим это равенство к матрицам $Y = C^*A^rB$, $r = \overline{0, n-1}$, и $X = Q_\rho$, $\rho = \overline{0, \theta}$. Построим матрицы $G \in M_n(\mathbb{K})$, $P \in M_{mk,n}(\mathbb{K})$ (см. [142]):

$$G := \{g_{ij}\}_{i,j=1}^n, \; g_{ij} = 0, \; i < j; \; g_{ij} = \alpha_{i-j}, \; i \geqslant j, \tag{8.24}$$

$$P := [\mathrm{vec}\,(C^*B), \mathrm{vec}\,(C^*AB), \ldots, \mathrm{vec}\,(C^*A^{n-1}B)]. \tag{8.25}$$

Обозначим $v_\rho := \mathrm{vec}\,(Q_\rho^T) \in \mathbb{K}^{mk}$, $\rho = \overline{0, \theta}$,

$$\begin{aligned}
&w_0 := \mathrm{col}\,(\alpha_1 - \gamma_{10}, \ldots, \alpha_n - \gamma_{n0});\\
&w_\rho := \mathrm{col}\,(-\gamma_{1\mu}, \ldots, -\gamma_{n\mu}), \quad \mu \in S_1, \; \rho \in K_1, \; \sigma_\rho = \omega_\mu;\\
&w_\rho := \mathrm{col}\,(-\gamma_{1\mu} - \mathrm{Sp}\,(A_\nu F_0), \ldots, -\gamma_{n\mu} - \mathrm{Sp}\,(A_\nu F_{n-1})),\\
&\quad \mu \in S_2, \, \nu \in S_3, \, \rho \in K_2, \, \sigma_\rho = h_\nu = \omega_\mu;\\
&w_\rho := \mathrm{col}\,(-\mathrm{Sp}\,(A_\nu F_0), \ldots, -\mathrm{Sp}\,(A_\nu F_{n-1})),\\
&\quad \nu \in S_4, \; \rho \in K_3, \; \sigma_\rho = h_\nu.
\end{aligned} \tag{8.26}$$

Тогда системы (8.23) можно записать в векторном виде $GP^Tv_\rho = w_\rho$, $\rho = \overline{0, \theta}$, или, что равносильно, в матричном виде

$$GP^TV = W, \tag{8.27}$$

где $V = [v_0, \ldots, v_\theta] \in M_{mk,1+\theta}(\mathbb{K})$, $W = [w_0, \ldots, w_\theta] \in M_{n,1+\theta}(\mathbb{K})$. Заметим, что $\det G = 1$.

Для системы (8.1), (8.2) разрешима задача модального управления тогда и только тогда, когда система (8.27) разрешима относительно V для любого набора $\gamma_{i\mu} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, $\mu = \overline{0, \ell}$. Условие линейной независимости матриц (8.15) является необходимым и достаточным для разрешимости системы (8.27). В частности, система (8.27) имеет решение

$$v_\rho = P(P^TP)^{-1}G^{-1}w_\rho, \quad \rho = \overline{0, \theta}. \tag{8.28}$$

Следовательно, для системы (8.1), (8.2) разрешима задача модального управления посредством регулятора (8.3). Искомые матрицы $Q_0, \ldots, Q_\theta$ находятся из равенств $Q_\rho = (\mathrm{vec}^{-1}v_\rho)^T$, $\rho = \overline{0, \theta}$. $\square$

Теорема 8.2. *Пусть матрицы* A, B, C, A_j, $j=\overline{1,s}$, *системы* (8.1), (8.2) *имеют специальный вид* (8.5), (8.6), (8.7). *Задача назначения произвольного конечного спектра для системы* (8.1), (8.2) *посредством регулятора* (8.3) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы* (8.15) *линейно независимы.*

Доказательство теоремы 8.2 вытекает из доказательства теоремы 8.1 при $\ell=0$, $\gamma_{i0}=\gamma_i$, $i=\overline{1,n}$. □

Следствие 8.1. *Пусть матрицы* A, B, C, A_j, $j=\overline{1,s}$, *системы* (8.1), (8.2) *имеют специальный вид* (8.5), (8.6), (8.7). *Если матрицы* (8.15) *линейно независимы, то система* (8.1), (8.2) *экспоненциально стабилизируема посредством статической обратной связи по выходу* (8.3).

Доказательство теоремы 7.1 повторяет доказательство теоремы 8.1 с

$$h_j=jh,\quad j=\overline{1,s},$$
$$\omega_\mu=\mu h,\quad \mu=\overline{0,\ell}.$$

В этом случае

$$T_1=\{h,2h,\ldots,\ell h\},\quad T_2=\{h,2h,\ldots,sh\},$$
$$S_1=\begin{cases}\{s+1,\ldots,\ell\}, & \ell>s,\\ \varnothing, & \ell\leqslant s,\end{cases}$$
$$S_2=S_3=\{1,\ldots,\min\{\ell,s\}\},$$
$$S_4=\begin{cases}\{\ell+1,\ldots,s\}, & s>\ell,\\ \varnothing, & \ell\leqslant s,\end{cases}$$
$$\theta=\max\{\ell,s\},\quad T=\{h,2h,\ldots,\theta h\},\quad \sigma_\rho=\rho h,\quad \rho=\overline{0,\theta},$$
$$K_1=S_1,\quad K_2=S_2=S_3,\quad K_3=S_4.$$

Доказательство теоремы 7.2 вытекает из доказательства теоремы 7.1 при $\ell=0$, $\gamma_{i0}=\gamma_i$, $i=\overline{1,n}$. □

Следствия 7.1, 8.1 вытекают из теорем 7.2, 8.2 соответственно, если взять, к примеру, числа γ_i, $i=\overline{1,n}$, такие, что $\lambda^n+\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i\lambda^{n-1}=(\lambda+1)^n$.

Пример 8.1. Пусть $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $n=3$, $m=2$, $k=2$, $s=2$, $h_1=1$, $h_2=\sqrt{3}$ и коэффициенты системы (8.1), (8.2) имеют следующий вид:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\3&0&-1\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\1&-1&0\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-2&0\\0&1&0\end{bmatrix},$$
$$B=\begin{bmatrix}0&0\\0&-1\\1&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-1\\0&0\end{bmatrix}.$$

Коэффициенты системы (8.1), (8.2) удовлетворяют условиям теоремы 8.1, то есть имеют специальный вид (8.5), (8.6), (8.7), где $p=2$. Имеем $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=-2$. Построим матрицы (8.15):

$$\begin{gathered}C^*B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\quad C^*AB=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-2\end{bmatrix},\\ C^*A^2B=\begin{bmatrix}-1&-1\\2&1\end{bmatrix}.\end{gathered}\tag{8.29}$$

Построим матрицы

$$G=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&1&-1\\0&-1&2\\1&-2&1\end{bmatrix}.$$

Имеем $\operatorname{rank}P=3=n$, следовательно, матрицы (8.29) линейно независимы. Таким образом, по теореме 8.1 для системы (8.1), (8.2) разрешима задача модального управления посредством регулятора (8.3). Построим такой регулятор. Пусть, к примеру, $\ell=3$, $\omega_0=0$, $\omega_1=1$, $\omega_2=\sqrt{2}$, $\omega_3=1+\sqrt{2}$, и

$$q(\lambda,e^{-\lambda})=\lambda^3+\lambda^2+\lambda^2e^{-\lambda\omega_1}+\lambda^2e^{-\lambda\omega_2}+\lambda e^{-\lambda\omega_1}+\lambda e^{-\lambda\omega_2}+\\+\lambda e^{-\lambda\omega_3}+e^{-\lambda\omega_3}.$$

Имеем

$$T_1=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}=\{1,\sqrt{2},1+\sqrt{2}\},\quad T_2=\{h_1,h_2\}=\{1,\sqrt{3}\};$$

$$\gamma_{10} = 1,\ \gamma_{11} = 1,\ \gamma_{12} = 1,\ \gamma_{13} = 0,\ \gamma_{20} = 0,\ \gamma_{21} = 1,\ \gamma_{22} = 1,$$
$$\gamma_{23} = 1,\ \gamma_{30} = 0,\ \gamma_{31} = 0,\ \gamma_{32} = 0,\ \gamma_{33} = 1.$$

Из доказательства теоремы 8.1 получим

$$S_1 = \{2,3\},\quad S_2 = \{1\},\quad S_3 = \{1\},\quad S_4 = \{2\},$$
$$T = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 1+\sqrt{2}\},\quad \theta = 4,$$
$$\sigma_1 = h_1 = \omega_1 = 1,\quad \sigma_2 = \omega_2 = \sqrt{2},\quad \sigma_3 = h_2 = \sqrt{3},$$
$$\sigma_4 = \omega_3 = 1 + \sqrt{2},$$
$$K_1 = \{2,4\},\quad K_2 = \{1\},\quad K_3 = \{3\}.$$

Вычислим матрицы F_0, F_1, F_2, F_3, получим $F_0 = I$,

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее, вычислим

$$\mathrm{Sp}\,(A_1F_0) = 3,\quad \mathrm{Sp}\,(A_1F_1) = 2,\quad \mathrm{Sp}\,(A_1F_2) = 1,$$
$$\mathrm{Sp}\,(A_2F_0) = -2,\quad \mathrm{Sp}\,(A_2F_1) = 0,\quad \mathrm{Sp}\,(A_2F_2) = 1.$$

Далее находим

$$\begin{aligned}
&w_0 = \mathrm{col}\,(\alpha_1 - \gamma_{10}, \alpha_2 - \gamma_{20}, \alpha_3 - \gamma_{30}) = \mathrm{col}\,(0, 1, -2),\\
&w_1 = \mathrm{col}\,(-\gamma_{11} - \mathrm{Sp}\,(A_1F_0), -\gamma_{21} - \mathrm{Sp}\,(A_1F_1),\\
&\qquad -\gamma_{31} - \mathrm{Sp}\,(A_1F_2)) = \mathrm{col}\,(-4, -3, -1),\\
&w_2 = \mathrm{col}\,(-\gamma_{12}, -\gamma_{22}, -\gamma_{32}) = \mathrm{col}\,(-1, -1, 0),\\
&w_3 = \mathrm{col}\,(-\mathrm{Sp}\,(A_2F_0), -\mathrm{Sp}\,(A_2F_1), -\mathrm{Sp}\,(A_2F_2)) = \mathrm{col}\,(2, 0, -1),\\
&w_4 = \mathrm{col}\,(-\gamma_{13}, -\gamma_{23}, -\gamma_{33}) = \mathrm{col}\,(0, -1, -1).
\end{aligned}$$

Вычисляя v_j по формулам $v_j = P(P^TP)^{-1}G^{-1}w_j$, $j = \overline{0,4}$, получаем

$$\begin{aligned}
v_0 &= \mathrm{col}\,(1, 0, -1, 0),\\
v_1 &= \mathrm{col}\,(3, -5, 2, -4),\\
v_2 &= \mathrm{col}\,(2/3, -4/3, 2/3, -1),\\
v_3 &= \mathrm{col}\,(0, 1, -1, 2),\\
v_4 &= \mathrm{col}\,(1, -1, 0, 0).
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; Q_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}, \; Q_2 = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ -4/3 & -1 \end{bmatrix}, \tag{8.30}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \; Q_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8.31}$$

Система (8.1), (8.2) замкнутая управлением (8.3) с матрицами (8.30), (8.31) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-\sigma_1) + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} x(t-\sigma_2) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-\sigma_4). \end{aligned} \tag{8.32}$$

Вычисляя характеристическую функцию $\varphi(\lambda, e^{-\lambda})$ замкнутой системы (8.32), получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, e^{-\lambda}) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda^2 e^{-\lambda\omega_2} + \lambda^2 e^{-\lambda\omega_1} + \lambda e^{-\lambda(\omega_1+\omega_2)} + \\ + \lambda e^{-\lambda\omega_2} + \lambda e^{-\lambda\omega_1} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} = \\ = (\lambda+1)(\lambda + e^{-\lambda\omega_1})(\lambda + e^{-\lambda\omega_2}). \end{aligned}$$

В частности, система (8.32) экспоненциально устойчива, так как $\omega_1, \omega_2 < \dfrac{\pi}{2}$ (см., к примеру, [4]).

§ 9. Назначение произвольного конечного спектра в линейных системах с несоизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями

Для линейной стационарной дифференциальной системы с несколькими несоизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи назначения произвольного конечного спектра посредством статической обратной *связи по выходу с несоизмеримыми запаздываниями* [29].

Рассмотрим линейную стационарную дифференциальную систему с несколькими сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии

$$\dot{x}(t) = \sum_{\nu=0}^{\ell} A_\nu x(t-h_\nu) + \\ + \sum_{\nu=1}^{\ell} \int_{-h_\nu}^{-h_{\nu-1}} S_\nu(\tau) x(t+\tau)\, d\tau + Bu(t), \quad t>0, \tag{9.1}$$

$$y(t) = C^* x(t), \tag{9.2}$$

с начальным условием $x(\tau) = \phi(\tau)$, $\tau \in [-h,0]$; здесь $0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_\ell =: h$ — постоянные запаздывания, $\phi : [-h,0] \to \mathbb{K}^n$ — непрерывная функция, $A_\nu \in M_n(\mathbb{K})$ ($\nu = \overline{0,\ell}$), $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,k}(\mathbb{K})$, $S_\nu : [-h_\nu, -h_{\nu-1}] \to M_n(\mathbb{K})$ ($\nu = \overline{1,\ell}$) — интегрируемые матричные функции, $u \in \mathbb{K}^m$ — вектор управляющего воздействия, $y \in \mathbb{K}^k$ — вектор выходных величин. Обозначим $S\colon [-h,0] \to M_n(\mathbb{K})$:

$$S(\tau) := \begin{cases} S_1(\tau), & \tau \in [-h_1, 0], \\ S_2(\tau), & \tau \in [-h_2, -h_1), \\ \ldots\ldots, & \\ S_\ell(\tau), & \tau \in [-h_\ell, -h_{\ell-1}). \end{cases} \tag{9.3}$$

Тогда система (9.1), (9.2) запишется в виде

$$\dot{x}(t) = \sum_{\nu=0}^{\ell} A_\nu x(t-h_\nu) + \int_{-h}^{0} S(\tau) x(t+\tau)\, d\tau + Bu(t), \tag{9.4}$$

$$y(t) = C^* x(t). \tag{9.5}$$

Пусть управление в системе (9.4), (9.5) строится в виде линейной статической обратной связи по выходу с сосредоточенными и распределенными запаздываниями

$$u(t) = \sum_{\nu=0}^{\ell} Q_\nu y(t-h_\nu) + \int_{-h}^{0} R(\tau) y(t+\tau)\, d\tau, \qquad (9.6)$$

$y(\tau) = 0$, $\tau < -h$. Здесь $Q_\nu = \{q^\nu_{\alpha\beta}\} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ ($\nu = \overline{0,\ell}$) — постоянные матрицы, $R(\tau) = \{r_{\alpha\beta}(\tau)\} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $r_{\alpha\beta}\colon [-h,0] \to \mathbb{K}$ — интегрируемые функции, $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$. Замкнутая система (9.4), (9.5), (9.6) принимает вид

$$\dot x(t) = \sum_{\nu=0}^{\ell} (A_\nu + BQ_\nu C^*) x(t-h_\nu) + \\ + \int_{-h}^{0} (S(\tau) + BR(\tau)C^*) x(t+\tau)\, d\tau. \qquad (9.7)$$

Обозначим через

$$\varphi(\lambda) = \det\Big[\lambda I - \Big(\sum_{\nu=0}^{\ell} (A_\nu + BQ_\nu C^*) e^{-\lambda h_\nu} + \\ + \int_{-h}^{0} (S(\tau) + BR(\tau)C^*) e^{\lambda\tau} d\tau\Big)\Big]$$

характеристическую функцию замкнутой системы (9.7). Через $\varphi_0(\lambda)$ обозначим характеристическую функцию свободной системы

$$\dot x(t) = \sum_{\nu=0}^{\ell} A_\nu x(t-h_\nu) + \int_{-h}^{0} S(\tau) x(t+\tau)\, d\tau,$$

т. е. $\varphi_0(\lambda) = \det\Big[\lambda I - \Big(\sum_{\nu=0}^{\ell} A_\nu e^{-\lambda h_\nu} + \int_{-h}^{0} S(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau\Big)\Big]$.

Введем обозначения:

$$\Omega_1 = \Big\{\omega : \omega = \sum_{i=1}^{1} h_{\nu_i},\ \nu_i \in \{0,1,\ldots,\ell\}\Big\} = \{h_0, h_1, \ldots, h_\ell\} =:$$

$$=:\{\omega_0^1, \omega_1^1, \ldots, \omega_{\theta_1}^1\},$$

$$\Omega_2 = \Big\{\omega : \omega = \sum_{i=1}^{2} h_{\nu_i},\ \nu_i \in \{0, 1, \ldots, \ell\}\Big\} =: \{\omega_0^2, \omega_1^2, \ldots, \omega_{\theta_2}^2\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\Omega_n = \Big\{\omega : \omega = \sum_{i=1}^{n} h_{\nu_i},\ \nu_i \in \{0, 1, \ldots, \ell\}\Big\} =: \{\omega_0^n, \omega_1^n, \ldots, \omega_{\theta_n}^n\}.$$

Здесь i в записи ω_j^i означает индекс, а не степень. Считаем, что элементы ω_j^i множества Ω_i упорядочены по возрастанию, т. е. $\omega_j^i < \omega_{j+1}^i$. Имеем $\omega_0^1 = \ldots = \omega_0^n = 0$. Полагаем $\theta_0 := 0$, $\omega_0^0 := 0$.

Характеристическое уравнение $\varphi(\lambda) = 0$ замкнутой системы (9.7) имеет вид

$$\lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \left(\sum_{j=0}^{\theta_i} \delta_{i0j} \exp(-\lambda \omega_j^i) + \right.$$
$$+ \sum_{\upsilon=1}^{i} \sum_{j=0}^{\theta_{i-\upsilon}} \int_{-h}^{0} \ldots \int_{-h}^{0} \delta_{i\upsilon j}(\tau_1, \ldots, \tau_\upsilon) \cdot$$
$$\left. \cdot \exp\left(\lambda \Big(\sum_{\mu=1}^{\upsilon} \tau_\mu - \omega_j^{i-\upsilon} \Big) \right) d\tau_1 \ldots d\tau_\upsilon \right) = 0. \quad (9.8)$$

Здесь числа δ_{i0j}, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, \theta_i}$, и функции $\delta_{i\upsilon j}(\tau_1, \ldots, \tau_\upsilon)$, $\tau_\mu \in [-h, 0]$, $i = \overline{1, n}$, $\upsilon = \overline{1, i}$, $j = \overline{0, \theta_{i-\upsilon}}$, $\mu = \overline{1, \upsilon}$, зависят от коэффициентов A_ν ($\nu = \overline{1, \ell}$), B, C, $S(\tau)$ системы (9.4), (9.5) и от коэффициентов Q_ν ($\nu = \overline{1, \ell}$), $R(\tau)$ обратной связи (9.6). Если в уравнении (9.8) числа $\delta_{i0j} = 0$ для всех $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, \theta_i}$, и функции $\delta_{i\upsilon j}(\tau_1, \ldots, \tau_\upsilon) \equiv 0$, $\tau_\mu \in [-h, 0]$, $i = \overline{1, n}$, $\upsilon = \overline{1, i}$, $j = \overline{0, \theta_{i-\upsilon}}$, $\mu = \overline{1, \upsilon}$, то характеристическая функция обращается в полином $\lambda^n + \delta_{100}\lambda^{n-1} + \ldots + \delta_{n00}$, и характеристическое уравнение имеет конечное число корней, то есть спектр σ является конечным множеством.

Определение 9.1. Для системы (9.4), (9.5) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посред-*

ством регулятора (9.6), если для любых чисел $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, найдется регулятор вида (9.6), при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (9.7) имеет вид

$$\lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n = 0.$$

Пусть коэффициенты A_0, B, C системы (9.4), (9.5) имеют следующий специальный вид: матрица A_0 имеет форму Хессенберга; первые $p-1$ строк матрицы B и последние $n-p$ строк матрицы C равны нулю, то есть

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots} & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{9.9}$$
$$a_{i,i+1} \neq 0, \qquad i = \overline{1, n-1};$$

$$B = \begin{bmatrix} O_1 \\ L \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} N \\ O_2 \end{bmatrix},$$
$$O_1 = 0 \in M_{p-1,m}(\mathbb{K}), \quad L \in M_{n-p+1,m}(\mathbb{K}), \tag{9.10}$$
$$N \in M_{p,k}(\mathbb{K}), \quad O_2 = 0 \in M_{n-p,k}(\mathbb{K}),$$
$$p \in \{1, \ldots, n\}.$$

Будем предполагать, что матрицы A_ν ($\nu = \overline{1,\ell}$), $S(\tau)$ также имеют специальный вид: первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц A_ν, $S(\tau)$ равны нулю, то есть

$$A_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{A}_\nu & 0 \end{bmatrix}, \quad S(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{S}_\nu(\tau) & 0 \end{bmatrix},$$
$$\widehat{A}_\nu \in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}), \quad \widehat{S}_\nu(\tau) \in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}), \quad \nu = \overline{1,\ell}, \tag{9.11}$$
$$p \in \{1, \ldots, n\}.$$

Здесь число p то же самое, что и в (9.10).

Пусть $\chi(A_0; \lambda) =: \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n$. Положим $\alpha_0 := 1$. Построим по матрице A_0 матрицы

$$F_s = \alpha_0 A_0^s + \alpha_1 A_0^{s-1} + \ldots + \alpha_s I, \quad s = \overline{0, n-1}. \tag{9.12}$$

Теорема 9.1. *Пусть коэффициенты системы* (9.4), (9.5) *имеют специальный вид* (9.9), (9.10), (9.11). *Тогда равносильны следующие утверждения.*

1. *Матрицы*

$$C^*B, \quad C^*A_0B, \quad \ldots, \quad C^*A_0^{n-1}B \tag{9.13}$$

линейно независимы.

2. *Задача назначения произвольного конечного спектра системы* (9.4), (9.5) *посредством регулятора* (9.6) *разрешима.*

Доказательство. Предположим, что матрицы A_ν, B, C, $S(\tau)$, $\nu = \overline{0,\ell}$, системы (9.4), (9.5) имеют специальный вид (9.9), (9.10), (9.11). Рассмотрим задачу назначения произвольного конечного спектра для системы (9.4), (9.5) посредством регулятора (9.6). Пусть задан многочлен

$$q(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n, \tag{9.14}$$

$\gamma_i \in \mathbb{K}$. Требуется построить Q_ρ, $R(\tau) \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\ell}$, так, чтобы характеристическая функция

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \Bigg(\sum_{j=0}^{\theta_i} \delta_{i0j} \exp(-\lambda\omega_j^i) +{} \\ + \sum_{\upsilon=1}^{i} \sum_{j=0}^{\theta_{i-\upsilon}} \int_{-h}^{0} \ldots \int_{-h}^{0} \delta_{i\upsilon j}(\tau_1, \ldots, \tau_\upsilon) \cdot {} \\ \cdot \exp\bigg(\lambda \Big(\sum_{\mu=1}^{\upsilon} \tau_\mu - \omega_j^{i-\upsilon} \Big) \bigg) \, d\tau_1 \ldots d\tau_\upsilon \Bigg) \end{aligned} \tag{9.15}$$

замкнутой системы (9.7) удовлетворяла равенству

$$\varphi(\lambda) = q(\lambda). \tag{9.16}$$

Из (9.14) и (9.15) следует, что равенство (9.16) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\gamma_i = \delta_{i00}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{9.17}$$

$$\delta_{i0j} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,\theta_i}, \tag{9.18}$$

$$\begin{gathered}\delta_{i\upsilon j}(\tau_1,\ldots,\tau_\upsilon)=0 \quad \text{п.в. } \tau_\mu\in[-h,0],\\ i=\overline{1,n},\ \upsilon=\overline{1,i},\ j=\overline{0,\theta_{i-\upsilon}},\ \mu=\overline{1,\upsilon}.\end{gathered} \tag{9.19}$$

Обозначим

$$D=BQ_0C^*+\sum_{\rho=1}^{\ell}e^{-\lambda h_\rho}(A_\rho+BQ_\rho C^*)+ \\ +\int_{-h}^{0}\big(S(\tau)+BR(\tau)C^*\big)e^{\lambda\tau}d\tau. \tag{9.20}$$

Имеем

$$\varphi(\lambda)=\det\big(\lambda I-(A_0+D)\big)=\chi(A_0+D;\lambda). \tag{9.21}$$

Из условий (9.10), (9.11) следует, что матрица (9.20) имеет вид (8.9). Учитывая равенство (9.21), условие (9.9) и применяя лемму 8.1, получаем, что

$$\varphi(\lambda)=\lambda^n+\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i\lambda^{n-i},$$

где

$$\varkappa_i=\alpha_i-\mathrm{Sp}\,(BQ_0C^*F_{i-1})-\sum_{\rho=1}^{\ell}e^{-\lambda h_\rho}\mathrm{Sp}\Big((A_\rho+BQ_\rho C^*)F_{i-1}\Big) \\ -\int_{-h}^{0}\mathrm{Sp}\Big(\big(S(\tau)+BR(\tau)C^*\big)F_{i-1}\Big)e^{\lambda\tau}\,d\tau.$$

Таким образом, равенства (9.17), (9.18), (9.19) выполнены тогда и только тогда, когда

$$\gamma_i=\alpha_i-\mathrm{Sp}\,(BQ_0C^*F_{i-1}),\quad i=\overline{1,n}, \tag{9.22}$$

$$\mathrm{Sp}\Big((A_\rho+BQ_\rho C^*)F_{i-1}\Big)=0,\quad i=\overline{1,n},\ \rho=\overline{1,\ell}, \tag{9.23}$$

$$\mathrm{Sp}\Big(\big(S(\tau)+BR(\tau)C^*\big)F_{i-1}\Big)=0\quad \text{п.в. } \tau\in[-h,0], \\ i=\overline{1,n}. \tag{9.24}$$

Имеем для всех $\rho = \overline{0,\ell}$, $i = \overline{1,n}$

$$\operatorname{Sp}(BQ_\rho C^* F_{i-1}) = \operatorname{Sp}(Q_\rho C^* F_{i-1} B) = \\ = \sum_{r=0}^{i-1} \alpha_{i-1-r} \operatorname{Sp}(Q_\rho C^* A_0^r B),$$

$$\operatorname{Sp}\big(BR(\tau)C^* F_{i-1}\big) = \operatorname{Sp}\big(R(\tau)C^* F_{i-1} B\big) = \\ = \sum_{r=0}^{i-1} \alpha_{i-1-r} \operatorname{Sp}(R(\tau) C^* A_0^r B).$$

Обозначим $R\colon [-h,0] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$:

$$R(\tau) := \begin{cases} R_1(\tau), & \tau \in [-h_1, 0], \\ R_2(\tau), & \tau \in [-h_2, -h_1), \\ \ldots\ldots, & \\ R_\ell(\tau), & \tau \in [-h_\ell, -h_{\ell-1}). \end{cases}$$

Тогда равенства (9.22), (9.23), (9.24) равносильны системам линейных уравнений

$$\gamma_i = \alpha_i - \sum_{r=0}^{i-1} \alpha_{i-1-r} \operatorname{Sp}(Q_0 C^* A_0^r B), \quad i = \overline{1,n}, \tag{9.25}$$

$$\operatorname{Sp}(A_\rho F_{i-1}) = -\sum_{r=0}^{i-1} \alpha_{i-1-r} \operatorname{Sp}(Q_\rho C^* A_0^r B), \\ i = \overline{1,n}, \quad \rho = \overline{1,\ell}, \tag{9.26}$$

$$\operatorname{Sp}\big(S_\eta(\tau) F_{i-1}\big) = -\sum_{r=0}^{i-1} \alpha_{i-1-r} \operatorname{Sp}\big(R_\eta(\tau) C^* A_0^r B\big) \\ \text{п.в. } \tau \in [-h_\eta, -h_{\eta-1}], \quad i = \overline{1,n}, \quad \eta = \overline{1,\ell}. \tag{9.27}$$

относительно элементов матриц Q_ρ, $\rho = \overline{0,\ell}$, и матриц $R_\eta(\tau)$, $\eta = \overline{1,\ell}$. Перепишем системы (9.25), (9.26), (9.27) в векторном виде. Для этого воспользуемся равенством $\operatorname{Sp}(XY) = (\operatorname{vec} Y)^T \cdot (\operatorname{vec} X^T)$. Применим это равенство к матрицам

$Y = C^*A_0^r B$, $r = \overline{0, n-1}$, и к матрицам $X = Q_\rho$, $\rho = \overline{0,\ell}$, в (9.25), (9.26), и $X = R_\eta(\tau)$, $\eta = \overline{1,\ell}$, в (9.27). Построим матрицы

$$P := [\operatorname{vec}(C^*B), \operatorname{vec}(C^*A_0B), \dots, \operatorname{vec}(C^*A_0^{n-1}B)] \in \\ \in M_{mk,n}(\mathbb{K}), \tag{9.28}$$

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.29}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} v_\rho &:= \operatorname{vec}(Q_\rho^T) \in \mathbb{K}^{mk}, \quad \rho = \overline{0,\ell}, \\ w_0 &:= \operatorname{col}(\alpha_1 - \gamma_1, \dots, a_n - \gamma_n) \in \mathbb{K}^n, \\ w_\rho &:= \operatorname{col}(-\operatorname{Sp}(A_\rho F_0), \dots, -\operatorname{Sp}(A_\rho F_{n-1})) \in \mathbb{K}^n, \quad \rho = \overline{1,\ell}, \\ f_\eta(\tau) &:= \operatorname{vec}\big(R_\eta(\tau)^T\big) \in \mathbb{K}^{mk}, \quad \eta = \overline{1,\ell}, \\ g_\eta(\tau) &:= \operatorname{col}\Big(-\operatorname{Sp}\big(S_\eta(\tau)F_0\big), \dots, -\operatorname{Sp}\big(S_\eta(\tau)F_{n-1}\big)\Big) \in \mathbb{K}^n, \\ &\eta = \overline{1,\ell}. \end{aligned}$$

Тогда системы (9.25), (9.26), (9.27), можно записать в векторном виде

$$GP^T v_\rho = w_\rho, \quad \rho = \overline{0,\ell}, \tag{9.30}$$

$$GP^T f_\eta(\tau) = g_\eta(\tau) \text{ п.в. } \tau \in [-h_\eta, -h_{\eta-1}], \quad \eta = \overline{1,\ell}. \tag{9.31}$$

Задача назначения произвольного конечного спектра системы (9.4), (9.5) посредством регулятора (9.6) разрешима тогда и только тогда, когда система (9.30), (9.31) разрешима относительно v_ρ, $\rho = \overline{0,\ell}$, и $f_\eta(\tau)$, $\eta = \overline{1,\ell}$, для любого набора $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Условие линейной независимости матриц (9.13) является необходимым и достаточным для разрешимости системы (9.30), (9.31). В частности, система (9.30), (9.31) имеет решение

$$v_\rho = P(P^TP)^{-1}G^{-1}w_\rho, \qquad \rho = \overline{0,\ell}, \tag{9.32}$$

$$f_\eta(\tau) = P(P^T P)^{-1} G^{-1} g_\eta(\tau), \quad \eta = \overline{1, \ell}. \tag{9.33}$$

Искомые матрицы находятся из равенств $Q_\rho = (\mathrm{vec}^{-1} v_\rho)^T$, $R_\eta(\tau) = (\mathrm{vec}^{-1} f_\eta)^T$, $\rho = \overline{0, \ell}$, $\eta = \overline{1, \ell}$. □

Следствие 9.1. *Теорема* 9.1 *справедлива для системы* (9.1), (9.2) *с несколькими соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями* ($h_\nu = \nu h\,, \nu = \overline{0, \ell}$).

Доказательство следствия 9.1 вытекает из доказательства теоремы 9.1 при $h_\nu = \nu h$, $\nu = \overline{0, \ell}$.

Следствие 9.2. *Пусть коэффициенты системы* (9.4), (9.5) *имеют специальный вид* (9.9), (9.10), (9.11), *и матрицы* (9.13) *линейно независимы. Тогда система* (9.4), (9.5) *стабилизируема посредством регулятора* (9.6).

Пример 9.1. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$, $m = 2$, $k = 2$, $\ell = 1$, $h_1 = h$ и коэффициенты системы (9.4), (9.5) имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{9.34}$$

$$S(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\cos\tau & -2\sin\tau & 0 \\ \sin\tau & \sin 2\tau & 0 \end{bmatrix}. \tag{9.35}$$

Характеристическая функция $\varphi_0(\lambda)$ свободной системы имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_0(\lambda) = \lambda^3 + \left(2 - e^{-\lambda h} + 2\int_{-h}^{0} \sin\tau e^{\lambda\tau} d\tau\right)\lambda^2 + \\ + \left(1 + 2e^{-\lambda h} - \int_{-h}^{0} (2\cos\tau - 2\sin\tau + \sin 2\tau) e^{\lambda\tau} d\tau\right)\lambda + e^{-\lambda h} - \\ - \int_{-h}^{0} (2\cos\tau + \sin\tau) e^{\lambda\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Характеристическая функция замкнутой системы (9.7) с матрицами (9.34), (9.35) имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 + \sum_{i=1}^{3} \lambda^{3-i} \Bigg(\sum_{j=0}^{i} \delta_{i0j} \exp(-\lambda j h) + \\ + \sum_{\upsilon=1}^{i} \sum_{j=0}^{i-\upsilon} \int_{-h}^{0} \ldots \int_{-h}^{0} \delta_{i\upsilon j}(\tau_1, \ldots, \tau_\upsilon) \cdot \\ \cdot \exp\left(\lambda \Big(\sum_{\mu=1}^{\upsilon} \tau_\mu - jh \Big) \right) d\tau_1 \ldots d\tau_\upsilon \Bigg),$$

где

$$\delta_{100} = q_{11}^0 - q_{12}^0 - q_{21}^0 + q_{22}^0 + 2,\ \delta_{101} = q_{11}^1 - q_{12}^1 - q_{21}^1 + q_{22}^1 - 1,$$
$$\delta_{110}(\tau_1) = 2\sin\tau_1 + r_{11}(\tau_1) - r_{12}(\tau_1) - r_{21}(\tau_1) + r_{22}(\tau_1),$$
$$\delta_{200} = 2q_{11}^0 - q_{12}^0 - q_{21}^0 + 1, \quad \delta_{201} = 2q_{11}^1 - q_{12}^1 - q_{21}^1 + 2,$$
$$\delta_{202} = 0, \quad \delta_{210}(\tau_1) = -2\cos\tau_1 + 2\sin\tau_1 - \sin 2\tau_1 + 2r_{11}(\tau_1) - \\ - r_{12}(\tau_1) - r_{21}(\tau_1), \quad \delta_{211}(\tau_1) = 0, \quad \delta_{220}(\tau_1, \tau_2) = 0,$$
$$\delta_{300} = q_{11}^0, \quad \delta_{301} = q_{11}^1 + 1, \quad \delta_{302} = 0, \quad \delta_{303} = 0,$$
$$\delta_{310}(\tau_1) = -2\cos\tau_1 - \sin\tau_1 + r_{11}(\tau_1),$$
$$\delta_{311}(\tau_1) = 0, \quad \delta_{312}(\tau_1) = 0,$$
$$\delta_{320}(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad \delta_{321}(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad \delta_{330}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0.$$

Коэффициенты системы (9.4), (9.5) удовлетворяют условиям теоремы 9.1, то есть имеют специальный вид (9.9), (9.10), (9.11), где $p = 2$. Имеем $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$. Построим матрицы (9.13):

$$C^*B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C^*A_0B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \\ C^*A_0^2B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}. \tag{9.36}$$

Построим матрицы (9.28), (9.29):

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.37}$$

Имеем $\operatorname{rank} P = 3 = n$, следовательно, матрицы (9.36) линейно независимы. Таким образом, по теореме 9.1 для системы (9.4), (9.5) разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора (9.6). Построим такой регулятор. Пусть к примеру $q(\lambda) = (\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$. Тогда $\gamma_1 = 3$, $\gamma_2 = 3$, $\gamma_3 = 1$. Вычислим матрицы F_0, F_1, F_2 по формуле (9.12), получим $F_0 = I$,

$$F_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.38}$$

Далее находим

$$\begin{gathered} w_0 = \operatorname{col}(\alpha_1 - \gamma_1, \alpha_2 - \gamma_2, \alpha_3 - \gamma_3) = \operatorname{col}(-1, -2, -1), \\ w_1 = \operatorname{col}\big(-\operatorname{Sp}(A_1F_0), -\operatorname{Sp}(A_1F_1), -\operatorname{Sp}(A_1F_2)\big) = \operatorname{col}(-1, 2, 1), \\ g_1(\tau) = \operatorname{col}\big(-\operatorname{Sp}(S(\tau)F_0), -\operatorname{Sp}(S(\tau)F_1), -\operatorname{Sp}(S(\tau)F_2)\big) = \\ = \operatorname{col}(2\sin\tau, -2\cos\tau + 2\sin\tau - \sin 2\tau, -2\cos\tau - \sin\tau). \end{gathered}$$

Вычисляя v_0, v_1, $f_1(\tau)$ по формулам (9.32), (9.33), получим

$$v_0 = \operatorname{col}(1, 0, 0, 0), \qquad v_1 = \operatorname{col}(-1, 0, 0, 2),$$

$$\begin{gathered} f_1(\tau) = \operatorname{col}(2\cos\tau + \sin\tau, 2\sin\tau + \cos\tau - \sin\tau\cos\tau, \\ 2\sin\tau + \cos\tau - \sin\tau\cos\tau, \sin\tau - \sin 2\tau). \end{gathered}$$

Отсюда находим

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \tag{9.39}$$

$$R(\tau) = \begin{bmatrix} 2\mathcal{C} + \mathcal{S} & 2\mathcal{S} + \mathcal{C} - \mathcal{S}\mathcal{C} \\ 2\mathcal{S} + \mathcal{C} - \mathcal{S}\mathcal{C} & \mathcal{S} - \sin 2\tau \end{bmatrix}, \tag{9.40}$$

где $\mathcal{C} = \cos\tau$, $\mathcal{S} = \sin\tau$. Система (9.4), (9.5), замкнутая управлением (9.6) с матрицами (9.39), (9.40) принимает вид

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-h) +$$
$$\int_{-h}^{0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{C}+\mathcal{S}-\mathcal{S}\mathcal{C} & 0 & 0 \\ -\mathcal{S}-\mathcal{C}+\mathcal{S}\mathcal{C} & -\mathcal{S}-\mathcal{C}+\mathcal{S}\mathcal{C} & 0 \end{bmatrix} x(t+\tau)\,d\tau, \quad (9.41)$$

где $\mathcal{C} = \cos\tau$, $\mathcal{S} = \sin\tau$. Вычисляя характеристическую функцию $\varphi(\lambda)$ замкнутой системы (9.41) получаем, что $\varphi(\lambda) = (\lambda + 1)^3$. В частности, система (9.41) экспоненциально устойчива. □

Пример 9.2. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$, $m = 2$, $k = 2$, $p = 2$, $\ell = 2$, $h_0 = 0$, $h_1 = 1$, $h_2 = 4$, и коэффициенты системы (9.4), (9.5) имеют вид (9.34), (9.3) и

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9.42)$$

$$S_1(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos\tau + 2\sin\tau & 2\sin 2\tau & 0 \\ 0 & \cos\tau & 0 \end{bmatrix},$$
$$S_2(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2\sin\tau & 2\cos\tau & 0 \\ \cos\tau & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.43)$$

Построим множества Ω_i, $i = \overline{1,3}$. Имеем $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 5$, $\theta_3 = 9$,

$\Omega_1 = \{h_0, h_1, h_2\} = \{0, 1, 4\} =: \{\omega_0^1, \omega_1^1, \omega_2^1\}$,

$\Omega_2 = \{2h_0, h_0 + h_1, 2h_1, h_0 + h_2, h_1 + h_2, 2h_2\} = \{0, 1, 2, 4, 5, 8\} =: \{\omega_0^2, \omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \omega_4^2, \omega_5^2\}$,

$\Omega_3 = \{3h_0, 2h_0 + h_1, h_0 + 2h_1, 3h_1, 2h_0 + h_2, h_0 + h_1 + h_2, 2h_1 + h_2, h_0 + 2h_2, h_1 + 2h_2, 3h_2\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12\} =: \{\omega_0^3, \omega_1^3, \omega_2^3, \omega_3^3, \omega_4^3, \omega_5^3, \omega_6^3, \omega_7^3, \omega_8^3, \omega_9^3\}$.

Характеристическая функция $\varphi_0(\lambda)$ свободной системы имеет вид

$$\varphi_0(\lambda) = \lambda^3 + \left(2 - e^{-\lambda} - e^{-4\lambda} - 2\int_{-1}^{0} \sin 2\tau e^{\lambda\tau} d\tau - \right.$$
$$\left. - 2\int_{-4}^{-1} \cos\tau e^{\lambda\tau} d\tau\right)\lambda^2 + \left(1 + 2e^{-\lambda} - \right.$$
$$\left. -2\int_{-1}^{0}(\sin 2\tau+\cos\tau+\sin\tau)e^{\lambda\tau}d\tau+2\int_{-4}^{-1}(\sin\tau-\cos\tau)e^{\lambda\tau}d\tau\right)\lambda+$$
$$+ e^{-\lambda} - e^{-4\lambda} - \int_{-1}^{0}(\cos\tau + 2\sin\tau)e^{\lambda\tau}d\tau +$$
$$+ \int_{-4}^{-1}(2\sin\tau - \cos\tau)e^{\lambda\tau}d\tau.$$

Характеристическая функция замкнутой системы (9.7) с матрицами (9.34), (9.3), (9.42), (9.43) имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 + \sum_{i=1}^{3} \lambda^{3-i}\left(\sum_{j=0}^{\theta_i} \delta_{i0j} \exp(-\lambda\omega_j^i) + \right.$$
$$+ \sum_{\upsilon=1}^{i}\sum_{j=0}^{\theta_{i-\upsilon}} \int_{-h}^{0}\ldots\int_{-h}^{0} \delta_{i\upsilon j}(\tau_1,\ldots,\tau_\upsilon)\cdot$$
$$\left.\cdot \exp\left(\lambda\Big(\sum_{\mu=1}^{\upsilon}\tau_\mu - \omega_j^{i-\upsilon}\Big)\right) d\tau_1\ldots d\tau_\upsilon\right),$$

где $h = h_2 = 4$,

$$\delta_{100} = q_{11}^0 - q_{12}^0 - q_{21}^0 + q_{22}^0 + 2,$$
$$\delta_{101} = q_{11}^1 - q_{12}^1 - q_{21}^1 + q_{22}^1 - 1,$$
$$\delta_{102} = q_{11}^2 - q_{12}^2 - q_{21}^2 + q_{22}^2 - 1,$$
$$\delta_{110}(\tau_1) = \begin{cases} \delta_{110}^1(\tau_1), & \tau_1 \in [-1, 0], \\ \delta_{110}^2(\tau_1), & \tau_1 \in [-4, -1), \end{cases}$$

где $\delta_{110}^1(\tau_1) = -2\sin 2\tau_1 + r_{11}^1(\tau_1) - r_{12}^1(\tau_1) - r_{21}^1(\tau_1) + r_{22}^1(\tau_1)$, $\delta_{110}^2(\tau_1) = -2\cos\tau_1 + r_{11}^2(\tau_1) - r_{12}^2(\tau_1) - r_{21}^2(\tau_1) + r_{22}^2(\tau_1)$,

$$\delta_{200} = 2q_{11}^0 - q_{12}^0 - q_{21}^0 + 1, \quad \delta_{201} = 2q_{11}^1 - q_{12}^1 - q_{21}^1 + 2,$$

$$\delta_{202}=0,\quad \delta_{203}=2q_{11}^2-q_{12}^2-q_{21}^2,\quad \delta_{204}=0,\quad \delta_{205}=0,$$
$$\delta_{210}(\tau_1)=\begin{cases}\delta_{210}^1(\tau_1), & \tau_1\in[-1,0],\\ \delta_{210}^2(\tau_1), & \tau_1\in[-4,-1),\end{cases}$$

где $\delta_{210}^1(\tau_1)=-2\cos\tau_1-2\sin 2\tau_1-2\sin\tau_1+2r_{11}^1(\tau_1)-r_{12}^1(\tau_1)-$ $-r_{21}^1(\tau_1)$, $\delta_{210}^2(\tau_1)=2\sin\tau_1-2\cos\tau_1+2r_{11}^2(\tau_1)-r_{12}^2(\tau_1)-r_{21}^2(\tau_1)$.

$$\delta_{211}(\tau_1)=0,\quad \delta_{212}(\tau_1)=0,\quad \delta_{220}(\tau_1,\tau_2)=0,\quad \delta_{300}=q_{11}^0,$$
$$\delta_{301}=q_{11}^1+1,\quad \delta_{302}=0,$$
$$\delta_{303}=0,\quad \delta_{304}=q_{11}^2-1,\quad \delta_{305}=0,\quad \delta_{306}=0,$$
$$\delta_{307}=0,\quad \delta_{308}=0,\quad \delta_{309}=0$$
$$\delta_{310}(\tau_1)=\begin{cases}-\cos\tau_1-2\sin\tau_1+r_{11}^0(\tau_1), & \tau_1\in[-1,0],\\ 2\sin\tau_1-\cos\tau_1+r_{11}^1(\tau_1), & \tau_1\in[-4,-1),\end{cases}$$
$$\delta_{311}(\tau_1)=0,\quad \delta_{312}(\tau_1)=0,\quad \delta_{313}(\tau_1)=0,\quad \delta_{314}(\tau_1)=0,$$
$$\delta_{315}(\tau_1)=0,\quad \delta_{320}(\tau_1,\tau_2)=0,$$
$$\delta_{321}(\tau_1,\tau_2)=0,\quad \delta_{322}(\tau_1,\tau_2)=0,$$
$$\delta_{330}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)=0.$$

Коэффициенты системы удовлетворяют условиям теоремы 9.1, то есть имеют специальный вид (9.9), (9.10), (9.11), где $p=2$. Имеем $\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=0$. Матрицы C^*B, C^*A_0B, $C^*A_0^2B$, P, G имеют вид (9.36), (9.37). Имеем $\operatorname{rank}P=$ $=3=n$, следовательно, матрицы (9.36) линейно независимы. Таким образом, по теореме 9.1 для системы (9.4), (9.5) разрешима задача назначения конечного спектра посредством регулятора (9.6). Построим такой регулятор. Пусть, к примеру, $q(\lambda)=(\lambda+1)^3=\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1$. Тогда $\gamma_1=3$, $\gamma_2=3$, $\gamma_3=1$. Матрицы F_0, F_1, F_2 имеют вид (9.38).

Далее находим

$$w_0=\operatorname{col}(\alpha_1-\gamma_1,\alpha_2-\gamma_2,\alpha_3-\gamma_3)=\operatorname{col}(-1,-2,-1),$$
$$w_1=\operatorname{col}\big(-\operatorname{Sp}(A_1F_0),-\operatorname{Sp}(A_1F_1),-\operatorname{Sp}(A_1F_2)\big)=\operatorname{col}(-1,2,1),$$
$$w_2=\operatorname{col}\big(-\operatorname{Sp}(A_2F_0),-\operatorname{Sp}(A_2F_1),-\operatorname{Sp}(A_2F_2)\big)=$$
$$=\operatorname{col}(-1,0,-1),$$
$$g_1(\tau)=\operatorname{col}\big(-\operatorname{Sp}(S_1(\tau)F_0),-\operatorname{Sp}(S_1(\tau)F_1),-\operatorname{Sp}(S_1(\tau)F_2)\big)=$$

$$= \operatorname{col}(-2\sin 2\tau, -2(\cos\tau + \sin\tau + \sin 2\tau), -\cos\tau - 2\sin\tau),$$
$$g_2(\tau) = \operatorname{col}\big(-\operatorname{Sp}(S_2(\tau)F_0), -\operatorname{Sp}(S_2(\tau)F_1), -\operatorname{Sp}(S_2(\tau)F_2)\big) =$$
$$= \operatorname{col}(-2\cos\tau, 2(\sin\tau - \cos\tau), 2\sin\tau - \cos\tau).$$

Вычисляя v_ρ, $\rho = 0, 1, 2$, и $f_\eta(\tau)$, $\eta = 1, 2$, по формулам (9.32), (9.33), получим

$$v_0 = \operatorname{col}(1, 0, 0, 0); \quad v_1 = \operatorname{col}(-1, 0, 0, 2), \quad v_2 = \operatorname{col}(1, 1, 1, 2),$$
$$f_1(\tau) = \operatorname{col}(\cos\tau + 2\sin\tau, \sin\tau - \sin 2\tau, \sin\tau - \sin 2\tau, -\cos\tau),$$
$$f_2(\tau) = \operatorname{col}(-2\sin\tau + \cos\tau, -\sin\tau, -\sin\tau, \cos\tau).$$

Отсюда находим

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \tag{9.44}$$

$$\begin{gathered} R_1(\tau) = \begin{bmatrix} \cos\tau + 2\sin\tau & \sin\tau - \sin 2\tau \\ \sin\tau - \sin 2\tau & -\cos\tau \end{bmatrix}, \\ R_2(\tau) = \begin{bmatrix} -2\sin\tau + \cos\tau & -\sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{9.45}$$

Система (9.4), (9.5), замкнутая управлением (9.6) с матрицами (9.44), (9.45) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-1) + \\ + \int_{-1}^{0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sin\tau - \sin 2\tau & 0 & 0 \\ -\sin\tau + \sin 2\tau & -\sin\tau + \sin 2\tau & 0 \end{bmatrix} x(t+\tau)\, d\tau + \\ + \int_{-4}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sin\tau - \cos\tau & 0 & 0 \\ \sin\tau + \cos\tau & \sin\tau + \cos\tau & 0 \end{bmatrix} x(t+\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{9.46}$$

Вычисляя характеристическую функцию $\varphi(\lambda)$ замкнутой системы (9.46) получаем, что $\varphi(\lambda) = (\lambda + 1)^3$. В частности, система (9.46) экспоненциально устойчива.

Глава III

МАТРИЧНОЕ МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ВЫХОДУ

В этой главе вводится понятие и исследуется задача матричного модального управления для систем высших порядков посредством линейной статической обратной связи по состоянию и по выходу.

В § 10 для системы высшего порядка вводится постановка задачи матричного модального управления посредством линейной статической обратной связи по состоянию. Приводится необходимое и достаточное условие разрешимости этой задачи и достаточное условие разрешимости задачи скалярного модального управления. Показано, что это достаточное условие не является необходимым. В § 11 для системы высшего порядка вводится постановка задачи матричного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу. В § 12 вводятся вспомогательные обозначения, определения, утверждения, которые понадобятся для доказательства основных результатов главы III. В § 13 получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи матричного модального управления для систем высших порядков посредством линейной статической обратной связи по выходу. В § 14 доказано, что разрешимость задачи матричного модального управления для систем высших порядков влечет разрешимость задачи скалярного модального управления. Показано, что обратное вообще говоря не верно. В § 15 получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи матричного модального управления и достаточные условия разрешимости задачи скалярного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу, когда блоки матрицы B и (или) C являются скалярными матрицами. В § 16 обсуждаются связь и различия между задачами матричного модального управления и скалярного модального управления. Доказано одно свойство системы, для которой разрешима задача матричного модального управления, согласно которому можно назначить не только собственные значения замкнутой системы, но и собственные векторы с высокой степенью свободы. В § 17 приведены иллюстрирующие примеры.

§ 10. Постановка задачи матричного модального управления посредством статической обратной связи по состоянию

В данном параграфе вводится постановка задачи матричного модального управления посредством статической обратной связи по состоянию [146].

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = b_1 u. \tag{10.1}$$

Здесь $x \in \mathbb{K}$ — состояние системы, $u \in \mathbb{K}$ — управление, $a_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $b_1 \in \mathbb{K}$ — постоянные.

Определение 10.1. Говорят, что для системы (10.1) *разрешима задача модального управления посредством линейной статической обратной связи по состоянию*, если для любых чисел $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, существует управление

$$u = k_1 x^{(n-1)} + \ldots + k_n x \tag{10.2}$$

такое, что замкнутая система (10.1), (10.2) имеет вид

$$x^{(n)} + \gamma_1 x^{(n-1)} + \ldots + \gamma_n x = 0. \tag{10.3}$$

Очевидно, что, если $b_1 \neq 0$, то управление (10.2), где $k_i = b_1^{-1}(a_i - \gamma_i)$, $i = \overline{1,n}$, приводит систему (10.1) к виду (10.3), то есть задача разрешима. В частности, можно обеспечить требуемую асимптотику решений системы (10.3) (то есть устойчивость или неустойчивость и т.д.). Если $b_1 = 0$, тогда система (10.1) не является управляемой, и задача неразрешима.

Рассмотрим линейную управляемую систему в векторной форме

$$\dot{z} = Fz + Gv. \tag{10.4}$$

Здесь $z \in \mathbb{K}^r$ — состояние системы, $v \in \mathbb{K}^q$ — управление, $F \in M_r(\mathbb{K})$, $G \in M_{r,q}(\mathbb{K})$.

Определение 10.2. Говорят, что для системы (10.4) *разрешима задача модального управления посредством линейной статической обратной связи по состоянию*, если для любых чисел $\delta_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,r}$, существует управление

$$v = Lz \tag{10.5}$$

с матрицей $L \in M_{q,r}(\mathbb{K})$ такое, что характеристический многочлен $\chi(F+GL;\lambda)$ матрицы замкнутой системы

$$\dot{z} = (F+GL)z$$

удовлетворяет условию

$$\chi(F+GL;\lambda) = \lambda^r + \delta_1\lambda^{r-1} + \ldots + \delta_r.$$

Было доказано (в [112] для $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ и [136] для $\mathbb{K}=\mathbb{R}$), что задача модального управления для системы (10.4) посредством линейной стационарной статической обратной связи по состоянию (10.5) разрешима тогда и только тогда, когда система (10.4) вполне управляема, то есть

$$\operatorname{rank}\,[G, FG, \ldots, F^{r-1}G] = r. \tag{10.6}$$

Рассмотрим соответствующую задачу для дифференциального уравнения (10.1) в случае, когда векторы состояния и управления многомерные. Пусть задано $s \in \mathbb{N}$. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$x^{(n)} + A_1x^{(n-1)} + \ldots + A_nx = B_1u. \tag{10.7}$$

Здесь $x \in \mathbb{K}^s$ — фазовый вектор, $u \in \mathbb{K}^s$ — вектор управляющего воздействия, $A_i \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, $B_1 \in M_s(\mathbb{K})$ — постоянные матрицы.

Определение 10.3 [146]. Скажем, что для системы (10.7) *разрешима задача матричного модального управления посредством линейной стационарной статической обратной связи по состоянию*, если для любых матриц $\Gamma_i \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, существует управление

$$u = K_1x^{(n-1)} + \ldots + K_nx, \tag{10.8}$$

где $K_i \in M_s(\mathbb{K})$, такое, что замкнутая система имеет вид

$$x^{(n)} + \Gamma_1x^{(n-1)} + \ldots + \Gamma_nx = 0. \tag{10.9}$$

Очевидно следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 10.1. *Для системы* (10.7) *разрешима задача матричного модального управления посредством линейной стационарной статической обратной связи по состоянию тогда и только тогда, когда* $\det B_1 \neq 0$.

Действительно, если $\det B_1 \neq 0$, тогда управление (10.8), где

$$K_i = B_1^{-1}(A_i - \Gamma_i), \quad i = \overline{1, n},$$

приводит систему (10.7) к системе (10.9). Наоборот, если $\det B_1 = 0$, тогда очевидно, что не для любых матриц $\Gamma_i \in \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1, n}$, существует управление (10.8), которое приводит систему (10.7) к системе (10.9).

Используя стандартную замену $z_1 = x$, $z_2 = x'$, …, $z_n = = x^{(n-1)}$, можно переписать систему (10.7), (10.8) в виде (10.4), (10.5), где $z = \operatorname{col}[z_1, \ldots, z_n] \in \mathbb{K}^{ns}$, $v = u \in \mathbb{K}^s$,

$$\begin{gathered}
F = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I \\ -A_n & -A_{n-1} & -A_{n-2} & \ldots & -A_1 \end{bmatrix}, \\
G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_1 \end{bmatrix}, \quad L = [K_n, K_{n-1}, \ldots, K_1], \\
r = ns, \quad q = s.
\end{gathered} \tag{10.10}$$

Здесь $0, I \in M_s(\mathbb{K})$. Будем говорить, что система (10.4) с матрицами (10.10) это *большая система*, соответствующая системе (10.7).

О п р е д е л е н и е 10.4. Говорят, что для системы (10.7) *разрешима задача (скалярного) модального управления посредством линейной стационарной статической обратной связи по состоянию* (10.8), если соответствующая задача модального управления посредством линейной стационарной статической обратной связи по состоянию разрешима для большой системы (10.4), (10.10).

Из (10.10) следует, что

$$[G, FG, \ldots, F^{n-1}G] = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & B_1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & B_1 & * \\ 0 & \ldots & 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & * & \ldots & * \\ 0 & B_1 & * & \ldots & \ldots & * \\ B_1 & * & \ldots & \ldots & \ldots & * \end{bmatrix}, \quad (10.11)$$

здесь через $*$ обозначены некоторые блоки. Из (10.11) легко видеть, что если $\det B_1 \neq 0$, то $\operatorname{rank}[G, FG, \ldots, F^{n-1}G] = ns$. Следовательно, условие (10.6) выполнено. Таким образом, справедливо следующее предложение.

Предложение 10.2. *Если* $\det B_1 \neq 0$*, то для системы* (10.7) *разрешима задача скалярного модального управления посредством линейной стационарной статической обратной связи* (10.8).

Замечание 10.1. В отличие от предложения 10.1, условие $\det B_1 \neq 0$ в предложении 10.2 является достаточным, но не необходимым. Покажем это. Пусть $n = 2$, $s = 2$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.12)$$

Имеем

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad FG = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$F^2G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F^3G = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Следовально, $\operatorname{rank}[G, FG, F^2G, F^3G] = 4$, то есть выполнено условие (10.6). Таким образом, для системы (10.4), (10.10), (10.12) (и, следовательно, для системы (10.7)) разрешима задача скалярного модального управления посредством линейной стационарной статической обратной связи по состоянию. При этом $\det B_1 = 0$. Этот пример демонстрирует, в частности, различие задач *матричного модального управления* и *скалярного модального управления* посредством линейной стационарной статической обратной связи по состоянию.

§ 11. Постановка задачи матричного модального управления посредством статической обратной связи по выходу

В данном параграфе вводится постановка задачи матричного модального управления посредством статической обратной связи по выходу [146].

Рассмотрим объект n-го порядка, на вход которого подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $n-p$ включительно, а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния объекта и его производных до порядка $p-1$ включительно ($1 \leqslant p \leqslant n$):

$$\begin{aligned} x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = \\ = b_{p1} u_1^{(n-p)} + b_{p+1,1} u_1^{(n-p-1)} + \ldots + b_{n1} u_1 + \ldots \\ + b_{pm} u_m^{(n-p)} + b_{p+1,m} u_m^{(n-p-1)} + \ldots + b_{nm} u_m, \end{aligned} \tag{11.1}$$

$$\begin{aligned} y_1 = c_{11} x + c_{21} x' + \ldots + c_{p1} x^{(p-1)}, \quad \ldots, \\ y_k = c_{1k} x + c_{2k} x' + \ldots + c_{pk} x^{(p-1)}. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Здесь $x \in \mathbb{K}$ — состояние системы, $u_\alpha \in \mathbb{K}$ — переменные управления системы, $y_\beta \in \mathbb{K}$ — переменные выхода системы, a_i, $b_{l\alpha}$, $c_{\nu\beta} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{p,n}$, $\nu = \overline{1,p}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$. Построим векторы $u = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{K}^m$, $y = \operatorname{col}(y_1, \ldots \ldots, y_k) \in \mathbb{K}^k$.

Будем предполагать, что управление в системе (11.1), (11.2) строится по принципу линейной статической обратной связи по выходу

$$u = Qy. \tag{11.3}$$

Здесь $Q = \{q_{\alpha\beta}\} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $q_{\alpha\beta} \in \mathbb{K}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$.

Определение 11.1. Говорят, что для системы (11.1), (11.2) *разрешима задача модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу*, если для любых чисел $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, существует управление (11.3) такое, что замкнутая система (11.1), (11.2), (11.3) имеет вид

$$x^{(n)} + \gamma_1 x^{(n-1)} + \ldots + \gamma_n x = 0.$$

Система (11.1), (11.2) с обратной связью (11.3) является обобщением системы (10.1) с обратной связью (10.2): если $m = 1$, $p = n$, $k = n$ и $\{c_{ij}\}_{i,j=1}^{n} = I \in M_n(\mathbb{K})$, то система (11.1), (11.2), (11.3) совпадает с системой (10.1), (10.2). Условия, налагаемые на порядки производных в (11.1) и (11.2) естественны, так как требуется, чтобы порядки производных в правой части замкнутой системы были меньше, чем n.

В векторной форме задача модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу имеет следующую формулировку. Для стационарной системы

$$\dot{z} = Fz + Gv, \qquad \xi = Hz,$$

где $z \in \mathbb{K}^r$, $v \in \mathbb{K}^q$, $\xi \in \mathbb{K}^d$, $F \in M_r(\mathbb{K})$, $G \in M_{r,q}(\mathbb{K})$, $H \in M_{d,r}(\mathbb{K})$, требуется построить управление по принципу линейной статической обратной связи по выходу

$$v = L\xi$$

с матрицей $L \in M_{q,d}(\mathbb{K})$, обеспечивающее для характеристического многочлена $\chi(F + GLH; \lambda)$ матрицы замкнутой системы

$$\dot{z} = (F + GLH)z \tag{11.4}$$

равенство

$$\chi(F + GLH; \lambda) = \lambda^r + \delta_1 \lambda^{r-1} + \ldots + \delta_r \tag{11.5}$$

с произвольными наперед заданными числами $\delta_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,r}$.

Задача модального управления (задача назначения спектра) посредством статической обратной связи по выходу является одной из важнейших открытых проблем в теории управления [62, 119], см. также обзоры [54, 120, 125]. Эта задача изучалась более 40 лет многими авторами. Наиболее существенные результаты были получены в работах Davison и Wang [72]

($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), Kimura [98] ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), Hermann и Martin [85] ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), Willems и Hesselink [135] ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), Brockett и Byrnes [63] ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), Wang [129, 130] ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), Rosenthal, Schumacher и Willems [117] ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Некоторые новые результаты о назначении спектра посредством статической обратной связи по выходу были получены в работах [13, 15, 16, 46, 57, 59, 66, 77, 99, 107, 116, 126, 131, 142].

Для скалярной системы (11.1), (11.2), (11.3) эта задача была решена в [12]. Построим по системе (11.1), (11.2) матрицы $B = \{b_{l\alpha}\}$, $l = \overline{1,n}$, $\alpha = \overline{1,m}$, и $C = \{c_{\nu\beta}\}$, $\nu = \overline{1,n}$, $\beta = \overline{1,k}$, где $b_{l\alpha} := 0$ для $l < p$ и $c_{\nu\beta} := 0$ для $\nu > p$. Имеет место следующая теорема [12].

Теорема 11.1. *Для системы* (11.1), (11.2) *разрешима задача модального управления посредством линейной стационарной статической обратной связи по выходу* (11.3) *тогда и только тогда, когда матрицы*

$$C^T B, \quad C^T JB, \quad \ldots, \quad C^T J^{n-1} B$$

линейно независимы.

Рассмотрим соответствующую задачу для системы (11.1), (11.2), (11.3), когда переменная состояния, а также входные и выходные переменные являются многомерными. Пусть заданы числа $s, n, m, k \in \mathbb{N}$ и $p \in \{\overline{1,n}\}$. Рассмотрим следующую систему

$$\begin{gathered} x^{(n)} + A_1 x^{(n-1)} + \ldots + A_n x = \\ = B_{p1} u_1^{(n-p)} + B_{p+1,1} u_1^{(n-p-1)} + \ldots + B_{n1} u_1 + \ldots \\ + B_{pm} u_m^{(n-p)} + B_{p+1,m} u_m^{(n-p-1)} + \ldots + B_{nm} u_m, \end{gathered} \tag{11.6}$$

$$\begin{gathered} y_1 = C_{11} x + C_{21} x' + \ldots + C_{p1} x^{(p-1)}, \quad \ldots, \\ y_k = C_{1k} x + C_{2k} x' + \ldots + C_{pk} x^{(p-1)}. \end{gathered} \tag{11.7}$$

Здесь $x \in \mathbb{K}^s$ — фазовый вектор, $u_\alpha \in \mathbb{K}^s$ — векторы управления, $y_\beta \in \mathbb{K}^s$ — векторы выходных сигналов, A_i, $B_{l\alpha}$, $C_{\nu\beta} \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{p,n}$, $\nu = \overline{1,p}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$. Построим векторы $u = \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{K}^{ms}$, $y = \mathrm{col}(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{K}^{ks}$.

Будем строить управление в системе (11.6), (11.7) по принципу линейной статической обратной связи по выходу

$$u = Qy. \tag{11.8}$$

Здесь $Q = \{Q_{\alpha\beta}\} \in M_{ms,ks}(\mathbb{K})$, $Q_{\alpha\beta} \in M_s(\mathbb{K})$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$. В силу (11.7) имеем

$$y_\beta = \sum_{\nu=1}^{p} C_{\nu\beta} x^{(\nu-1)}, \quad \beta = \overline{1,k}.$$

Следовательно,

$$u_\alpha = \sum_{\beta=1}^{k} Q_{\alpha\beta} \Big(\sum_{\nu=1}^{p} C_{\nu\beta} x^{(\nu-1)} \Big), \quad \alpha = \overline{1,m}.$$

Замкнутая система (11.6), (11.7), (11.8) примет вид

$$x^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} A_i x^{(n-i)} - \\ - \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{l=p}^{n} B_{l\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^{k} Q_{\alpha\beta} \Big(\sum_{\nu=1}^{p} C_{\nu\beta} x^{(n-l+\nu-1)} \Big) \right) = 0. \quad (11.9)$$

О п р е д е л е н и е 11.2 [146]. Скажем, что для системы (11.6), (11.7) *разрешима задача матричного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу* (11.8), если для любых матриц $\Gamma_i \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, существует матрица обратной связи $Q \in M_{ms,ks}(\mathbb{K})$ такая, что замкнутая система (11.9) имеет вид

$$x^{(n)} + \Gamma_1 x^{(n-1)} + \ldots + \Gamma_n x = 0. \quad (11.10)$$

Используя стандартную замену $z_1 = x$, $z_2 = x'$, …, $z_n = x^{(n-1)}$, можно переписать систему (11.9) в виде большой системы (11.4), где $r = ns$, $q = ms$, $d = ks$.

О п р е д е л е н и е 11.3. Говорят, что для системы (11.6), (11.7) *разрешима задача скалярного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу* (11.8), если для любых чисел $\delta_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,ns}$, существует матрица $Q \in M_{ms,ks}(\mathbb{K})$ обратной связи такая, что характеристический многочлен матрицы соответствующей замкнутой большой системы (11.4) имеет вид (11.5).

Глава III посвящена исследованию проблемы матричного модального управления для системы (11.6), (11.7) посредством статической обратной связи по выходу (11.8).

§ 12. Вспомогательные обозначения, определения и утверждения

В данном параграфе вводятся вспомогательные обозначения, определения, утверждения, которые понадобятся для доказательства основных результатов главы III [146].

Зафиксируем $s, n, m, k \in \mathbb{N}$ и $p \in \{\overline{1, n}\}$. Обозначим $\mathcal{J} := = J \otimes I \in M_{ns}(\mathbb{K})$, где $I \in M_s(\mathbb{K})$, $J \in M_n(\mathbb{K})$ — первый единичный косой ряд, $\otimes$ — кронекерово произведение матриц [100, гл. 12].

Определение 12.1. Обозначим через vecc, vecr отображения, которые разворачивают матрицу $H = \{h_{ij}\} \in M_{\omega,\rho}(\mathbb{K})$, $i = \overline{1, \omega}$, $j = \overline{1, \rho}$, по столбцам в вектор-столбец и по строкам в вектор-строку соответственно:

$$\operatorname{vecc} H = \operatorname{col}(h_{11}, \ldots, h_{\omega 1}, \ldots, h_{1\rho}, \ldots, h_{\omega\rho}) \in M_{\omega\rho,1}(\mathbb{K}),$$
$$\operatorname{vecr} H = [h_{11}, \ldots, h_{1\rho}, \ldots, h_{\omega 1}, \ldots, h_{\omega\rho}] \in M_{1,\omega\rho}(\mathbb{K}).$$

Лемма 12.1. *Если $X \in M_{\omega,p}(\mathbb{K})$, $Y \in M_{p,\sigma}(\mathbb{K})$, $Z \in \in M_{\sigma,\tau}(\mathbb{K})$, тогда*

$$\operatorname{vecc}(XYZ) = (Z^T \otimes X) \operatorname{vecc} Y.$$

Доказательство приведено в [100, § 12.1, Предложение 4] для квадратных матриц X, Z. Для произвольных прямоугольных матриц X, Z доказательство аналогично.

Определение 12.2. Для зафиксированного $s \in \mathbb{N}$ определим операцию блочного следа $\mathrm{SP}_s \colon M_{qs}(\mathbb{K}) \to M_s(\mathbb{K})$ по следующему правилу: если $H = \{H_{ij}\} \in M_{qs}(\mathbb{K})$, $H_{ij} \in M_s(\mathbb{K})$, $i, j = \overline{1, q}$, то $\mathrm{SP}_s H = \sum\limits_{i=1}^{q} H_{ii}$.

Лемма 12.2. *Пусть X и Y — блочные матрицы с блоками размерности s, существуют матрицы XY и YX, и блоки матрицы Y — скалярные матрицы, то есть*

$$
\begin{gathered}
X = \{X_{ij}\} \in M_{qs,rs}(\mathbb{K}), \quad X_{ij} \in M_s(\mathbb{K}), \quad i = \overline{1,q}, \quad j = \overline{1,r}; \\
Y = \{Y_{ji}\} \in M_{rs,qs}(\mathbb{K}), \quad Y_{ji} = y_{ji}I, \quad y_{ji} \in \mathbb{K}, \quad I \in M_s(\mathbb{K}), \\
j = \overline{1,r}, \quad i = \overline{1,q}.
\end{gathered}
$$

Тогда $\mathrm{SP}_s(XY) = \mathrm{SP}_s(YX)$.

Доказательство.

$$
\begin{gathered}
\mathrm{SP}_s(XY) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{r} X_{ij}Y_{ji} = \\
= \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{r} X_{ij}y_{ji}I = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{r} X_{ij}y_{ji},
\end{gathered} \tag{12.1}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathrm{SP}_s(YX) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{q} Y_{ji}X_{ij} = \\
= \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{q} y_{ji}IX_{ij} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{q} y_{ji}X_{ij}.
\end{gathered} \tag{12.2}
$$

Из (12.1) и (12.2) получим требуемое утверждение. □

Лемма 12.3. *Пусть $D = \{D_{\omega\rho}\} \in M_{ns}(\mathbb{K})$, $D_{\omega\rho} \in M_s(\mathbb{K})$, $\omega, \rho = \overline{1,n}$. Тогда для всех $i = \overline{1,n}$*

$$
\mathrm{SP}_s(D\mathcal{J}^{i-1}) = \mathrm{SP}_s(\mathcal{J}^{i-1}D) = \sum_{\eta=1}^{n-i+1} D_{\eta+i-1,\eta}. \tag{12.3}
$$

Доказательство. Равенство

$$
\mathrm{SP}_s(D\mathcal{J}^{i-1}) = \mathrm{SP}_s(\mathcal{J}^{i-1}D)
$$

следует из леммы 12.2, так как для всех $i = \overline{1,n}$, блоки матрицы $\mathcal{J}^{i-1}$ — скалярные матрицы. Докажем второе равенство в (12.3).

Для $i = 1$ имеем $\mathcal{J}^{i-1} = I \in M_{ns}(\mathbb{K})$. Поэтому, (12.3) следует из определения $\mathrm{SP_s}$.

Далее, имеем $\mathcal{J} = \{G_{\rho\omega}\}_{\rho,\omega=1}^{n} \in M_{ns}(\mathbb{K})$, где $G_{\rho\omega} = I \in \in M_s(\mathbb{K})$, если $\omega = \rho + 1$, $\rho = \overline{1, n-1}$, и $G_{\rho\omega} = 0 \in M_s(\mathbb{K})$ в остальных случаях. Вычислим степени матрицы $\mathcal{J}$. Для всех $j = \overline{1, n-1}$, имеем:

$$\mathcal{J}^j = \{G_{\rho\omega}^{(j)}\}_{\rho,\omega=1}^{n} \in M_{ns}(\mathbb{K}),$$
$$G_{\rho\omega}^{(j)} = \begin{cases} I \in M_s(\mathbb{K}), \text{ если } \omega = \rho + j, \ \rho = \overline{1, n-j}, \\ 0 \in M_s(\mathbb{K}), \text{ иначе.} \end{cases} \tag{12.4}$$

Таким образом,

$$\mathrm{SP}_s(\mathcal{J}^j D) = \sum_{\rho=1}^{n} \sum_{\omega=1}^{n} G_{\rho\omega}^{(j)} D_{\omega\rho} = \sum_{\rho=1}^{n-j} D_{\rho+j,\rho}.$$

Заменяя j на $i-1$ и ρ на η в последнем равенстве, получим (12.3). Лемма доказана. □

Определение 12.3. Пусть X, Y — блочные матрицы с блоками размерности s такие, что число (блочных) столбцов матрицы X совпадает с числом (блочных) строк матрицы Y:

$$X = \{X_{ij}\} \in M_{qs,rs}(\mathbb{K}), \quad X_{ij} \in M_s(\mathbb{K}), \quad i = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, r};$$
$$Y = \{Y_{j\nu}\} \in M_{rs,ts}(\mathbb{K}), \quad Y_{j\nu} \in M_s(\mathbb{K}), \quad j = \overline{1, r}, \quad \nu = \overline{1, t}.$$

Для матриц X и Y определим операцию блочного умножения по следующему правилу:

$$Z = X \star Y := \{Z_{i\nu}\}, \quad Z_{i\nu} := \sum_{j=1}^{r} X_{ij} \otimes Y_{j\nu} \quad i = \overline{1, q}, \quad \nu = \overline{1, t}.$$

Имеем $Z_{i\nu} \in M_{s^2}(\mathbb{K})$, $i = \overline{1, q}$, $\nu = \overline{1, t}$, поэтому

$$Z := X \star Y \in M_{qs^2, ts^2}(\mathbb{K}).$$

Для удобства будем опускать скобки и писать

$$P \star RS := P \star (R \cdot S), \qquad PR \star S := (P \cdot R) \star S,$$

где P, R, S — матрицы соответствующих размерностей.

Лемма 12.4. *Пусть*

$$X = \{X_{i\rho}\} \in M_{qs,ns}(\mathbb{K}), \quad X_{i\rho} \in M_s(\mathbb{K}), \quad i = \overline{1,q}, \quad \rho = \overline{1,n};$$
$$Y = \{Y_{\rho\nu}\} \in M_{ns,rs}(\mathbb{K}), \quad Y_{\rho\nu} \in M_s(\mathbb{K}), \quad \rho = \overline{1,n}, \quad \nu = \overline{1,r}.$$

Тогда для всех $j = \overline{0, n-1}$,

$$X\mathcal{J}^j \star Y = X \star \mathcal{J}^j Y. \tag{12.5}$$

Доказательство. Для $j = 0$ имеем $\mathcal{J}^j = I \in M_{ns}(\mathbb{K})$, и поэтому (12.5) выполнено.

Пусть $j \in \{\overline{1, n-1}\}$. Обозначим

$$X\mathcal{J}^j =: V^{(j)} = \{V_{i\rho}^{(j)}\} \in M_{qs,ns}(\mathbb{K}),$$
$$V_{i\rho}^{(j)} \in M_s(\mathbb{K}), \quad i = \overline{1,q}, \quad \rho = \overline{1,n};$$
$$\mathcal{J}^j Y =: W^{(j)} = \{W_{\rho\nu}^{(j)}\} \in M_{ns,rs}(\mathbb{K}),$$
$$W_{\rho\nu}^{(j)} \in M_s(\mathbb{K}), \quad \rho = \overline{1,n}, \quad \nu = \overline{1,r}.$$

Тогда в силу (12.4) имеем

$$\begin{gathered} V_{i\rho}^{(j)} = \sum_{\eta=1}^{n} X_{i\eta} G_{\eta\rho}^{(j)} = \\ = \begin{cases} X_{i,\rho-j} \in M_s(\mathbb{K}), & j+1 \leqslant \rho \leqslant n, \\ 0 \in M_s(\mathbb{K}), & 1 \leqslant \rho \leqslant j. \end{cases} \end{gathered} \tag{12.6}$$

$$\begin{gathered} W_{\rho\nu}^{(j)} = \sum_{\omega=1}^{n} G_{\rho\omega}^{(j)} Y_{\omega\nu} = \\ = \begin{cases} Y_{\rho+j,\nu} \in M_s(\mathbb{K}), & 1 \leqslant \rho \leqslant n-j, \\ 0 \in M_s(\mathbb{K}), & n-j+1 \leqslant \rho \leqslant n. \end{cases} \end{gathered} \tag{12.7}$$

Таким образом, по определению 12.3, учитывая (12.6) и (12.7), имеем

$$\begin{gathered} (X\mathcal{J}^j \star Y)_{i\nu} = (V^{(j)} \star Y)_{i\nu} = \\ = \sum_{\rho=1}^{n} V_{i\rho}^{(j)} \otimes Y_{\rho\nu} = \sum_{\rho=j+1}^{n} X_{i,\rho-j} \otimes Y_{\rho\nu}, \end{gathered} \tag{12.8}$$

$$(X \star \mathcal{J}^j Y)_{i\nu} = (X \star W^{(j)})_{i\nu} =$$
$$= \sum_{\eta=1}^{n} X_{i\eta} \otimes W^{(j)}_{\eta\nu} = \sum_{\eta=1}^{n-j} X_{i\eta} \otimes Y_{\eta+j,\nu}. \qquad (12.9)$$

Заменяя ρ на $\eta + j$ в (12.8), получим, что выражения (12.8) и (12.9) совпадают. Поэтому, (12.5) выполнено. Лемма доказана. $\square$

Определение 12.4. Для зафиксированного $s \in \mathbb{N}$ определим операцию блочного транспонирования $\mathcal{T}$ по следующему правилу: если $H = \{H_{ij}\} \in M_{qs,rs}(\mathbb{K})$, $H_{ij} \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,q}$, $j = \overline{1,r}$, тогда

$$H^{\mathcal{T}} := G = \{G_{ji}\} \in M_{rs,qs}(\mathbb{K}), \quad G_{ji} := H_{ij}, \quad j = \overline{1,r},\ i = \overline{1,q}.$$

Лемма 12.5. *Выполнены следующие свойства:*

1. $(H^{\mathcal{T}})^{\mathcal{T}} = H$.

2. *Если X и Y — блочные матрицы с блоками размерности s, существует XY, и блоки матрицы Y — скалярные матрицы, то есть*

$$X = \{X_{ij}\} \in M_{qs,rs}(\mathbb{K}), \quad X_{ij} \in M_s(\mathbb{K}), \quad i = \overline{1,q}, \quad j = \overline{1,r};$$
$$Y = \{Y_{j\sigma}\} \in M_{rs,ts}(\mathbb{K}), \quad Y_{j\sigma} = y_{j\sigma} I, \quad y_{j\sigma} \in \mathbb{K}, \quad I \in M_s(\mathbb{K}),$$
$$j = \overline{1,r}, \quad \sigma = \overline{1,t},$$

тогда

$$(XY)^{\mathcal{T}} = Y^{\mathcal{T}} X^{\mathcal{T}}. \qquad (12.10)$$

Эти свойства проверяются непосредственно.

Определение 12.5. Пусть X — блочная матрица с блоками размерности s:

$$X = \{X_{ij}\} \in M_{qs,rs}(\mathbb{K}), \quad X_{ij} \in M_s(\mathbb{K}), \quad i = \overline{1,q}, \quad j = \overline{1,r}.$$

Введем отображения

$$\mathrm{VECCR}_s,\ \mathrm{VECRR}_s : M_{qs,rs}(\mathbb{K}) \to M_{s,qrs}(\mathbb{K}),$$

которые разворачивают матрицу $X = \{X_{ij}\} \in M_{qs,rs}(\mathbb{K})$ по блочным столбцам и блочным строкам соответственно в блочную строку с блоками размерности s :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VECCR}_s\, X &= [X_{11}, \ldots, X_{q1}, \ldots, X_{1r}, \ldots, X_{qr}],\\
\mathrm{VECRR}_s\, X &= [X_{11}, \ldots, X_{1r}, \ldots, X_{q1}, \ldots, X_{qr}],
\end{aligned}
$$

и отображения VECRC_s, $\mathrm{VECCC}_s : M_{qs,rs}(\mathbb{K}) \to M_{qrs,s}(\mathbb{K})$, которые разворачивают матрицу $X = \{X_{ij}\} \in M_{qs,rs}(\mathbb{K})$ по блочным столбцам и блочным строкам соответственно в блочный столбец с блоками размерности s:

$$
\mathrm{VECRC}_s\, X = \begin{bmatrix} X_{11} \\ \vdots \\ X_{1r} \\ \vdots \\ X_{q1} \\ \vdots \\ X_{qr} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{VECCC}_s\, X = \begin{bmatrix} X_{11} \\ \vdots \\ X_{q1} \\ \vdots \\ X_{1r} \\ \vdots \\ X_{qr} \end{bmatrix}.
$$

Следующие равенства очевидны:

$$
\mathrm{VECCR}_s\, X = \mathrm{VECRR}_s\, (X^{\mathcal{T}}), \tag{12.11}
$$

$$
(\mathrm{VECRC}_s\, X)^T = \mathrm{VECCR}_s\, (X^T). \tag{12.12}
$$

Лемма 12.6. *Если*

$$
\begin{aligned}
X &= \{X_{ij}\} \in M_{qs,rs}(\mathbb{K}), \quad X_{ij} \in M_s(\mathbb{K}), \quad i = \overline{1,q}, \quad j = \overline{1,r},\\
Y &= \{Y_{ji}\} \in M_{rs,qs}(\mathbb{K}), \quad Y_{ji} \in M_s(\mathbb{K}), \quad j = \overline{1,r}, \quad i = \overline{1,q},
\end{aligned}
$$

тогда

$$
\mathrm{SP}_s(XY) = \mathrm{VECRR}_s X \cdot \mathrm{VECCC}_s Y = \tag{12.13}
$$

$$
= \mathrm{VECCR}_s X \cdot \mathrm{VECRC}_s Y. \tag{12.14}
$$

Доказательство вытекает непосредственно из определений 12.2 и 12.5.

Л е м м а 12.7. *Пусть*

$$F = \{F_{l\alpha}\} \in M_{ns,ms}(\mathbb{K}), \quad F_{l\alpha} \in M_s(\mathbb{K}), \quad l = \overline{1,n}, \quad \alpha = \overline{1,m};$$
$$Q = \{Q_{\alpha\beta}\} \in M_{ms,ks}(\mathbb{K}), \quad Q_{\alpha\beta} \in M_s(\mathbb{K}), \quad \alpha = \overline{1,m}, \quad \beta = \overline{1,k};$$
$$H = \{H_{l\beta}\} \in M_{ns,ks}(\mathbb{K}), \quad H_{l\beta} \in M_s(\mathbb{K}), \quad l = \overline{1,n}, \quad \beta = \overline{1,k}.$$

Пусть $R = \mathrm{SP}_s(FQH^{\mathcal{T}})$. *Тогда*

$$\mathrm{vecc}\, R = \mathrm{VECRR}_{s^2}(H^T \star F) \cdot \mathrm{vecc}\,(\mathrm{VECCR}_s\, Q). \tag{12.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$FQ =: W = \{W_{l\beta}\} \in M_{ns,ks}(\mathbb{K}),$$
$$W_{l\beta} \in M_s(\mathbb{K}), \quad l = \overline{1,n}, \quad \beta = \overline{1,k}.$$

Тогда $W_{l\beta} = \sum\limits_{\alpha=1}^{m} F_{l\alpha}Q_{\alpha\beta}$. Поэтому

$$\begin{aligned} R = \mathrm{SP}_s(WH^{\mathcal{T}}) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{k} W_{l\beta}H_{l\beta} = \\ = \sum_{l=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{\alpha=1}^{m} F_{l\alpha}Q_{\alpha\beta}H_{l\beta}. \end{aligned} \tag{12.16}$$

Применяя лемму 12.1 к матрицам $F_{l\alpha}Q_{\alpha\beta}H_{l\beta}$ для каждого $l = \overline{1,n}$, $\beta = \overline{1,k}$, $\alpha = \overline{1,m}$, получим из (12.16), что

$$\mathrm{vecc}\, R = \sum_{l=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{\alpha=1}^{m} \Big(\big(H_{l\beta}\big)^T \otimes F_{l\alpha}\Big) \cdot \mathrm{vecc}\, Q_{\alpha\beta}. \tag{12.17}$$

Обозначим $Z := H^T \star F$. Так как

$$H^T \in M_{ks,ns}(\mathbb{K}), \quad F \in M_{ns,ms}(\mathbb{K}),$$

то $Z \in M_{ks^2,ms^2}(\mathbb{K})$. Имеем

$$Z = \{Z_{\beta\alpha}\}, \quad Z_{\beta\alpha} \in M_{s^2}(\mathbb{K}), \quad \beta = \overline{1,k}, \quad \alpha = \overline{1,m},$$

и матрица $Z_{\beta\alpha}$, по определению 12.3, имеет вид

$$Z_{\beta\alpha} = \sum_{l=1}^{n} (H_{l\beta})^T \otimes F_{l\alpha}. \tag{12.18}$$

По определению

$$\begin{aligned} &\mathrm{VECRR}_{s^2} Z = \\ &\quad = [Z_{11}, \ldots, Z_{1m}, \ldots, Z_{k1}, \ldots, Z_{km}] \in M_{s^2, kms^2}(\mathbb{K}). \end{aligned} \tag{12.19}$$

Далее,

$$\begin{gathered} \mathrm{vecc}(\mathrm{VECCR}_s Q) = \\ = \mathrm{vecc}\,[Q_{11}, \ldots, Q_{m1}, \ldots, Q_{1k}, \ldots, Q_{mk}] = \\ = \mathrm{col}\,(\mathrm{vecc}\,Q_{11}, \ldots, \mathrm{vecc}\,Q_{m1}, \ldots, \\ \mathrm{vecc}\,Q_{1k}, \ldots, \mathrm{vecc}\,Q_{mk}) \in \mathbb{K}^{kms^2}. \end{gathered} \tag{12.20}$$

Умножая (12.19) на (12.20) и учитывая (12.18), получим, что правая часть равенства (12.15) имеет вид

$$\begin{gathered} \mathrm{VECRR}_{s^2}(H^T \star F) \cdot \mathrm{vecc}\,(\mathrm{VECCR}_s\, Q) = \\ = Z_{11} \cdot \mathrm{vecc}\,Q_{11} + \ldots + Z_{1m} \cdot \mathrm{vecc}\,Q_{m1} + \ldots \\ \ldots + Z_{k1} \cdot \mathrm{vecc}\,Q_{1k} + \ldots + Z_{km} \cdot \mathrm{vecc}\,Q_{mk} = \\ = \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{\alpha=1}^{m} Z_{\beta\alpha} \cdot \mathrm{vecc}\,Q_{\alpha\beta} = \\ = \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \Big((H_{l\beta})^T \otimes F_{l\alpha} \Big) \cdot \mathrm{vecc}\,Q_{\alpha\beta}. \end{gathered} \tag{12.21}$$

Из (12.17) и (12.21) следует (12.15). Теорема доказана. □

§ 13. Критерий разрешимости задачи матричного модального управления посредством обратной связи по выходу

В данном параграфе получен критерий разрешимости задачи матричного модального управления посредством обратной связи по выходу [146].

По системе (11.6), (11.7) построим блочные матрицы $B \in M_{ns,ms}(\mathbb{K})$, $C \in M_{ns,ks}(\mathbb{K})$ (где $0 \in M_s(\mathbb{K})$):

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ B_{p1} & \dots & B_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \dots & B_{nm} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{p1} & \dots & C_{pk} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{13.1}$$

Теорема 13.1. *Для системы* (11.6), (11.7) *разрешима задача матричного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу* (11.8) *тогда и только тогда, когда для любых матриц* $\Gamma_i \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, *существует матрица* $Q \in M_{ms,ks}(\mathbb{K})$ *такая, что выполнены следующие равенства:*

$$\Gamma_i = A_i - \mathrm{SP}_s(\mathcal{J}^{i-1} BQC^{\mathcal{T}}), \quad i = \overline{1,n}. \tag{13.2}$$

Доказательство. Пусть заданы матрицы $\Gamma_i \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$. Требуется построить матрицу

$$Q = \{Q_{\alpha\beta}\} \in M_{ms,ks}(\mathbb{K}),\ Q_{\alpha\beta} \in M_s(\mathbb{K}),\ \alpha = \overline{1,m},\ \beta = \overline{1,k},$$

такую, что замкнутая система (11.9) имеет вид (11.10).

Система (11.9) может быть записана в виде

$$x^{(n)} + A_1 x^{(n-1)} + \ldots + A_n x - \Delta = 0, \tag{13.3}$$

где

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{l=p}^{n} \sum_{\nu=1}^{p} B_{l\alpha} Q_{\alpha\beta} C_{\nu\beta} x^{(n-l+\nu-1)}. \tag{13.4}$$

Заменим в (13.4) индекс суммирования ν на $i = l - \nu + 1$. Так как ν изменяется от 1 до p, то i изменяется от $l - p + 1$ до l. Поэтому

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{l=p}^{n} \sum_{i=l-p+1}^{l} B_{l\alpha} Q_{\alpha\beta} C_{l+1-i,\beta} x^{(n-i)}.$$

Если $i \in \{\overline{1, l-p}\}$, то $l+1-i \geqslant p+1$, следовательно, $C_{l+1-i,\beta} = 0$. Поэтому

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{l=p}^{n} \sum_{i=1}^{l} B_{l\alpha} Q_{\alpha\beta} C_{l+1-i,\beta} x^{(n-i)}.$$

Если $l \in \{\overline{1, p-1}\}$, то $B_{l\alpha} = 0$, следовательно,

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{l} B_{l\alpha} Q_{\alpha\beta} C_{l+1-i,\beta} x^{(n-i)}.$$

Поменяем порядок суммирования: заменим $\sum\limits_{l=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{l}$ на $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{l=i}^{n}$; тогда получим

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=i}^{n} B_{l\alpha} Q_{\alpha\beta} C_{l+1-i,\beta} x^{(n-i)}. \tag{13.5}$$

Построим матрицу $D = BQC^{\mathcal{T}}$. Тогда $D = \{D_{\omega\rho}\} \in M_{ns}(\mathbb{K})$, $D_{\omega\rho} \in M_s(\mathbb{K})$, $\omega, \rho = \overline{1, n}$, и согласно построению

$$D_{\omega\rho} = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{k} B_{\omega\alpha} Q_{\alpha\beta} C_{\rho\beta}. \tag{13.6}$$

Используя лемму 12.3, равенство (13.6), и заменяя переменную суммирования $l = \eta + i - 1$, получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{SP}_s(\mathcal{J}^{i-1}D) = \sum_{\eta=1}^{n-i+1} D_{\eta+i-1,\eta} = \\ = \sum_{\eta=1}^{n-i+1} \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{k} B_{\eta+i-1,\alpha} Q_{\alpha\beta} C_{\eta\beta} = \\ = \sum_{l=i}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{k} B_{l\alpha} Q_{\alpha\beta} C_{l+1-i,\beta}. \end{aligned} \tag{13.7}$$

Из (13.5) и (13.7) следует, что

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{SP}_s(\mathcal{J}^{i-1}D) x^{(n-i)}. \tag{13.8}$$

Подставляя (13.8) в (13.3), получаем, что замкнутая система имеет вид

$$x^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \Big(A_i - \mathrm{SP}_s(\mathcal{J}^{i-1} BQC^{\mathcal{T}})\Big) x^{(n-i)} = 0. \tag{13.9}$$

Система (13.9) совпадает с системой (11.10) тогда и только тогда, когда выполнены равенства (13.2). Теорема доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 13.1. В силу леммы 12.3 равенства (13.2) равносильны равенствам

$$\Gamma_i = A_i - \mathrm{SP}_s(BQC^{\mathcal{T}} \mathcal{J}^{i-1}), \quad i = \overline{1, n}.$$

Равенства (13.2) представляют собой систему линейных уравнений относительно коэффициентов матрицы Q. Выясним условия разрешимости этой системы.

Рассмотрим матрицы

$$C^T \star B, \quad C^T \star \mathcal{J}B, \quad \dots, \quad C^T \star \mathcal{J}^{n-1}B.$$

Имеем $C^T \in M_{ks,ns}(\mathbb{K})$, $B \in M_{ns,ms}(\mathbb{K})$, следовательно,

$$C^T \star \mathcal{J}^{i-1} B \in M_{ks^2,ms^2}(\mathbb{K})$$

для всех $i = \overline{1,n}$. Построим матрицы

$$\mathrm{VECRR}_{s^2}(C^T \star \mathcal{J}^{i-1} B) \in M_{s^2,kms^2}(\mathbb{K}), \quad i = \overline{1,n},$$

и матрицу

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathrm{VECRR}_{s^2}(C^T \star B) \\ \mathrm{VECRR}_{s^2}(C^T \star \mathcal{J} B) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{VECRR}_{s^2}(C^T \star \mathcal{J}^{n-1} B) \end{bmatrix} \in M_{ns^2,kms^2}(\mathbb{K}). \tag{13.10}$$

Теорема 13.2. *Для системы* (11.6), (11.7) *разрешима задача матричного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу* (11.8) *тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank} \Theta = ns^2. \tag{13.11}$$

Доказательство. Применим отображение vecc к равенствам (13.2), а лемму 12.7 — к матрицам $F = \mathcal{J}^{i-1}B$, $H = C$. Тогда для всех $i = \overline{1,n}$ равенства (13.2) примут вид

$$\begin{gathered} \operatorname{vecc}(A_i - \Gamma_i) = \\ = \mathrm{VECRR}_{s^2}(C^T \star \mathcal{J}^{i-1} B) \cdot \operatorname{vecc}(\mathrm{VECCR}_s Q). \end{gathered} \tag{13.12}$$

Обозначим

$$v := \operatorname{vecc}(\mathrm{VECCR}_s Q) \in \mathbb{K}^{kms^2},$$

$$w := \operatorname{col}\big(\operatorname{vecc}(A_1 - \Gamma_1), \dots, \operatorname{vecc}(A_n - \Gamma_n)\big) \in \mathbb{K}^{ns^2}. \tag{13.13}$$

Тогда системы (13.12) можно записать в виде

$$\Theta v = w. \tag{13.14}$$

Условие (13.11) равносильно разрешимости системы (13.14) относительно v для любых матриц $\Gamma_i \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, и, следовательно, разрешимости задачи матричного модального управления для системы (11.6), (11.7) посредством линейной статической обратной связи по выходу (11.8). В частности, система (13.14) имеет решение

$$v = \Theta^T(\Theta\Theta^T)^{-1}w. \tag{13.15}$$

Искомая матрица Q может быть найдена из равенства

$$Q = \mathrm{VECCR}_s^{-1}(\mathrm{vecc}^{-1}v). \tag{13.16}$$

Теорема доказана. □

Замечание 13.2. В силу леммы 12.4, в формуле (13.10) матрицы $C^T \star \mathcal{J}^{i-1}B$ можно заменить на матрицы $C^T\mathcal{J}^{i-1}\star B$, $i = \overline{1,n}$.

Замечание 13.3. Теорема 13.2 является аналогом предложения 10.1 для задачи матричного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу.

Замечание 13.4. Заметим, что условие $mk \geqslant n$ является необходимым для (13.11).

§ 14. Достаточные условия разрешимости задачи скалярного модального управления посредством обратной связи по выходу

В данном параграфе получены достаточные условия разрешимости задачи скалярного модального управления посредством обратной связи по выходу [146].

Рассмотрим систему (11.10). Обозначим

$$\Gamma = [\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n] \in M_{s,ns}(\mathbb{K}).$$

Построим матричный характеристический полином системы (11.10):

$$\Upsilon(\Gamma;\lambda) = I\lambda^n + \Gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \Gamma_n.$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{K}$, $\Upsilon(\Gamma;\lambda) \in M_s(\mathbb{K})$. По системе (11.10) построим большую систему в «блочной форме Фробениуса»:

$$\dot z = \Phi z, \quad z \in \mathbb{K}^{ns},$$
$$\Phi = \Phi(\Gamma) = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ -\Gamma_n & -\Gamma_{n-1} & -\Gamma_{n-2} & \dots & -\Gamma_1 \end{bmatrix}. \tag{14.1}$$

Обозначим через $\chi(\Phi;\lambda)$ характеристический многочлен матрицы системы (14.1), то есть $\chi(\Phi;\lambda) = \det(\lambda I - \Phi)$. Справедлива следующая теорема [79, теорема 1.1].

Теорема 14.1. $\det \Upsilon(\Gamma;\lambda) = \chi(\Phi;\lambda)$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 14.2. *Для любых чисел $\delta_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,ns}$, существуют матрицы $\Gamma_j \in M_s(\mathbb{K})$, $j = \overline{1,n}$, такие, что выполнено равенство*

$$\chi(\Phi(\Gamma);\lambda) = \lambda^{ns} + \delta_1\lambda^{ns-1} + \delta_2\lambda^{ns-2} + \ldots + \delta_{ns}. \tag{14.2}$$

Доказательство. Пусть заданы числа $\delta_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,ns}$. Построим матрицы $\Gamma_j \in M_s(\mathbb{K})$, $j = \overline{1,n}$, следующим образом: для $j = \overline{1,n-1}$ положим

$$\Gamma_j = \begin{bmatrix} \delta_j & 0 & \dots & 0 \\ \delta_{n+j} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{(s-1)n+j} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

для $j = n$ положим

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} \delta_n & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{(s-1)n} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ \delta_{sn} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\Upsilon(\Gamma;\lambda) = \begin{bmatrix} \zeta_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \zeta_2 & \lambda^n & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ \zeta_n & 0 & 0 & \ldots & \lambda^n \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \lambda^n + \delta_1\lambda^{n-1} + \delta_2\lambda^{n-2} + \ldots + \delta_n, \\ \zeta_2 &= \delta_{n+1}\lambda^{n-1} + \delta_{n+2}\lambda^{n-2} + \ldots + \delta_{2n}, \quad \ldots, \\ \zeta_{n-1} &= \delta_{(s-2)n+1}\lambda^{n-1} + \delta_{(s-2)n+2}\lambda^{n-2} + \ldots + \delta_{(s-1)n}, \\ \zeta_n &= \delta_{(s-1)n+1}\lambda^{n-1} + \delta_{(s-1)n+2}\lambda^{n-2} + \ldots + \delta_{sn}. \end{aligned}$$

Вычисляя определитель матрицы $\Upsilon(\Gamma;\lambda)$ разложением по первому столбцу, получаем

$$\begin{gathered} \det\Upsilon(\Gamma;\lambda) = \\ = (\lambda^n + \delta_1\lambda^{n-1} + \delta_2\lambda^{n-2} + \ldots + \delta_n)\lambda^{n(s-1)} + \\ + (\delta_{n+1}\lambda^{n-1} + \delta_{n+2}\lambda^{n-2} + \ldots + \delta_{2n})\lambda^{n(s-2)} + \ldots \\ \ldots + (\delta_{(s-1)n+1}\lambda^{n-1} + \ldots + \delta_{sn}). \end{gathered} \tag{14.3}$$

Из (14.3) и теоремы 14.1 следует (14.2). Теорема доказана. □

Теорема 14.3. *Если для системы* (11.6), (11.7) *разрешима задача матричного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу* (11.8), *то для системы* (11.6), (11.7) *разрешима задача скалярного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу* (11.8).

Теорема 14.3 вытекает из теоремы 14.2.

Теорема 14.4. *Если* $\operatorname{rank}\Theta = ns^2$, *то для системы* (11.6), (11.7) *разрешима задача скалярного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу* (11.8).

Теорема 14.4 следует из теоремы 13.2 и теоремы 14.3.

Замечание 14.1. Теорема 14.4 является аналогом предложения 10.2 для задачи скалярного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу.

Замечание 14.2. Условие $\operatorname{rank}\Theta = ns^2$ в теореме 14.4 является только достаточным, но не необходимым (как в предложении 10.2). Покажем это. Пусть $s = 2$, $n = 3$, $m = k = p = 2$, $A_i = 0 \in M_2(\mathbb{K})$, $i = 1, 2, 3$, $B_{21} = B_{32} = C_{11} = I \in M_2(\mathbb{K})$, $B_{22} = B_{31} = C_{12} = C_{21} = 0 \in M_2(\mathbb{K})$, $C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Построим матрицу (13.10), получим

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{12,16}(\mathbb{K}),$$

где $0 \in M_2(\mathbb{K})$, $I \in M_2(\mathbb{K})$. Следовательно, $\operatorname{rank}\Theta = 10 < 12 = ns^2$, то есть условие (13.11) не выполнено. Докажем, что задача скалярного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу разрешима. Пусть заданы произвольные числа $\delta_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, 6}$. Построим матрицу обратной связи

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{K}),\ Q_{11} = \begin{bmatrix} -\delta_2 & 0 \\ -\delta_5 & 0 \end{bmatrix},\ Q_{12} = \begin{bmatrix} -\delta_1 & 0 \\ -\delta_4 & 0 \end{bmatrix},$$
$$Q_{21} = \begin{bmatrix} -\delta_3 & 1 \\ -\delta_6 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Замкнутая система (11.9) примет вид

$$x''' + \Gamma_1 x'' + \Gamma_2 x' + \Gamma_3 x = 0,$$

где матрицы Γ_j (согласно доказательству теоремы 13.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -\mathrm{SP}_s(BQC^{\mathcal{T}}), \\ \Gamma_2 &= -\mathrm{SP}_s(\mathcal{J}BQC^{\mathcal{T}}), \\ \Gamma_3 &= -\mathrm{SP}_s(\mathcal{J}^2BQC^{\mathcal{T}}). \end{aligned} \tag{14.4}$$

Вычисляя (14.4), получим, что

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ \delta_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} \delta_2 & 0 \\ \delta_5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} \delta_3 & -1 \\ \delta_6 & 0 \end{bmatrix},$$

Следовательно,

$$\Upsilon(\Gamma;\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 + \delta_1\lambda^2 + \delta_2\lambda + \delta_3 & -1 \\ \delta_4\lambda^2 + \delta_5\lambda + \delta_6 & \lambda^3 \end{bmatrix}.$$

Вычисляя $\det\Upsilon(\Gamma;\lambda)$ и используя теорему 14.1, получим, что

$$\chi(\Phi(\Gamma);\lambda) = \lambda^6 + \sum_{i=1}^{6} \delta_i \lambda^{6-i},$$

что и требовалось доказать.

§ 15. Частные случаи

В данном параграфе получены критерии разрешимости задачи матричного модального управления и достаточные условия разрешимости задачи скалярного модального управления, когда блоки матрицы B и (или) C являются скалярными матрицами [146].

Блоки матрицы C — скалярные матрицы.
Предположим, что блоки матрицы C — скалярные матрицы, то есть

$$\begin{gathered} C = \{C_{\nu\beta}\} \in M_{ns,ks}(\mathbb{K}), \\ C_{\nu\beta} = c_{\nu\beta}I,\ c_{\nu\beta} \in \mathbb{K},\ I \in M_s(\mathbb{K}),\ \nu = \overline{1,n},\ \beta = \overline{1,k}, \\ c_{\nu\beta} = 0, \quad \nu = \overline{p+1,n}, \quad \beta = \overline{1,k}. \end{gathered} \tag{15.1}$$

Тогда

$$C^{\mathcal{T}} = C^{T}. \tag{15.2}$$

Применяя лемму 12.2 к матрицам $X = \mathcal{J}^{i-1}BQ$, $Y = C^{\mathcal{T}}$, получим

$$\mathrm{SP}_s(\mathcal{J}^{i-1}BQC^{\mathcal{T}}) = \mathrm{SP}_s\,(C^{\mathcal{T}}\mathcal{J}^{i-1}BQ). \tag{15.3}$$

В силу (12.13)

$$\mathrm{SP}_s(C^T\mathcal{J}^{i-1}BQ) = \mathrm{VECRR}_s(C^T\mathcal{J}^{i-1}B)\cdot\mathrm{VECCC}_sQ. \quad (15.4)$$

Учитывая (15.2), (15.3), (15.4), можно записать систему (13.2) относительно коэффициентов матрицы Q в следующем виде:

$$\Omega\cdot V = W. \quad (15.5)$$

Здесь

$$\Omega := \begin{bmatrix} \mathrm{VECRR}_s(C^TB) \\ \mathrm{VECRR}_s(C^T\mathcal{J}B) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{VECRR}_s(C^T\mathcal{J}^{n-1}B) \end{bmatrix} \in M_{ns,kms}(\mathbb{K}), \quad (15.6)$$

$$W := \mathrm{col}\,(A_1-\Gamma_1,\dots,A_n-\Gamma_n)\in M_{ns,s}(\mathbb{K}), \quad (15.7)$$
$$V := \mathrm{VECCC}_s\,Q\in M_{kms,s}(\mathbb{K}).$$

Система (15.5) разрешима относительно V для любых матриц $\Gamma_i\in M_s(\mathbb{K})$, $i=\overline{1,n}$, тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{rank}\,\Omega = ns. \quad (15.8)$$

В частности система (15.5) имеет решение

$$V = \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}W. \quad (15.9)$$

Искомая матрица Q может быть найдена из равенства

$$Q = \mathrm{VECCC}_s^{-1}V. \quad (15.10)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 15.1. *Пусть блоки матрицы C — скалярные матрицы. Тогда для системы* (11.6), (11.7) *разрешима задача матричного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу* (11.8) *в том и только в том случае, если выполнено соотношение* (15.8).

Следствие 15.1. *Пусть блоки матрицы C — скалярные матрицы. Тогда для системы* (11.6), (11.7) *разрешима задача скалярного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу* (11.8), *если выполнено соотношение* (15.8).

Следствие 15.1 вытекает из теоремы 15.1 и теоремы 14.3.

Замечание 15.1. Заметим, что условие $mk \geqslant n$ является необходимым для соотношения (15.8).

Замечание 15.2. Условие (15.8) в следствии 15.1 является достаточным, но не необходимым. Покажем это. Пусть $s = 2$, $n = 3$, $m = k = p = 2$, $A_i = 0 \in M_2(\mathbb{K})$, $i = 1, 2, 3$, $B_{32} = C_{11} = C_{22} = I \in M_2(\mathbb{K})$, $B_{22} = B_{31} = C_{12} = C_{21} = 0 \in \in M_2(\mathbb{K})$, $B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Построив матрицу (15.6), получим

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{6,8}(\mathbb{K}).$$

Следовательно, $\operatorname{rank} \Theta = 5 < 6 = ns$, то есть условие (15.8) не выполнено. Докажем, что задача скалярного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу разрешима. Пусть заданы произвольные числа $\delta_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, 6}$. Построим матрицу обратной связи

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{K}),\ Q_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ Q_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\delta_4 & -\delta_1 \end{bmatrix},$$
$$Q_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\delta_6 & -\delta_3 \end{bmatrix}, \quad Q_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\delta_5 & -\delta_2 \end{bmatrix}.$$

Замкнутая система (11.9) имеет вид

$$x''' + \Gamma_1 x'' + \Gamma_2 x' + \Gamma_3 x = 0,$$

где матрицы Γ_j (согласно доказательству теоремы 13.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -\mathrm{SP}_s(BQC^{\mathcal{T}}), \\ \Gamma_2 &= -\mathrm{SP}_s(\mathcal{J}BQC^{\mathcal{T}}), \\ \Gamma_3 &= -\mathrm{SP}_s(\mathcal{J}^2 BQC^{\mathcal{T}}). \end{aligned} \tag{15.11}$$

Вычисляя (15.11), получим, что

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \delta_4 & \delta_1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \delta_5 & \delta_2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \delta_6 & \delta_3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Upsilon(\Gamma;\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 & -1 \\ \delta_4\lambda^2 + \delta_5\lambda + \delta_6 & \lambda^3 + \delta_1\lambda^2 + \delta_2\lambda + \delta_3 \end{bmatrix}.$$

Вычисляя $\det\Upsilon(\Gamma;\lambda)$ и используя теорему 14.1, получим, что

$$\chi(\Phi(\Gamma);\lambda) = \lambda^6 + \sum_{i=1}^{6} \delta_i\lambda^{6-i},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 15.3. Пусть $m = 1$, $p = n$, $k = n$ и $C = I \in M_{ns}(\mathbb{K})$. Следовательно, $B = \mathrm{col}\,(0,\ldots,0,\widehat{B}) \in M_{ns,s}(\mathbb{K})$ $(0 \in M_s(\mathbb{K}))$ и система (11.6), (11.7), (11.8) совпадает с (10.7), (10.8), где $B_1 = \widehat{B}$. Построив матрицу (15.6), получим

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \widehat{B} \\ 0 & 0 & \ldots & \widehat{B} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \widehat{B} & \ldots & 0 & 0 \\ \widehat{B} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Условие (15.8) эквивалентно условию $\mathrm{rank}\,\widehat{B} = s$, то есть $\det\widehat{B} \neq 0$. Поэтому, теорема 15.1 совпадает с предложением 10.1, и следствие 15.1 совпадает с предложением 10.2. Таким образом, теорема 15.1 и следствие 15.1 обобщают предложения 10.1 и 10.2 на системы с неполной обратной связью.

Блоки матрицы B — скалярные матрицы.

Предположим, что блоки матрицы B — скалярные матрицы, то есть

$$\begin{gathered} B = \{B_{l\alpha}\} \in M_{ns,ms}(\mathbb{K}), \\ B_{l\alpha} = b_{l\alpha}I,\ b_{l\alpha} \in \mathbb{K},\ I \in M_s(\mathbb{K}),\ l = \overline{1,n},\ \alpha = \overline{1,m}, \\ b_{l\alpha} = 0, \quad l = \overline{1,p-1}, \quad \alpha = \overline{1,m}. \end{gathered} \tag{15.12}$$

Тогда для всех $i = \overline{1,n}$ блоки матрицы $\mathcal{J}^{i-1}B$ — тоже скалярные матрицы. Следовательно,

$$(\mathcal{J}^{i-1}B)^{\mathcal{T}} = (\mathcal{J}^{i-1}B)^T. \tag{15.13}$$

Применяя лемму 12.2 к матрицам $X = QC^{\mathcal{T}}$, $Y = \mathcal{J}^{i-1}B$, получим

$$\mathrm{SP}_s(\mathcal{J}^{i-1}BQC^{\mathcal{T}}) = \mathrm{SP}_s(QC^{\mathcal{T}}\mathcal{J}^{i-1}B). \tag{15.14}$$

В силу (12.14),

$$\mathrm{SP}_s(QC^{\mathcal{T}}\mathcal{J}^{i-1}B) = \mathrm{VECCR}_s Q \cdot \mathrm{VECRC}_s(C^{\mathcal{T}}\mathcal{J}^{i-1}B). \tag{15.15}$$

Учитывая равенства (15.14), (15.15), можно переписать систему (13.2) относительно коэффициентов матрицы Q в следующем виде:

$$X \cdot \Xi = Y. \tag{15.16}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\Xi := \left[\mathrm{VECRC}_s(C^{\mathcal{T}}B), \ldots, \mathrm{VECRC}_s(C^{\mathcal{T}}\mathcal{J}^{n-1}B)\right] \in \\ \in M_{mks,ns}(\mathbb{K}),\end{gathered} \tag{15.17}$$

$$Y := [A_1 - \Gamma_1, \ldots, A_n - \Gamma_n] \in M_{s,ns}(\mathbb{K}), \tag{15.18}$$

$$X := \mathrm{VECCR}_s\, Q \in M_{s,mks}(\mathbb{K}).$$

Система (15.16) разрешима относительно X для любых матриц $\Gamma_i \in M_s(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,n}$, тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}\Xi = ns$. В частности система (15.16) имеет решение

$$X = Y(\Xi^T\Xi)^{-1}\Xi^T. \tag{15.19}$$

Искомая матрица Q может быть найдена из равенства

$$Q = \mathrm{VECCR}_s^{-1} X. \tag{15.20}$$

Запишем систему (15.16) в виде

$$\Xi^T \cdot X^T = Y^T.$$

Рассмотрим матрицу

$$\Xi^T = \begin{bmatrix} \left[\mathrm{VECRC}_s(C^{\mathcal{T}}B)\right]^T \\ \left[\mathrm{VECRC}_s(C^{\mathcal{T}}\mathcal{J}B)\right]^T \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left[\mathrm{VECRC}_s(C^{\mathcal{T}}\mathcal{J}^{n-1}B)\right]^T \end{bmatrix} \in M_{ns,mks}(\mathbb{K}). \tag{15.21}$$

Для всех $i = \overline{1, n}$, из (12.12) имеем

$$\left[\mathrm{VECRC}_s(C^{\mathcal{T}}\mathcal{J}^{i-1}B)\right]^T = \mathrm{VECCR}_s\big((C^{\mathcal{T}}\mathcal{J}^{i-1}B)^T\big). \quad (15.22)$$

В силу (12.11)

$$\mathrm{VECCR}_s\big((C^{\mathcal{T}}\mathcal{J}^{i-1}B)^T\big) = \\ = \mathrm{VECRR}_s\Big(\big((C^{\mathcal{T}}\mathcal{J}^{i-1}B)^T\big)^{\mathcal{T}}\Big). \quad (15.23)$$

В силу (15.13)

$$(C^{\mathcal{T}}\mathcal{J}^{i-1}B)^T = (\mathcal{J}^{i-1}B)^T(C^{\mathcal{T}})^T = (\mathcal{J}^{i-1}B)^{\mathcal{T}}(C^T)^{\mathcal{T}}. \quad (15.24)$$

В силу (12.10)

$$(\mathcal{J}^{i-1}B)^{\mathcal{T}}(C^T)^{\mathcal{T}} = (C^T\mathcal{J}^{i-1}B)^{\mathcal{T}}. \quad (15.25)$$

Из (15.24), (15.25) и утверждения 1 леммы 12.5 следует, что

$$\big((C^{\mathcal{T}}\mathcal{J}^{i-1}B)^T\big)^{\mathcal{T}} = \big((C^T\mathcal{J}^{i-1}B)^{\mathcal{T}}\big)^{\mathcal{T}} = C^T\mathcal{J}^{i-1}B. \quad (15.26)$$

Из (15.22), (15.23) и (15.26) следует, что матрица (15.21) имеет вид

$$\Xi^T = \begin{bmatrix} \mathrm{VECRR}_s(C^T B) \\ \mathrm{VECRR}_s(C^T\mathcal{J}B) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{VECRR}_s(C^T\mathcal{J}^{n-1}B) \end{bmatrix} \in M_{ns,mks}(\mathbb{K}),$$

то есть матрица Ξ^T совпадает с (15.6). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 15.2. *Пусть блоки матрицы B — скалярные матрицы. Тогда для системы* (11.6), (11.7) *разрешима задача матричного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу* (11.8) *в том и только в том случае, если выполнено* (15.8).

Следствие 15.2. *Пусть блоки матрицы B — скалярные матрицы. Тогда для системы* (11.6), (11.7) *разрешима задача скалярного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу, если выполнено* (15.8).

Следствие 15.2 вытекает из теоремы 15.2 и теоремы 14.3.

З а м е ч а н и е 15.4. Условие (15.8) в следствии 15.2 является только достаточным, но не необходимым. Покажем это. Рассмотрим пример в замечании 14.2. В этом примере блоки матрицы B — скалярные матрицы. Построив матрицу (15.6), получим

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{6,8}(\mathbb{K}).$$

Следовательно, $\operatorname{rank}\Omega = 5 < 6 = ns$, то есть условие (15.8) не выполнено. Однако как показано в замечании 14.2, задача скалярного модального управления системы посредством обратной связи по выходу разрешима.

Блоки матриц B и C — скалярные матрицы.

Пусть блоки матриц B и C — скалярные матрицы, то есть матрицы (13.1) имеют вид (15.1), (15.12). Обозначим

$$B_0 = \{b_{i\alpha}\} \in M_{n,m}(\mathbb{K}), \quad C_0 = \{c_{i\beta}\} \in M_{n,k}(\mathbb{K}),$$
$$i = \overline{1,n}, \quad \alpha = \overline{1,m}, \quad \beta = \overline{1,k}.$$

Тогда

$$B = B_0 \otimes I, \quad C = C_0 \otimes I, \quad I \in M_s(\mathbb{K}). \tag{15.27}$$

Согласно свойствам кронекеровского произведения для всех $i = \overline{1,n}$ имеем

$$\begin{gathered} \mathrm{VECRR}_s(C^T \mathcal{J}^{i-1} B) = \\ = \mathrm{VECRR}_s\big((C_0^T \otimes I)(J^{i-1} \otimes I)(B_0 \otimes I)\big) = \\ = \mathrm{VECRR}_s\big((C_0^T J^{i-1} B_0) \otimes I\big) = \Big(\operatorname{vecr}(C_0^T J^{i-1} B_0)\Big) \otimes I. \end{gathered}$$

Поэтому матрица (15.6) имеет вид

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Big(\operatorname{vecr}(C_0^T B_0)\Big) \otimes I \\ \Big(\operatorname{vecr}(C_0^T J B_0)\Big) \otimes I \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Big(\operatorname{vecr}(C_0^T J^{n-1} B_0)\Big) \otimes I \end{bmatrix} = P \otimes I,$$

где

$$P = \begin{bmatrix} \operatorname{vecr}(C_0^T B_0) \\ \operatorname{vecr}(C_0^T J B_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \operatorname{vecr}(C_0^T J^{n-1} B_0) \end{bmatrix} \in M_{n,km}(\mathbb{K}).$$

Так как $\operatorname{rank}(X \otimes Y) = \operatorname{rank} X \cdot \operatorname{rank} Y$, получим, что $\operatorname{rank}\Omega = ns$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} P = n$. Это условие равносильно линейной независимости матриц

$$C_0^T B_0, \quad C_0^T J B_0, \quad \dots, \quad C_0^T J^{n-1} B_0. \tag{15.28}$$

Поэтому из теоремы 15.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 15.3. *Пусть блоки матриц B и C — скалярные матрицы, то есть матрицы B и C имеют вид* (15.27). *Тогда для системы* (11.6), (11.7) *разрешима задача матричного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу* (11.8) *в том и только в том случае, если матрицы* (15.28) *линейно независимы.*

Следствие 15.3. *Пусть блоки матриц B и C — скалярные матрицы, то есть матрицы B, C имеют вид* (15.27). *Тогда для системы* (11.6), (11.7) *разрешима задача скалярного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу* (11.8), *если матрицы* (15.28) *линейно независимы.*

Следствие 15.3 вытекает из теоремы 15.3 и теоремы 14.3.

Замечание 15.5. Утверждение, обратное к следствию 15.3, неверно в общем случае. Покажем это ниже в примере 15.1.

Пример 15.1. Здесь мы докажем, что утверждение, обратное к следствию 15.3, неверно в общем случае. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $s = 2$, $n = 4$, $m = 1$, $k = 4$, $p = 4$, $A_i = 0 \in M_2(\mathbb{K})$,

$i = \overline{1,4}$,

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Имеем $C_0^T J B_0 = 0 \in M_{4,1}(\mathbb{K})$, следовательно, матрицы (15.28) линейно зависимы. Покажем, что задача скалярного модального управления для этой системы посредством линейной статической обратной связи по выходу разрешима. Пусть заданы произвольные числа $\delta_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,8}$. Пусть $Q = \{Q_{\alpha\beta}\} \in M_{ms,ks}(\mathbb{K})$ имеет вид

$$Q = [Q_{11} \quad Q_{12} \quad Q_{13} \quad Q_{14}] \in M_{2,8}(\mathbb{K}), \quad Q_{1\beta} = \begin{bmatrix} \rho_\beta & \eta_\beta \\ \xi_\beta & \omega_\beta \end{bmatrix},$$
$$\beta = \overline{1,4}.$$

Замкнутая система (11.9) имеет вид

$$x'''' + \Gamma_1 x''' + \Gamma_2 x'' + \Gamma_3 x' + \Gamma_4 x = 0,$$

где матрицы Γ_i (согласно доказательству теоремы 13.1) имеют вид (13.2). Вычисляя (13.2), получим

$$\Gamma_1 = -Q_{14}, \quad \Gamma_2 = 0 \in M_2(\mathbb{K}), \quad \Gamma_3 = -Q_{12}, \quad \Gamma_4 = -Q_{11}.$$

Таким образом, имеем

$$\Upsilon(\Gamma;\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4 - \rho_4\lambda^3 - \rho_2\lambda - \rho_1 & -\eta_4\lambda^3 - \eta_2\lambda - \eta_1 \\ -\xi_4\lambda^3 - \xi_2\lambda - \xi_1 & \lambda^4 - \omega_4\lambda^3 - \omega_2\lambda - \omega_1 \end{bmatrix}.$$

Требуется построить $\rho_i, \eta_i, \xi_i, \omega_i$, $i = 1, 2, 4$, такие, что

$$\det \Upsilon(\Gamma;\lambda) = \lambda^8 + \sum_{i=1}^{8} \delta_i \lambda^{n-i}. \tag{15.29}$$

Положим $\xi_1 := 1$, $\xi_2 := 0$, $\xi_4 := 0$, $\rho_1 := 0$. Вычисляя $\det \Upsilon(\Gamma;\lambda)$, получим

$$\det \Upsilon(\Gamma;\lambda) = \lambda^8 - (\rho_4 + \omega_4)\lambda^7 + \rho_4\omega_4\lambda^6 - (\rho_2 + \omega_2)\lambda^5 +$$

$$+ (\rho_2\omega_4 + \rho_4\omega_2 - \omega_1)\lambda^4 + (\rho_4\omega_1 - \eta_4)\lambda^3 + \rho_2\omega_2\lambda^2 + \\ + (\rho_2\omega_1 - \eta_2)\lambda - \eta_1.$$

Равенство (15.29) выполнено тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства:

$$\begin{aligned} -(\rho_4 + \omega_4) &= \delta_1, & \rho_4\omega_1 - \eta_4 &= \delta_5, \\ \rho_4\omega_4 &= \delta_2, & \rho_2\omega_2 &= \delta_6, \\ -(\rho_2 + \omega_2) &= \delta_3, & \rho_2\omega_1 - \eta_2 &= \delta_7, \\ \rho_2\omega_4 + \rho_4\omega_2 - \omega_1 &= \delta_4, & -\eta_1 &= \delta_8. \end{aligned} \tag{15.30}$$

Задача скалярного модального управления разрешима, если система нелинейных уравнений (15.30) разрешима для произвольных чисел $\delta_1, \ldots, \delta_8$. Очевидно, что система (15.30) разрешима. Действительно, из первого и второго уравнений системы (15.30) найдем ρ_4 и ω_4, а именно,

$$\rho_4, \omega_4 = \left(-\delta_1 \pm \sqrt{\delta_1^2 - 4\delta_2}\right) \Big/ 2. \tag{15.31}$$

Из третьего и шестого уравнений системы (15.30) найдем ρ_2 и ω_2, а именно,

$$\rho_2, \omega_2 = \left(-\delta_3 \pm \sqrt{\delta_3^2 - 4\delta_6}\right) \Big/ 2. \tag{15.32}$$

Подставляя (15.31) и (15.32) в четвертое уравнение (15.30), найдем

$$\omega_1 = \rho_2\omega_4 + \rho_4\omega_2 - \delta_4. \tag{15.33}$$

Подставляя (15.31), (15.32) и (15.33) в пятое и седьмое уравнения (15.30), найдем

$$\eta_4 = \rho_4\omega_1 - \delta_5, \qquad \eta_2 = \rho_2\omega_1 - \delta_7.$$

Наконец, $\eta_1 = -\delta_8$. Таким образом, задача скалярного модального управления разрешима.

Замечание 15.6. Аналогичные примеры могут быть построены для любого $n \geqslant 4$. Это может быть доказано индукцией. Если $s \geqslant 3$, то построение соответствующих примеров сильно затруднено. Для $n \leqslant 3$ (для любого s) такие примеры не могут быть построены ни для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ни для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Это может быть доказано перебором. Поэтому для $n \leqslant 3$ обратное утверждение к следствию 15.3 верно. Строгое доказательство этого утверждения здесь не приводится.

Замечание 15.7. Пример 15.1 неприменим для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, так как в силу (15.31) и (15.32) коэффициенты матриц $Q_{\alpha\beta}$, вообще говоря, комплексные, даже если $\delta_i \in \mathbb{R}$. Вопрос о построении аналогичного примера для случая $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и $n \geqslant 4$ остается открытым.

Замечание 15.8. Пусть $s = 1$. Тогда $B = B_0$, $C = C_0$ и задача матричного модального управления совпадает с задачей скалярного модального управления. В этом случае утверждение обратное к следствию 15.3 верно (в силу теоремы 15.3) и теорема 15.3 совпадает с теоремой 11.1. Таким образом, теорема 15.3 и более общие теоремы 15.2, 15.1, 13.2 обобщают теорему 11.1 на случай $s > 1$.

§ 16. Об одном свойстве системы, для которой разрешима задача матричного модального управления

В данном параграфе доказано одно свойство системы, для которой разрешима задача матричного модального управления [146].

Условие разрешимости задачи матричного модального управления (посредством линейной статической обратной связи по состоянию или по выходу) является достаточным для разрешимости задачи скалярного модального управления (теорема 14.2), но не является необходимым (см. замечания 10.1 и 14.2). Возможность матричного модального управления является достаточно консервативным и отличается от свойства скалярного модального управления. Действительно, решая задачу матричного модального управления, можно назначить ns^2 коэффициентов матриц Γ_j, $j = \overline{1,n}$, а в случае задачи скалярного модального управления — ns коэффициентов характеристического многочлена (14.2). Эти свойства совпадают, если $s = 1$.

Условие $mk \geqslant n$ является необходимым для матричного модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу (замечание 13.4). Действительно, если $mk < n$, тогда количество mks^2 коэффициентов матрицы Q обратной связи в (11.8) меньше, чем количество ns^2 коэффициентов матриц Γ_j, $j = \overline{1, n}$, которое следует назначить, и в таком случае произвольное назначение невозможно. Можно сравнить полученные здесь результаты с результатами Wang [129], где условие $mk \geqslant n$ также является необходимым для разрешимости обычной задачи модального управления посредством линейной статической обратной связи по выходу для системы (11.4). Однако, прямая связь между результатами, представленными здесь, и результатами Wang отсутствует.

Свойство матричного модального управления является более сильным, чем свойство скалярного модального управления. В частности, оно позволяет назначить не только собственные значения замкнутой системы, но и собственные векторы с высокой степенью свободы. Задача одновременного назначения спектра собственных значений вместе с собственными векторами является одной из важных задач теории управления спектром собственных значений. Приведем, к примеру, одно свойство систем, для которых разрешима задача матричного модального управления.

Теорема 16.1. *Для любых различных $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$, $\xi = \overline{1, ns}$, и любых линейно независимых векторов $h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{R}^s$ существуют матрицы $\Gamma_j \in M_s(\mathbb{R})$, $j = \overline{1, n}$, такие, что общее решение системы* (11.10) *имеет вид*

$$\begin{aligned} x = {} & C_1 h_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 h_2 \exp(\lambda_2 t) + \ldots \\ & + C_s h_s \exp(\lambda_s t) + C_{s+1} h_1 \exp(\lambda_{s+1} t) + \ldots \\ & + C_{2s} h_s \exp(\lambda_{2s} t) + \ldots \\ & + C_{(n-1)s+1} h_1 \exp(\lambda_{(n-1)s+1} t) + \ldots \\ & + C_{ns} h_s \exp(\lambda_{ns} t). \end{aligned} \tag{16.1}$$

Доказательство. Пусть заданы различные $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$, $\xi = \overline{1, ns}$, и линейно независимые векторы $h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{R}^s$.

Построим $S := [h_1, \ldots, h_s] \in M_s(\mathbb{R})$. Тогда $\det S \neq 0$. Положим

$$\begin{gathered} N_1 := \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}, \\ N_2 := \operatorname{diag}\{\lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_{2s}\}, \quad \ldots, \\ N_n := \operatorname{diag}\{\lambda_{(n-1)s+1}, \ldots, \lambda_{ns}\}. \end{gathered} \tag{16.2}$$

Тогда матрицы N_j, $j = \overline{1,n}$, коммутируют. Построим

$$L_1 := SN_1S^{-1}, \quad \ldots, \quad L_n := SN_nS^{-1}. \tag{16.3}$$

Тогда L_j, $j = \overline{1,n}$, также коммутируют. Пусть

$$(\lambda I - L_1)(\lambda I - L_2) \cdots (\lambda I - L_n) =: I\lambda^n + \Gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \Gamma_n, \tag{16.4}$$

то есть $\Gamma_1 := -(L_1 + \ldots + L_n)$, $\ldots$, $\Gamma_n := (-1)^n L_1 \cdot \ldots \cdot L_n$. Тогда матрицы $\Gamma_j \in M_s(\mathbb{R})$, $j = \overline{1,n}$, являются требуемыми.

Действительно, покажем, что вектор-функция $x_{j,i}(t) = h_i \exp(\lambda_{(j-1)s+i}t)$ — это решение системы (11.10) для всякого $j = \overline{1,n}$ и $i = \overline{1,s}$. Из (16.3) следует $L_jS = SN_j$, $j = \overline{1,n}$. Тогда из (16.2) следует

$$L_jh_i = \lambda_{(j-1)s+i}h_i \quad \forall j = \overline{1,n} \quad \forall i = \overline{1,s}. \tag{16.5}$$

Из (16.4) вытекает

$$\begin{aligned} &x^{(n)} + \Gamma_1x^{(n-1)} + \ldots + \Gamma_nx = \\ &\qquad = \left(\frac{d}{dt} - L_1\right)\left(\frac{d}{dt} - L_2\right) \ldots \left(\frac{d}{dt} - L_n\right)x. \end{aligned} \tag{16.6}$$

Кроме того, операторы в правой части (16.6) коммутируют. Пусть оператор $\left(\dfrac{d}{dt} - L_j\right)$ в правой части (16.6) перемещен в крайнее правое положение. Имеем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d}{dt} - L_j\right)x_{j,i}(t) = \\ &\qquad = \left(\frac{d}{dt} - L_j\right)h_i\exp(\lambda_{(j-1)s+i}t) = \end{aligned}$$

$$= (\lambda_{(j-1)s+i}h_i - L_j h_i)\exp(\lambda_{(j-1)s+i}t) = 0$$

в силу (16.5). Поэтому, в силу (16.6) $x_{j,i}(t)$ — решение (11.10) для всех $j = \overline{1,n}$ и $i = \overline{1,s}$.

Так как все λ_ξ, $\xi = \overline{1,ns}$, различны, то вектор-функции $x_{j,i}(t)$, $j = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,s}$, линейно независимы. Следовательно, формула (16.1) задает общее решение системы (11.10), что доказывает требуемое утверждение. □

Замечание 16.1. Условие теоремы 16.1, что все λ_ξ различны, может быть ослаблено до условия, что все вектор-функции $x_{j,i}(t)$ линейно независимы.

Замечание 16.2. Решая задачу матричного модального управления, можно также получить другие свойства замкнутой системы. Задача матричного модального управления недостаточно изучена. Её исследование было начато в работе [146]. Изучение свойств систем, для которых разрешима задача матричного модального управления, может служить предметом дальнейших исследований.

§ 17. Примеры

Приведены примеры, иллюстрирующие теоремы 13.2, 15.1, 15.2 [146].

Пример 17.1. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$, $m = k = p = s = 2$, матрицы системы (11.6), (11.7) имеют вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{17.1}$$

$$\begin{gathered} B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ B_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B_{32} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{17.2}$$

$$\begin{gathered} C_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{17.3}$$

Построим матрицы (13.1):

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Построим матрицы $C^T \star B$, $C^T \star \mathcal{J}B$, $C^T \star \mathcal{J}^2B$, получим:

$$C^T \star B = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix},$$

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C^T \star \mathcal{J}B = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix},$$

$$T_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_{12} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C^T \star \mathcal{J}^2B = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix},$$

$$U_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$U_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Построим (13.10):

$$\Theta = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{21} & S_{22} \\ T_{11} & T_{12} & T_{21} & T_{22} \\ U_{11} & U_{12} & U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}.$$

Имеем $\operatorname{rank}\Theta = 12$, следовательно, по теореме 13.2 задача матричного модального управления для системы (11.6), (11.7) посредством линейной статической обратной связи по выходу (11.8) разрешима. Построим это управление. Пусть, к примеру,

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{17.4}$$

Построив w по формуле (13.13), получим

$$w = \operatorname{col}(-4, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 2, -2, 0, 0, -4).$$

Вычислив v по формуле (13.15), получим

$$v = \operatorname{col}(-3, 1, -3, -1, -1, -1, 1, -1, 0, 0, 1, 1, 0, -4, -1, -5).$$

Из (13.16) получим

$$Q = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}. \tag{17.5}$$

Управление (11.8) с (17.5) приводит систему (11.6), (11.7) с (17.1), (17.2), (17.3) к системе

$$x''' + \Gamma_1 x'' + \Gamma_2 x' + \Gamma_3 x = 0$$

с (17.4).

П р и м е р 17.2. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$, $m = k = p = s = 2$, и матрицы системы (11.6), (11.7) имеют вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{17.6}$$

$$\begin{gathered} B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ B_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B_{32} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{17.7}$$

$$\begin{gathered} C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ C_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{17.8}$$

Построим матрицы (13.1):

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Блоки матрицы C — скалярные матрицы. Построим

$$C^T B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C^T \mathcal{J} B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$C^T \mathcal{J}^2 B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Построим (15.6):

$$\Omega = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & -2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Имеем $\operatorname{rank}\Omega = 6$, следовательно, по теореме 15.1, задача матричного модального управления для системы (11.6), (11.7) посредством линейной статической обратной связи по выходу (11.8) разрешима. Построим это управление. Пусть, к примеру,

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{17.9}$$

Построив W по формуле (15.7), получим

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Вычислив V по формуле (15.9), получим

$$V = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Из (15.10) получим

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{17.10}$$

Управление (11.8) с (17.10) приводит систему (11.6), (11.7) с (17.6), (17.7), (17.8) к системе

$$x''' + \Gamma_1 x'' + \Gamma_2 x' + \Gamma_3 x = 0$$

с (17.9).

Пример 17.3. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$, $m = k = p = s = 2$, и матрицы системы (11.6), (11.7) имеют вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{17.11}$$

$$\begin{gathered} B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ B_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{17.12}$$

$$\begin{gathered} C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ C_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ C_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{17.13}$$

Построим матрицы (13.1):

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Блоки матрицы B — скалярные матрицы. Построим

$$C^{\mathcal{T}} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^{\mathcal{T}} \mathcal{J} B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C^{\mathcal{T}} \mathcal{J}^2 B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Построим (15.17):

$$\Xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Имеем $\operatorname{rank}\Omega = \operatorname{rank}\Xi^T = 6$, следовательно, по теореме 15.2, задача матричного модального управления для системы (11.6), (11.7) посредством линейной статической обратной связи по выходу (11.8) разрешима. Построим это управление. Пусть, к примеру,

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{17.14}$$

Построив Y по формуле (15.18), получим

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Вычислив X по формуле (15.19), получим

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из (15.20) получим

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{17.15}$$

Управление (11.8) с матрицей (17.15) приводит систему (11.6), (11.7) с (17.11), (17.12), (17.13) к системе

$$x''' + \Gamma_1 x'' + \Gamma_2 x' + \Gamma_3 x = 0$$

с (17.14).

Глава IV
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПОСРЕДСТВОМ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

В главе IV рассматривается задача экспоненциальной стабилизации с произвольным наперед заданным показателем устойчивости для линейного нестационарного дифференциального уравнения n-го порядка с m входами и k выходами с неопределенными коэффициентами посредством линейной стационарной обратной связи по состоянию и по выходу.

В § 18 приводится постановка задачи экспоненциальной стабилизации уравнения посредством линейной стационарной обратной связи по состоянию. В § 19 доказана разрешимость задачи экспоненциальной стабилизации уравнения посредством линейной стационарной обратной связи по состоянию. В § 20 исследована задача экспоненциальной стабилизации с наперед заданным показателем устойчивости для линейного нестационарного дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами посредством линейной стационарной обратной связи по выходу. Получены достаточные условия разрешимости рассматриваемой задачи.

В конце § 19, 20 приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

§ 18. Постановка задачи

В данном параграфе приводится постановка задачи экспоненциальной стабилизации с наперед заданным показателем устойчивости для линейного нестационарного дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами посредством линейной стационарной обратной связи по состоянию [144].

Рассмотрим управляемую систему, заданную обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка с переменными коэффициентами

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = u, \qquad (18.1)$$

где $x \in \mathbb{R}$ — состояние системы, $u \in \mathbb{R}$ — управление, $t \in \mathbb{R}_+$. Будем предполагать, что функции $p_i(t)$ являются измеримыми и ограниченными, но точные значения этих функций в моменты времени t неизвестны; известны только нижние и верхние границы α_i и β_i:

$$\alpha_i \leqslant p_i(t) \leqslant \beta_i, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad i = \overline{1, n}. \tag{18.2}$$

Обозначим $\mathbf{x} = (x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$. Рассмотрим задачу стабилизации системы (18.1) посредством обратной связи. Требуется построить функцию $u(t, \mathbf{x})$, $u(t, \mathbf{0}) = 0$, такую, что нулевое решение системы (18.1) замкнутой обратной связью $u = u(t, \mathbf{x})$, экспоненциально устойчиво с заданным показателем устойчивости. Поставленная задача по существу относится к задачам робастной стабилизации.

Пусть функции $p_i(t)$ постоянные, то есть $p_i(t) \equiv p_i$ $(= \alpha_i = \beta_i)$. В этом случае задача стабилизации решается тривиально. Действительно, построим

$$v_i = p_i - \phi_i, \tag{18.3}$$

где числа $\phi_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, выбраны такими, что многочлен

$$\lambda^n + \phi_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \phi_n \tag{18.4}$$

является гурвицевым (то есть, $\operatorname{Re} \lambda_j < -\theta < 0$ для всех корней λ_j, $j = \overline{1, n}$, многочлена (18.4)). Тогда система (18.1) замкнутая обратной связью

$$u(\mathbf{x}) = v_1 x^{(n-1)} + \ldots + v_n x \tag{18.5}$$

принимает вид

$$x^{(n)} + \phi_1 x^{(n-1)} + \ldots + \phi_n x = 0, \tag{18.6}$$

и нулевое (а следовательно, каждое) решение системы (18.6) является экспоненциально устойчивым с показателем θ.

Предположим теперь, что функции $p_i(t)$ зависят от переменной t. Тогда мы не можем построить управление, аналогичное (18.3), по формуле $v_i(t) = p_i(t) - \phi_i$, так как функции

$p_i(t)$ неизвестны. Будем строить обратную связь в виде (18.5), где v_i — постоянные. Замкнутая система принимает вид

$$x^{(n)} + (p_1(t) - v_1)x^{(n-1)} + \ldots + (p_n(t) - v_n)x = 0. \qquad (18.7)$$

Исследуется следующая задача: *требуется построить* $v_1, \ldots \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ *так, чтобы все решения уравнения* (18.7) *были экспоненциально устойчивы с наперед заданным показателем.* Такая задача не является тривиальной. Для ее исследования требуется использование каких-либо достаточных условий экспоненциальной устойчивости линейных нестационарных систем. Проблема получения достаточных условий (асимптотической, экспоненциальной) устойчивости линейных нестационарных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (18.8)$$

является одной из важных и нетривиальных проблем в теории линейных систем дифференциальных уравнений и теории управления [56]. В отличие от систем с постоянными коэффициентами ($A(t) \equiv A$), условие $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, $j = \overline{1,n}$, выполненное для собственных значений матрицы системы (18.8) не является ни достаточным, ни необходимым условием асимптотической устойчивости системы (18.8) (см., например, [87], [3, § 9]). Некоторые достаточные условия асимптотической и экспоненциальной устойчивости линейных нестационарных систем (18.8) и линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$x^{(n)} + q_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + q_n(t)x = 0 \qquad (18.9)$$

установлены в работах [3, 8, 35, 56, 87, 113, 127, 128, 150, 153, 154]. Имеет место следующая теорема.

Теорема 18.1 (А. Ю. Левин, [35]). *Предположим, что функции* $q_i(t)$ *измеримы и ограничены на* $\mathbb{R}_+$ *и выполнены неравенства*

$$0 < \sigma_i \leqslant q_i(t) \leqslant \omega_i, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (18.10)$$

Пусть многочлены

$$P_1(\lambda) = \lambda^n + \omega_1\lambda^{n-1} + \sigma_2\lambda^{n-2} + \omega_3\lambda^{n-3} + \ldots, \qquad (18.11)$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^n + \sigma_1\lambda^{n-1} + \omega_2\lambda^{n-2} + \sigma_3\lambda^{n-3} + \ldots \tag{18.12}$$

имеют только вещественные корни. Тогда все решения уравнения (18.9) *экспоненциально стремятся к* 0 *при* $t \to +\infty$.

Отметим, что корни (многочленов (18.11) и (18.12)) с необходимостью отрицательны, в силу положительности σ_i, ω_i, $i = \overline{1,n}$. Далее, из доказательства теоремы 1 [35] следует, что всякое решение $x(t)$ уравнения (18.9) вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно, имеет вид $O(e^{-\nu_n t})$ при $t \to +\infty$, где $-\nu_n < 0$ — наибольший из корней многочленов (18.11), (18.12).

Используя стандартную замену $y_1 = x$, $y_2 = x'$, ..., $y_n = x^{(n-1)}$ можно свести систему (18.1), (18.5) к виду

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A(t)y + Bu, \\ u &= Vy. \end{aligned}$$

Здесь $A(t)$ — сопровождающая матрица для многочлена с коэффициентами $p_i(t)$, $B = \mathrm{col}[0,\ldots,0,1]$, $V = [v_n,\ldots,v_1]$.

Глава IV посвящена решению проблемы экспоненциальной стабилизации с наперед заданным показателем устойчивости для уравнения с неопределенными переменными коэффициентами посредством стационарной статической обратной связи.

Определение 18.1. Будем говорить, что система (18.1) *экспоненциально стабилизируема с показателем* $\theta > 0$ *посредством линейной стационарной статической обратной связи по состоянию* (18.5), если существуют постоянные $v_1,\ldots,v_n \in \mathbb{R}$ такие, что всякое решение $x(t)$ замкнутой системы (18.7) экспоненциально устойчиво с показателем θ, то есть $x(t)$ вместе с производными до $(n-1)$-го порядка имеет вид $O(e^{-\theta t})$ при $t \to +\infty$.

§ 19. Стабилизация линейного нестационарного дифференциального уравнения посредством стационарной обратной связи по состоянию

В данном параграфе доказана разрешимость задачи экспоненциальной стабилизации с наперед заданным показателем для линейного нестационарного дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами посредством линейной стационарной обратной связи по состоянию. Для доказательства основного результата доказывается вспомогательная теорема [144].

Сформулируем и докажем вспомогательную теорему, которая понадобится в дальнейшем.

Теорема 19.1. *Для любого* $\eta > 0$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существуют многочлены*

$$f(\lambda) = \lambda^n + \delta_1\lambda^{n-1} + \gamma_2\lambda^{n-2} + \delta_3\lambda^{n-3} + \ldots, \tag{19.1}$$

$$g(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \delta_2\lambda^{n-2} + \gamma_3\lambda^{n-3} + \ldots \tag{19.2}$$

такие, что выполнены условия:

(i) $0 < \gamma_i \leqslant \delta_i - 1$, $i = \overline{1,n}$;

(ii) *корни* $-a_i$, $i = \overline{1,n}$, *многочлена* $f(\lambda)$ *и корни* $-b_i$, $i = \overline{1,n}$, *многочлена* $g(\lambda)$ *вещественные (и следовательно, отрицательные);*

(iii) *выполнены следующие неравенства:*

$$\begin{gathered} 0 > -\eta \geqslant -a_1 > -b_1 > -b_2 > -a_2 > -a_3 > -b_3 > \ldots \\ \ldots > -a_{2\ell-1} > -b_{2\ell-1} > -b_{2\ell} > -a_{2\ell} \\ (\textit{если } n \textit{ — четное и } n = 2\ell); \end{gathered} \tag{19.3}$$

$$\begin{gathered} 0 > -\eta \geqslant -b_1 > -a_1 > -a_2 > -b_2 > -b_3 > -a_3 > \ldots \\ \ldots > -a_{2\ell} > -b_{2\ell} > -b_{2\ell+1} > -a_{2\ell+1} \\ (\textit{если } n \textit{ — нечетное и } n = 2\ell+1). \end{gathered} \tag{19.4}$$

Доказательство. Сначала предположим, что теорема доказана для любого $\eta \geqslant 1$. Построим для $\eta = 1$ многочлены (19.1), (19.2) со свойствами (i), (ii), (iii) и обозначим их через $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$. Теперь пусть $\eta \in (0,1)$. Тогда положим $f(\lambda) := f_1(\lambda)$, $g(\lambda) := g_1(\lambda)$. Следовательно, условия (i), (ii) будут выполнены. Далее, поскольку $-\eta > -1$, условие (iii) также будет выполнено. Поэтому, без ограничения общности, можно предполагать, что $\eta \geqslant 1$.

Проведем доказательство индукцией по n. Доказываемые утверждения различны для нечетных и четных чисел n: для четных n требуется выполнение условий (i), (ii) и неравенств

(19.3), а для нечетных n — (i), (ii) и (19.4). Следовательно, база индукции и индукционный переход зависят от того, каким является число n, четным или нечетным. Поэтому мы должны проверить базу индукции для $n = 1$ и $n = 2$.

Пусть $n = 1$. Для любого $\eta \geqslant 1$ положим $\gamma_1 := \eta$, $\delta_1 := = \eta + 1$. Тогда многочлены $f(\lambda) = \lambda + \delta_1$ и $g(\lambda) = \lambda + \gamma_1$ имеют корни $-a_1 = -\delta_1$ и $-b_1 = -\gamma_1$ соответственно. Очевидно, условия (i), (ii) и неравенства (19.4) выполнены.

Пусть $n = 2$. Для любого $\eta \geqslant 1$ полагаем

$$a_1 := \eta, \quad a_2 := 5\eta, \quad b_1 := 2\eta, \quad b_2 := 3\eta, \tag{19.5}$$

$$f(\lambda) := (\lambda + a_1)(\lambda + a_2), \quad g(\lambda) := (\lambda + b_1)(\lambda + b_2). \tag{19.6}$$

Тогда

$$\delta_1 = 6\eta, \quad \gamma_1 = 5\eta, \quad \delta_2 = 6\eta^2, \quad \gamma_2 = 5\eta^2. \tag{19.7}$$

В силу (19.5), (19.6), условие (ii) и неравенство (19.3) выполнены. В силу (19.7) и неравенства $\eta \geqslant 1$ условие (i) выполнено. База индукции проверена.

Выдвинем предположение индукции. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для $n = k$. Докажем тогда, что утверждение верно для $n = k + 1$. Индукционный переход будем производить по отдельности для четных и нечетных k.

Согласно предположению индукции существуют многочлены

$$f(\lambda) = \lambda^k + \delta_1\lambda^{k-1} + \gamma_2\lambda^{k-2} + \ldots, \tag{19.8}$$

$$g(\lambda) = \lambda^k + \gamma_1\lambda^{k-1} + \delta_2\lambda^{k-2} + \ldots \tag{19.9}$$

такие, что

$$0 < \gamma_i \leqslant \delta_i - 1, \quad i = \overline{1, k}, \tag{19.10}$$

$$\begin{gathered} f(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda + a_i), \quad g(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda + b_i), \\ a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad a_i, b_i > 0, \quad i = \overline{1, k}, \end{gathered} \tag{19.11}$$

$$\begin{gathered} 0 > -\eta \geqslant -a_1 > -b_1 > -b_2 > -a_2 > \ldots \\ > -a_{2\ell-1} > -b_{2\ell-1} > -b_{2\ell} > -a_{2\ell} \\ (\text{если } k = 2\ell), \end{gathered} \tag{19.12}$$

$$\begin{gathered} 0 > -\eta \geqslant -b_1 > -a_1 > -a_2 > -b_2 > \ldots \\ > -a_{2\ell} > -b_{2\ell} > -b_{2\ell+1} > -a_{2\ell+1} \\ (\text{если } k = 2\ell+1). \end{gathered} \tag{19.13}$$

Докажем, что существуют многочлены

$$F(\lambda) = \lambda^{k+1} + \Delta_1 \lambda^k + \Gamma_2 \lambda^{k-1} + \Delta_3 \lambda^{k-2} + \ldots, \tag{19.14}$$

$$G(\lambda) = \lambda^{k+1} + \Gamma_1 \lambda^k + \Delta_2 \lambda^{k-1} + \Gamma_3 \lambda^{k-2} + \ldots \tag{19.15}$$

такие, что

$$0 < \Gamma_i \leqslant \Delta_i - 1, \quad i = \overline{1, k+1}, \tag{19.16}$$

$$\begin{gathered} F(\lambda) = \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda + A_i), \quad G(\lambda) = \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda + B_i), \\ A_i, B_i \in \mathbb{R}, \quad A_i, B_i > 0, \quad i = \overline{1, k+1}, \end{gathered} \tag{19.17}$$

$$\begin{gathered} 0 > -\eta \geqslant -B_1 > -A_1 > -A_2 > -B_2 > \ldots \\ > -A_{2\ell} > -B_{2\ell} > -B_{2\ell+1} > -A_{2\ell+1} \\ (\text{если } k = 2\ell), \end{gathered} \tag{19.18}$$

$$\begin{gathered} 0 > -\eta \geqslant -A_1 > -B_1 > -B_2 > -A_2 > \ldots \\ > -A_{2\ell+1} > -B_{2\ell+1} > -B_{2\ell+2} > -A_{2\ell+2} \\ (\text{если } k = 2\ell+1). \end{gathered} \tag{19.19}$$

Будем считать, что $\delta_0 := 1$, $\gamma_0 := 1$. Положим

$$\begin{gathered} C_1 := \max_{i=\overline{1,\ell}} \left\{ \frac{\delta_{2i-1} - \gamma_{2i-1} + 1}{\delta_{2i-2}}, \frac{1}{\delta_{2\ell}} \right\}, \\ C_2 := \max_{j=\overline{1,\ell}} \frac{\delta_{2j} - \gamma_{2j} + 1}{\delta_{2j-1}}, \; N := \max_{j=\overline{1,\ell}} \frac{\gamma_{2j-1}}{\delta_{2j-1}} \end{gathered} \tag{19.20}$$

в случае, когда $k = 2\ell$, и

$$\begin{gathered} C_1 := \max_{i=\overline{1,\ell+1}} \frac{\delta_{2i-1} - \gamma_{2i-1} + 1}{\delta_{2i-2}}, \\ C_2 := \max_{j=\overline{1,\ell}} \left\{ \frac{\delta_{2j} - \gamma_{2j} + 1}{\delta_{2j-1}}, \frac{1}{\delta_{2\ell+1}} \right\}, \; N := \max_{j=\overline{1,\ell+1}} \frac{\gamma_{2j-1}}{\delta_{2j-1}} \end{gathered} \tag{19.21}$$

в случае, когда $k = 2\ell + 1$. Тогда $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $0 < N < 1$. Рассмотрим прямые

$$y = x + C_1, \quad x = Ny + C_2. \tag{19.22}$$

Они пересекаются в точке $M_0(x_0, y_0)$ с координатами

$$x_0 = \frac{C_1 N + C_2}{1 - N} > 0, \quad y_0 = \frac{C_1 + C_2}{1 - N} > 0.$$

Рассмотрим множество $\Omega_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geqslant x + C_1, \ x \geqslant Ny + C_2\}$. Множество Ω_0 — это конус с вершиной в точке M_0, расположенный в первой четверти плоскости xOy, ограниченный лучами (19.22), где $x \geqslant x_0$. Луч

$$m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - x_0 = \frac{1 + N}{2}(y - y_0), \ x \geqslant x_0\}$$

содержится в Ω_0. Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x + C_1, \\ x \geqslant Ny + C_2, \\ x > a_k. \end{cases} \tag{19.23}$$

Решением системы (19.23) является множество $\Omega_1 = \Omega_0 \cap \{x > a_k\}$. Множество Ω_1 непустое. В частности, точка $M_1(\widehat{x}, \widehat{y})$, лежащая на луче m, с координатой $\widehat{x} = \max\{x_0 + 1, a_k + 1\}$ содержится в Ω_1. Вычисляя $\widehat{y}$, получим, что

$$\widehat{y} = \frac{2}{1 + N} \max\{1, a_k - x_0 + 1\} + y_0.$$

Положим

$$A_i := b_i, \quad B_i := a_i, \quad i = \overline{1, k}, \tag{19.24}$$

$$A_{k+1} := \widehat{y}, \quad B_{k+1} := \widehat{x}, \tag{19.25}$$

$$F(\lambda) := \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda + A_i), \quad G(\lambda) := \prod_{i=1}^{k+1} (\lambda + B_i). \tag{19.26}$$

Тогда условие (19.17) выполнено. Далее, поскольку $\widehat{x} > a_k$, следовательно

$$B_k < B_{k+1}. \tag{19.27}$$

Далее, поскольку пара $(\widehat{x}, \widehat{y})$ является решением системы неравенств (19.23), имеем

$$A_{k+1} = \widehat{y} \geqslant \widehat{x} + C_1 > \widehat{x} = B_{k+1}. \tag{19.28}$$

Таким образом, из неравенств (19.27), (19.28), равенств (19.24) и предположения индукции (19.12), (19.13) следует, что выполнены неравенства (19.18), если $k = 2\ell$, и выполнены неравенства (19.19), если $k = 2\ell + 1$.

Докажем неравенства (19.16). Из определения (19.26) многочленов $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ и равенств (19.24), (19.11) следует, что

$$F(\lambda) = g(\lambda)(\lambda + A_{k+1}), \quad G(\lambda) = f(\lambda)(\lambda + B_{k+1}). \tag{19.29}$$

Подставляя (19.8), (19.9) и (19.14), (19.15) в (19.29) и раскрывая скобки, получаем равенства

$$\begin{aligned}
\Delta_{2i-1} &= A_{k+1}\delta_{2i-2} + \gamma_{2i-1}, && i = \overline{1,\ell},\\
\Delta_{2j} &= B_{k+1}\delta_{2j-1} + \gamma_{2j}, && j = \overline{1,\ell},\\
\Delta_{2\ell+1} &= A_{k+1}\delta_{2\ell},\\
\Gamma_{2i-1} &= B_{k+1}\gamma_{2i-2} + \delta_{2i-1}, && i = \overline{1,\ell},\\
\Gamma_{2j} &= A_{k+1}\gamma_{2j-1} + \delta_{2j}, && j = \overline{1,\ell},\\
\Gamma_{2\ell+1} &= B_{k+1}\gamma_{2\ell},
\end{aligned}$$

в случае, когда $k = 2\ell$, и равенства

$$\begin{aligned}
\Delta_{2i-1} &= A_{k+1}\delta_{2i-2} + \gamma_{2i-1}, && i = \overline{1,\ell+1},\\
\Delta_{2j} &= B_{k+1}\delta_{2j-1} + \gamma_{2j}, && j = \overline{1,\ell},\\
\Delta_{2\ell+2} &= B_{k+1}\delta_{2\ell+1},\\
\Gamma_{2i-1} &= B_{k+1}\gamma_{2i-2} + \delta_{2i-1}, && i = \overline{1,\ell+1},\\
\Gamma_{2j} &= A_{k+1}\gamma_{2j-1} + \delta_{2j}, && j = \overline{1,\ell},\\
\Gamma_{2\ell+2} &= A_{k+1}\gamma_{2\ell+1},
\end{aligned}$$

в случае, когда $k = 2\ell + 1$. Неравенства $\Gamma_i > 0$, $i = \overline{1, k+1}$, выполнены в силу неравенств (19.10) и неравенств $A_{k+1} > 0$, $B_{k+1} > 0$. Неравенства

$$\Gamma_i \leqslant \Delta_i - 1, \quad i = \overline{1, k+1}, \tag{19.30}$$

равносильны системе неравенств

$$\begin{cases} \gamma_{2i-1} + A_{k+1}\delta_{2i-2} \geqslant B_{k+1}\gamma_{2i-2} + \delta_{2i-1} + 1, \\ A_{k+1}\delta_{2\ell} \geqslant B_{k+1}\gamma_{2\ell} + 1, \\ \gamma_{2j} + B_{k+1}\delta_{2j-1} \geqslant A_{k+1}\gamma_{2j-1} + \delta_{2j} + 1, \end{cases} \tag{19.31}$$

$(i = \overline{1,\ell}, j = \overline{1,\ell})$ в случае, когда $k = 2\ell$, и равносильны системе неравенств

$$\begin{cases} \gamma_{2i-1} + A_{k+1}\delta_{2i-2} \geqslant B_{k+1}\gamma_{2i-2} + \delta_{2i-1} + 1, \\ \gamma_{2j} + B_{k+1}\delta_{2j-1} \geqslant A_{k+1}\gamma_{2j-1} + \delta_{2j} + 1, \\ B_{k+1}\delta_{2\ell+1} \geqslant A_{k+1}\gamma_{2\ell+1} + 1, \end{cases} \tag{19.32}$$

$(i = \overline{1,\ell+1}, j = \overline{1,\ell})$ в случае, когда $k = 2\ell+1$. Система (19.31) равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} A_{k+1} \geqslant B_{k+1}\dfrac{\gamma_{2i-2}}{\delta_{2i-2}} + \dfrac{\delta_{2i-1} - \gamma_{2i-1} + 1}{\delta_{2i-2}}, & i = \overline{1,\ell}, \\ A_{k+1} \geqslant B_{k+1}\dfrac{\gamma_{2\ell}}{\delta_{2\ell}} + \dfrac{1}{\delta_{2\ell}}, & \\ B_{k+1} \geqslant A_{k+1}\dfrac{\gamma_{2j-1}}{\delta_{2j-1}} + \dfrac{\delta_{2j} - \gamma_{2j} + 1}{\delta_{2j-1}}, & j = \overline{1,\ell}. \end{cases} \tag{19.33}$$

Система (19.32) равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} A_{k+1} \geqslant B_{k+1}\dfrac{\gamma_{2i-2}}{\delta_{2i-2}} + \dfrac{\delta_{2i-1} - \gamma_{2i-1} + 1}{\delta_{2i-2}}, & i = \overline{1,\ell+1} \\ B_{k+1} \geqslant A_{k+1}\dfrac{\gamma_{2j-1}}{\delta_{2j-1}} + \dfrac{\delta_{2j} - \gamma_{2j} + 1}{\delta_{2j-1}}, & j = \overline{1,\ell} \\ B_{k+1} \geqslant A_{k+1}\dfrac{\gamma_{2\ell+1}}{\delta_{2\ell+1}} + \dfrac{1}{\delta_{2\ell+1}}. & \end{cases} \tag{19.34}$$

В случае, когда $k = 2\ell$, выполнены неравенства:

$$\frac{\gamma_{2i}}{\delta_{2i}} \leqslant 1, \quad i = \overline{0,\ell}; \quad \frac{\gamma_{2j-1}}{\delta_{2j-1}} \leqslant N, \quad j = \overline{1,\ell}.$$

В случае, когда $k = 2\ell + 1$, выполнены неравенства:

$$\frac{\gamma_{2i}}{\delta_{2i}} \leqslant 1, \quad i = \overline{0,\ell}; \quad \frac{\gamma_{2j-1}}{\delta_{2j-1}} \leqslant N, \quad j = \overline{1,\ell+1}.$$

Таким образом, из определений (19.20), (19.21) следует, что для выполнения неравенств (19.33) (в случае $k = 2\ell$) и неравенств (19.34) (в случае $k = 2\ell + 1$) достаточно выполнения неравенств

$$\begin{cases} A_{k+1} \geqslant B_{k+1} + C_1 \\ B_{k+1} \geqslant NA_{k+1} + C_2. \end{cases} \tag{19.35}$$

В силу (19.25) неравенства (19.35) выполнены, так как $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in \Omega_0$. Поэтому неравенства (19.30) выполнены. Следовательно, выполняются неравенства (19.16). Таким образом, индукционный переход доказан. Теорема доказана. □

Теорема 19.2. *Всякая система* (18.1) *экспоненциально стабилизируема с произвольным наперед заданным показателем* $\theta > 0$ *посредством линейной стационарной статической обратной связи по состоянию* (18.5).

Доказательство. Пусть задано произвольное $\theta > 0$. Обозначим $\rho_i := \beta_i - \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$, где α_i, β_i из (18.2). Имеем $\rho_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$. Положим $L := \max\{1, \rho_1, \sqrt{\rho_2}, \ldots, \sqrt[n]{\rho_n}\}$. Тогда

$$L \geqslant 1 > 0, \quad L \geqslant \rho_1, \quad L^2 \geqslant \rho_2, \quad \ldots, \quad L^n \geqslant \rho_n. \tag{19.36}$$

Положим $\eta := \theta / L$. Тогда $\eta > 0$. Построим многочлены (19.1), (19.2) в соответствии с теоремой 19.1 так, чтобы были выполнены свойства (i), (ii), (iii). Тогда корни $-a_i$ и $-b_i$ ($i = \overline{1, n}$) многочленов $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ являются вещественными, и выполнены следующие неравенства:

$$-a_i \leqslant -\eta, \quad -b_i \leqslant -\eta, \quad i = \overline{1, n}. \tag{19.37}$$

Построим многочлены $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$ по формулам (18.11), (18.12), где $\omega_i = \delta_i L^i$, $\sigma_i = \gamma_i L^i$, $i = \overline{1, n}$. Тогда $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ имеют соответственно корни $-c_i := -a_i L$ и $-d_i := -b_i L$ ($i = \overline{1, n}$). Эти корни вещественные и в силу (19.37) выполнены неравенства:

$$-c_i \leqslant -\theta, \quad -d_i \leqslant -\theta, \quad i = \overline{1, n}. \tag{19.38}$$

Положим $v_i := \alpha_i - \gamma_i L^i$, $i = \overline{1, n}$, в (18.5) и рассмотрим замкнутую систему (18.7). Система (18.7) имеет вид (18.9), где

$q_i(t) = p_i(t) - v_i$, $i = \overline{1,n}$. Учитывая неравенства (18.2), (19.36) и свойство (i), для всякого $i = \overline{1,n}$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, имеем

$$0 < \sigma_i = \gamma_i L^i = \alpha_i - \alpha_i + \gamma_i L^i \leqslant p_i(t) - v_i =: q_i(t) \leqslant$$
$$\leqslant \beta_i - \alpha_i + \gamma_i L^i = \rho_i + \gamma_i L^i \leqslant L^i(1+\gamma_i) \leqslant \delta_i L^i = \omega_i.$$

Таким образом, выполнены неравенства (18.10). Применяя теорему 18.1 и неравенства (19.38), получаем, что замкнутая система (18.7) экспоненциально устойчива с показателем θ. Теорема доказана. □

Пример 19.1. Пусть $n = 2$. Рассмотрим управляемую систему (18.1):

$$x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x = u, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{19.39}$$

Предположим, что $p_1(t), p_2(t)$ удовлетворяют условиям

$$\alpha_1 \leqslant p_1(t) \leqslant \beta_1, \quad \alpha_2 \leqslant p_2(t) \leqslant \beta_2, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Пусть для простоты

$$\rho_1 := \beta_1 - \alpha_1 \leqslant 1, \quad \rho_2 := \beta_2 - \alpha_2 \leqslant 1$$

(этого можно добиться с помощью замены $\widetilde{x}(t) = x(\mu t)$). Пусть $\theta > 0$ — произвольное число. Требуется построить управление $u = u(\mathbf{x})$ в (19.39), где

$$u(\mathbf{x}) = v_1 x' + v_2 x, \tag{19.40}$$

с постоянными v_1, v_2 такими, что замкнутая система

$$x'' + (p_1(t) - v_1)x' + (p_2(t) - v_2)x = 0 \tag{19.41}$$

экспоненциально устойчива с показателем θ. Не ограничивая общности, полагаем, что $\theta \geqslant 1$. Для построения управления (19.40) используем теорему 19.2. Имеем $L = 1$. Положим $\eta := \theta$. Тогда $\eta \geqslant 1$. Построим многочлены (19.1), (19.2) в соответствии с теоремой 19.1:

$$f(\lambda) := \lambda^2 + 6\eta\lambda + 5\eta^2, \quad g(\lambda) := \lambda^2 + 5\eta\lambda + 6\eta^2.$$

Тогда $\gamma_1 = 5\eta$, $\gamma_2 = 5\eta^2$, $\delta_1 = 6\eta$, $\delta_2 = 6\eta^2$. В силу неравенства $\eta \geqslant 1$, условие (i) выполнено. Далее, выполнены равенства $P_1(\lambda) = f(\lambda)$, $P_2(\lambda) = g(\lambda)$. Коэффициенты обратной связи, построенные по теореме 19.2, имеют вид

$$v_1 = \alpha_1 - 5\theta, \quad v_2 = \alpha_2 - 5\theta^2. \tag{19.42}$$

Подставим (19.42) в (19.40). Замкнутая система (19.41) принимает вид

$$x'' + (s_1(t) + 5\theta)x' + (s_2(t) + 5\theta^2)x = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{19.43}$$

Здесь

$$0 \leqslant s_1(t) := p_1(t) - \alpha_1 \leqslant \beta_1 - \alpha_1 = \rho_1 \leqslant 1 = L,$$
$$0 \leqslant s_2(t) := p_2(t) - \alpha_2 \leqslant \beta_2 - \alpha_2 = \rho_2 \leqslant 1 = L^2.$$

Все решения системы (19.43) экспоненциально устойчивы с показателем θ. Проверим это.

Замена $z_1 = x$, $z_2 = x'$ приводит управление (19.43) к системе

$$\dot{z} = A(t)z, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(s_2(t) + 5\theta^2) & -(s_1(t) + 5\theta) \end{bmatrix}. \tag{19.44}$$

Покажем, что система (19.44) экспоненциально устойчива с показателем θ. Подстановка

$$z(t) = e^{-\theta t} y(t). \tag{19.45}$$

приводит систему (19.44) к системе

$$\dot{y} = B(t)y, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} \theta & 1 \\ -(s_2(t) + 5\theta^2) & -(s_1(t) + 4\theta) \end{bmatrix}. \tag{19.46}$$

Покажем, что система (19.46) устойчива по Ляпунова. Положим $S = \begin{bmatrix} 7\theta^2 & 2\theta \\ 2\theta & 1 \end{bmatrix}$. Тогда $S > 0$ в смысле квадратичных форм. Далее, имеем

$$B^T(t)S + SB(t) =$$
$$= \begin{bmatrix} -6\theta^3 - 4\theta s_2(t) & -4\theta^2 - 2\theta s_1(t) - s_2(t) \\ -4\theta^2 - 2\theta s_1(t) - s_2(t) & -4\theta - 2s_1(t) \end{bmatrix}. \tag{19.47}$$

Найдем главные миноры матрицы (19.47). Получим

$$\Delta_1 = -2\theta(3\theta^2 + 2s_2(t)) < 0, \quad \Delta_2 = -4\theta - 2s_1(t) < 0,$$
$$\Delta_{1,2} = \det(B^T(t)S + SB(t)) =$$
$$= 8\theta^4 - 4\theta^3 s_1(t) + 8\theta^2 s_2(t) - 4\theta^2 s_1^2(t) + 4\theta s_1(t)s_2(t) - s_2^2(t).$$

Имеем

$$8\theta^4 - 4\theta^3 s_1(t) - 4\theta^2 s_1^2(t) = 4\theta^3(\theta - s_1(t)) + 4\theta^2(\theta^2 - s_1^2(t)) \geqslant 0,$$
$$8\theta^2 s_2(t) - s_2^2(t) = s_2(t)(8\theta^2 - s_2(t)) \geqslant 0.$$

Следовательно $\Delta_{1,2} \geqslant 0$. Поэтому матрица (19.47) является неположительно определенной. Поэтому система (19.46) устойчива. Следовательно, все решения системы (19.46) ограничены при $t \to +\infty$. Тогда в силу (19.45) выполнено $\|z(t)\| = O(e^{-\theta t})$, $t \to +\infty$.

В качестве примера численного моделирования рассмотрим систему (19.39) с

$$p_1(t) = \frac{t}{1+t^2}, \quad p_2(t) = -\frac{1}{1+t^2}:$$

$$x'' + \frac{t}{1+t^2}x' - \frac{1}{1+t^2}x = u. \tag{19.48}$$

Имеем

$$\alpha_1 := -1/2 \leqslant p_1(t) \leqslant 1/2 =: \beta_1, \quad \alpha_2 := -1 \leqslant p_1(t) \leqslant 0 =: \beta_2,$$

$$\rho_1 := \beta_1 - \alpha_1 = 1, \quad \rho_2 := \beta_2 - \alpha_2 = 1.$$

Свободная система (то есть система (19.48) с $u = 0$) имеет общее решение

$$x(t) = C_1 t + C_2\sqrt{t^2+1}$$

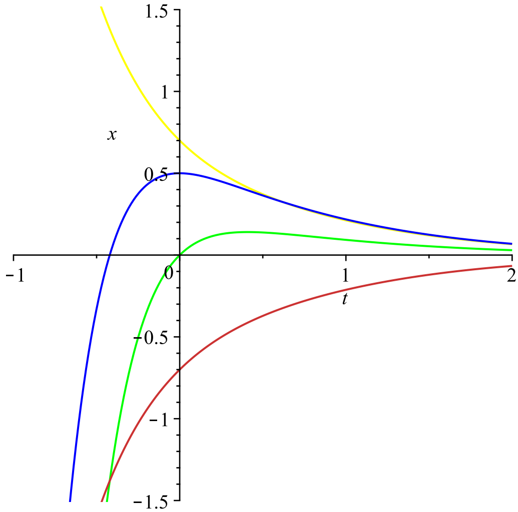

Рисунок 5: Решения системы (19.49)

и, очевидно, является неустойчивой. Положим $\theta := 1$, $\eta := \theta = 1$. Коэффициенты обратной связи (19.42) имеют вид

$$v_1 = \alpha_1 - 5\theta = -11/2, \qquad v_2 = \alpha_2 - 5\theta^2 = -6.$$

Замкнутая система (19.43) принимает вид

$$x'' + \left(\frac{11}{2} + \frac{t}{1+t^2}\right)x' + \left(6 - \frac{1}{1+t^2}\right)x = 0. \tag{19.49}$$

Система (19.49) экспоненциально устойчива с показателем $\theta = 1$. На рисунке 5 изображены решения системы (19.49) при некоторых начальных условиях.

§ 20. Стабилизация линейного нестационарного дифференциального уравнения посредством стационарной обратной связи по выходу

В данном параграфе приводится постановка задачи экспоненциальной стабилизации с наперед заданным показателем устойчивости для линейного нестационарного дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами посредством линейной стационарной обратной связи по состоянию [144].

Рассмотрим линейную управляемую систему, заданную линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с переменными коэффициентами, на вход которой подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $(n-p)$ включительно $(1 \leqslant p \leqslant n)$, а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния x и его производных до порядка $(p-1)$ включительно:

$$x^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) x^{(n-i)} = \sum_{\tau=1}^{m} \sum_{l=p}^{n} b_{l\tau} w_\tau^{(n-l)}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad b_{l\tau} \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{20.1}$$

$$y_j = \sum_{\nu=1}^{p} c_{\nu j} x^{(\nu-1)}, \quad j = \overline{1,k}, \quad c_{\nu j} \in \mathbb{R}, \tag{20.2}$$

$w = \mathrm{col}(w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления; $y = \mathrm{col}(y_1, \ldots$ $\ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ — выходной вектор. Функции $p_i(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, являются измеримыми и ограниченными:

$$\alpha_i \leqslant p_i(t) \leqslant \beta_i, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad i = \overline{1,n},$$

но точные значения этих функций в моменты времени t неизвестны. Рассмотрим задачу стабилизации системы (20.1), (20.2) посредством обратной связи по выходу. Требуется построить функцию $w(t,y)$, $w(t,0) = 0$, такую, что нулевое решение системы (20.1), (20.2), замкнутой обратной связью $w = w(t,y)$, экспоненциально устойчиво с заданным показателем устойчивости.

Пусть управление в системе (20.1), (20.2) строится в виде линейной статической обратной связи по выходу

$$w = Uy. \tag{20.3}$$

Будем предполагать матрицу обратной связи U постоянной. Замкнутая система принимает вид

$$x^{(n)} + q_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + q_n(t)x = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{20.4}$$

где коэффициенты $q_i(t)$ системы (20.4) зависят от $p_i(t)$, $b_{l\tau}$, $c_{\nu j}$, U. По системе (20.1), (20.2) построим матрицы $B = \{b_{l\tau}\} \in \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $l = \overline{1,n}$, $\tau = \overline{1,m}$, $C = \{c_{\nu j}\} \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, $\nu = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$, где $b_{l\tau} = 0$ при $l < p$ и $c_{\nu j} = 0$ при $\nu > p$.

Определение 20.1. Будем говорить, что система (20.1), (20.2) *экспоненциально стабилизируема с показателем* $\theta > 0$ *посредством линейной стационарной статической обратной связи по выходу* (20.3), если существуют постоянная матрица $U \in M_{m,k}(\mathbb{R})$ такая, что всякое решение $x(t)$ замкнутой системы (20.4) экспоненциально устойчиво с показателем θ.

Теорема 20.1. *Пусть линейная стационарная обратная связь* (20.3) *приводит систему* (20.1), (20.2) *к замкнутой системе* (20.4). *Тогда для коэффициентов* $q_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, *системы* (20.4) *выполнены соотношения*

$$q_i(t) = p_i(t) - r_i,$$

где

$$r_i = \operatorname{Sp}(C^T J^{i-1} BU), \quad i = \overline{1,n}. \tag{20.5}$$

Доказательство теоремы 20.1 повторяет доказательство теоремы 0.1 (см. [12, теорема 1]).

Для любых матриц $X, Y \in M_{k,m}(\mathbb{R})$ выполнено очевидное равенство

$$\operatorname{Sp}(XY^T) = (\operatorname{vec} X)^T \cdot (\operatorname{vec} Y). \tag{20.6}$$

Построим матрицы

$$C^T J^0 B,\ C^T JB,\ \ldots\ ,\ C^T J^{n-1} B \in M_{k,m}(\mathbb{R}) \tag{20.7}$$

и матрицу

$$P = [\operatorname{vec}(C^T J^0 B), \ldots, \operatorname{vec}(C^T J^{n-1} B)] \in M_{mk,n}(\mathbb{K}).$$

Обозначим $r = \operatorname{col}(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, $\psi = \operatorname{vec}(U^T)$. Равенства (20.5) представляют систему из n линейных уравнений относительно коэффициентов матрицы U. Учитывая (20.6), систему

(20.5) можно переписать в виде

$$P^T \psi = r. \tag{20.8}$$

Предположим, что матрицы (20.7) линейно независимы. Тогда $\operatorname{rank} P = n$. Отсюда следует, что система (20.8) разрешима для любого вектора $r \in \mathbb{R}^n$. В частности, решением системы (20.8) является $\psi = P(P^T P)^{-1} r$.

Согласно теореме 19.2, для произвольного наперед заданного $\theta > 0$ существует постоянный вектор $r = \operatorname{col}(r_1, \ldots, r_n)$ такой, что система (20.4) с $q_i(t) = p_i(t) - r_i$ экспоненциально устойчива с показателем θ. Разрешая для такого r систему (20.8) относительно ψ и построив матрицу U по формуле $U = \left(\operatorname{vec}^{-1} \psi\right)^T$, мы находим матрицу обратной связи (20.3), экспоненциально стабилизирующую систему (20.1), (20.2) с показателем θ. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 20.2. *Система* (20.1), (20.2) *экспоненциально стабилизируема с произвольным наперед заданным показателем* $\theta > 0$ *посредством линейной стационарной статической обратной связи по выходу* (20.3), *если матрицы* (20.7) *линейно независимы.*

Пример 20.1. Пусть $n = 3$. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{gathered} x''' + p(t)x = w_1' + w_1 - w_2' + w_2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ x \in \mathbb{R}, \quad w = \operatorname{col}(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \end{gathered} \tag{20.9}$$

$$y_1 = x - x', \quad y_2 = x + x', \quad y = \operatorname{col}(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{20.10}$$

Система (20.9), (20.10) имеет вид (20.1), (20.2), где $n = 3$, $m = k = p = 2$. Пусть $p(t)$ — произвольная измеримая функция такая, что $0 \leqslant p(t) \leqslant 1$. Пусть $\theta > 0$ — произвольное число. Требуется построить управление (20.3), где $U = \{u_{ij}\}_{i,j=1}^2$, с постоянными u_{ij}, $i, j = 1, 2$, обеспечивающее экспоненциальную устойчивость замкнутой системы с показателем θ. Не ограничивая общности, предполагаем, что $\theta \geqslant 1$. В силу теоремы 20.2, замкнутая система имеет вид

$$x''' - r_1 x'' - r_2 x' + (p(t) - r_3)x = 0, \tag{20.11}$$

где r_i имеют вид (20.5), и

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сначала построим постоянный вектор $r = \operatorname{col}(r_1, r_2, r_3)$, обеспечивающий экспоненциальную устойчивость системы (20.11). Для построения r используем доказательство теоремы 19.1. Имеем $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 1$. Тогда $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 0$, $\rho_3 = 1$, $L = 1$. Положим $\eta := \theta$. Используя доказательство теоремы 19.1, построим многочлены (19.1), (19.2) такие, что выполнены свойства (i), (ii), (iii):

$$\begin{aligned} f(\lambda) &:=(\lambda + 2\eta)(\lambda + 3\eta)(\lambda + 14\eta) = \lambda^3 + 19\eta\lambda^2 + 76\eta^2\lambda + 84\eta^3, \\ g(\lambda) &:=(\lambda + \eta)(\lambda + 5\eta)(\lambda + 12\eta) = \lambda^3 + 18\eta\lambda^2 + 77\eta^2\lambda + 60\eta^3. \end{aligned}$$

Тогда $\gamma_1 = 18\eta$, $\gamma_2 = 76\eta^2$, $\gamma_3 = 60\eta^3$, $\delta_1 = 19\eta$, $\delta_2 = 77\eta^2$, $\delta_3 = 84\eta^3$. Условия (i), (ii), (iii) выполнены. Коэффициенты r_1, r_2, r_3 имеют вид

$$r_1 = -18\theta, \quad r_2 = -76\theta^2, \quad r_3 = -60\theta^3. \tag{20.12}$$

Подставим (20.12) в (20.11). Замкнутая система (20.11) имеет вид

$$x''' + 18\theta x'' + 76\theta^2 x' + (p(t) + 60\theta^3)x = 0. \tag{20.13}$$

Все решения системы (20.13) экспоненциально устойчивы с показателем θ. Проверим это.

Замена $z_1 = x$, $z_2 = x'$, $z_3 = x''$ приводит уравнение (20.13) к системе

$$\dot{z} = A(t)z, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{20.14}$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \ A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(p(t) + 60\theta^3) & -76\theta^2 & -18\theta \end{bmatrix}.$$

Покажем, что система (20.14) экспоненциально устойчива с показателем θ. Замена

$$z(t) = e^{-\theta t} y(t). \tag{20.15}$$

приводит систему (20.14) к системе

$$\dot y = B(t)y, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{20.16}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \ B(t) = \begin{bmatrix} \theta & 1 & 0 \\ 0 & \theta & 1 \\ -(p(t) + 60\theta^3) & -76\theta^2 & -17\theta \end{bmatrix}.$$

Покажем, что система (20.16) устойчива по Ляпунову.

Положим $S = \begin{bmatrix} 9000\theta^4 & 2580\theta^3 & 150\theta^2 \\ 2580\theta^3 & 804\theta^2 & 46\theta \\ 150\theta^2 & 46\theta & 3 \end{bmatrix}$. Найдем ведущие главные миноры s_i, $i = 1, 2, 3$, матрицы S. Имеем

$$s_1 = 9000\theta^4 > 0,$$

$$s_2 = \det \begin{bmatrix} 9000\theta^4 & 2580\theta^3 \\ 2580\theta^3 & 804\theta^2 \end{bmatrix} = 579600\theta^6 > 0,$$

$$s_3 = \det S = 208800\theta^6 > 0.$$

Тогда $S > 0$ в смысле квадратичных форм. Далее, имеем

$$B^T(t)S + SB(t) = \begin{bmatrix} -300\theta^2 p(t) & -46\theta p(t) & -3p(t) \\ -46\theta p(t) & -224\theta^3 & -10\theta^2 \\ -3p(t) & -10\theta^2 & -10\theta \end{bmatrix}. \tag{20.17}$$

Найдем главные миноры матрицы (20.17). Получим

$$\Delta_1 = -300\theta^2 p(t) \leqslant 0, \quad \Delta_2 = -224\theta^3 < 0, \quad \Delta_3 = -10\theta < 0,$$
$$\Delta_{1,2} = 672000\theta^5 p(t) - 2116\theta^2 p^2(t) =$$
$$= 4\theta^2 p(t)(168000\theta^3 - 529p(t)) \geqslant 0,$$
$$\Delta_{1,3} = 3000\theta^3 p(t) - 9p^2(t) = 3p(t)(1000\theta^3 - 3p(t)) \geqslant 0,$$
$$\Delta_{2,3} = 2140\theta^4 > 0,$$
$$\Delta_{1,2,3} = \det(B^T(t)S + SB(t)) = -642000\theta^6 p(t) +$$
$$+ 20416\theta^3 p^2(t) = -16\theta^3 p(t)(40125\theta^3 - 1276p(t)) \leqslant 0.$$

Следовательно, матрица (20.17) неположительно определена. Поэтому система (20.16) устойчива. Следовательно, все решения системы (20.16) ограничены при $t \to +\infty$. Тогда в силу

(20.15) выполнено $\|z(t)\| = O(e^{-\theta t})$, $t \to +\infty$. Таким образом, система (20.14) экспоненциально устойчива с показателем θ.

Далее, построим матрицы (20.7) и P. Получим

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $\operatorname{rank} P = 3$ и матрицы (20.7) линейно независимы. Решая систему (20.8), где r_i имеют вид (20.12), получим

$$\psi = \operatorname{col}(9\theta/2 - 15\theta^3, -9\theta/2 + 19\theta^2 - 15\theta^3,$$
$$-9\theta/2 - 19\theta^2 - 15\theta^3, 9\theta/2 - 15\theta^3).$$

Получим матрицу обратной связи

$$U = \begin{bmatrix} 9\theta/2 - 15\theta^3 & -9\theta/2 - 19\theta^2 - 15\theta^3 \\ -9\theta/2 + 19\theta^2 - 15\theta^3 & 9\theta/2 - 15\theta^3 \end{bmatrix}. \qquad (20.18)$$

Получим, что управление (20.3) с матрицей (20.18) экспоненциально стабилизирует систему (20.9), (20.10) с показателем θ.

В качестве примера численного моделирования рассмотрим (20.9), (20.10), где

$$\widehat{p}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1), \\ 0, & t \in [1,2), \end{cases} \qquad p(t) = \widehat{p}(t-2k),\ t \in [2k, 2(k+1)),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Имеем $0 \leqslant p(t) \leqslant 1$. Функция $p(t)$ является ω-периодической с периодом $\omega = 2$. Свободная система

$$x''' + p(t)x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad (20.19)$$

равносильна системе дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} z, \qquad z \in \mathbb{R}^3. \qquad (20.20)$$

Обозначим через $Z(t,s)$ матрицу Коши системы (20.20). Так как система (20.20) кусочно-постоянна, то можно точно найти матрицу монодромии $\Phi(\omega)$ для системы (20.20).

Пусть $t \in [0,1)$. Тогда $p(t)=1$.

Следовательно, матрица системы (20.20) имеет вид $A_0 = = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда

$$Z(1,0) = e^{A_0} =$$
$$\begin{bmatrix} \dfrac{1+2ce^{\frac{3}{2}}}{3e} & \dfrac{-1+(c+\sqrt{3}s)e^{\frac{3}{2}}}{3e} & \dfrac{1-(c+\sqrt{3}s)e^{\frac{3}{2}}}{3e} \\ \dfrac{-1+(c-\sqrt{3}s)e^{\frac{3}{2}}}{3e} & \dfrac{1+2ce^{\frac{3}{2}}}{3e} & \dfrac{-1+(c+\sqrt{3}s)e^{\frac{3}{2}}}{3e} \\ \dfrac{1-(c+\sqrt{3}s)e^{\frac{3}{2}}}{3e} & \dfrac{-1+(c-\sqrt{3}s)e^{\frac{3}{2}}}{3e} & \dfrac{1+2ce^{\frac{3}{2}}}{3e} \end{bmatrix},$$

где $c = \cos\frac{\sqrt{3}}{2}$, $s = \sin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пусть $t \in [1,2)$. Тогда $p(t) = 0$. Следовательно, матрица системы (20.20) имеет вид $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда $Z(2,1) = = e^{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Следовательно,

$$Z(2,0) = Z(2,1)\cdot Z(1,0) = \tag{20.21}$$
$$\begin{bmatrix} \dfrac{1+(5c-3\sqrt{3}s)e^{\frac{3}{2}}}{6e} & \dfrac{-1+(7c+\sqrt{3}s)e^{\frac{3}{2}}}{6e} & \dfrac{1+2(c+2\sqrt{3}s)e^{\frac{3}{2}}}{6e} \\ -\dfrac{2\sqrt{3}se^{\frac{1}{2}}}{3} & \dfrac{(3c-\sqrt{3}s)e^{\frac{1}{2}}}{3} & \dfrac{(3c+\sqrt{3}s)e^{\frac{1}{2}}}{3} \\ \dfrac{1-(c+\sqrt{3}s)e^{\frac{3}{2}}}{3e} & \dfrac{-1+(c-\sqrt{3})e^{\frac{3}{2}}}{3e} & \dfrac{1+2ce^{\frac{3}{2}}}{3e} \end{bmatrix},$$

где $c = \cos\frac{\sqrt{3}}{2}$, $s = \sin\frac{\sqrt{3}}{2}$. Система (20.20) является ω-периодической. Поэтому матрица монодромии $\Phi(\omega)$ системы (20.20) равна (20.21). Вычисляя приближенно собственные значения λ_1, λ_2, и λ_3 матрицы $\Phi(\omega)$, получим $\lambda_{1,2} \approx 0.418 \pm 2.167i$, $\lambda_3 \approx 0.205$. Следовательно, $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$. Поэтому, система (20.20) (и следовательно, уравнение (20.19)) неустойчива. Положим

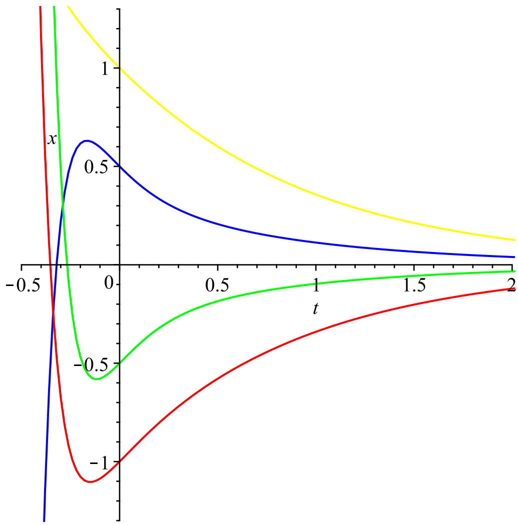

Рисунок 6: Решения системы (20.22)

$\theta := 1$, $\eta := \theta = 1$. Матрица (20.18) обратной связи примет вид

$$U = \begin{bmatrix} -21/2 & -77/2 \\ -1/2 & -21/2 \end{bmatrix}.$$

Замкнутая система (20.13) примет вид

$$x''' + 18x'' + 76x' + (p(t) + 60)x = 0. \tag{20.22}$$

Система (20.22) экспоненциально устойчива с показателем устойчивости $\theta = 1$. На рисунке 6 изображены решения системы (20.22) при некоторых начальных условиях.

Заключение

В работе исследованы задачи модального управления, задачи назначения конечного спектра и стабилизации линейных управляемых систем посредством статической обратной связи по выходу. Основные результаты, полученные в работе, состоят в следующем.

1. Для линейной стационарной управляемой системы, заданной дифференциальным уравнением n-го порядка, с сосредоточенными и (или) распределенными запаздываниями в состоянии получен критерий разрешимости задачи модального управления и задачи назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу. Получены следствия о стабилизации рассматриваемых систем.

2. Для линейных стационарных управляемых систем с сосредоточенными запаздываниями исследована задача модального управления и задача назначения произвольного конечного спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу. Для систем с сосредоточенными и распределенными запаздываниями изучена задача назначения произвольного конечного спектра. Получен критерий разрешимости этих задач в случае, когда коэффициенты систем имеют специальный вид. Получены следствия о стабилизации рассматриваемых систем.

3. Для линейных стационарных управляемых систем высших порядков вводится постановка задачи матричного модального управления. Получен критерий разрешимости такой задачи посредством статической обратной связи по выходу. Установлена связь между задачей матричного модального управления и задачей скалярного модального управления.

4. Получены достаточные условия экспоненциальной стабилизации линейного нестационарного дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами посредством линейной стационарной обратной связи по состоянию и по выходу.

Перечислим некоторые возможные направления развития исследований, проведенных в работе.

1. На основе методики, разработанной в главах I, II, распространить результаты о модальном управлении, назначении

спектра и стабилизации:

а) на системы с дискретным временем с запаздываниями;

б) на системы с непрерывным временем с запаздываниями в управлении и (или) в выходе;

в) на нелинейные системы (по первому приближению).

2. На основе теории, разработанной в главе III, перенести теорию матричного модального управления линейных систем высших порядков посредством линейной статической обратной связи на блочные системы высших порядков.

3. Применить разработанную в главе IV методику робастной экспоненциальной стабилизации линейных нестационарных дифференциальных уравнений посредством линейной стационарной обратной связи по состоянию и по выходу к линейным квазидифференциальным уравнениям и к нелинейным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Асмыкович И. К., Марченко В. М.** Модальное управление многовходными линейными системами с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. — 1980. — Вып. 1. — С. 5–10.

2. **Борковская И. М., Марченко В. М.** Модальное управление системами с распределенным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. — 1993. — Вып. 8. — С. 40–52.

3. **Былов Б. Ф., Виноград Р. Е., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. — М.: Наука, 1966. — 576 с.

4. **Вагина М. Ю., Кипнис М. М.** Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями // Математические заметки. — 2003. — Т. 74, вып. 5. — С. 786–789. https://doi.org/10.4213/mzm603

5. **Гелиг А. Х., Зубер И. Е.** Инвариантная стабилизация некоторых классов неопределенных систем с запаздывающим аргументом // Автоматика и телемеханика. — 2011. — Вып. 9. — С. 161–172. https://doi.org/10.1134/S0005117911090153

6. **Гелиг А. Х., Зубер И. Е., Захаренков М. С.** Новые классы стабилизируемых неопределенных систем // Автоматика и телемеханика. — 2016. — Вып. 10. — С. 93–108. https://doi.org/10.1134/S0005117916100040

7. **Гелиг А. Х., Зубер И. Е.** Стабилизация по многомерному выходу некоторого класса неопределенных систем // Автоматика и телемеханика. — 2018. — Вып. 9. — С. 3–17. https://doi.org/10.1134/S0005117918090011

8. **Демидович Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

9. **Долгий Ю. Ф.** К стабилизации линейных автономных систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. — 2007. — Вып. 10. — С. 92–105. https://doi.org/10.1134/S0005117907100098

10. **Долгий Ю. Ф.** Оптимальная импульсная стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского. Екатеринбург, 16–20 сентября 2019 г. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2019. — С. 119–122.

11. **Жабко А. П., Харитонов В. Л.** Необходимые и достаточные условия устойчивости линейного семейства полиномов // Автоматика и телемеханика. — 1994. — Вып. 10. — С. 125–134.

12. **Зайцев В. А.** Модальное управление линейным дифференциальным уравнением с неполной обратной связью // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, № 1. — С. 133–135.
https://doi.org/10.1023/A:1025188512610

13. **Зайцев В. А.** Управление спектром в линейных системах с неполной обратной связью // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 9. — С. 1320–1328.
https://doi.org/10.1134/s0012266109090109

14. **Зайцев В. А.** Управление спектром в билинейных системах // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 7. — С. 1061–1064.
https://doi.org/10.1134/S0012266110070153

15. **Зайцев В. А.** Согласованные системы и управление спектром собственных значений: I // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 1. — С. 117–131.
https://doi.org/10.1134/s001226611110120

16. **Зайцев В. А.** Согласованные системы и управление спектром собственных значений: II // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 6. — С. 851–859.
https://doi.org/10.1134/s0012266112060092

17. **Зайцев В. А., Ким И. Г.** Задача назначения конечного спектра в линейных системах с запаздыванием по состоянию при помощи статической обратной связи по выходу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2016. — Т. 26, вып. 4. — С. 463–473.
https://doi.org/10.20537/vm160402

18. **Зайцев В. А., Ким И. Г.** Модальное управление линейным дифференциальным уравнением с запаздываниями по состоянию с неполной обратной связью // Еругинские чтения–2017: тезисы докладов XVII международной научной конференции по дифференциальным уравнениям. Минск, 16–20 мая 2017 г. — Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2017. — С. 74.

19. **Зайцев В. А., Ким И. Г.** О стабилизации линейного нестационарного дифференциального уравнения линейной стационарной обратной связью // Тезисы докладов Международной конференции по математической теории управления и механике. Суздаль, 07–11 июля 2017 г. — Владимир: Аркаим, 2017. — С. 71–72.

20. **Зайцев В. А., Ким И. Г.** О назначении произвольного спектра в линейных стационарных системах с соизмеримыми запаздываниями по состоянию при помощи статической обратной связи по выходу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2017. — Т. 27, вып. 3. — С. 315–325.
https://doi.org/10.20537/vm170303

21. **Зайцев В. А., Ким И. Г.** О назначении спектра посредством статической обратной связи по выходу для линейных систем с непрерывным и дискретным временем с запаздываниями по состоянию // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: материалы XIV Международной научной конференции (конференция Пятницкого). Москва, 30 мая–01 июня 2018 г. — Москва: ИПУ РАН, 2018. — С. 164–166.

22. **Зайцев В. А., Ким И. Г.** О назначении спектра и стабилизации блочных систем статической обратной связью по выходу // Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2019): материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня роджения академика Н. Н. Красовского. Екатеринбург, 16–20 сентября 2019 г. — Екатеринбург: ИММ УРО РАН, 2019. — С. 142–144.

23. **Зайцев В. А., Ким И. Г.** О назначении спектра в линейных системах с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии посредством статической обратной связи по выходу // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби (CGS'2020): Материалы III Международного семинара, посвященного 75-летию академика А. И. Субботина. Екатеринбург, 26–30 октября 2020 г. — Екатеринбург: ИММ УРО РАН, 2020. — С. 164–167.

24. **Зайцев В. А., Ким И. Г.** Об управлении спектром линейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием посредством статической обратной связи по выходу // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. Ижевск, 15–19 июня 2020 г. — Ижевск: Удмуртский университет, 2020. — С. 173–174.

25. **Зайцев В. А., Ким И. Г.** Назначение спектра в линейных системах с несколькими соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии посредством статической обратной связи по выходу // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2020. — Т. 56. — С. 5–19.
https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-56-01

26. **Ким И. Г.** О стационарной стабилизации линейной полной обратной связью линейных нестационарных управляемых систем в форме Хессенберга // Современные проблемы математики и её приложений: тезисы Международной (49-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. Екатеринбург, 04–10 февраля 2018 г. — Екатеринбург: ИММ УРО РАН, 2018. — С. 31.

27. **Ким И. Г.** Стабилизация двухмассовой системы статической обратной связью по выходу // Современные проблемы математики и её приложений: тезисы Международной (50-й Всероссий-

ской) молодежной школы-конференции. Екатеринбург, 03–09 февраля 2019 г. — Екатеринбург: ИММ УРО РАН, 2019. — С. 38–39.

28. **Ким И. Г., Зайцев В. А.** Модальное управление линейным дифференциальным уравнением с соизмеримыми запаздываниями статической обратной связью по выходу // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. Ижевск, 15–19 июня 2020 г. — Ижевск: Удмуртский университет, 2020. — С. 182–184.

29. **Ким И. Г.** Назначение конечного спектра в линейных системах с несколькими сосердоточенными и распределенными запаздываниями посредством статической обратной связи по выходу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2020. — Т. 30, вып. 3. — С. 367–384. https://doi.org/10.35634/vm200302

30. **Красовский Н. Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Наука, 1959. — 211 с.

31. **Красовский Н. Н.** Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздыванием времени // Прикладная математика и механика. — 1962. — Т. 26, № 1. — С. 39–51.

32. **Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.** О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1963. — Т. 6. — С. 3–15.

33. **Красовский Н. Н.** О стабилизации нейстойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи // Прикладная математика и механика. — 1963. — Т. 27, № 4. — С. 641–663.

34. **Красовский Н. Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикладная математика и механика. — 1964. — Т. 28, № 4. — С. 716–724.

35. **Левин А. Ю.** Абсолютная неосцилляционная устойчивость и смежные вопросы // Алгебра и анализ. — 1992. — Т. 4, вып. 1. — С. 154–166.

36. **Леонов Г. А., Шумафов М. М.** Методы стабилизации линейных управляемых систем. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. — 421 с.

37. **Малыгина В. В.** Признаки абсолютной устойчивости дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Прикладная математика и вопросы управления. — 2018. — № 4. — С. 53–69. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2018.4.03

38. **Малыгина В. В., Баландин А. С.** Асимптотическая устойчивость одного класса уравнений нейтрального типа // Сибирский математический журнал. — 2021. — Т. 62, № 1. — С. 106–116.
https://doi.org/10.33048/smzh.2021.62.109

39. **Малыгина В. В., Чудинов К. М.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. I // Известия высших учебных заведений. Математика — 2013. — № 6. — С. 25–36.
https://doi.org/10.3103/S1066369X13060030

40. **Марченко В. М., Борковская И. М.** Модальное управление системами с распределенным запаздыванием в условиях неполной информации // Дифференциальные уравнения. — 1993. — Т. 29, № 11. — С. 1928–1936.

41. **Марченко В. М.** Управление системами с последействием в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 7. — С. 1003–1017.
https://doi.org/10.1134/S0012266111070111

42. **Метельский А. В.** Задача назначения конечного спектра для системы запаздывающего типа // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 5. — С. 692–701.
https://doi.org/10.1134/s0012266114050115

43. **Метельский А. В.** Задача назначения конечного спектра для дифференциальной системы нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 1. — С. 70–83.
https://doi.org/10.1134/s0012266115010073

44. **Метельский А. В.** Модальная управляемость дифференциальной системы с запаздыванием по неполному выходу // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 11. — С. 1508–1517.
https://doi.org/10.1134/S0012266118110095

45. **Осипов Ю. С.** О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. — 1965. — Т. 1, № 5. — С. 605–618.

46. **Перепелкин Е. А.** О задаче управления спектром системы второго порядка // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 11. — С. 1555–1558.
https://doi.org/10.1134/s0012266117110167

47. **Понтрягин Л. С.** О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1942. — Т. 6, № 3. — С. 115–134.

48. **Постников М. М.** Устойчивые многочлены. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 176 с.

49. **Попов В. М.** Гиперустойчивость автоматических систем. — М.: Наука, 1970. — 335 с.

50. Справочник по теории автоматического регулирования. Под ред. А. А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с.

51. **Харитонов В. Л.** Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1978. — Т. 14, № 11. — С. 2086–2088.

52. **Хартовский В. Е., Павловская А. Т.** К проблеме модального управления линейными системами нейтрального типа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2013. — Вып. 4. — С. 146–155.
https://doi.org/10.20537/vm130414

53. **Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н.** Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. МИАН СССР. — 1949. — Т. 26. — С. 3–331.

54. **Шумафов М. М.** Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2019. — Т. 6, № 4. — С. 564–591.
https://doi.org/10.1134/S1063454119040095

55. **Щеглова А. А.** Стабилизируемость линейных алгебро-дифференциальных систем управления с одним входом // Автоматика и телемеханика. — 2010. — Вып. 9. — С. 33–56.
https://doi.org/10.1134/S0005117910090031

56. **Aeyels D., Peuteman J.** Uniform asymptotic stability of linear time-varying systems // Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. Eds: Blondel V., Sontag E. D., Vidyasagar M., Willems J. C. — London, UK: Springer, 1999. — Pp. 1–5.
https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0807-8

57. **Bachelier O., Bosche J., Mehdi D.** On pole placement via eigenstructure assignment approach // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2006. — Vol. 51, issue 9. — Pp. 1554–1558.
https://doi.org/10.1109/tac.2006.880809

58. **Barmish B. R.** Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1985. — Vol. 46, issue 4. — Pp. 399–408.
https://doi.org/10.1007/bf00939145

59. **Belozyorov V.** New solution method of linear static output feedback design problem for linear control systems // Linear Algebra and its Applications. — 2016. — Vol. 504. — Pp. 204–227.
https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.04.001

60. **Blanchini F., Colaneri P.** Uncertain systems: time-varying versus time-invariant uncertainties // Uncertainty in Complex Networked Systems. Systems and Control: Foundations and Applications. Eds: Başar T. — Germany: Birkhäuser, Cham, 2018. — Pp. 3–91.

https://doi.org/10.1007/978-3-030-04630-9_1
61. **Bliman P. A.** A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2004. — Vol. 42, no. 6. — Pp. 2016–2042. https://doi.org/10.1137/S0363012901398691
62. **Brockett R. W.** A stabilization problem // Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. — London: Springer, 1999. — Pp. 75–78.
https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0807-8_16
63. **Brockett R., Byrnes C.** Multivariable Nyquist criteria, root loci, and pole placement: A geometric viewpoint // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1981. — Vol. 26, issue 1. — Pp. 271–284.
https://doi.org/10.1109/tac.1981.1102571
64. **Byrnes C. I.** Pole assignment by output feedback // Three Decades of Mathematical System Theory. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Eds: Nijmeijer H., Schumacher J. M. — Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1989. — Vol. 135. — Pp. 31–78.
65. **Carniato L. A., Carniato A. A., Teixeira C. M., Mainardi Junior E. I., Cardim R., Assunção E.** Output control of continuous-time uncertain switched linear systems via switched static output feedback // International Journal of Control. — 2018. — Vol. 93. — Pp. 1127–1146.
https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1495341
66. **Champetier C., Magni J.-F.** On eigenstructure assignment by gain output feedback // SIAM Journal on Control and Optimization. — 1991. — Vol. 29, № 4. — Pp. 848–865.
https://doi.org/10.1137/0329046
67. **Chesi G., Garulli A., Tesi A., Vicino A.** Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogeneous Lyapunov functions // Automatica. — 2007. — Vol. 43, issue 2. — Pp. 309–316.
https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.08.024
68. **Chesi G.** Sufficient and necessary LMI conditions for robust stability of rationally time-varying uncertain systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2013. — Vol. 58, issue 6. — Pp. 1546–1551.
https://doi.org/10.1109/tac.2012.2229840
69. **Chu E. K.** Pole assignment for second-order systems // Mechanical Systems and Signal Processing. — 2002. — Vol. 16, issue 1. — Pp. 39–59.
https://doi.org/10.1006/mssp.2001.1439
70. **Davison E. J.** On pole assignment in linear systems with incomplete state feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1970. — Vol. 15, issue 3. — Pp. 348–351.
https://doi.org/10.1109/TAC.1970.1099458

71. **Davison E. J., Chatterjee R.** A note on pole assignment in linear systems with incomplete state feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1971. — Vol. AC-16, issue 1. — Pp. 98–99. https://doi.org/10.1109/TAC.1971.1099652

72. **Davison E., Wang S.** On pole assignment in linear multivariable systems using output feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1975. — Vol. 20, issue 4. — Pp. 516–518. https://doi.org/10.1109/tac.1975.1101023

73. **Dolgii Yu., Sesekin A.** Optimal pulse stabilization of autonomous linear systems of differential equations with aftereffect // 15th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB). Moscow, 03–05 June 2020. https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140479

74. **Duan G.-R.** Parametric approaches for eigenstructure assignment in high-order linear systems // International Journal of Control, Automation and Systems. — 2005. — Vol. 3, issue 3. — Pp. 419–429.

75. **Duan G.-R., Zhou B.** Solution to the second-order Sylvester matrix equation $MVF^2 + DVF + KV = BW$ // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2006. — Vol. 51, issue 5. — Pp. 805–809. https://doi.org/10.1109/tac.2006.874989

76. **Egorov A. V., Cuvas C., Mondié S.** Necessary and sufficient stability conditions for linear systems with pointwise and distributed delays // Automatica. — 2017. — Vol. 80. — Pp. 218–224. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.02.034

77. **Fu M.** Pole placement via static output feedback is NP-hard // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2004. — Vol. 49, issue 5. — Pp. 855–857. https://doi.org/10.1109/tac.2004.828311

78. **Geromel J. C., Colaneri P.** Robust stability of time varying polytopic systems // Systems and Control Letters. — 2006. — Vol. 55, issue 1. — Pp. 81–85. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2004.11.016

79. **Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.** Matrix polynomials. — Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009. — 433 p. https://doi.org/10.1137/1.9780898719024

80. **Gritli H., Belghith S.** New LMI conditions for static output feedback control of continuous-time linear systems with parametric uncertainties // 2018 European Control Conference (ECC). Limassol, Cyprus, 12–15 June 2018. https://doi.org/10.23919/ECC.2018.8550597

81. **Gritli H., Belghith S., Zemouche A.** LMI-based design of robust static output feedback controller for uncertain linear

continuous systems // 2019 International Conference on Advanced Systems and Emergent Technologies (IC_ASET). Hammamet, Tunisia, 19–22 March 2019.
https://doi.org/10.1109/ASET.2019.8871044

82. **Gu K., Niculescu S.-I.** Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. — 2003. — Vol. 125, issue 2. — Pp. 158–165.
https://doi.org/10.1115/1.1569950

83. **Gu D.-K., Liu G.-P., Duan G.-R.** Robust stability of uncertain second-order linear time-varying systems // Journal of the Franklin Institute. — 2019. — Vol. 356, issue 16. — Pp. 9881–9906.
https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.09.014

84. **Henrion D., Šebek M., Kučera V.** Robust pole placement for second-order systems: An LMI Approach // IFAC Proceedings Volumes. — 2003. — Vol. 36, issue 11. — Pp. 419–424.
https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)35700-2

85. **Hermann R., Martin C.** Applications of algebraic geometry to systems theory–Part I // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1977. — Vol. 22, issue 1. — Pp. 19–25.
https://doi.org/10.1109/tac.1977.1101395

86. **Hu T., Blanchini F.** Non-conservative matrix inequality conditions for stability/stabilizability of linear differential inclusions / T. Hu // Automatica. — 2010. — Vol. 46, issue 1. — Pp. 190–196.
https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.10.022

87. **Ilchmann A., Owens D. H., Prätzel-Wolters D.** Sufficient conditions for stability of linear time-varying systems // Systems and Control Letters. — 1987. — Vol. 9, issue 2. — Pp. 157–163.
https://doi.org/10.1016/0167-6911(87)90022-3

88. **Jameson A.** Design of a single-input system for specified roots using output feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1970. — Vol. 15, issue 3. — Pp. 345–348.
https://doi.org/10.1109/TAC.1970.1099454

89. **Khargonekar P. P., Petersen I. R., Zhou K.** Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H^∞ control theory // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1990. — Vol. 35, issue 3. — Pp. 356–361.
https://doi.org/10.1109/9.50357

90. **Kamen E.** Linear systems with commensurate time delays: stability and stabilization independent of delay // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1982. — Vol. 27, issue 2. — Pp. 367–375.
https://doi.org/10.1109/TAC.1982.1102916

91. **Kharitonov V. L.** Robust stability analysis of time delay systems: a survey // Annual Reviews in Control. — 1999. — Vol. 23. — Pp. 185–196.

https://doi.org/10.1016/S1367-5788(99)90087-1

92. **Kharitonov V. L., Zhabko A. P.** Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. — 2003. — Vol. 39, issue 1. — Pp. 15–20.
https://doi.org/10.1016/s0005-1098(02)00195-4

93. **Kharitonov V. L., Niculescu S.-I., Moreno J., Michiels W.** Static output feedback stabilization: necessary conditions for multiple delay controllers // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2005. — Vol. 50, issue 1. — Pp. 82–86.
https://doi.org/10.1109/TAC.2004.841137

94. **Kharitonov V. L.** Time-Delay Systems. — Boston: Birkäuser, 2013. — 311 p.
https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8367-2

95. **Kim I. G., Zaitsev V. A.** Spectrum assignment by static output feedback for linear systems with time delays in states // 2018 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). Moscow, 30 May – 01 June 2018.
https://doi.org/10.1109/STAB.2018.8408365

96. **Kim Y., Kim H. S., Junkins J. L.** Eigenstructure assignment algorithm for mechanical second-order systems // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 1999. — Vol. 22, issue 5. — Pp. 729–731.
https://doi.org/10.2514/2.4444

97. **Kim M., Rosenthal J., Wang X.** Pole placement and matrix extension problems: a common point of view // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2004. — Vol. 42, no. 6. — Pp. 2078–2093.
https://doi.org/10.1137/S0363012999354429

98. **Kimura H.** Pole assignment by gain output feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1975. — Vol. 20, issue 4. — Pp. 509–516.
https://doi.org/10.1109/tac.1975.1101028

99. **Kiritsis H. K.** Arbitrary pole placement by constant output feedback for linear time invariant systems // Asian Journal of Control. — 2016. — Vol. 19, no. 3. — Pp. 832–839.
https://doi.org/10.1002/asjc.1439

100. **Lancaster P., Tismenetsky M.** The theory of matrices. Second edition with applications. — Orlando: Academic Press, 1985. — 570 p.

101. **Lee E., Zak S.** On spectrum placement for linear time invariant delay systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1982. — Vol. 27, issue 2. — Pp. 446–449.
https://doi.org/10.1109/TAC.1982.1102931

102. **Leyva-Ramos J., Pearson A. E.** Output feedback stabilizing controller for time-delay systems // Automatica. — 2000.

— Vol. 36, issue 4. — Pp. 613–617.
https://doi.org/10.1016/s0005-1098(99)00150-8

103. **Mazenc F., Niculescu S.-I., Bekiaris-Liberis N.** Asymptotic stabilization of linear time-varying systems with input delays via delayed static output feedback // 2015 American Control Conference (ACC). Chicago, IL, USA, 01–03 July 2015.
https://doi.org/10.1109/ACC.2015.7172052

104. **Michiels W., Niculescu S.-I.** Stability and Stabilization of Time-Delay Systems. An Eigenvalue-Based Approach. — Philadelphia: SIAM, 2007. — 400 p.
https://doi.org/10.1137/1.9780898718645

105. **Manitius A., Olbrot A.** Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1979. — Vol. 24, issue 4. — Pp. 541–552.
https://doi.org/10.1109/TAC.1979.1102124

106. **Montagner V. F., Peres P. L. D.** A new LMI condition for the robust stability of linear time-varying systems // Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawaii, USA, 09–12 December 2003.
https://doi.org/10.1109/cdc.2003.1272249

107. **Narayanan H., Narayanan H.** On the linear static output feedback problem: The annihilating polynomial approach // Linear Algebra and its Applications. — 2019. — Vol. 579. — Pp. 336–364.
https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.06.005

108. **Niculescu S.-I., Abdallah C. T.** Delay effects on static output feedback stabilization // Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control. Sydney, NSW, Australia, 12–15 December 2000.
https://doi.org/10.1109/CDC.2000.914234

109. **Olbrot A.** Stabilizability, detectability, and spectrum assignment for linear autonomous systems with general time delays // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1978. — Vol. 23, issue 5. — Pp.887–890.
https://doi.org/10.1109/TAC.1978.1101879

110. **Pekař L., Gao Q.** Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: a literature overview of some recent results // IEEE Access. — 2018. — Vol. 6. — Pp. 35457–35491.
https://doi.org/10.1109/access.2018.2851453

111. **Petersen I. R.** A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // Systems and Control Letters. — 1987. — Vol. 8, issue 4. — Pp. 351–357.
https://doi.org/10.1016/0167-6911(87)90102-2

112. **Popov V. M.** Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions // Revue Roumaine des Sciences Techniques-Serie Electrotechnique et Energetique. — 1964. — Vol. 9, issue 4. — Pp. 629–690.

113. **Ragusa M. A.** Necessary and sufficient condition for a VMO function // Applied Mathematics and Computation. — 2012. — Vol. 218, issue 24. — Pp. 11952–11958.
https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.06.005

114. **Ramos D. C. W., Peres P. L. D.** An LMI approach to compute robust stability domains for uncertain linear systems // Proceedings of the 2001 American Control Conference. Arlington, VA, USA, 25–27 June, 2001.
https://doi.org/10.1109/acc.2001.946351

115. **Richard J.-P.** Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems //Automatica. — 2003. — Vol. 39, issue 10. — Pp. 1667–1694.
https://doi.org/10.1016/S0005-1098(03)00167-5

116. **Robenack K., Vobwinkell R., Franke M.** On the eigenvalue placement by static output feedback via quantifier elimination // 2018 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). Zadar, Croatia, 19–22 June 2018.
https://doi.org/10.1109/med.2018.8442817

117. **Rosenthal J., Schumacher J. M., Willems J. C.** Generic eigenvalue assignment by memoryless real output feedback // Systems & Control Letters. — 1995. — Vol. 26, issue 4. — Pp. 253–260.
https://doi.org/10.1016/0167-6911(95)00019-6

118. **Rosenthal J., Wang X.** Inverse eigenvalue problems for multivariable linear systems // Systems and Control in the Twenty-First Century. Eds: Byrnes C. I., Datta B. N., Gilliam D., Martin C. F. — Boston: Birkhäuser, 1997. — Pp. 289–311.

119. **Rosenthal J., Willems J. C.** Open problems in the area of pole placement // Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. — London: Springer, 1999. — Pp. 181–191.
https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0807-8_37

120. **Sadabadi M. S., Peaucelle D.** From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey // Annual Reviews in Control. — 2016. — Vol. 42. — Pp. 11–26.
https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2016.09.014

121. **Shcheglova A. A., Petrenko P. S.** Stabilizability of solutions to linear and nonlinear differential-algebraic equations // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 196, no. 4. — Pp. 596–615.
https://doi.org/10.1007/s10958-014-1679-4

122. **Shafai B., Keel L. H.** New pole placement algorithm: polynomial matrix approach // 1990 American Control Conference. San Diego, CA, USA, 23–25 May 1990.
https://doi.org/10.23919/acc.1990.4791020

123. **Sipahi R., Niculescu S.-I., Abdallah C. T., Michiels W., Gu K.** Stability and stabilization of systems with time delay

// IEEE Control Systems. — 2011. — Vol. 31, issue 1. — Pp. 38–65.
https://doi.org/10.1109/MCS.2010.939135

124. **Sridhar B., Lindorff D. P.** Pole placement with constant gain output feedback // International Journal of Control. — 1973. — Vol. 18, issue 5. — Pp. 993–1003.
https://doi.org/10.1080/00207177308932575

125. **Syrmos V. L., Abdallah C. T., Dorato P., Grigoriadis K.** Static output feedback—A survey // Automatica. — 1997. — Vol. 33, issue 2. — Pp. 125–137.
https://doi.org/10.1016/s0005-1098(96)00141-0

126. **Syrmos V. L., Lewis F. L.** Output feedback eigenstructure assignment using two Sylvester equations // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1993. — Vol. 38, issue 3. — Pp. 495–499.
https://doi.org/10.1109/9.210155

127. **Vrabel R.** A note on uniform exponential stability of linear periodic time-varying systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2020. — Vol. 65, issue 4. — Pp. 1647–1651.
https://doi.org/10.1109/tac.2019.2927949

128. **Wan J.-M.** Explicit solution and stability of linear time-varying differential state space systems // International Journal of Control, Automation and Systems. — 2017. — Vol. 15, issue 4. — Pp. 1553–1560.
https://doi.org/10.1007/s12555-015-0404-5

129. **Wang X.** Pole placement by static output feedback // Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control. — 1992. — Vol. 2, no. 2. — Pp. 205–218.

130. **Wang X. A.** Grassmannian, central projection, and output feedback pole assignment of linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1996. — Vol. 41, issue 6. — Pp. 786–794.
https://doi.org/10.1109/9.506231

131. **Wang X. A., Konigorski U.** On linear solutions of the output feedback pole assignment problem // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2013. — Vol. 58, issue 9. — Pp. 2354–2359.
https://doi.org/10.1109/tac.2013.2250077

132. **Watanabe K., Ito M., Kaneko M., Ouchi T.** Finite spectrum assignment problem for systems with delay in state variables // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1983. — Vol. 28, issue 4. — Pp. 506–508.
https://doi.org/10.1109/TAC.1983.1103258

133. **Watanabe K., Ito M., Kaneko M.** Finite spectrum assignment problem for systems with multiple commensurate delays in state variables // International Journal of Control. — 1983. — Vol. 38, issue 5. — Pp. 913–926.
https://doi.org/10.1080/00207178308933119

134. **Watanabe K., Ito M., Kaneko M.** Finite spectrum assignment problem of systems with multiple commensurate delays

in states and control // International Journal of Control. — 1984. — Vol. 39, issue 5. — Pp. 1073–1082.
https://doi.org/10.1080/00207178408933233

135. **Willems J. C., Hesselink W. H.** Generic properties of the pole placement problem // IFAC Proceedings Volumes. — 1978. — Vol. 11, issue 1. — Pp. 1725–1729.
https://doi.org/10.1016/s1474-6670(17)66142-1

136. **Wonham W.** On pole assignment in multi-input controllable linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1967. — Vol. 12, issue 6. — Pp. 660–665.
https://doi.org/10.1109/tac.1967.1098739

137. **Xie L., Souza Carlos E. de** Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1992. — Vol. 37, issue 8. — Pp. 1188–1191.
https://doi.org/10.1109/9.151101

138. **Xie L., Shishkin S., Fu M.** Piecewise Lyapunov functions for robust stability of linear time-varying systems // Systems and Control Letters. — 1997. — Vol. 31, issue 3. — Pp. 165–171.
https://doi.org/10.1016/s0167-6911(97)00027-3

139. **Yu H.-H., Duan G.-R.** ESA in high-order linear systems via output feedback // Asian Journal of Control. — 2009. — Vol. 11, no. 3. — Pp. 336–343.
https://doi.org/10.1002/asjc.111

140. **Yu H.-H., Duan G.-R.** ESA in high-order descriptor linear systems via output feedback // International Journal of Control, Automation and Systems. — 2010. — Vol. 8, issue 2. — Pp. 408–417.
https://doi.org/10.1007/s12555-010-0228-2

141. **Yu H., Bi D.** Parametric approaches for eigenstructure assignment in high-order linear systems via output feedback // 2012 24th Chinese Control and Decision Conference (CCDC). Taiyuan, China, 2012.
https://doi.org/10.1109/ccdc.2012.6244070

142. **Zaitsev V. A.** Necessary and sufficient conditions in a spectrum control problem // Differential Equations. — 2010. — Vol. 46, no. 12. — Pp. 1789–1793.
https://doi.org/10.1134/s0012266110120128

143. **Zaitsev V. A., Kim I. G.** Arbitrary spectrum assignment by static output feedback for linear differential equations with state variable delays // IFAC PapersOnLine. — 2018. — Vol. 51, issue 32. — Pp. 810–814.
https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.446

144. **Zaitsev V., Kim I.** Exponential stabilization of linear time-varying differential equations with uncertain coefficients by linear stationary feedback // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, issue 5. —

Article 853.
https://doi.org/10.3390/math8050853

145. **Zaitsev V. A., Kim I. G.** Spectrum assignment and stabilization of linear differential equations with delay by static output feedback with delay // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2020. — Vol. 30, issue 2. — Pp. 208–220.
https://doi.org/10.35634/vm200205

146. **Zaitsev V., Kim I.** Matrix eigenvalue spectrum assignment for linear control systems by static output feedback // Linear Algebra and its Applications. — 2021. — Vol. 613. — Pp. 115–150.
https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.12.017

147. **Zaitsev V., Kim I.** Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, issue 17. — Article 2158.
https://doi.org/10.3390/math9172158

148. **Zakharenkov M., Zuber I., Gelig A.** Stabilization of new classes of uncertain systems // IFAC-PapersOnLine. — 2015. — Vol. 48, issue 11. — Pp. 1024–1027
https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.09.327

149. **Zhou K., Khargonekar P. P.** Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty // Systems and Control Letters. — 1988. — Vol. 10, issue 1. — Pp. 17–20.
https://doi.org/10.1016/0167-6911(88)90034-5

150. **Zhou B.** On asymptotic stability of linear time-varying systems // Automatica. — 2016. — Vol. 68. — Pp. 266–276.
https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.12.030

151. **Zhou B., Liu Q., Mazenc F.** Stabilization of linear systems with both input and state delays by observer–predictors // Automatica. — 2017. — Vol. 83. — Pp. 368–377.
https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.06.027

152. **Zhou B., Duan G.-R.** Pole assignment of high-order linear systems with high-order time-derivatives in the input // Journal of the Franklin Institute. — 2020. — Vol. 357, issue 3. — Pp. 1437–1456.
https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.10.030

153. **Zhou B., Tian Y., Lam J.** On construction of Lyapunov functions for scalar linear time-varying systems // Systems and Control Letters. — 2020. — Vol. 135. — Article 104591.
https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2019.104591

154. **Zhu J. J.** A necessary and sufficient stability criterion for linear time-varying systems // Proceedings of 28th Southeastern Symposium on System Theory. Baton Rouge, Louisiana. USA, 31 March–02 April 1996.
https://doi.org/10.1109/SSST.1996.493482

Научное издание

Зайцев Василий Александрович
Ким Инна Геральдовна

Модальное управление и стабилизация линейных систем статической обратной связью по выходу

Монография

Редакторы В. А. Зайцев, И. Г. Ким
Компьютерный набор и верстка В. А. Зайцев, И. Г. Ким
Рисунки И. Г. Ким
Обложка И. В. Медведева

Подписано в печать 26.07.2022. Формат 84 × 108 1/32.
Усл. печ. л. 9,66. Уч.-изд. л. 9,6.
Тираж 300 экз. Заказ 1392.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426004, Ижевск, Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел. : + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18