И. Г. КИМ, Н. В. ЛАТЫПОВА

# ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ижевск
2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики

**И.Г. Ким, Н.В. Латыпова**

# ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2023

УДК 517.3.8(075.8)
ББК 22.161.12 я73
К40

*Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом УдГУ.*

**Рецензенты**: д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. науч. лабораторией математ. теории управления ин-та математики информ. технологий и физики Удмуртского государственнго университета В.А. Зайцев; канд. физ-мат. наук, доцент каф. дифференциальных уравнений, математ. и численного анализа ин-та информ. технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского О.С. Костромина.

**Ким И.Г, Латыпова Н.В.**

К40 Определенный интеграл и его приложения : учеб.-метод. пособие. – Ижевск : Удмуртский университет, 2023. – 123 с.

Предлагаемое учебно-методическое пособие посвящено изучению такого раздела курса математического анализа, как определенный интеграл. Приводятся основные понятия, свойства и теоремы интегрального исчисления, связанные с определенными интегралами, рассматриваются их приложения. Теоретический материал подробно иллюстрируется примерами. В пособии предлагаются варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов бакалавриата направлений по укрупненным группам: 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки», а также будет полезно всем интересующимся математическим анализом.

УДК517.3.8(075.8)
ББК 22.161.12 я73

# Оглавление

# Предисловие

Учебно-методическое пособие «Определенный интеграл и его приложения» относится к важному разделу курса «Математический анализ» — Интегральное исчисление и является продолжением пособия [8]. Пособие разработано на основе опыта преподавания данной дисциплины и современных методик обучения. Определенные интегралы — раздел математического анализа, имеющий огромное прикладное значение как в самом математическом анализе, так и в теории дифференциальных уравнений, численных методах, функциональном и комплексном анализах, в теоретической механике, уравнениях математической физики и др.

Изучение интегрального исчисления помогает студентам выработать общематематическую культуру: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, зная основные методы интегрирования, применять полученные знания для решения практических задач.

Пособие состоит из двух частей. Теоретическая часть содержит конспект лекций по данному разделу. В первой главе вводятся основные понятия, доказываются теоремы и свойства определенных интегралов, показываются их связь с неопределенными интегралами и способы вычисления определенных интегралов. Вторая глава посвящена приложениям определенного интеграла: вычисление площади фигуры и поверхности, длины кривой и объёма тела, нахождение массы и центра тяжести для кривых и плоских фигур. В практической части представлены варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов, которые могут служить оценочными средствами диагностики соответствующей совокупности компетенций. Также здесь подробно разобран один из вариантов и даны методические указания к выполнению индивидуальных заданий. В Приложении размещен справочный материал, который может пригодиться при решении задач.

Нумерация теорем внутри каждого параграфа — новая. Окончание доказательства теоремы обозначено значком $\blacksquare$. Для закрепления и лучшего усвоения материала в теоретической части предлагаются упражнения для самостоятельной работы, которые обозначены значком $\bigtriangledown$. Значок $\doteq$ означает обозначение.

Авторы выражают глубокую признательность и благодарность к.ф.-м.н., доценту кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Александру Андреевичу Кулешову (1986–2023) за внимательное прочтение, ценные советы и замечания.

# 1. Определенный интеграл

## 1.1. Понятие определенного интеграла

### *1. Задача о площади криволинейной трапеции*

Криволинейная трапеция — это фигура ограниченная сверху функцией $y = f(x)$, снизу — осью абсцисс, сбоку — прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, где $f(x) \geqslant 0$ и $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Пусть $T$ — разбиение отрезка $[a, b]$ :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Тогда $[x_i, x_{i+1}]$ — это отрезок (или элементарная часть) разбиения $T$. Обозначим $\Delta x_i \doteq x_{i+1} - x_i$ длину $i$–го отрезка, а наибольшую из этих длин обозначим через $\lambda = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \Delta x_i$. Заметим, что $\Delta x_i > 0 \Rightarrow \lambda > 0$. Обозначим точные нижнюю и верхнюю грани функции на этом отрезке соответственно через

$$\inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = m_i, \quad \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = M_i \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Тогда рассмотрим две суммы

$$s = s(T) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad S = S(T) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

**Определение 1.** *Площадью криволинейной трапеции* называется

$$\lim_{\lambda \to 0} s = \lim_{\lambda \to 0} S = P.$$

Возьмем произвольную точку $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Найдем значение функции в этой точке $f(\xi_i)$. Тогда, умножая значение функции в этой точке на длину данного отрезка, получаем площадь прямоугольника, которая приближенно равняется площади маленького кусочка криволинейной трапеции. Тогда сумма всех площадей таких прямоугольников даст приближенно площадь всей криволинейной трапеции:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

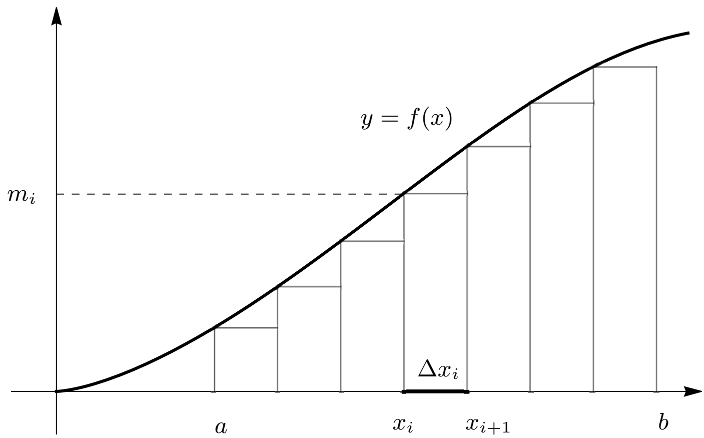



*Рис. 1. Геометрическая интерпретация определения 1*

Понятно, что чем будет мельче разбиение, тем точнее будет приближенное равенство. Поэтому имеет место

**Определение 2.** *Площадью криволинейной трапеции* называется $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = P$.

Другими словами, имеем

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = P \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0, \forall\,T : \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - P| < \varepsilon.$$

Заметим, что $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$. Тогда $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i \Rightarrow s \leqslant \sigma \leqslant S$.

**Утверждение.** *Опр.1* $\Leftrightarrow$ *Опр.2.*

**Доказательство.**

1) Пусть справедливо Опр. 1, т.е. $P = \lim\limits_{\lambda\to 0} s = \lim\limits_{\lambda\to 0} S$. Тогда по принципу «двух милиционеров» из неравенства $s \leqslant \sigma \leqslant S$ будет следовать, что $P = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$, т.е. выполнение Опр. 2.

2) Пусть теперь выполнено Опр. 2, т.е. $P = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$. Так как функция $f$ непрерывна на $[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса о достижимости своих точных граней $\exists\,\xi_i', \xi_i'' \in [x_i, x_{i+1}]$ такие, что: $m_i = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(\xi_i')$, $M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(\xi_i'')$. Тогда суммы $s(T) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i')\Delta x_i$ и $S(T) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i'')\Delta x_i$ — это частные случаи $\sigma$.

$\blacksquare$

**Пример.** Для функции $y = x^2$ на отрезке $[0, 1]$ составить суммы по определению 1 или 2 и вычислить площадь полученной криволинейной трапеции через эти суммы.

*Решение.* Разобьем отрезок $[0, 1]$ на $n$ равных частей. Тогда $x_i = \dfrac{i}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $\Delta x_i = \dfrac{1}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Так как функция $y = x^2$ возрастает на отрезке $[0, 1]$, то

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} x^2 = (x_i)^2,\ M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} x^2 = (x_{i+1})^2.$$

Таким образом,

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Учитывая формулу, которая легко доказывается с помощью метода математической индукции:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

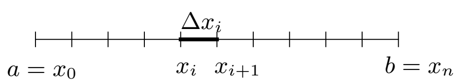
получаем $s = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$, $\quad S = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$. Заметим, что $\lambda = \dfrac{1}{n} \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$. Тогда

$$P = \lim_{\lambda \to 0} s = \lim_{\lambda \to 0} S = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

### *2. Определение*

Пусть нам дан некоторый промежуток $[a, b]$ и функция $f(x)$. На этом промежутке зададим разбиение

$$T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$



Рассмотрим $i$–й отрезок разбиения $[x_i, x_{i+1}]$. Пусть его длина $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Обозначим $\lambda = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \Delta x_i$ и возьмем произвольные $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Тогда сумма

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

называется *интегральной суммой Римана.*

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma \doteq J \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, T : \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - J| < \varepsilon.$$

**Определение 3.** Если существует конечный $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = J$, то функция называется *интегрируемой* на $[a, b]$, а число $J$ — *определенным интегралом от функции* $f$ на $[a, b]$ и обозначается следующим образом

$$J = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

где $a$ и $b$ — нижний и верхний пределы соответственно, $f(x)$ — подынтегральная функция.

Тогда площадь криволинейной трапеции будет равна (см. п. 1).

$$P = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Класс функций, интегрируемых на $[a, b]$, в дальнейшем будем обозначать $\mathcal{R}[a, b]$.

Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$ $(a < b)$, то по определению полагают $f \in \mathcal{R}[b, a]$ и

$$\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Заметим, что из определения для любой функции $f$, определенной в точке $a$, вытекает равенство

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

### *3. Необходимое условие интегрируемости функции*

**Теорема.** *Если функция интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

**Доказательство.** Воспользуемся методом от противного. Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $f$ не ограничена на $[a, b]$. Тогда $\exists$ хотя бы одна элементарная часть, на которой наша функция не ограничена. Пусть $f(\xi_p)$ принимает сколь угодно большое значение.

Тогда $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ будет принимать сколь угодно большое значение при таком выборе $\xi_p$. Откуда $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma = \infty$. Но по определению функция $f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow \exists$ конечный $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma = J$. Получаем противоречие: $J \neq \infty$. Теорема доказана. ■

**Замечание.** Из интегрируемости следует ограниченность. В обратную сторону утверждение будет неверно. С другой стороны, если функция $f$ не ограничена, то она точно не интегрируема.

Поэтому дальше будут рассматриваться только ограниченные функции.

$\bigtriangledown$ **Упр.** Приведите пример ограниченной функции, которая не является интегрируемой.

## 1.2. Суммы Дарбу

Пусть функция $f(x)$ ограничена на $[a, b]$. Разбиение отрезка $[a, b]$ представим в виде

$$T : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Элементарная часть данного разбиения — это отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ для $\forall\, i = 0, 1, \ldots, n-1$. Пусть $m_i = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$ и $M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$. Так как $f(x)$ ограничена, то $m_i$ и $M_i$ всегда конечны. Обозначим:

$s = s(T) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i$, её называют *нижней суммой Дарбу*;

$S = S(T) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i$ — *верхняя сумма Дарбу*.

Интегральная сумма имеет вид $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma\left(T, \overrightarrow{\xi}\right)$, где $\overrightarrow{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$. В силу неравенства $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$ для

$\forall i = 0, 1, \ldots, n-1$ имеем $s \leqslant \sigma \leqslant S$. Это неравенство имеет место для одного и того же разбиения $T$.

**Свойства сумм Дарбу**

1. *Для данного способа разбиения $T$ нижняя сумма Дарбу — это точная нижняя грань интегральных сумм; верхняя сумма Дарбу — точная верхняя грань интегральных сумм.* Другими словами, имеем $\forall\, T : s = \inf\limits_{\overline{\xi}} \sigma,\ S = \sup\limits_{\overline{\xi}} \sigma$.

2. *При добавлении новых точек деления верхняя сумма Дарбу не увеличивается, а нижняя сумма Дарбу не уменьшается.* Другими словами, если $T_1 = T \bigcup \{x'_k\}_{k=1}^{m}$, то $S(T_1) \leqslant S(T)$ и $s(T_1) \geqslant s(T) \Rightarrow s(T) \leqslant s(T_1) \leqslant S(T_1) \leqslant S(T)$.

3. *Ни одна нижняя сумма Дарбу не превышает ни одну верхнюю сумму Дарбу, даже если они отвечают разным способам разбиения.* Другими словами, имеет место неравенство $s(T_1) \leqslant S(T_2),\ \forall\, T_1, T_2$ — разбиения.

Так как $s \leqslant S$, то множество $\{s\}$ ограничено сверху и любая $S$ — его верхняя грань. Тогда по принципу точной верхней грани $\exists \sup\limits_{T} s \doteq \underline{J}$, который называют *нижний интеграл*. Имеем $\underline{J} \leqslant S$, т.е. множество $\{S\}$ ограничено снизу и $\underline{J}$ — его нижняя грань. По принципу точной нижней грани $\exists \inf\limits_{T} S \doteq \overline{J}$, который называют *верхний интеграл*, причем $\underline{J} \leqslant \overline{J}$. Таким образом, получаем

$$s \leqslant \underline{J} \leqslant \overline{J} \leqslant S.$$

**Теорема (Дарбу).** *Для ограниченной функции $f(x)$ на $[a, b] \Rightarrow$*

$$\lim_{\lambda \to 0} s = \underline{J},\ \lim_{\lambda \to 0} S = \overline{J}.$$

### 1.3. Критерий интегрируемости функции

**Теорема.** *Пусть функция $f$ ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда*

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0.$$

Предельное равенство

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0 \tag{1}$$

является первым условием интегрируемости.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Докажем, что $\lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$. По определению функция $f \in \mathcal{R}[a,b]$, если существует конечный $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = J \Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, T : \lambda < \delta \Rightarrow |J - \sigma| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow J - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma < J + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда получаем, что интегральные суммы $\sigma$ ограничены при фиксированном разбиении $T$ и при $\lambda(T) < \delta$. Пусть $s = \inf\limits_{\overline{\xi}} \sigma$, $S = \sup\limits_{\overline{\xi}} \sigma$ и $J - \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant s \leqslant \sigma \leqslant S \leqslant J + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим

$$0 \leqslant S - s \leqslant J + \frac{\varepsilon}{2} - \left(J - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant S - s \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0.$$

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$. Докажем, что $f \in \mathcal{R}[a,b]$, т.е. докажем существование конечного предела $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = J$.

Так как $s \leqslant \underline{J} \leqslant \overline{J} \leqslant S$, то $0 \leqslant \overline{J} - \underline{J} \leqslant S - s \to 0$ при $\lambda \to 0$. Значит, $\forall\, \varepsilon > 0, \overline{J} - \underline{J} < \varepsilon$. Откуда $\overline{J} - \underline{J} = 0 \Rightarrow \overline{J} = \underline{J} \doteq J$.

Покажем, что $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = J$. Имеем $s \leqslant J \leqslant S$, $s \leqslant \sigma \leqslant S$. Откуда $|J - \sigma| < S - s < \varepsilon$. Таким образом, получаем $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, $\forall\, T$: $\lambda < \delta \Rightarrow |J - \sigma| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = J$. Следовательно, по определению функция $f$ интегрируема на $[a,b]$. ■

**Пример.** Рассмотрим функцию Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$ Так как любой отрезок содержит как рациональные, так и иррациональные числа, то $m_i = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = 0$, $M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = 1$, $\forall\, i = 0, 1, \ldots, n - 1$. Тогда

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = 0, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = b - a,$$

$$S - s = b - a \Rightarrow \lim_{\lambda \to 0} (S - s) = b - a \neq 0 \Rightarrow f \notin \mathcal{R}[a,b].$$

**Определение 1.** $\omega = \sup\limits_{[a,b]} f(x) - \inf\limits_{[a,b]} f(x)$ называется *колебанием функции* $f$ на отрезке $[a,b]$.

**Определение 2.** $\omega = \sup\limits_{x',x''\in[a,b]} |f(x') - f(x'')|$ называется *колебанием функции* $f$ на отрезке $[a,b]$.

$\bigtriangledown$ **Упр.** Докажите эквивалентность определений.

Рассмотрим $S - s = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i - \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta x_i$.

Обозначим $M_i - m_i \doteq \omega_i$, которое представляет *колебание функции* $f$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Тогда получим, что $S - s = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$.

Эквивалентная форма записи условия итегрируемости (1) имеет вид:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = 0. \tag{2}$$

Ещё одно условие интегрируемости можно записать в виде:

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,T : S - s < \varepsilon. \tag{3}$$

## 1.4. Классы интегрируемых функций

**Теорема 1.** *Если функция $f$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, то она интегрируема на нем, или $f \in \mathbb{C}[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$.*

**Доказательство.** Так как $f \in \mathbb{C}[a,b]$, то по следствию теоремы Кантора (см. главу «Непрерывные функции»)

$$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0, \forall\,T : \lambda < \delta \Rightarrow \omega_i < \frac{\varepsilon}{(b-a)}, \forall\,i.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i < \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = 0$. А это представляет условие (2) интегрируемости, поэтому $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Теорема доказана. $\blacksquare$

**Теорема 2.** *Если функция монотонно возрастает (убывает) на* $[a,b]$, *то она интегрируема на нем, или* $f \uparrow (\downarrow)$ *на* $[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$.

**Доказательство.** Пусть $f \uparrow$ на $[a,b]$ $(a < b)$. Тогда $a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ (в силу монотонного возрастания функции).

Рассмотрим две возможные ситуации.

1) $f(a) = f(b) \Rightarrow f(x) = const \Rightarrow \omega_i = M_i - m_i = 0$. Следовательно, и сумма $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$. А значит, и предел $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$, т.е. выполняется второе условие интегрируемости $\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$.

2) $f(a) \neq f(b) \Rightarrow f(a) < f(b)$. Возьмем такое разбиение $T$, что $\lambda < \delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, где $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$. Тогда $\Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}, \forall\, i$. Поэтому

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i.$$

Рассмотрим $\omega_i = M_i - m_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$. Тогда сумма колебаний равна

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i = [f(x_1) - f(x_0)] + [f(x_2) - f(x_1)] + [f(x_3) - f(x_2)] + \ldots$$
$$+ [f(x_n) - f(x_{n-1})] = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).$$

Окончательно получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

т.е. выполняется условие (2) интегрируемости $\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Для монотонно убывающей функции утверждение доказывается аналогично. ■

$\triangledown$ **Упр.** Проведите доказательство для убывающей функции.

## 1.5. Свойства определенного интеграла

### *1. Свойства, выражаемые равенством*

1) $\int\limits_a^b 0\,dx = 0.$

**Доказательство.** Так как $f(x) = 0$, то $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = 0$. Тогда $\int\limits_a^b 0\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = 0.$ ■

2) $\int\limits_a^b 1\,dx = b - a.$

**Доказательство.** Так как $f(x) = 1$, то $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = b - a$. Тогда $\int\limits_a^b 1\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = b - a.$ ■

3) Аддитивность определенного интеграла: *Если* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, *то* $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$ *и*

$$\int\limits_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$$

**Доказательство.** Рассмотрим $\sigma_{f+g} = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\left[f(\xi_i) + g(\xi_i)\right]\Delta x_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum\limits_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i \doteq \sigma_f + \sigma_g$, при этом $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_f = \int\limits_a^b f(x)dx$, а $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_g = \int\limits_a^b g(x)dx$. Тогда $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_{f+g} = \lim\limits_{\lambda\to 0}(\sigma_f + \sigma_g) = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$ ■

4) Однородность определенного интеграла: $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{R}[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx.$$

**Доказательство.** $\sigma_{\alpha f} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha f(\xi_i)\Delta x_i = \alpha \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma_f$. Пусть $\lambda = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \Delta x_i$. Найдем предел полученной интегральной суммы:

$$\int\limits_a^b \alpha f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sigma_{\alpha f} = \lim_{\lambda\to 0} \alpha\sigma_f = \alpha \lim_{\lambda\to 0} \sigma_f = \alpha \int_a^b f(x)dx. \qquad \blacksquare$$

3)+4)= Линейность: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};\ f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ имеем

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Эта формула верна для любой конечной линейной комбинации функций: $\forall\, \alpha_i \in \mathbb{R}$, $f_i \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x) \in \mathcal{R}[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int\limits_a^b f_i(x)dx$$

5) Если $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, то $fg \in \mathcal{R}[a,b]$.

**Доказательство.** По критерию интегрируемости: $f, g \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i(f)\Delta x_i = 0$ и $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i(g)\Delta x_i = 0$.

Докажем, что $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i(fg)\Delta x_i = 0$.

По определению 2 (см. п. 1.3)

$$\omega_i(fg) = \sup_{\xi_i', \xi_i'' \in [x_i, x_{i+1}]} \left| f(\xi_i')g(\xi_i') - f(\xi_i'')g(\xi_i'') \right|.$$

Рассмотрим $|f(\xi')g(\xi') - f(\xi'')g(\xi'')| =$

$$= |f(\xi')g(\xi') - f(\xi'')g(\xi') + f(\xi'')g(\xi') - f(\xi'')g(\xi'')| \leqslant$$

$$\leqslant |g(\xi')|\,|f(\xi')-f(\xi'')|\,|f(\xi'')|\,|g(\xi')-g(\xi'')| \leqslant$$

$$\leqslant K_2 \sup_{\xi',\xi''\in[a,b]} |f(\xi')-f(\xi'')| + K_1 \sup_{\xi',\xi''\in[a,b]} |g(\xi')-g(\xi'')|\,,$$

т.к. $f$ и $g$ ограничены по необходимому условию интегрируемости функций, т.е. $\exists K_1>0, \exists K_2>0, \forall\, x\in[a,b]:\ \ |f(x)|\leqslant K_1,\ \ |g(x)|\leqslant K_2$. Тогда при любых $\xi',\xi''\in[a,b]$

$$|f(\xi')g(\xi')-f(\xi'')g(\xi'')|\leqslant K_2\omega(f)+K_1\omega(g).$$

А значит,

$$\omega(fg)\leqslant K_2\omega(f)+K_1\omega(g).$$

Применяя полученное неравенство, имеем

$$0\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(fg)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left(K_2\omega_i(f)+K_1\omega_i(g)\right)\Delta x_i =$$

$$= K_2\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i + K_1\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(g)\Delta x_i \to 0$$

при $\lambda\to 0$. По принципу двух милиционеров $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i(fg)\Delta x_i = 0$. Откуда по критерию $fg\in\mathcal{R}[a,b]$. ■

6) $f\in\mathcal{R}[a,b]\Rightarrow\forall[\alpha,\beta]\subset[a,b]: f\in\mathcal{R}[\alpha,\beta]$.

**Доказательство.** Воспользуемся эквивалентной формулировкой интегрируемости функции (3):

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, T=T_{[a,b]}: S(T)-s(T)<\varepsilon.$$

Рассмотрим разбиение $T'=T\cup[\alpha,\beta]$. По свойствам сумм Дарбу получаем, что $S(T')-s(T')\leqslant S(T)-s(T)<\varepsilon$. С другой стороны, данное разбиение влечет за собой разбиение каждого из отрезков $[a,\alpha],[\alpha,\beta],[\beta,b]$, которые обозначим соответственно как $T_1,T_2,T_3: T'=T_1\cup T_2\cup T_3$. Тогда

$$S(T')-s(T')=S(T_1)-s(T_1)+S(T_2)-s(T_2)+S(T_3)-s(T_3).$$

Так как $S(T_1)-s(T_1)\geqslant 0$ и $S(T_3)-s(T_3)\geqslant 0$, то условие

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, T_2=T_{[\alpha,\beta]}:\ S(T_2)-s(T_2)\leqslant S(T')-s(T')<\varepsilon$$

даёт интегрирумость $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$. ■

7) Аддитивность определенного интеграла по промежутку интегрирования. *Если функция $f$ интегрируема на наибольшем из трёх отрезков $[a, b]$, $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема на двух оставшихся и имеет место равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

**Доказательство.** Пусть $a < c < b$. Используя свойство 6), в силу $[a, c] \subset [a, b]$ и $[c, b] \subset [a, b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a, c]$ и $f \in \mathcal{R}[c, b]$. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$ на элементарные части $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, причем точку $c$ будем считать одной из точек деления. Так как $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то по определению $\exists \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_{[a,b]} = \int_a^b f(x)dx$, где

$$\sigma_{[a,b]} = \sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma_{[a,c]} + \sigma_{[c,b]}.$$

Рассмотрим предел интегральных сумм $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_{[a,b]} =$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \left(\sigma_{[a,c]} + \sigma_{[c,b]}\right) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_{[a,c]} + \lim_{\lambda \to 0} \sigma_{[c,b]} = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Другие случаи расположения точек $a, b, c$ приводятся к этому. Пусть, например, $b < a < c$ и $f \in \mathcal{R}[c, b]$. Тогда $f \in \mathcal{R}[b, c]$, а значит, в силу 6) на его частях. В этом случае, по доказанному, имеем

$$\int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_b^a f(x)dx + \int\limits_a^c f(x)dx \Rightarrow -\int\limits_c^b f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^c f(x)dx.$$

Откуда получаем требуемое равенство. ■

Геометрический смысл свойства 7: площадь криволинейной трапеции по отрезку $[a, b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций по отрезкам $[a, c]$ и $[c, b]$.

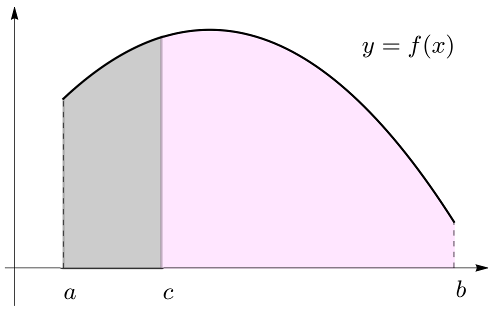



*Рис. 2. Геометрический смысл свойства 7*

8) Свойство определенного интеграла по симметричному промежутку.

*Если функция $f(x)$ — нечетная и $f \in \mathcal{R}[-a, a]$, то* $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

*Если функция $f(x)$ — четная и $f \in \mathcal{R}[-a, a]$, то*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

$\triangledown$ **Упр.** Докажите свойство 8).

***2. Свойства, выражаемые неравенствами***

1) Свойство неотрицательности определенного интеграла. *Если функция $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $f(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in [a, b]$ $(a < b)$, то* $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \geqslant 0$.

**Доказательство.** Заметим,что $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0$ $(a < b \Rightarrow \Delta x_i > 0)$. Тогда по свойству о предельном переходе в неравенстве имеем

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma \geqslant 0. \qquad \blacksquare$$

2) Свойство монотонности определенного интеграла. *Если функции*

$f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ $(a < b)$ *и имеем* $\forall x \in [a,b] : f(x) \leqslant g(x)$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx.$$

**Доказательство.** Рассмотрим $g - f = g + (-1) \cdot f \in \mathcal{R}[a,b]$. Имеем $g(x) - f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a,b]$. Тогда по первому свойству: $\int\limits_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx \geqslant 0$. Откуда $\int\limits_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geqslant 0$, что равносильно неравенству $\int\limits_a^b g(x)dx \geqslant \int_a^b f(x)dx$. ■

3) Свойство об оценке определенного интеграла. *Если функция* $f \in \in \mathcal{R}[a,b]$ $(a < b)$ *и* $\forall x \in [a,b]$ *имеет место* $m \leqslant f(x) \leqslant M$, *то*

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

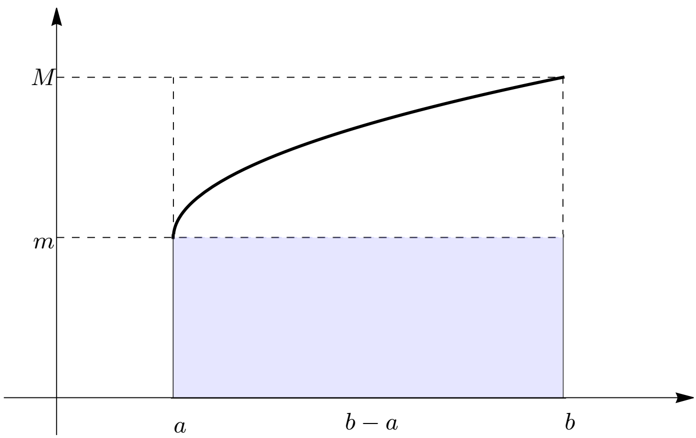



*Рис. 3. Геометрический смысл свойства 3)*

**Доказательство.** Так как $\int\limits_a^b dx = b - a$, то $\int\limits_a^b mdx = m(b-a)$ и

$\int\limits_a^b M dx = M(b-a)$. Функция ограничена: $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Проинтегрируем неравенство $\int\limits_a^b m dx \leqslant \int\limits_a^b f(x) dx \leqslant \int\limits_a^b M dx$ и, подставляя значения интегралов, получим требуемое соотношение. ■

4) *Если функция* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ $(a < b)$, *то* $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ *и*

$$\left| \int\limits_a^b f(x) dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)| dx.$$

**Доказательство.** $f \in \mathcal{R}[a,b]$ $(a < b)$ $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall T :$ $\lambda < \delta \Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_{i_f} \Delta x_i < \varepsilon$. Колебание функции на каждом отрезке разбиения равно:

$$\omega_{i_f} = M_i - m_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) - \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')|.$$

Тогда

$$\omega_{i_{|f|}} = \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} \big| |f(x')| - |f(x'')| \big| \leqslant \sup_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x') - f(x'')| = \omega_{i_f}.$$

Откуда получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_{i_{|f|}} \Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{i_f} \Delta x_i < \varepsilon,$$

Так как $\omega_{i_{|f|}} \leqslant \omega_{i_f}$ и $\Delta x_i > 0 \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a,b]$.

Из неравенства $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ интегрированием всех частей получаем следующее:

$$-\int\limits_a^b |f| dx \leqslant \int\limits_a^b f(x) dx \leqslant \int\limits_a^b |f| dx \Leftrightarrow \left| \int\limits_a^b f(x) dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)| dx.$$

■

**Следствие.** *Если функция* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ $(a < b)$ *и* $\forall\, x \in [a,b]$ : $|f(x)| \leqslant K \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant K(b-a)$.

5) *Если функция* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ $(a < b)$ *и* $f(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in [a,b] \Rightarrow$ $\forall\, [\alpha,\beta] \subset [a,b]$ : $\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx$.

**Доказательство.** $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^\alpha f(x)dx + \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx + \int\limits_\beta^b f(x)dx$. Так как $\int\limits_a^\alpha f(x)dx \geqslant 0$ и $\int\limits_\beta^b f(x)dx \geqslant 0$, то $\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx$. ■

## 1.6. Теоремы о среднем значении

$f \in \mathcal{R}[a,b]$ $(a < b)$, $m \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow$ по третьему свойству

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Поделим обе части неравенства на $b - a > 0$. Имеем

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M.$$

Обозначим *среднее значение функции на* $[a,b]$ : $\mu \doteq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$.

**Теорема.** *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то* $\exists\, \xi \in [a,b]$ :

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

**Доказательство.** Так как функция непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема на нём и по второй теореме Вейерштрасса достигает своих точных граней: $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Другими словами, $m$ и $M$ являются значениями функции $f(x)$. Рассмотрим $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$. В силу $m \leqslant \mu \leqslant M$ по теореме Больцано–Коши $\exists\,\xi \in [a,b] : \mu = f(\xi)$ — тоже значение функции $f(x)$. Тогда $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)$. Умножая обе части на $b-a$, получаем требуемое равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. Теорема доказана. ■

Геометрический смысл теоремы о среднем значении: среднее значение неотрицательной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ — это высота прямоугольника с основанием $b-a$, площадь которого равна площади криволинейной трапеции.

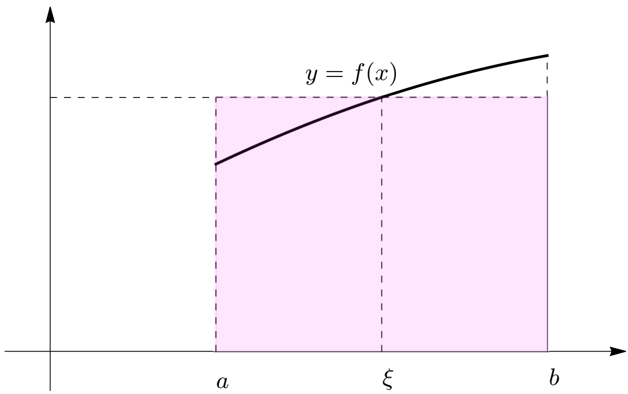



*Рис. 4. Геометрический смысл теоремы о среднем значении*

**Теорема (обощенная теорема о среднем значении).** *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$ и $g(x)$ знакопостоянна, то $\exists\,\xi \in [a,b]$ :*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx.$$

**Доказательство.** Так как $f$ непрерывна, то она интегрируема, т.е. $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Следовательно, и функция $fg$ тоже интегрируема (см. свойство 5). При этом $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ — значения функции, причем для $\forall\, x \in [a,b]$ имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Пусть для определенности функция $g(x) \geqslant 0$ и $a < b$. Умножая $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $g(x)$, имеем

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Проинтегрируем это неравенство:

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)dx. \tag{4}$$

Рассмотрим два возможных случая.

1) Пусть $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$ в силу (4). В этом случае равенство теоремы выполняется $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx$ при любом $f(\xi)$.

2) Пусть $\int\limits_a^b g(x)dx \neq 0$. Тогда $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$, Так как $g(x) \geqslant 0$. Поделим все части неравенства (4) на $\int\limits_a^b g(x)dx$. Имеем

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \leqslant M.$$

Обозначая через $\mu = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}$, получаем $m \leqslant \mu \leqslant M$ и $f$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow \exists\, \xi \in [a, b] : \mu = f(\xi)$. Откуда $\dfrac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} = f(\xi)$ или $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx.$

Случай, когда $g(x) < 0$, доказывается аналогично, и рекомендуется в качестве упражнения провести выкладки самостоятельно. ■

**Замечание.** Пусть $g(x) = 1$. Тогда $\int\limits_a^b g(x)dx = b - a$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$. Это значит, что теорема о среднем значении — частный случай обобщенной теоремы о среднем значении.

## 1.7. Интегрируемые функции с конечным числом точек разрыва

**Теорема.** *Пусть функция $f$ ограничена на $[a, b]$. Если функция $f$ имеет на $[a, b]$ конечное число точек разрыва, то она интегрируема на $[a, b]$.*

**Доказательство.** 1) Пусть $c$ — единственная точка разрыва и $f$ ограничена на $[a, b]$. Тогда $\exists\, M > 0 : \forall\, x \in [a, b] : |f(x)| \leqslant M$. Выбираем такой отрезок $[\alpha, \beta]$, что $c \in [\alpha, \beta]$ и $\beta - \alpha < \dfrac{\varepsilon}{6M}$. Так как $f \in \mathbb{C}[a, \alpha]$ и $f \in \mathbb{C}[\beta, b]$, то $f \in \mathcal{R}[a, \alpha]$ и $f \in \mathcal{R}[\beta, b]$. Тогда по условию (3) интегрируемости: $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, T_1 : \sum\limits_{[a,\alpha]} \omega_i \Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{3}$ и $\exists\, T_2 : \sum\limits_{[\beta,b]} \omega_i \Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Распишем интегральную сумму для разбиения $T = T_1 \cup T_2$ :

$$\sum_{[a,b]} \omega_i \Delta x_i = \sum_{[a,\alpha]} \omega_i \Delta x_i \ + \sum_{[\beta,b]} \omega_i \Delta x_i + \omega_{[\alpha,\beta]}(\beta - \alpha).$$

Оценим последнее слагаемое: $\omega_{[\alpha,\beta]} = \sup\limits_{x',x'' \in [\alpha,\beta]} |f(x') - f(x'')| \leqslant 2M$ в силу неравенства $|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x')| + |f(x'')|$. В итоге получаем

$$\sum_{[a,b]} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + 2M \frac{\varepsilon}{6M} = \varepsilon$$

и по условию (3) интегрируемости $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

2) Пусть имеется конечное число точек разрыва

$$a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b,$$

где $c_i$ — точки разрыва $\forall i$. Разобьем отрезок

$$[a,b] = [a,\alpha_1] \bigcup [\alpha_1,\alpha_2] \bigcup \ldots \bigcup [\alpha_{n-1},b]$$

так, чтобы на каждом маленьком отрезке была бы только одна точка разрыва: $c_1 \in [a,\alpha_1]$, $c_2 \in [\alpha_1,\alpha_2], \ldots,$ $c_n \in [\alpha_{n-1},b]$.

По доказанному в пункте 1) имеем $f \in \mathcal{R}[a,\alpha_1]$, $f \in \mathcal{R}[\alpha_1,\alpha_2], \ldots,$ $f \in \mathcal{R}[\alpha_{n-1},b]$. Используя свойство аддитивности по промежутку интегрирования, получим $f \in \mathcal{R}[a,b]$. ■

## 1.8. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Тогда для $\forall x \in [a,b]$ $f \in \mathcal{R}[a,x]$. Обозначим $\int\limits_a^x f(t)dt \doteq F(x)$.

**Теорема.** *Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a,b]$, то функция $F(x)$ непрерывна на нем, т.е. если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то $F \in \mathbb{C}[a,b]$.*

**Доказательство.** Рассмотрим $x + h \in [a,b]$, где $h$ — приращение аргумента функции. Найдем приращение функции $F(x+h) - F(x) =$

$$= \int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^{x} f(t)dt = \int\limits_x^{a} f(t)dt + \int\limits_a^{x+h} f(t)dt = \int\limits_x^{x+h} f(t)dt.$$

Так как $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то $f$ ограничена на $[a,b]$, т.е. $\exists\, K > 0,\ \forall\, x \in [a,b]$ : $|f(x)| \leqslant K$. По свойствам определенного интеграла

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int\limits_{x}^{x+h} f(t)dt \right| \leqslant K|x+h-x| = K|h|.$$

Тогда $0 \leqslant |F(x+h) - F(x)| \leqslant K|h| \to 0$ при $h \to 0$. Значит, по принципу двух милиционеров бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции: $\lim\limits_{h\to 0} \big(F(x+h) - F(x)\big) = 0$ $\Rightarrow F \in \mathbb{C}(x),\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow F \in \mathbb{C}[a,b]$, что и требовалось.

■

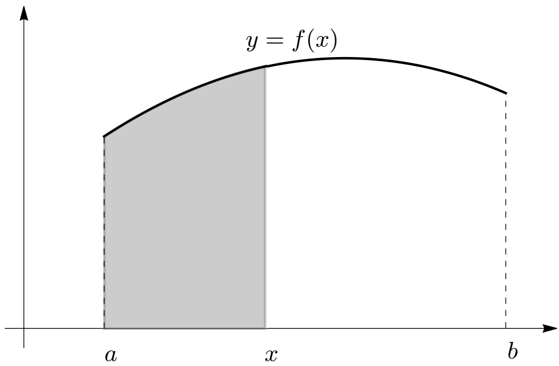



*Рис. 5. Геометрическая интерпретация интеграла с переменным верхним пределом*

**Теорема.** *Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0$, где $x_0 \in [a,b]$, то $F(x)$ дифференцируема в этой точке, причем $F'(x_0) = f(x_0)$.*

**Доказательство.** Докажем, что

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Из доказательства предыдущей теоремы (см. выкладки) получаем

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt.$$

Заметим, что $\int\limits_{x_0}^{x_0+h} dt = x_0 + h - x_0 = h$. Откуда $\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} dt = 1$. Тогда

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0)\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} dt =$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t)-f(x_0)\big)dt.$$

Рассмотрим модуль этого выражения

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))dt\right|.$$

$f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ \forall\,t:\ |t-x_0| < \delta \Rightarrow |f(t)-f(x_0)| < \varepsilon$.

$\forall\,h : |h| < \delta$ имеем $|t - x_0| < \delta$ для всех $t \in [x_0, x_0+h]$. Тогда

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\varepsilon|x_0+h-x_0| = \varepsilon,$$

или

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ \forall\,h : |h| < \delta \Rightarrow \left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$ и теорема доказана. ■

Мы получили, что $F'(x) = f(x)$. Тогда имеем *формулу для вычисления производной от интеграла с переменным верхним пределом*

$$\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

**Следствие 1.** *Если $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, то $F'(x) = f(x),\ \forall\,x \in [a,b]$.*

**Следствие 2.** *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $F$ — первообразная для $f$ на $[a,b]$.*

## 1.9. Формула Ньютона–Лейбница

**Теорема.** *Если функция* $f \in \mathbb{C}[a,b]$, *то* $\int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$, *где* $\Phi(x)$ *— любая из первообразных для* $f(x)$.

**Доказательство.** Пусть $\Phi(x)$ — некоторая первоообразная для $f(x)$, которая существует в силу непрерывности $f(x)$ на $[a,b]$. С другой стороны, $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ также является первообразной для $f(x)$ по второму следствию предыдущего параграфа. Значит, $F(x) = \Phi(x) + C$, где $C = const$. Поэтому интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C$.

Пусть $x = a$. Тогда $\int\limits_a^a f(t)dt = 0$ и $\Phi(a) + C = 0 \Rightarrow C = -\Phi(a)$. Подставим константу в интеграл, получим $\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a)$. Пусть теперь $x = b$ : $\int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$, что и требовалось. ■

Обозначим разность $\Phi(b) - \Phi(a) \doteq \Phi(x)\,\big|_a^b$ . Тогда получаем *формулу Ньютона–Лейбница*

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(t)\,\big|_a^b\ .$$

**Замечание.** Формула Ньютона–Лейбница связывает определенный и неопределенный интегралы.

**Примеры.** Вычислим:

$$1)\ \int\limits_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}, \quad 2)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

## 1.10. Замена переменной в определенном интеграле

**Теорема.** *Если выполнены условия:*
*1)* $f \in \mathbb{C}\left(\varphi[\alpha, \beta]\right)$*,*
*2)* $x = \varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема на* $[\alpha, \beta]$*,*
*3)* $\varphi(\alpha) = a$*,* $\varphi(\beta) = b$*,*
*то*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**Доказательство.** Так как $\varphi$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, то $\varphi, \varphi'$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$. Пусть $\Phi(x)$ — первообразная для $f(x)$, тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$. С другой стороны, $\Phi(\varphi(t))$ — первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Так как

$$(\Phi(\varphi(t)))' = \Phi'(\varphi(t))\varphi'(t) = \Phi'(x)\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

то $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\varphi(t)) \mid_\alpha^\beta = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a)$.
Теорема доказана. ∎

Сделаем замену переменных $x = \varphi(t)$ в интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$. Так как $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, то меняем пределы интегрирования $a \to \alpha, b \to \beta$. После замены интеграл принимает вид $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

**Замечание.** Согласно [7, с. 191], формула замены переменной верна также в случае, когда вместо $\varphi'$ берётся произвольная функция $g \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, а вместо $\varphi(t)$ — функция $G(t) = \int\limits_\alpha^t g(y)dy + C$. При этом достаточно выполнения условия $f \in \mathcal{R}\left(G[\alpha, \beta]\right)$, либо условия $(f \circ G)\, g \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, и ограниченности функции $f$ на отрезке, соединяющем точки $G(\alpha), G(\beta)$.

**Примеры.** 1) Вычислим: $I = \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$

Сделаем замену переменной: $x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$. При этом изменятся пределы интегрирования: $x = 0 \to t = 0$, $x = a \to t = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt = a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi a^2}{4}.$$

2) Проверить, что если функция $f(x)$ — нечетная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x) dx = 0$; если функция $f(x)$ — четная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x) dx = 2 \int\limits_0^a f(x) dx$.

*Решение.* Воспользуемся свойством аддитивности по промежутку интегрирования:

$$J = \int\limits_{-a}^{a} f(x) dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x) dx + \int\limits_0^a f(x) dx.$$

В первом интеграле сделаем замену переменной: $x = -t$, $dx = -dt$, а затем снова вернемся к прежней переменной.

$$J = -\int\limits_a^0 f(-t) dt + \int\limits_0^a f(x) dx = \int\limits_0^a f(-x) dx + \int\limits_0^a f(x) dx.$$

Если функция $f(x)$ — четная, то по определению $f(-x) = f(x)$ и

$$J = \int\limits_0^a f(x) dx + \int\limits_0^a f(x) dx = 2 \int\limits_0^a f(x) dx.$$

Если функция $f(x)$ — нечетная, то $f(-x) = -f(x)$ и

$$J = -\int\limits_0^a f(x) dx + \int\limits_0^a f(x) dx = 0.$$

## 1.11. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Как известно, $d(UV) = dU \cdot V + U \cdot dV$. Тогда $UdV = d(UV) - VdU$. Проинтегрируем обе части последнего равенства по промежутку $[a, b]$

$$\int\limits_a^b UdV = \int\limits_a^b d(UV) - \int\limits_a^b VdU = (UV)|_a^b - \int\limits_a^b VdU.$$

Получили *формулу интегрирования по частям для определенного интеграла*:

$$\int\limits_a^b UdV = (UV)|_a^b - \int_a^b VdU.$$

Заметим, что формула имеет место в случае, когда функции $U, V \in \in \mathcal{D}[a, b]$, $U', V' \in \mathcal{R}[a, b]$, так как $\mathcal{D}[a, b] \subset \mathbb{C}[a, b] \subset \mathcal{R}[a, b]$. Этих ограничений достаточно для существования дифференциалов и определенных интегралов, входящих в формулу.

**Примеры.** Вычислим: 1) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$, пользуясь формулой интегрирования по частям. Возьмем $U = x$, $dV = \cos x dx$. Тогда $dU = dx$, $V = \sin x$ и

$$I = x \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2) Выведем рекуррентную формулу для вычисления интеграла $J_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ и, пользуясь ею найдём его значение. Возьмем $U = \sin^{n-1} x$, $dV = \sin x dx$. Тогда $dU = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx$, $V = = -\cos x$. Подставим:

$$J_n = -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \left(1-\sin^2 x\right) dx = (n-1)\left(J_{n-2} - J_n\right).$$

Из уравнения $J_n = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n$ получаем $J_n = \dfrac{n-1}{n} J_{n-2}$. Рассмотрим выражение в зависимости от чётности $n$.

Пусть $n = 2k$.

$$J_{2k} = \frac{2k-1}{2k} J_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2} J_{2k-4} = \ldots = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} J_0,$$

где $J_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \dfrac{\pi}{2}$.

Пусть $n = 2k+1$.

$$J_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} J_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1} J_{2k-3} = \ldots = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} J_1,$$

где $J_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$.

Таким образом, получаем ответ:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\dfrac{\pi}{2}, & n = 2k, \\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

## 1.12. Интегральная форма остаточного члена в формуле Тейлора

Пусть функция $f(x)$ является $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируемой на интервале $X$, и точка $x_0 \in X$. Запишем формулу Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x),$$

где $r_n(x)$ — её остаточный член. Остаточный член в форме Пеано имеет вид: $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ $(x \to x_0)$, а в форме Лагранжа: $r_n(x) = \dfrac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, где $\forall\, x \in X$, $c \in (x, x_0)$.

Рассмотрим $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \doteq J$. Применим формулу интегрирования по частям. Пусть $U = (x-t)^n, dV = f^{(n+1)}(t)dt$. Тогда $dU = -n(x-t)^{n-1}dt, V = f^{(n)}(t)$. Интеграл примет вид

$$J = \frac{1}{n!}\left[(x-t)^n f^{(n)}(t)\mid_{x_0}^{x} + \int\limits_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)n(x-t)^{n-1}dt\right] =$$

$$= -\frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt =$$

$$= -\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{(n-2)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n-1)!}(t)(x-t)^{n-2}dt = \cdots =$$

[применим интегрирование по частям еще $(n-2)$ раза]

$$= -\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} - \ldots$$

$$- f'(x_0)(x-x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)dt =$$

$$= -\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} - \ldots$$

$$- f'(x_0)(x-x_0) + f(x) - f(x_0).$$

Выразим отсюда

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Сравнивая с формулой Тейлора в начале параграфа, получаем *интегральную форму остаточного члена формулы Тейлора*:

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Данная формула во многих случаях бывает удобнее формул остаточного члена в формах Лагранжа, Коши или Пеано. Часто используется в теории приближений функций и в численных методах для оценки погрешности.

$\bigtriangledown$ **Упр.** Используя обобщенную теорему о среднем значении, взяв в качестве $f(t)$ функцию $f^{(n+1)}(t)$, а в качестве $g(t)$ — $(x-t)^n$, получите из интегральной формы остаточного члена остаточный член в форме Лагранжа.

### 1.13. Понятие несобственного интеграла

Рассмотрим определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ ограничена, а отрезок $[a, b]$ — конечный. Понятие «определенный интеграл» равносильно термину «собственный интеграл». Поэтому несобственный интеграл — это интеграл, у которого либо подынтегральная функция не ограничена, либо интеграл задан на бесконечном промежутке.

1) Пусть функция $f(x)$ задана и ограничена на бесконечном промежутке и $\forall x \in [a, +\infty)$, $f \in \mathcal{R}[a, x]$. Тогда $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)$. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_a^{+\infty} f(t)dt$ называют

*несобственным интегралом первого рода* или *несобственным интегралом по бесконечному промежутку.* Если этот предел существует и конечен, то говорят, что *интеграл сходится*, а если он не существует или равен $\infty$, то *интеграл расходится.*

2) Пусть $f(x)$ определена на $[a,b)$ и $\forall\, x \in [a,b)$ $f \in \mathcal{R}[a,x]$, т.е. $\exists \int\limits_a^x f(t)dt$. Пусть в любой окрестности $O_\delta^-(b)$ функция $f(x)$ не ограничена, т.е. $b$ — это особая точка. Тогда интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{x\to\varepsilon+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

называется *несобственным интегралом второго рода* или *несобственным интегралом от неограниченной функции.* Если этот предел существует и конечен, то говорят, что *интеграл сходится*, а если он не существует или равен $\infty$, то *расходится.*

# 2. Приложения интегрального исчисления

## 2.1. Вычисление площади в декартовых координатах

### *1. Случай явно заданной кривой*

1) Рассмотрим фигуру, ограниченную линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, где $f(x) \geqslant 0$, $f(x) \in \mathbb{C}[a, b]$. Тогда по п. 1.1.

$$P = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

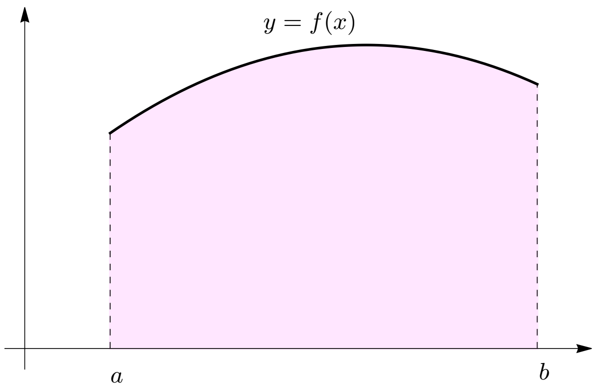



*Рис. 6. Геометрический смысл формулы (1)*

2) Пусть теперь $y = f(x)$ такая, что $f(x) \leqslant 0$. Тогда рассмотрим симметричную фигуру, и получим аналогичную формулу

$$P = \int_a^b |f(x)|dx. \tag{2}$$

3) Пусть функция $y = f(x)$ имеет $n$ нулей $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Тогда площадь фигуры разобьем на части $P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$. Тогда

$$P = \int_a^{c_1} |f(x)|dx + \int_{c_1}^{c_2} |f(x)|dx + \ldots + \int_{c_n}^{b} |f(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx. \tag{3}$$

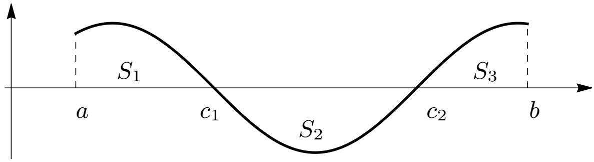


*Рис. 7. Геометрический смысл формулы (3)*

4) Рассмотрим случай, когда фигура ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, где $0 \leqslant f_2(x) \leqslant f_1(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x) \in \mathbb{C}[a, b]$. Тогда

$$P = P_1 - P_2 = \int\limits_a^b f_1(x)dx - \int\limits_a^b f_2(x)dx = \int\limits_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big)dx,$$

т.е.

$$P = \int\limits_a^b \left[f_1(x) - f_2(x)\right] dx. \tag{4}$$

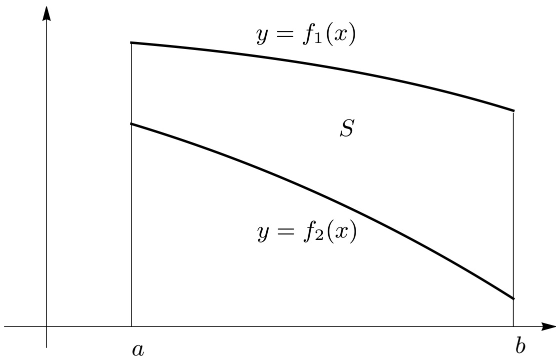


*Рис. 8. Геометрический смысл формулы (4)*

5) Аналогично пусть фигура ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, где $f_2(x) \leqslant f_1(x)$.

Рассмотрим новую систему координат $O'x'y'$, которая получается с помощью параллельного переноса оси $Ox$ системы $Oxy$ на $c$ единиц вниз так, чтобы в новой системе координат функции $\overline{f_1}(x) = f_1(x) + c$ и $\overline{f_2}(x) = f_2(x) + c$ удовлетворяли неравенству $0 \leqslant \overline{f_2}(x) \leqslant \overline{f_1}(x)$ при $\forall x \in [a, b]$. Тогда

$$P = \int\limits_a^b \left(\overline{f_1}(x) - \overline{f_2}(x)\right) dx = \int\limits_a^b \left[f_1(x) + c - f_2(x) - c\right] dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left[f_1(x) - f_2(x)\right] dx,$$

т.е. формула (4) верна и для этого случая в новой системе координат.

В общем случае, формулу можно записать ввиде:

$$P = \int\limits_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\, dx.$$

**Пример.** Вычислите площадь эллипса, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

*Решение.* В силу симметрии ограничимся четвертью эллипса

$$P = 4\int\limits_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{4b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \pi ab,$$

где из выражения $y = \pm\, b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$ выбираем $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Последний интеграл вычислен в п. 1.10. Таким образом, площадь эллипса $P = \pi ab$.

***2. Случай параметрически заданной кривой***

Рассмотрим функцию, заданную параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Пусть функция $x = \varphi(t)$ строго монотонна на $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi\left([\alpha, \beta]\right) = [a, b]$. Так как функция строго монотонна, то по теореме об обратной функции $\exists\, t = \varphi^{-1}(x)$ строго монотонная и непрерывная на $[a, b]$. Заметим, что функция $\varphi^{-1} : [a, b] \to [\alpha, \beta]$. Рассмотрим функцию

$y = \psi(t) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right) \doteq f(x)$. Тогда $P = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)dx =$

$= \left|\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi^{'}(t)dt\right|$, где сделали замену $x = \varphi(t)$; $dx = \varphi^{'}(t)dt$.

$$P = \left|\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi^{'}(t)dt\right|. \tag{5}$$

**Пример.** Вычислим площадь эллипса, заданного уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

*Решение.* Пусть $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$. Система определяет эллипс в параметрическом виде. Тогда

$$4\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin t a\left(-\sin t\right)dt\right| = 4ab\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt\right| = 4ab\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt\right| =$$

$$= 2ab\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt\right| = 2ab\left|(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right| = \pi ab.$$

## 2.2. Вычисление площади в полярных координатах

Полярные координаты определяются парой $(\rho, \varphi)$, где $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и $0 \leqslant \rho < +\infty$ (см. рис. 9).

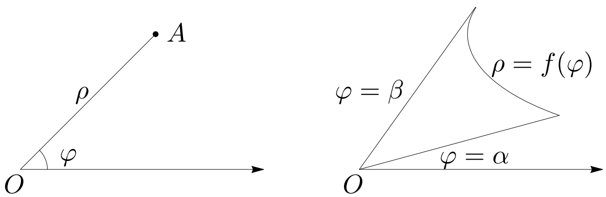



*Рис. 9. Полярная система координат и криволинейный сектор*

Пусть $0 \leqslant \rho \leqslant f(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Тогда функция $\rho = f(\varphi)$ при $\varphi \in \in [\alpha, \beta]$ определяет криволинейный сектор. Найдем его площадь. Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на элементарные части $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$ и рассмотрим одну из таких частей $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$. На отрезке $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ обозначим через $m_i = \inf\limits_{[\varphi_i, \varphi_{i+1}]} f(\varphi)$, $M_i = \sup\limits_{[\varphi_i, \varphi_{i+1}]} f(\varphi)$. Каждый элементарный криволинейный сектор заменим круговым сектором радиуса $m_i$ или $M_i$.

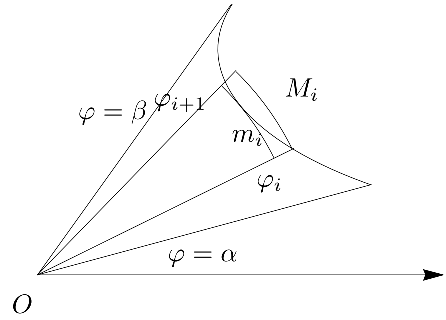



*Рис. 10. Разбиение криволинейного сектора на элементарные части*

Напомним, площадь кругового сектора вычисляется по формуле $S = \dfrac{1}{2} R^2 \varphi$, где $\varphi$ — центральный угол в радианах, $S$ — площадь сектора радиуса $R$.

Получаем

$$s_i = \frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i, \quad S_i = \frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i,$$

где $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$. Тогда площадь всего криволинейного сектора можно представить как

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Обозначим $\lambda = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \{\Delta\varphi_i\}$.

**Определение.** Если существует конечный предел $\lim\limits_{\lambda \to 0} s = \lim\limits_{\lambda \to 0} S = = P$, то он называется *площадью криволинейного сектора.*

Если функция $\rho = f(\varphi) \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, то $\lim\limits_{\lambda \to 0} s = \lim\limits_{\lambda \to 0} S = \displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f^2(\varphi) d\varphi.$

Итак, имеем формулу для площади фигуры, заданной в полярной системе координат

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi. \tag{6}$$

**Пример.** Вычислим площадь круга.
*Решение.* Пусть $\rho = r$, где $r$ — радиус круга. Тогда

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{r^2}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi = \frac{r^2}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi r^2.$$

## 2.3. Длина кривой

### *1. Понятие кривой*

Введем понятие кривой на $\mathbb{R}^2$ — координатной плоскости и на $\mathbb{R}^3$ — координатном пространстве.

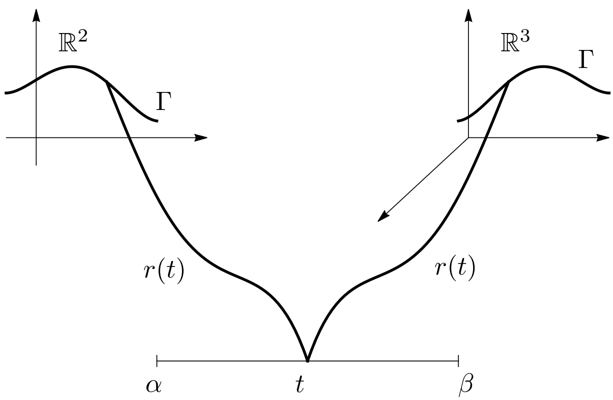



*Рис. 11. Задание кривой* $\Gamma$ *в* $\mathbb{R}^2$ *и* $\mathbb{R}^3$

Пусть задано отображение, которое каждой точке $t \in [\alpha, \beta]$ ставит в соответствие некоторую точку из пространства $\mathbb{R}^2$. Отображение задается формулой $r(t) = (x(t), y(t))$, где $x(t)$, $y(t)$ называются *координатными функциями*.

Аналогично в $\mathbb{R}^3$: дана точка $t \in [\alpha, \beta]$, и отображение кривой определяется как $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ — координатные функции.

Заметим, что функция $r(t)$ будет непрерывна, тогда и только тогда, когда непрерывны ее координатные функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

**Определение.** Непрерывное отображение $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, $(n = 2, 3)$ называется *путем* в $\mathbb{R}^2$ (в $\mathbb{R}^3$) соответственно, $t$ называют *параметром пути.*

**Определение.** Два пути $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ и $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ называются *эквивалентными* $(r \sim \rho)$, если существует такое отображение $\varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$, строго монотонное, непрерывное и такое, что $\rho = r \circ \varphi$.

**Пример.** Отображения $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\begin{cases} x = \sqrt{\tau(2-\tau)}, \\ y = \tau - 1, \end{cases}$ $\tau \in [0, 2]$ описывают одно и тоже множество точек — часть круга (а именно, его правую половину).

*Свойства отношения эквивалентности*:

1) Рефлексивность: $r \sim r$;

2) Симметричность: $r \sim \rho \Rightarrow \rho \sim r$;

3) Транзитивность: $r \sim \rho$, $\rho \sim h \Rightarrow r \sim h$.

$\triangledown$ **Упр.** Докажите свойства введенного отношения эквивалентности.

Отношение эквивалентности разбивает все наши пути на классы эквивалентных путей. Таким образом, эквивалентные пути определяют одну и ту же кривую.

Пусть $\Gamma$ — кривая, заданная отображением $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, $(n = 2, 3)$. Отображение $r(t) = (x(t), y(t))$ задает параметризацию кривой $\Gamma$, где $t$ — параметр. $r(\alpha)$ называют началом пути, $r(\beta)$ — конец пути.

Если отображение $r$ — инъективное, то мы имеем *простой путь* и кривая, при этом, называется *простым контуром.* Если при $t_1 \neq t_2$: $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ имеет место $r(t_1) = r(t_2)$, то точка $A$, в которой это происходит, называется кратной точкой пути. Простые контуры кратных точек не имеют.

**Определение.** Если начало и конец пути совпадают, то кривая называется *замкнутой* в $\mathbb{R}^2$ (в $\mathbb{R}^3$).

В $\mathbb{R}^2$ кривая называется плоской, в $\mathbb{R}^3$ — пространственной.

### *2. Длина кривой*

Рассмотрим пространственную кривую $\Gamma : r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$. Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на элементарные части точками $t_i$ :

$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. Тогда на кривой получим соответствующее разбиение точками $A_i = r(t_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$. Обозначим $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $\lambda = \max\limits_i\{\Delta t_i\}$. Заменим каждый кусочек кривой $A_i \breve{A}_{i+1}$ отрезком прямой, соединяющей эти точки. Тогда кривая $\Gamma$ заменится ломаной. Обозначим через $c_i = |A_i A_{i+1}|$ длину отрезка, соединяющего точки $A_i$ и $A_{i+1}$. Тогда длина всей ломаной равна $P_T = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i$. Данная сумма зависит от разбиения $T$.

**Определение.** Если при $\lambda \to 0$ существует конечный предел $P_T$ равный $L$, то кривая $\Gamma$ называется *спрямляемой*, а число $L$ называется *длиной кривой* $\Gamma$, т.е. $\lim\limits_{\lambda \to 0} P_T = L$.

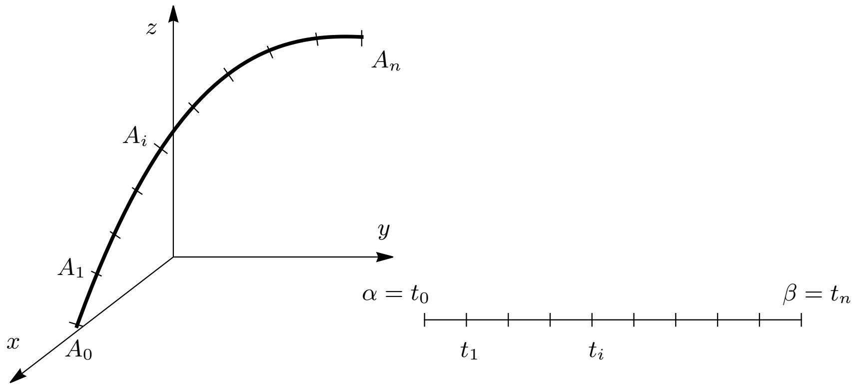



*Рис. 12. Разбиение кривой* $\Gamma$

Если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$, то, говорят, что кривая $\Gamma$ непрерывно дифференцируема и функция $r(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$.

Пусть $x(t_i) = x_i$, $y(t_i) = y_i$, $z(t_i) = z_i$. Тогда $A_i = (x_i, y_i, z_i)$. Длина отрезка прямой, соединяющей две точки в пространстве, находится по формуле

$$c_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}.$$

Так как все координатные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные, то применим теорему Лагранжа к каждой координатной функции:

$$\exists\, \xi_i \in [t_i, t_{i+1}] : x_{i+1} - x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\xi_i)\Delta t_i;$$

$$\exists\, \eta_i \in [t_i, t_{i+1}] : y_{i+1} - y_i = y^{'}(\eta_i)\Delta t_i;$$

$$\exists\, \theta_i \in [t_i, t_{i+1}] : z_{i+1} - z_i = z^{'}(\theta_i)\Delta t_i.$$

Подставляя, имеем

$$c_i = \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2 + (z'(\theta_i))^2} \cdot \Delta t_i.$$

**Определение.** Кривая $\Gamma$ называется *гладкой*, если она непрерывно-дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и не имеет на этом отрезке особых точек, т.е. таких точек $t_0$, в которых производные $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$ равны бесконечности или не существуют.

**Теорема.** *Если $\Gamma$ — гладкая кривая, то она спрямляема и ее длина вычисляется по формуле*

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt.$$

**Доказательство**. Имеем

$$P_T = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2 + (z'(\theta_i))^2} \cdot \Delta t_i.$$

Обозначим через $x'(\xi_i) = A$, $y'(\eta_i) = B_1$, $z'(\theta_i) = C_1$, где $\xi_i$, $\eta_i$, $\theta_i \in$ $\in [t_i, t_{i+1}]$.

Докажем, что $\lim\limits_{\lambda \to 0} P_T = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt.$

Рассмотрим функцию $\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}$ и интегральную сумму для нее

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2 + (z'(\xi_i))^2} \cdot \Delta t_i.$$

Обозначим $y'(\xi_i) = B$, $z'(\xi_i) = C$, где $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $\lambda =$ $= \max\{\Delta t_i\}$. Так как $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = L$, то надо доказать, что $\lim\limits_{\lambda \to 0} (P_T - \sigma) = 0$, т.е. $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, $\forall\, T : \lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - P_T| < \varepsilon$.

Оценим $|\sigma - P_T| = \left|\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(\sqrt{A^2+B^2+C^2} - \sqrt{A^2+B_1^2+C_1^2}\right)\cdot \Delta t_i\right| \leqslant$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\sqrt{A^2+B^2+C^2} - \sqrt{A^2+B_1^2+C_1^2}\right|\cdot \Delta t_i.$$

Рассмотрим

$$\left|\sqrt{A^2+B^2+C^2} - \sqrt{A^2+B_1^2+C_1^2}\right| =$$

$$= \left|\frac{\left(\sqrt{A^2+B^2+C^2}\right)^2 - \left(\sqrt{A^2+B_1^2+C_1^2}\right)^2}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} + \sqrt{A^2+B_1^2+C_1^2}}\right| =$$

$$= \frac{\left|\left(B^2-B_1^2\right)+\left(C^2-C_1^2\right)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} + \sqrt{A^2+B_1^2+C_1^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left|B^2-B_1^2\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} + \sqrt{A^2+B_1^2+C_1^2}} +$$

$$+ \frac{\left|C^2-C_1^2\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} + \sqrt{A^2+B_1^2+C_1^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|B+B_1|}{|B|+|B_1|}\cdot|B-B_1| + \frac{|C+C_1|}{|C|+|C_1|}\cdot|C-C_1| \leqslant |B-B_1|+|C-C_1|,$$

где $\sqrt{A^2+B^2+C^2} \geqslant \sqrt{B^2} = |B|$, $\sqrt{A^2+B_1^2+C_1^2} \geqslant \sqrt{B_1^2} = |B_1|$, $|B+B_1| \leqslant |B|+|B_1|$.

Итак, $\left|\sqrt{A^2+B^2+C^2} - \sqrt{A^2+B_1^2+C_1^2}\right| \leqslant |B-B_1|+|C-C_1|$.

Подставляя, имеем $|\sigma - P_T| \leqslant \sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(|B-B_1|+|C-C_1|\right)\cdot\Delta t_i$. Возвращаясь к нашим обозначениям, получим

$$|B-B_1| = |y'(\xi_i)-y'(\eta_i)| \leqslant \omega_i(y'), \quad |C-C_1| = |z'(\xi_i)-z'(\theta_i)| \leqslant \omega_i(z'),$$

где $\xi_i, \eta_i, \theta_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Так как $x'(t), y'(t), z'(t) \in \mathbb{C}[\alpha,\beta]$, то они интегрируемы на этом отрезке, поэтому по (2) условию интегрируемости (см. п. 1.3.)

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(y')\Delta t_i < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(z')\Delta t_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Откуда получаем

$$|\sigma - P_T| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(y')\Delta t_i + \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(z')\Delta t_i < \varepsilon.$$

Что нам и требовалось доказать. ■

Таким образом, формула для вычисления длины пространственной кривой имеем вид

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\, dt.$$

Частные случаи:

1) При $z = 0$ получим кривую $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$, и формулу для вычисления длины плоской кривой:

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

2) Если кривая задана в явном виде $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то полагаем $\begin{cases} y = f(x), \\ x = x, \end{cases}$ $x \in [a, b]$, причем $x' = 1$, и формула принимает вид

$$L = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

3) Пусть функция задана в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Сделаем замену $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ $\varphi \in [\alpha, \beta]$, при которой $\begin{cases} x'_\varphi = \rho'_\varphi \cos\varphi + \rho(-\sin\varphi), \\ y'_\varphi = \rho'_\varphi \sin\varphi + \rho\cos\varphi. \end{cases}$ Тогда $(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = (\rho'_\varphi)^2 + \rho^2$.

Откуда получаем

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho'_\varphi)^2 + \rho^2} d\varphi$$

формулу для вычисления длины плоской кривой в полярных координатах.

**Пример**. Вычислим длину круга, если: $\rho = r$, $r = const$.

*Решение.* Заметим, что $\rho' = 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. $L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2} d\varphi = r \int\limits_0^{2\pi} d\varphi =$
$= 2\pi r$.

***3. Дифференциал дуги***

Пусть $\Gamma = AB$ — некоторая спрямляемая кривая, заданная $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$. Рассмотрим $|A\breve{M}|$ длину дуги $A\breve{M}$. Тогда $|A\breve{M}| = l = \int\limits_\alpha^t \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2} dt = \omega(t)$. Откуда $\omega'(t) =$ $= \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2} \geqslant 0$ как производная интеграла с переменным верхним пределом (см. п. 1.8).

Рассмотрим дифференциал дуги

$$dl = \omega'(t)dt = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2} dt = \sqrt{((x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2)(dt)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_t' dt)^2 + (y_t' dt)^2 + (z_t' dt)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

Итак, дифференциал дуги равен $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ в пространстве, а на плоскости — $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Если функция задана в явном виде $y = f(x)$, то дифференциал дуги равен $dl = \sqrt{1 + (y_x')^2} dx$. Пусть дана функция в полярной системе координат $\rho = f(\varphi)$. Тогда $dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$.

Пусть $l = \omega(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где функция $\omega$ строго возрастает и дифференцируема. Тогда по теореме об обратной функции $\exists\, t = \omega^{-1}(l)$ такая, что $t \in [\alpha, \beta] \mapsto l \in [0, L]$ и $t = \omega^{-1}(l)$ также строго возрастающая и непрерывная.

Рассмотрим кривую $\Gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$. Подставим $t = \omega^{-1}(l)$

$$\begin{cases} x = x(\omega^{-1}(l)) = \varphi(l), \\ y = y(\omega^{-1}(l)) = \psi(l). \end{cases}$$

Тогда уравнения $\begin{cases} x = \varphi(l), \\ y = \psi(l), \end{cases}$ $l \in [0, L]$, называют *натуральными уравнениями* кривой Г. Параметр натурального уравнения $l$ определяет длину дуги.

## 2.4. Вычисление объемов

Рассмотрим некоторое тело в пространстве $\mathbb{R}^3$ с площадями сечений $P(x)$. Пусть $P(x) \in \mathbb{C}[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на элементарные части: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Тогда тело тоже получит соответствующие разбиения на элементарные слои, опирающиеся на отрезки $[x_i, x_{i+1}]$. Обозначим $m_i = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} P(x)$, $M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} P(x)$.

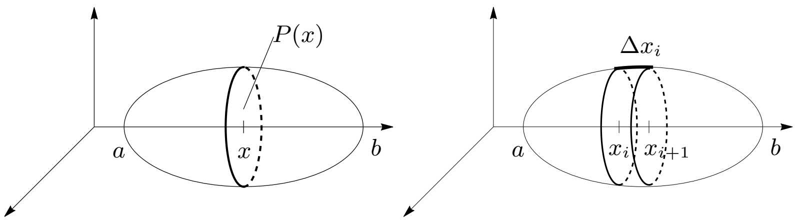



*Рис. 13. Тело и его разбиение на элементарные слои*

Построим цилиндры, опирающиеся на основания с площадями $m_i$ или $M_i$ и высотой $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Тогда объем маленького цилиндра будет равен $m_i \Delta x_i$ или $M_i \Delta x_i$.

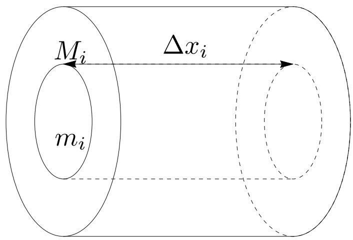



*Рис. 14. Увеличенные цилиндры с площадями оснований $m_i$ и $M_i$*

А для всего тела $\sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = s$, $\sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = S$. Обозначим

$\lambda = \max\limits_i \{\Delta x_i\}$. Тогда конечный $\lim\limits_{\lambda\to 0} s = \lim\limits_{\lambda\to 0} S = \int\limits_a^b P(x)dx$ называется объемом тела. Итак, формула для вычисления объема

$$V = \int\limits_a^b P(x)dx.$$

**Пример.** Вычислим объем пирамиды с высотой $h$ и площадью основания $P$.

*Решение.* Заметим, что $0 \leqslant x \leqslant h$. Из подобия пирамид $\dfrac{P(x)}{P} = \dfrac{x^2}{h^2}$. Откуда получаем $P(x) = \dfrac{P}{h^2}x^2$. Тогда

$$V = \int\limits_0^h \frac{P}{h^2}x^2dx = \frac{P}{h^2}\int\limits_0^h x^2dx = \frac{P}{h^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{1}{3}hP.$$

Рассмотрим частный случай, когда кривую $y = f(x)$, $f(x) \geqslant 0$, $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, вращаем вокруг оси $Ox$ в пространстве $\mathbb{R}^3$.

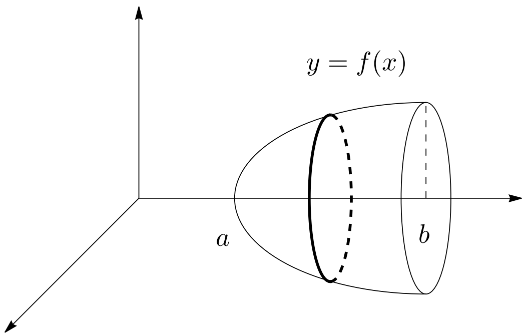



*Рис. 15. Тело, полученное вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси абсцисс*

Тогда площадь сечения $P(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$ и одна проекция содержится в другой. Имеем

$$V = \int\limits_a^b \pi f^2(x)dx = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Пусть $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x)$, $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[a, b]$. Тогда $V = V_2 - V_1 = \pi \int\limits_a^b f_2^2(x)dx - \pi \int\limits_a^b f_1^2(x)dx$. Имеем

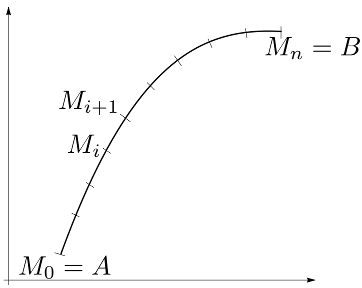
$$V = \pi \int\limits_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right] dx.$$

$\bigtriangledown$ **Упр.** Как изменятся формулы при вращении вокруг оси ординат $Oy$? Получите формулы объёмов.

**Пример.** Найдем объем конуса высоты $H$ и радиуса $R$. Из подобия имеем $\dfrac{x}{H} = \dfrac{y}{R}$. Откуда $y = \dfrac{x}{H}R$, а значит, $V = \pi \int\limits_0^H \left(\dfrac{x}{H}R\right)^2 dx = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

## 2.5. Площадь поверхности вращения

Пусть задана плоская гладкая кривая $AB$ длиной $L$ натуральными уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(l), \\ y = \psi(l), \end{cases}$ $l \in [0, L]$, где функции $\varphi$ и $\psi$ непрерывно-дифференцируемы на $[0, L]$, а кривая $AB$ лежит выше оси $Ox$, т.е. $\psi \geqslant 0$. Если кривую $AB$ вращать вокруг оси $Ox$, то получится тело вращения, площадь поверхности которого нам нужно найти.



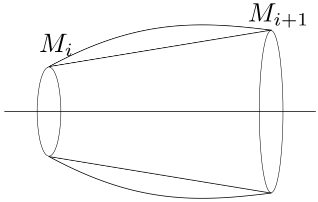




*Рис. 16. Разбиение плоской кривой и тело, полученное вращением элементарной части кривой*

Разобьем отрезок $[0, L]$ на элементарные части: $0 = l_0 < l_1 < \ldots < < l_n = L$. Тогда на кривой тоже произойдет разбиение на элементарные части точками $M_i\left(\varphi(l_i), \psi(l_i)\right)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Соединим точки $M_i$ отрезками, получим ломаную. При вращении кривой $AB$ вокруг оси $Ox$ вращается и ломаная. Пусть $Q_i$ — площадь поверхности, образованной вращением звена $M_i M_{i+1}$, а $\sigma$ — площадь поверхности всей ломаной, т.е. $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{n-1} Q_i$. При вращении ломаной образуются усеченные конусы.

Напомним, площадь боковой поверхности усеченного конуса вычисляется по формуле $\pi(R+r)c$, где $c$ — образующая, $R, r$ — радиусы большого и малого оснований.

В нашем случае $c_i = |M_i M_{i+1}|$, $r = \psi(l_i)$, $R = \psi(l_{i+1})$. Площадь усеченного конуса, полученного вращением звена $M_i M_{i+1}$ равна $Q_i = \pi\left(\psi(l_i) + \psi(l_{i+1})\right) c_i$. Обозначим $\Delta l_i = l_{i+1} - l_i$, $\lambda = \max\limits_i\{\Delta l_i\}$. Тогда

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \pi\left(\psi(l_i) + \psi(l_{i+1})\right) c_i =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \pi\left(\psi(l_i) + \psi(l_{i+1})\right) \Delta l_i + \sum_{i=0}^{n-1} \pi\left(\psi(l_i) + \psi(l_{i+1})\right) (c_i - \Delta l_i).$$

Обозначим

$$\sum_{i=0}^{n-1} \pi\left(\psi(l_i) + \psi(l_{i+1})\right) \Delta l_i = \sigma_1,$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} \pi\left(\psi(l_i) + \psi(l_{i+1})\right) (c_i - \Delta l_i) = \sigma_2.$$

Рассмотрим $\sigma_1 = \pi\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} \psi(l_i)\cdot\Delta l_i + \sum\limits_{i=0}^{n-1} \psi(l_{i+1})\cdot\Delta l_i\right)$. Если $\lambda \to 0$, то $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \psi(l_i)\Delta l_i \to \int\limits_0^L \psi(l)dl$, т.е. $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma_1 = 2\pi \int\limits_0^L \psi(l)dl$.

Оценим $\sigma_2 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \pi\left(\psi(l_i) + \psi(l_{i+1})\right)(c_i - \Delta l_i)$. Так как $\psi$ непрерывна, то она ограничена, т.е. $\exists M > 0 : |\psi(l)| \leqslant M$, $\forall l \in [0, L]$. А значит,

$|\psi(l_i)+\psi(l_{i+1})| \leqslant |\psi(l_i)|+|\psi(l_{i+1})| \leqslant 2M$. Тогда

$$|\sigma_2| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \pi\,|\psi(l_i)+\psi(l_{i+1})|\cdot|c_i-\Delta l_i| \leqslant 2M\pi\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(-c_i+\Delta l_i) =$$

$$= 2M\pi\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1}\Delta l_i - \sum_{i=0}^{n-1} c_i\right) = 2\pi M\left(L-P_T\right).$$

Так как $\lim\limits_{\lambda\to 0} P_T = L$, то $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_2 = 0$. Получили $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}(\sigma_1+\sigma_2) = = 2\pi\int\limits_0^L \psi(l)dl$. Тогда площадь поверхности вращения для кривой, заданной натуральными уравнениями, $Q = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ вычисляется по формуле

$$Q = 2\pi\int\limits_0^L \psi(l)dl.$$

Рассмотрим $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$. Пусть $x(t)$, $y(t)$ непрерывно дифференцируемы; $l$ — длина дуги. Тогда $l = \int\limits_\alpha^t \sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt \doteq \omega(t)$. Функция $\omega(t)$ строго монотонна и непрерывна на $[\alpha,\beta]$. Тогда по теореме об обратной функции $\exists\, t = \omega^{-1}(l)$ — строго монотонная и непрерывная на $[0,L]$. А значит, $\begin{cases} x = x(\omega^{-1}(l)) \doteq \varphi(l), \\ y = y(\omega^{-1}(l)) \doteq \psi(l), \end{cases}$ $l\in[0,L]$. В интеграле $Q = 2\pi\int\limits_0^L \psi(l)dl$ сделав замену: $l = \omega(t)$, $\psi(l) = \psi(\omega(t)) = y(t)$, $dl = \sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt$, получим

$$Q = 2\pi\int\limits_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt.$$

Рассмотрим кривую, заданную в явном виде $\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases}$ $x \in [a, b]$. Тогда

$$Q = 2\pi \int\limits_a^b y(x)\sqrt{1 + (y')^2}dx.$$

Пусть кривая задана в полярной системе координат $\rho = f(\varphi)$, $\varphi \in$ $\in [\alpha, \beta]$. Тогда $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ $\varphi \in [\alpha, \beta]$. $\sqrt{\left(x'_\varphi\right)^2 + \left(y'_\varphi\right)^2} = \sqrt{\rho^2 + \left(\rho'_\varphi\right)^2}$. Таким образом, площадь поверхности, образованной вращением кривой в полярной системе координат, вычисляется

$$Q = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta \rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2 + \left(\rho'_\varphi\right)^2}d\varphi.$$

**Пример.** Вычислим площадь поверхности вращения половины окружности. Получим площадь поверхности сферы.

*Решение.* Пусть $\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$. Тогда $x'_t = -r\sin t$; $y'_t = r\cos t$. $\Rightarrow (x'_t)^2 + (y'_t)^2 = (r\sin t)^2 + (r\cos t)^2 = r^2$. Подставляем в формулу:

$$Q = 2\pi \int\limits_0^\pi r\sin t r dt = 2\pi r^2 \cdot (-\cos t)\Big|_0^\pi = 4\pi r^2.$$

## 2.6. Центр масс

Пусть дана система материальных точек. $\{A_k\}_{k=1}^n$ с координатами $(x_k, y_k)$ и массой $m_k$. Тогда центр масс этой системы определяется как $\begin{cases} x_c = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^n x_k m_k, \\ y_c = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^n y_k m_k, \end{cases}$ где $m = \sum\limits_{k=1}^n m_k$ — масса всей системы точек.

### *1. Центр масс кривой*

Пусть вдоль кривой распределена равномерно некоторая масса. Пусть $\rho$ — плотность распределения массы. Заметим, что $m = L\rho$, где $L$ — длина кривой. Если $\rho = const$, то масса отличается от длины с учетом этой константы и постоянна: $m = L\rho$. При $\rho = 1$ имеем $m = L$. В общем случае, плотность распределения — функция, зависящая от точки кривой.

Пусть кривая гладкая и задана натуральными уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(l), \\ y = \psi(l), \end{cases}$ $l \in [0, L]$, где $\varphi$, $\psi$ непрерывно дифференцируемы. Пусть $\rho = \rho(l)$ — плотность распределения массы на данной кривой и $\rho \in \in \mathbb{C}[0, L]$.

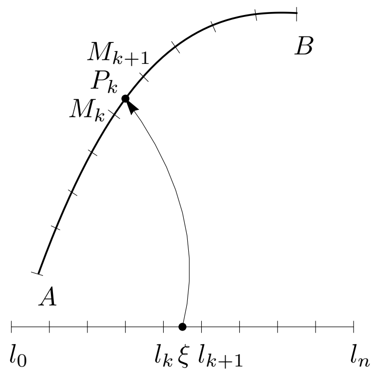



*Рис. 17. Материальная кривая*

Рассмотрим разбиение отрезка $[0, L] : 0 = l_0 < l_1 < \ldots < l_n = L$. Тогда обозначим $M_k = (\varphi(l_k), \psi(l_k))$ — точки на кривой. Всю массу элементарной дуги $M_k\breve{M}_{k+1}$ поместим в некоторую точку $P_k = (\varphi(\xi_k), \psi(\xi_k))$, лежащую на этой дуге, где $\xi_k \in [l_k, l_{k+1}]$, $\Delta l_k = l_{k+1} - l_k$ — длина дуги кривой. Масса точки определяется как $m_k = \Delta l_k \rho(\xi_k)$. Получим систему материальных точек. Найдем ее центр масс. Обозначим $(x_T, y_T)$ координаты центра масс полученной системы материальных точек $\{P_k\}$, $m_T$ — её массу $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ для разбиения $T$. Пусть $\lambda = \max\{\Delta l_k\}$.

Обозначим $\lim\limits_{\lambda \to 0} m_T = m$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} x_T = x_c$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} y_T = y_c$. Заметим, что

$m_T = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta l_k$ определяет массу всей системы материальных точек. Тогда $m = \lim\limits_{\lambda\to 0} m_T = \int\limits_0^L \rho(l)dl$.

Найдем $x_T = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\rho(\xi_k)\Delta l_k$, где $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\rho(\xi_k)\Delta l_k$ — интегральная сумма для функции $\varphi(l)\rho(l)$. Тогда

$$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_0^L \varphi(l)\rho(l)dl.$$

Аналогично со второй координатой $y_T : y_T = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{n} \psi(\xi_k)\rho(\xi_k)\Delta l_k$, где $\sum\limits_{k=1}^{n} \psi(\xi_k)\rho(\xi_k)\Delta l_k$ — интегральная сумма для функции $\psi(l)\rho(l)$. Тогда

$$y_c = \frac{1}{m}\int\limits_0^L \psi(l)\rho(l)dl.$$

Кривая задана в параметрическом виде $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$, $\rho = \rho(t)$ — плотность распределения массы на данной кривой. Тогда дифференциал $dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt$. Подставляя, имеем

$$m = \int\limits_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt,$$

$$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_\alpha^\beta \rho(t)x(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt,\ y_c = \frac{1}{m}\int\limits_\alpha^\beta \rho(t)y(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}dt.$$

Кривая задана в явном виде $\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases}$ $x \in [a, b]$.

$\rho = \rho(x)$ — плотность распределения массы на данной кривой. Тогда

$dl = \sqrt{1+(y')^2}dx$. А значит,

$$m = \int\limits_a^b \rho(x)\sqrt{1+(y')^2}dx,$$

$$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_a^b \rho(x)x\sqrt{1+(y')^2}dx, \quad y_c = \frac{1}{m}\int\limits_a^b \rho(x)f(x)\sqrt{1+(y')^2}dx.$$

Кривая задана в полярной системе координат $r = f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. $\rho = \rho(\varphi)$ — плотность распределения массы на данной кривой. Используем систему $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$ Тогда $dl = \sqrt{r^2+(r')^2}d\varphi$. Следовательно,

$$m = \int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sqrt{r^2+(r')^2}d\varphi,$$

$$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi)r\cos\varphi\sqrt{r^2+(r')^2}d\varphi,\ y_c = \frac{1}{m}\int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi)r\sin\varphi\sqrt{r^2+(r')^2}d\varphi.$$

**Пример.** Найдем координаты центра масс кривой с равномерно распределенной массой, т.е. $\rho = 1$. Тогда $m = L$. $\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$. Подставляя, имеем

$$m = L = \pi r,\ x_c = \frac{1}{L}\int\limits_0^\pi r^2\cos t\,dt = 0,\ y_c = \frac{1}{L}\int\limits_0^\pi r^2\sin t\,dt = \frac{2r}{\pi}.$$

### *2. Центр масс плоской фигуры*

Пусть задана фигура, ограниченная линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$. Предположим, что $f_1,\ f_2 \in \mathbb{C}[a,b]$, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$. Пусть масса распределяется равномерно. Тогда при $\rho = 1$ имеем, что масса равняется площади: $m = P$. Найдем центр масс данной плоской фигуры.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на элементарные отрезки: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, и рассмотрим одну из таких частей. Всю массу элементарной части $m_k$ поместим в одну точку $P_k$. Получим систему материальных точек. Обозначим $(x_T, y_T)$ — координаты центра масс этой системы материальных точек $\{P_k\}$ для разбиения $T$.

Пусть $\xi_k$ — произвольная точка элементарного отрезка $[x_k, x_{k+1}]$. Определим координаты точек $P_k = \left(\xi_k, \dfrac{f_1(\xi_k) + f_2(\xi_k)}{2}\right)$. Так как при $\rho = 1$ масса равняется площади: $m = P$, будем рассматривать такие разбиения $T$ на элементарные отрезки, при которых площадь элементарной части фигуры можно заменить площадью прямоугольника с высотой $f_2(\xi_k) - f_1(\xi_k)$ и шириной $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, т.е.

$$m_k = (f_2(\xi_k) - f_1(\xi_k)) \cdot \Delta x_k.$$

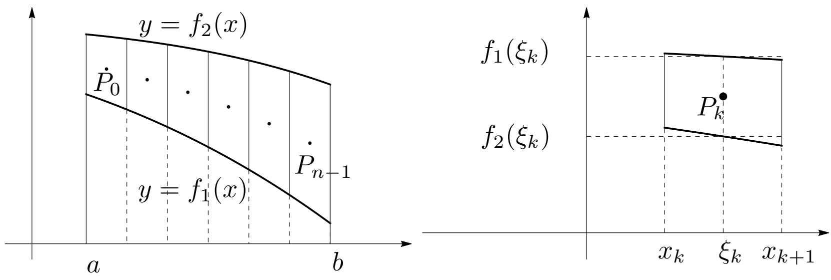



*Рис. 18. Разбиение плоской фигуры и её элементарная часть*

Масса всей фигуры равна $m = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k = P$. Определим $x_c = \lim\limits_{\lambda \to 0} x_T$, $y_c = \lim\limits_{\lambda \to 0} y_T$, где $\lambda = \max\limits_k \{\Delta x_k\}$. Тогда

$$x_T = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \cdot (f_2(\xi_k) - f_1(\xi_k)) \cdot \Delta x_k.$$

А значит,

$$x_c = \frac{1}{P} \int\limits_a^b x \, (f_2(x) - f_1(x)) \, dx.$$

Аналогично проведем выкладки для $y_T$ :

$$y_T = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{n}\frac{f_1(\xi_k)+f_2(\xi_k)}{2}\cdot(f_2(\xi_k)-f_1(\xi_k))\cdot\Delta x_k =$$

$$= \frac{1}{2P}\sum_{k=1}^{n}\left(f_2^2(\xi_k)-f_1^2(\xi_k)\right)\cdot\Delta x_k.$$

$$y_c = \frac{1}{2P}\int\limits_a^b\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx.$$

**Пример.** Найдем координаты центра масс $(x_c, y_c)$ полукруга радиуса $r$.

*Решение.* Нам дано уравнение: $y = \sqrt{r^2-x^2}$, где $x \in [-r, r]$. Находим площадь данной фигуры: $P = \dfrac{\pi r^2}{2}$. Вычислим $x_c$ и $y_c$ по формулам:

$$x_c = \frac{2}{\pi r^2}\int\limits_{-r}^{r} x\cdot\sqrt{r^2-x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}d(r^2-x^2) = \left.\frac{-2(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3\pi r^2}\right|_{-r}^{r} = 0,$$

$$y_c = \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi r^2}\left.\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-r}^{r} = \frac{1}{\pi r^2}\cdot\left(2r^3-\frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4r}{3\pi}.$$

**Замечание.** Если наша фигура симметрична относительно оси $Oy$, то $x_c = 0$. Если симметрия относительно оси $Ox$, то $y_c = 0$.

$\bigtriangledown$ **Упр.** Выясните, как изменятся формулы центра масс, если плотность $\rho$ является функцией, т.е. масса не распределена равномерно по фигуре.

### *3. Теоремы Гульдина*

Пусть задана плоская гладкая кривая. Тогда вторая координата центра масс для плоской кривой определяется $y_c = \dfrac{1}{L}\int\limits_0^L y dl$. С другой стороны, площадь поверхности, образованной вращением этой кривой, равна $Q = 2\pi \int\limits_0^L y dl$. Выражая интеграл из обоих равенств и приравнивая $\int\limits_0^L y dl = L \cdot y_c = \dfrac{Q}{2\pi}$, получаем $Q = 2\pi L y_c$, что дает первую теорему Гульдина.

**Теорема (первая теорема Гульдина).** *Площадь поверхности, образованной вращением некоторой кривой вокруг оси, не пересекающей кривую, равняется произведению длины окружности, описываемой центром тяжести, на длину всей кривой, т.е.* $Q = 2\pi L y_c$.

**Пример.** Найдем координату $y_c$ полуокружности.

*Решение.* Как мы уже вычислили $Q = 4\pi r^2$ и $L = \pi r$. Тогда по первой теореме Гульдина $y_c = \dfrac{Q}{2\pi L} = \dfrac{4\pi r^2}{2\pi \cdot \pi r} = \dfrac{2r}{\pi}$.

Пусть задана плоская фигура, ограниченная линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$. Пусть $f_1,\ f_2 \in \mathbb{C}[a, b]$, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$.

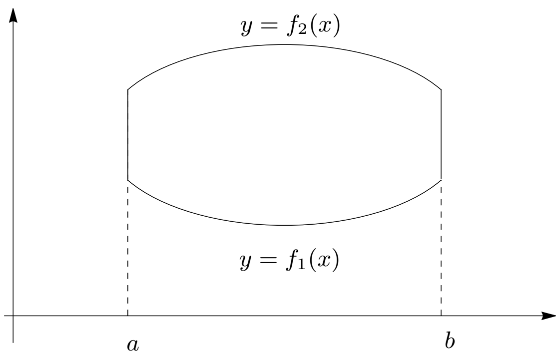



*Рис. 19. Плоская фигура, ограниченная линиями*

Тогда вторая координата центра масс для плоской фигуры определяется $y_c = \frac{1}{2P}\int\limits_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right) dx$. С другой стороны объем тела вращения равен $V = \pi\int\limits_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right) dx$. Тогда $2Py_c = \frac{V}{\pi}$. Откуда

$$V = 2\pi y_c P$$

— это вторая теорема Гульдина.

**Теорема (вторая теорема Гульдина).** *Объем тела, образованного вращением некоторой плоской фигуры вокруг оси, не пересекающей ее, равен произведению длины окружности, описываемой центром тяжести этой фигуры на ее площадь, т.е.*

$$V = 2\pi y_c P.$$

**Пример.** Найдем координату $y_c$ полукруга.

*Решение.* Площадь полукруга мы уже вычисляли $P = \frac{\pi r^2}{2}$, как и объем тела, полученного вращением полукруга $V = \frac{4\pi r^3}{3}$. Тогда, используя вторую теорему Гульдина, имеем $y_c = \frac{4r}{3\pi}$, что нами получено непосредственно в предыдущем пункте.

**Замечание.** В случае вращения кривой (или плоской фигуры) вокруг оси $Ox$ в теоремах Гульдина присутствует координата $y_c$. Если же вращать кривую (или плоскую фигуру) вокруг оси $Oy$, то будет координата $x_c$.

# 3. Варианты лабораторных работ

## 3.1. Вариант 0 с решениями

1. Найти длину дуги $y = \sqrt{x^3}$ от начала координат до точки $B(4;8)$.

   *Решение.* Имеем плоскую кривую, заданную в явном виде, поэтому используем формулу
$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx.$$
   Для этого вычислим производную функции $y'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot 3x^2$ и определим пределы интегрирования. Начало координат это точка $O(0,0)$ ($x = 0$, $y = 0$), и, учитывая точку $B(4;8)$ ($x = 4$, $y = 8$), получим $0 \leqslant x \leqslant 4$. Таким образом,
$$L = \int\limits_0^4 \sqrt{1 + \Big(\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot 3x^2\Big)^2}\, dx = \int\limits_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx =$$
$$= \frac{4}{9}\int\limits_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, d\Big(1 + \frac{9}{4}x\Big) = \frac{8}{27}\left(\sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\right)^3\Bigg|_0^4 =$$
$$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$
   Заметим для проверки, что длина положительна.

2. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = t\sin t, \\ y = t\cos t, \\ z = \dfrac{2t \cdot \sqrt{2t}}{3}, \end{cases}$ от точки $A(0,0,0)$ до точки $B(0, 2\pi, 8\pi\sqrt{\pi}/3)$.

   *Решение.* Это пространственная кривая, заданная в параметрическом виде, поэтому используем формулу
$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}dt.$$

Имеем $x'_t = \sin t + t\cos t$, $y'_t = \cos t - t\sin t$, $z'_t = \dfrac{2\sqrt{2t} + 2t \cdot \frac{2}{2\sqrt{2t}}}{3} =$ $= \sqrt{2t}$. Пределы интегрирования определим из координат точек $A$ и $B$: точка $A$ имеет координаты $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ при $t = 0$, точка $B$ имеет координаты $x = 0$, $y = 2\pi$, $z = 8\pi\sqrt{\pi}/3$ при $t = 2\pi$. Таким образом, подставим и преобразуем

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(\sin t + t\cos t)^2 + (\cos t - t\sin t)^2 + (\sqrt{2t})^2}dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{t^2 + 2t + 1}dt = \int\limits_0^{2\pi} (t+1)dt = \frac{(t+1)^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{(2\pi+1)^2}{2} - \frac{1}{2} =$$
$$= 2\pi^2 + 2\pi.$$

3. Найти длину спирали $r = e^{a\varphi}$ от полюса до точки $(\varphi_0; \rho)$.

   *Решение.* Дана плоская кривая в полярных координатах, поэтому используем формулу

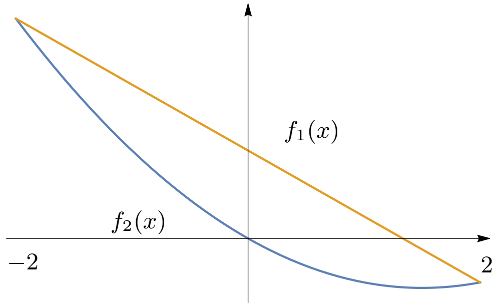
$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(r'_\varphi)^2 + r^2}d\varphi.$$

   Имеем $r' = ae^{a\varphi}$. Таким образом,

$$L = \int\limits_0^{\varphi_0} \sqrt{a^2e^{2a\varphi} + e^{2a\varphi}}d\varphi = \sqrt{a^2+1}\int\limits_0^{\varphi_0} e^{a\varphi}d\varphi = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}e^{a\varphi}\Big|_0^{\varphi_0} =$$
$$= \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}(e^{a\varphi_0} - 1).$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 3x$, $3x + y = 4$.

   *Решение.* Построим фигуру, ограниченную заданными линиями.




Из рисунка видно, что $f_1(x) = 4 - 3x$ и $f_2(x) = x^2 - 3x$, причем $f_1(x) \geqslant f_2(x)$. Вычислим площадь фигуры по формуле

$$P = \int_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big)dx.$$

Для определения пределов интегрирования найдем точки пересечения графиков функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, получим $x^2 - 3x = 4 - 3x \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Таким образом,

$$P = \int\limits_{-2}^{2} (4 - 3x - x^2 + 3x)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= 8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

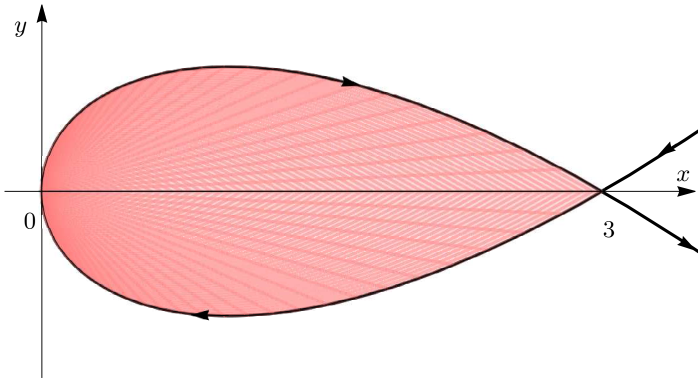
***Указание.*** *При вычислении площадей фигур рисунок является обязательной частью решения.*

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - \dfrac{1}{3}t^3. \end{cases}$

*Решение.* Так как имеем фигуру, ограниченную кривыми, заданными в параметрическом виде, то воспользуемся формулой

$$P = \left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} y x'_t \, dt\right|.$$

Имеем $x' = 2t$. Для определения пределов интегрирования найдем точки пересечения кривой с осями координат, получим $O(0,0)$ $(t = 0)$, $A(3,0)$ $(t = \pm\sqrt{3})$. Так как $x = t^2$ — четная неотрицательная функция, а $y = t - \dfrac{1}{3}t^3$ — нечетная функция, то график функции расположен вдоль положительного направления оси $Ox$ и симметричен относительно оси $Ox$.




Следовательно,

$$\frac{P}{2} = \left|\int\limits_0^{\sqrt{3}} \Big(t - \frac{1}{3}t^3\Big)2tdt\right| = \left|2\int\limits_0^{\sqrt{3}} \Big(t^2 - \frac{t^4}{3}\Big)dt\right| = \left|2\Big(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{15}\Big)\Big|_0^{\sqrt{3}}\right| =$$

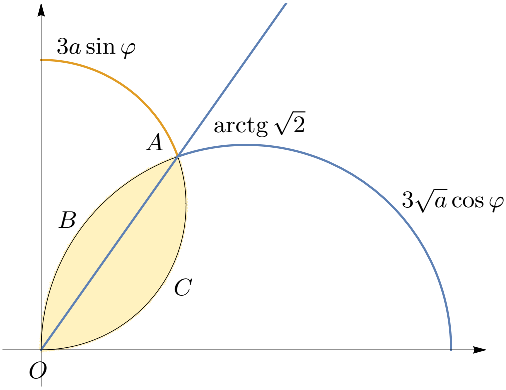
$$= 2\Big(\frac{3\sqrt{3} - 9\sqrt{3}}{15}\Big) = \frac{4\sqrt{3}}{5}.$$

Таким образом, $P = \dfrac{8\sqrt{3}}{5}$.

Заметим для проверки, что в ответе должно получится положительное число.

6. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностями $r = 3\sqrt{a}\cos\varphi$ и $r = 3a\sin\varphi$, заданными в полярных координатах.

*Решение.* Найдем угол пересечения заданных окружностей $3\sqrt{a}\cos\varphi = 3a\sin\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = 2 \Leftrightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Построим чертеж.




Воспользуемся формулой

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Искомая площадь $P$ равна сумме площадей криволинейных секторов $OAC$ и $OAB$:

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} (3a\sin\varphi)^2 d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}^{\pi/2} (3\sqrt{2}a\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2}a^2\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi + 9a^2\int\limits_{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= \frac{9}{4}\Big(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big)\Big|_{0}^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} + \frac{9a^2}{2}\Big(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big)\Big|_{\operatorname{arctg} 2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{9}{4}a^2\Big(\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sin 2\operatorname{arctg}\sqrt{2}\Big) +$$

$$+ \frac{9}{2}a^2\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sin 2\operatorname{arctg}\sqrt{2}\Big) =$$

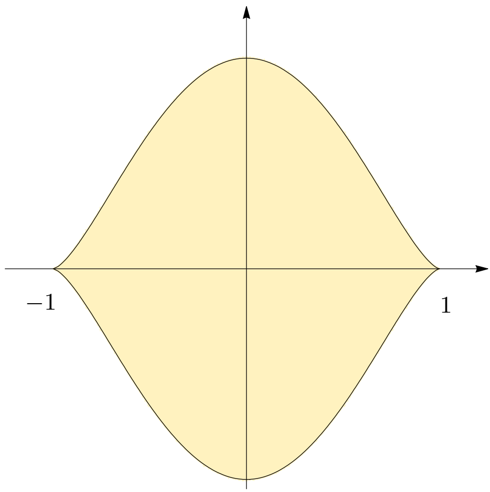
$$= \frac{9}{4}a^2\Big(\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big) + \frac{9}{2}a^2\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big) =$$
$$= \frac{9}{4}a^2(\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \sqrt{2}).$$

7. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $y^2 = (1-x^2)^3$ вокруг оси $Ox$.

   *Решение.* Используем формулу

$$V_x = \pi\int\limits_a^b y^2 dx.$$

   Кривая $y^2 = (1-x^2)^3$ симметрична относительно оси $Ox$ и пересекает ось $Ox$ в точках $x = \pm 1$.




   Таким образом,

$$V = \pi\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^3dx = 2\pi\int\limits_0^1(-x^6+3x^4-3x^2+1)dx =$$

$$= 2\pi\Big(-\frac{x^7}{7} + 3\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^3}{3} + x\Big)\Big|_0^1 = 2\pi\Big(-\frac{1}{7} + 3\cdot\frac{1}{5} - 1 + 1\Big) =$$
$$= \frac{16}{35}.$$

8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $(y^2 - b^2)^2 = a^3x$ и отрезком оси $Oy$, вокруг оси $Oy$.

   *Решение.* Используем формулу

$$V_y = \pi\int\limits_{y_1}^{y_2} x^2 dy,$$

   где $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, $x = x(y) \geqslant 0$. Кривая $(y^2 - b^2)^2 = a^3x$ пересекает ось $Oy$ в точках, являющихся решение уравнения $(y^2 - b^2)^2 = 0$. Отсюда $y_1 = -b$, $y_2 = b$. Таким образом,

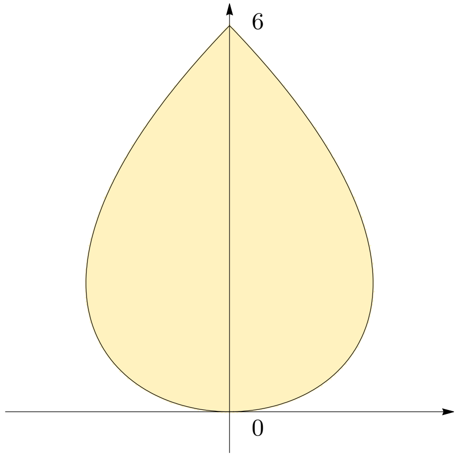
$$V_y = \pi\int\limits_{-b}^{b}\Big(\frac{(y^2 - b^2)^2}{a^3}\Big)^2 dy = \frac{\pi}{a^6}\int\limits_{-b}^{b}(y^2 - b^2)^4 dy =$$
$$= \frac{2\pi}{a^6}\int\limits_{0}^{b}(y^8 - 4b^2y^6 + 6b^4y^4 - 4b^6y^2 + b^8)dy =$$
$$= \frac{2\pi}{a^6}\Big(\frac{y^9}{9} - 4b^2\frac{y^7}{7} + 6b^4\frac{y^5}{5} - 4b^6\frac{y^3}{3} + b^8y\Big)\Big|_0^b =$$
$$= \frac{2\pi}{a^6}\Big(\frac{b^9}{9} - 4b^2\frac{b^7}{7} + 6b^4\frac{b^5}{5} - 4b^6\frac{b^3}{3} + b^9\Big) = \frac{2\pi}{a^6}\cdot\frac{128b^9}{315} = \frac{256\pi b^9}{a^6}.$$

9. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением петли кривой $18x^2 = y(6 - y)^2$ вокруг оси $Oy$.

   *Решение.* Используем формулу

$$Q = 2\pi\int\limits_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1 + (x'_y)^2}dy.$$

   Кривая $18x^2 = y(6 - y)^2$ пересекает ось $Oy$ в точках, являющихся решением уравнения $y(6 - y)^2 = 0$, т.е. $y_1 = 0$, $y_2 = 6$.




Определим $x'_y$, как производную функции, заданной в неявном виде. Для этого продифференцируем обе части равенства $18x^2 = y(6-y)^2$ по переменной $y$. Учитывая, что $x = x(y)$, получим

$$36xx' = (6-y)^2 - 2y(6-y) \Rightarrow xx' = \frac{(6-y)(2-y)}{12}$$

Таким образом,

$$Q = 2\pi \int\limits_0^6 x\sqrt{1+(x'_y)^2}dy = 2\pi \int\limits_0^6 \sqrt{x^2+(xx')^2}dy =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^6 \sqrt{\frac{y(6-y)^2}{18} + \frac{(6-y)^2(2-y)^2}{144}}dy =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^6 \frac{6-y}{12}\sqrt{8y+(2-y)^2}dy = \frac{\pi}{6}\int\limits_0^6 (6-y)\sqrt{4y+4+y^2}dy =$$

$$= \frac{\pi}{6}\int\limits_0^6 (6-y)\sqrt{(2+y)^2}dy = \frac{\pi}{6}\int\limits_0^6 (6-y)(2+y)dy =$$

$$= \frac{\pi}{6} \int\limits_0^6 (12 + 4y - y^2) dy = \frac{\pi}{6} \Big( 12y + 2y^2 - \frac{y^3}{3} \Big) \Big|_0^6 =$$

$$= \frac{\pi}{6} (72 + 72 - 72) = 12\pi.$$

10. Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии $y = a \dfrac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$, $-a \leqslant x \leqslant a$.

*Решение.* Нетрудно заметить, что $y(x) = y(-x) \Rightarrow$ функция $y(x)$ четная $\Rightarrow$ кривая симметрична относительно оси $Ox$, то есть $x_c = 0$. Найдем $y_c$ по формуле

$$y_c = \frac{1}{m} \int\limits_a^b \rho(x) y(x) \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

Кривая однородная по умолчанию, поэтому будем считать $\rho(x) = 1$, тогда формула примет вид $y_c = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int\limits_a^b y(x) \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$.

Имеем $y'_x = a \dfrac{\frac{1}{a} e^{x/a} - \frac{1}{a} e^{-x/a}}{2} = \dfrac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2} = \operatorname{sh} \dfrac{x}{a}$. Вычислим длину дуги, пользуясь формулами для гиперболических функций из приложения (см. с. 117)

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \int\limits_{-a}^a \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = 2 \int\limits_0^a \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx =$$

$$= 2a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^a = 2a \operatorname{sh} 1.$$

Далее

$$y_c = \frac{1}{2a \operatorname{sh} 1} \int\limits_{-a}^a a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \frac{a}{2a \operatorname{sh} 1} \int\limits_{-a}^a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx =$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{sh} 1} \int\limits_0^a \Big( 1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a} \Big) dx = \frac{1}{2 \operatorname{sh} 1} \Big( x + \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2x}{a} \Big) \Big|_0^a =$$

$$= \frac{a + \frac{a}{2}\operatorname{sh} 2}{2\operatorname{sh} 1} = \frac{a(2+\operatorname{sh} 2)}{4\operatorname{sh} 1}.$$

Таким образом $x_c = 0$, $y_c = \dfrac{a(2+\operatorname{sh} 2)}{4\operatorname{sh} 1}$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 3x$ и $3x + y = 4$.

    *Решение.* Из решения задачи 4 площадь фигуры равна $P = \dfrac{32}{3}$. Имеем $f_1(x) = 4 - 3x$, $f_2(x) = x^2 - 3x$. Вычислим координаты центра тяжести однородной плоской фигуры по формулам

$$x_c = \frac{1}{P}\int\limits_a^b x(f_1(x) - f_2(x))dx, \quad y_c = \frac{1}{2P}\int\limits_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x))dx.$$

    Получим

$$x_c = \frac{3}{32}\int\limits_{-2}^{2} x(4 - 3x - x^2 + 3x)dx = \int\limits_{-2}^{2}(4x - x^3)dx = 0.$$

$$y_c = \frac{3}{64}\int\limits_{-2}^{2}\Big((4-3x)^2 - (x^2-3x)^2\Big)dx =$$

$$= \frac{3}{64}\int\limits_{-2}^{2}(-x^4 + 6x^3 - 24x + 16)dx =$$

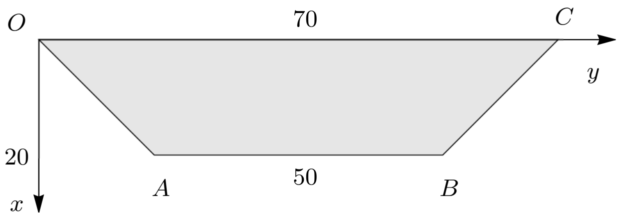
$$= \frac{3}{64}\Big(-\frac{x^5}{5} + 6\frac{x^4}{4} - 24\frac{x^2}{2} + 16x\Big)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{3}{64}\Big(-\frac{32}{5} + 24 - 48 + 32 - \frac{32}{5} - 24 + 48 + 32\Big) = \frac{3}{64}\cdot\frac{256}{5} = \frac{12}{5}.$$

    Таким образом, $x_c = 0$, $y_c = \dfrac{12}{5}$.

12. Пластина, имеющая форму равнобочной трапеции с основаниями 70 м, 50 м и высотой 20 м, погружена в раствор. Найти силу давления раствора на пластину, если $\gamma$ — удельный вес раствора.

    *Решение.* Выберем систему координат и нарисуем рисунок.




Координаты точек $A$, $B$, $C$ легко определяются из чертежа: $A(20;10)$, $B(20;60)$, $C(0;70)$. Составим уравнение прямых $OA$, $BC$. Для этого воспользуемся уравнением прямой, проходящей через 2 точки $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$,

$$\frac{x - x_M}{x_N - x_M} = \frac{y - y_M}{y_N - y_M}.$$

Тогда $OA: \dfrac{x-0}{20-0} = \dfrac{y-0}{10-0} \Leftrightarrow y = 0.5x$, $BC: \dfrac{x-20}{0-20} = \dfrac{y-60}{70-60}$ $\Leftrightarrow y = -0.5x + 70$. Воспользуемся формулой

$$P = \gamma \int\limits_a^b x(y_2(x) - y_1(x))dx,$$

где $y_1(x) \leqslant y_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $\gamma$ — удельный вес раствора. Таким образом, получим

$$P = \gamma \int\limits_0^{20} x(-0.5x + 70 - 0.5x)dx = \gamma \int\limits_0^{20} (-x^2 + 70x)dx =$$

$$= \gamma\Big( -\frac{x^3}{3} + 70\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_0^{20} = \frac{34000}{3}\gamma \quad \text{(Н)}.$$

13. Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Доказать неравенство

$$\Big[\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\Big]^2 \leqslant \int\limits_a^b f^2(x)dx \cdot \int\limits_a^b g^2(x)dx.$$

*Решение.* Рассмотрим функцию $G(\lambda) = \int\limits_a^b \big(f(x) - \lambda g(x)\big)^2 dx$ как квадратный многочлен относительно переменной $\lambda$. Раскрыв скобки и воспользовавшись свойством линейности определенного интеграла, получим $G(\lambda) = \int\limits_a^b \big(f^2(x) - 2\lambda f(x)g(x) + \lambda^2 g^2(x)\big)dx =$ $= \lambda^2 \int\limits_a^b g^2(x)dx - 2\lambda \int\limits_a^b f(x)g(x)dx + \int\limits_a^b f^2(x)dx$. Из свойства неотрицательности определенного интеграла следует, что $G(\lambda) \geqslant 0$ для $\forall\,\lambda$, то есть многочлен $G(\lambda)$ не может иметь двух различных корней, а значит, дискриминант

$$D = \Big[\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\Big]^2 - \int\limits_a^b f^2(x)dx \int\limits_a^b g^2(x)dx$$

должен быть не положителен. Следовательно,

$$\Big[\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\Big]^2 \leqslant \int\limits_a^b f^2(x)dx \cdot \int\limits_a^b g^2(x)dx.$$

Утверждение доказано.

## 3.2. Вариант 1

1. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$, $\dfrac{3}{4} \leqslant x \leqslant 125$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = \varphi^2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной осью $OX$ и одной аркой циклоиды
$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 1 + \cos\varphi$.

7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной графиками функций $y = 1 - x^2$, $x = \sqrt{y - 2}$, $x = 1$, $x = 0$.

8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$, $y = 2\cos x$, $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$, вокруг оси $Oy$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги параболы $y^2 = 4ax$ от точки $O(0, 0)$ до точки $A(3a, 2a\sqrt{3})$ вокруг оси $Ox$.

10. Найти координаты центра тяжести однородной дуги полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 6 - x^2$, $y = 2$.

12. Вычислить работу, затраченную на растяжение пружины на $0,1$ м, если известно, что для её удлинения на $0,05$ м нужно приложить силу в 2Н.

13. Определите знак интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

### 3.3. Вариант 2

1. Найти длину дуги кривой $y = 1 - \ln\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$ в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = a\cos^4\dfrac{\varphi}{4}$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = x\sqrt{9-x^2}$, $y = 0$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = \cos\varphi - \sin\varphi$.

7. Найти объем тора, образованного вращением окружности $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(b \geqslant a)$ вокруг оси $Ox$.

8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = e^x - 1$, $y = 2$, $x = 0$, вокруг оси $Oy$.

9. Найти площадь поверхности конуса, образованного вращением отрезка прямой $y = 2x$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(2,4)$ вокруг оси $Ox$.

10. Найти координаты центра масс дуги астроиды

$$\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t. \end{cases}$$

11. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной дугой эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в первом квадранте, и осями координат.

12. Вычислить силу, с которой вода давит на пластину, имеющую форму равнобедренной трапеции, верхнее основание которой 70 м, нижнее — 50 м, а высота — 20 м. Плотность воды 1000 кг/м$^3$.

13. Оцените $I = \int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

## 3.4. Вариант 3

1. Найти длину дуги кривой $y = 1 + \ln\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = a\Big(\cos t + \ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\Big), \\ y = a\sin t, \end{cases} \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{6}.$$

3. Найти длину дуги спирали Архимеда $r = a\varphi$, находящейся внутри круга радиусом $2a\pi$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = x^2\sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{3}(6 - t), \\ y = \dfrac{t^2}{8}(6 - t). \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 1 + \cos\varphi$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченными линиями $y^2 = 2px$ и $x = a$.

8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^3 - y = x$, $x = 0$, вокруг оси $Oy$.

9. Найти площадь поверхности конуса, образованного вращением отрезка прямой $y = 2x$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(2,4)$ вокруг оси $Ox$.

10. Найти координаты центра масс дуги синусоиды $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — треугольник, стороны которого лежат на прямых $x + y = a$, $x = 0$ и $y = 0$.

12. Вычислить работу, которую нужно затратить на сооружение конического кургана, радиус основания которого 2 м, а высота — 3 м, из однородного строительного материала плотностью 2500 кг/м$^3$.

13. Функция $f(x)$ — непрерывная, положительная. Докажите, что

$$\varphi(x) = \frac{\int\limits_0^x tf(t)dt}{\int\limits_0^x f(t)dt}$$

возрастает при $x > 0$.

## 3.5. Вариант 4

1. Найти длину дуги кривой $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 2 - \dfrac{t^4}{4}, \\ y = \dfrac{t^6}{6}, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = a(1 - \cos\varphi)$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$, $x = \ln 2$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t). \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = \cos 2\varphi$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

и осью $Ox$.

8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x(3 - x)$, $y = x$, вокруг оси $Oy$.

9. Найти площадь поверхности конуса, образованного вращением отрезка прямой $y = 2x$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(2,4)$ вокруг оси $Oy$.

10. Найти координаты центра масс дуги кривой $\rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi$, заключенной между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и осями координат ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$).

12. Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из полушара радиусом 5 м.

13. Докажите, что $\displaystyle\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt$ эквивалентен $\dfrac{e^{x^2}}{2x}$ при $x \to +\infty$.

## 3.6. Вариант 5

1. Найти длину дуги кривой $y = \arccos e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой
$$\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t, \\ y = 6\sin t - 8\cos t, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = \sin^2 \dfrac{\varphi}{2}$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = \arccos x$, $y = 0$, $x = 0$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной осью $OX$ и верзиерой
$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = \dfrac{8}{1+t^2}. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = \sin 3\varphi$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченными линиями $y^3 = x^2$, $y = 1$.

8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $x^3 = y^2$, $x = 0$, $y = -\dfrac{1}{27}$, $y = 8$, вокруг оси $Oy$.

9. Найти площадь поверхности тора, образованного вращением окружности $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(b \geqslant a)$ вокруг оси $Ox$.

10. Найти координаты центра масс дуги развертки окружности
$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры Ф, где Ф — фигура, ограниченная первой аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}t^2, \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

и осью $Ox$.

12. Размеры пирамиды Хеопса приблизительно таковы: высота $H = 140$ м, ребро основания (в основании квадрат) $a = 200$ м. Удельный вес камня, из которого она сделана $\rho \approx 2,5$ г/см$^3$. Вычислить работу, затраченную при ее постройке, на преодоление силы тяжести.

13. Функция $f(x)$ — непрерывная, периодическая с периодом $T$. Докажите

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

### 3.7. Вариант 6

1. Найти длину дуги кривой $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{7}{9}$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 4(\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

3. Найти длину первого витка спирали Архимеда $r = a\varphi$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = x \operatorname{arctg} x$, $y = 0$, $x = \sqrt{3}$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей

$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 1 + \cos\varphi$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y^3 = x^2$, $y = 1$.

8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями
$$\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = a\sin 2t \end{cases}$$
вокруг оси $Oy$.

9. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением одной арки циклоиды
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$
вокруг оси $Ox$.

10. Найти координаты центра масс дуги кривой $\rho = 2\sin\varphi$ от точки $(0, 0)$ до точки $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная дугой синусоиды $y = \sin x$ и отрезком оси $Ox$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

12. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найти силу давления воды, наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой 40 см $\times$ 70 см.

13. Пусть функция $f(t)$ интегрируема от 0 до 1. Докажите
$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx.$$

## 3.8. Вариант 7

1. Найти длину дуги кривой $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{8}{9}$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой
$$\begin{cases} x = 2R\cos\dfrac{t}{3} + R\cos\dfrac{2t}{3}, \\ y = 2R\sin\dfrac{t}{3} - R\sin\dfrac{2t}{3}, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 3(\cos\varphi - 1)$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $x = \arccos y$, $y = 0$, $x = 0$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом
$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r^2 = 9\sin 2\varphi$.

7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной графиками функций $y = 1 - x^2$, $x = \sqrt{y-2}$, $x = 1$, $x = 0$.

8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями
$$\begin{cases} x = 2a\sin 2t, \\ y = 2a\cos t \end{cases}$$
вокруг оси $Oy$.

9. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением астроиды
$$\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t \end{cases}$$
вокруг оси $Ox$.

10. Найти координаты центра масс дуги кардиоиды $\rho = 2(1+\cos\varphi)$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная дугой синусоиды $y = \sin x$ и отрезком оси $Ox$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

12. Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из полушара радиусом 5 м.

13. Не вычисляя интеграла, докажите справедливость равенства:

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} x^{100} \lg \frac{1+x}{1-x} dx = 0.$$

## 3.9. Вариант 8

1. Найти длину дуги кривой $\dfrac{y^2}{5} = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, в декартовых координатах.

2. Найти длину одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 2(1+\cos\varphi)$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $x = \sqrt{e^y - 1}$, $x = 0$, $y = \ln 2$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой Лиссажу

$$\begin{cases} x = a \sin t, \\ y = a \sin 2t. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = \dfrac{1}{2}\sin\varphi$.

7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ астроиды
$$\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$$

8. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 2$ и первой половиной первой арки циклоиды
$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой
$$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$$
вокруг оси $Ox$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

10. Найти координаты центра масс дуги кривой
$$\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases} \qquad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная полуокружностью $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и осью $Ox$.

12. Определить, на какую максимальную высоту поднимется тело, брошенное от поверхности Земли вертикально вверх со скоростью $v_0$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

13. Не вычисляя интегралов, доказать справедливость равенства:
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0.$$

## 3.10. Вариант 9

1. Найти длину дуги кривой $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой
$$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi.$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 2\cos\varphi$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 + 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t, \\ y = 7 - t^2. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \sin\varphi$, $r = 2\cos\varphi$.

7. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$ вокруг оси $Ox$.

8. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной дугой синусоиды, соответствующей четверти периода, осью $Oy$ и прямой $y = 1$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением параболы $y^2 = 4ax$ вокруг оси $Ox$ от $x = 0$ до $x = 3a$.

10. Найти координаты центра масс дуги астроиды
$$\begin{cases} x = 2\cos^3\dfrac{t}{4}, \\ y = 2\sin^3\dfrac{t}{4}, \end{cases}$$
расположенной в первой координатной четверти.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная дугой параболы $y = b\sqrt{\dfrac{x}{a}}$, $(a > 0,\ b > 0)$, осью $Ox$ и прямой $x = b$.

12. Два тела одновременно начали прямолинейное движение из одной точки в одном направлении. Первое тело движется со скоростью $v_1 = 6t^2 + 2t$ м/с, второе — со скоростью $v_2 = 4t + 5$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

13. Не вычисляя интегралов, доказать справедливость равенства:
$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx.$$

## 3.11. Вариант 10

1. Найти длину дуги кривой $y = \dfrac{(2x-1)^2}{4}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой
$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{t}{3}(t^2 - 3) \end{cases}$$
между точками пересечения с осью $OX$.

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 3\sin\varphi$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$, $y = 0$, $x = 1$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой Лиссажу
$$\begin{cases} x = a\cos 3t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = 3\cos 3\varphi$, $r = 3$ $(r \geqslant 3)$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $-x^2+2x-y=0$, $2x^2-4x+y=0$.

8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями
$$\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = a\sin 2t \end{cases}$$
вокруг оси $x=a$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Oy$ петли кривой $9ax^2 = (3a-y)^2y$, $0 \leqslant y \leqslant 3a$.

10. Найти координаты центра масс одной арки циклоиды
$$\begin{cases} x = 3(t-\sin t), \\ y = 3(1-\cos t). \end{cases}$$

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры Ф, где Ф — фигура, ограниченная дугой параболы $y = b\sqrt{\dfrac{x}{a}}$, $(a>0,\ b>0)$, осью $Oy$ и прямой $y=b$.

12. Капля с начальной массой $M$ падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя ежесекундно массу, равную $m$. Какова работа силы тяжести за время от начала движения до полного испарения капли? (Сопротивлением воздуха нужно пренебречь.)

13. Пусть $f(x)$ монотонна на $[0,1]$. Доказать, что
$$\int\limits_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

## 3.12. Вариант 11

1. Найти длину дуги кривой $y = \arccos e^x$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = e^{3t} \sin t, \\ y = e^{3t} \cos t, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = \sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - y$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{t}}{(1+t^2)^2}, \\ y = \dfrac{t\sqrt{t}}{(1+t^2)^2}. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = 3\sin\varphi$, $r = 2$ $(r \geqslant 2)$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = \arcsin x$ с основанием $[0, 1]$.

8. Найти объем тела вращения вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y^2 = (x+4)^3$, $x = 0$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой

$$\begin{cases} x = e^{2t} \sin t, \\ y = e^{2t} \cos t \end{cases}$$

вокруг оси $Ox$ $\left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$.

10. Найти координаты центра масс дуги логарифмической спирали $\rho = ae^{\varphi}$, $\left(\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi\right)$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная замкнутой линией $y^2 = ax^3 - x^4$.

12. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из конического сосуда, обращенного вершиной вниз, радиус основания которого равен $R$ и высота $h$.

13. Пусть $f(x)$ ограничена и выпукла вверх на отрезке $[a, b]$. Доказать, что
$$(b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2} \leqslant \int\limits_a^b f(t)dt \leqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

## 3.13. Вариант 12

1. Найти длину дуги кривой $y = \ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, $1 \leqslant x \leqslant 6$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги астроиды
$$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t. \end{cases}$$

3. Найти длину второго витка спирали Архимеда $r = \varphi$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $x = 4-(y-1)^2$, $x = y^2 - 4x + 3$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей
$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = \dfrac{a\sin^2 t}{2+\sin t}. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = 3\sin\varphi$, $r = 5\cos\varphi$.

7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси кривой $\rho = a\cos^2\varphi$ $(a > 0)$.

8. Найти объем тела вращения вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y = \pm b$.

9. Найти площадь поверхности тора, образованного вращением окружности $x^2 + (y - R)^2 = r^2$, вокруг оси $Oy$ при $R > r$.

10. Найти координаты центра масс дуги кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная осями координат и дугой астроиды, расположенной в первом квадранте.

12. Пластинка в форме треугольника погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Основание пластинки равно $a$, высота — $h$. Найти силу давления воды на каждую из сторон пластинки.

13. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная, выпуклая вниз на $[x - h, x + h]$ функция, то справедливо неравенство

$$\frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)dt \geqslant f(x).$$

### 3.14. Вариант 13

1. Найти длину дуги кривой $y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4}$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги астроиды

$$\begin{cases} x = a\cos^5 t, \\ y = a\sin^5 t, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = a(1 + \sin\varphi)$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = \dfrac{1}{1 + \cos x}$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей

$$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t^3 - 3t. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = 2\sin\varphi$, $r = 4\sin\varphi$.

7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси кривой $\rho = a\cos^3\varphi$ $(a > 0)$.

8. Найти объем тела вращения вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x - 2$, $y = x^3$, $y = 0$, $y = 1$.

9. Найти площадь поверхности тора, образованного вращением окружности $x^2 + (y - R)^2 = r^2$, вокруг оси $Oy$ при $R > r$.

10. Найти координаты центра масс дуги цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}(x - a)$ $(-a \leqslant x \leqslant a)$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — сектор круга радиуса $R$ с центральным углом равным $2\alpha$.

12. Пластинка в форме треугольника погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Основание пластинки равно $a$, высота — $h$. Во сколько раз увеличится давление, если перевернуть пластинку так, что на поверхности окажется вершина, а основание будет параллельно поверхности воды?

13. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная, выпуклая вверх на $(-\infty, +\infty)$ функция, то и функция

$$\frac{1}{2n}\int\limits_{x-n}^{x+n} f(t)dt$$

при любом $n$ также выпукла вверх на $(-\infty, +\infty)$.

## 3.15. Вариант 14

1. Найти длину дуги кривой $y = \operatorname{ch} x + 3$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги
$$\begin{cases} x = 2a\sin^2 t, \\ y = 2a\cos t. \end{cases}$$

3. Найти длину дуги кардиоиды $r = 2(1-\cos\varphi)$, находящейся внутри окружности $r = 2$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = \dfrac{x}{x-3}$, $y = x$, $x = -2$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой
$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3 + \sin t. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 3 - \cos\varphi$.

7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{4}x^3$.

8. Найти объем тела вращения вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4$, $y = \pm 1$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, образованной кривыми $y = x^2$, $x = y^2$.

10. Найти координаты центра масс дуги астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, расположенной в первой координатной четверти.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

12. Найти количество тепла, выделяемое переменным синусоидальным током $I = I_0 \sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t - \varphi\right)$ в течение периода $T$ в проводнике с сопротивлением $R$.

13. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная, выпуклая вниз на $(-\infty, +\infty)$ функция, то и функция

$$\frac{1}{2n}\int\limits_{x-n}^{x+n} f(t)dt$$

при любом $n$ также выпукла вниз на $(-\infty, +\infty)$.

## 3.16. Вариант 15

1. Найти длину дуги кривой $y = \ln\dfrac{5}{2x}$, $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = 2\operatorname{arctg} t - 2t + 8 \end{cases}$$

от точки $A(0, 8)$ до точки $B\Big(\ln 2, \dfrac{\pi}{2} + 6\Big)$.

3. Найти длину гиперболической спирали $r\varphi = 1$, $\dfrac{3}{4} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{4}{3}$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y^2 = 16 - 8x$, $y^2 = 24x + 48$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 9\sin t, \end{cases} \qquad y = 3\,(y \geqslant 3).$$

6. Найти площадь фигуры, описываемой полярным радиусом спирали Архимеда $r = 2\varphi$ при одном его обороте.

7. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$, вокруг прямой $x = 3$.

8. Найти объем тела вращения вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4 - x$, $x = 0$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $9x^2 = y(3-y)^2$ вокруг оси $Ox$.

10. Найти координаты центра масс однородной дуги окружности радиуса $R$ с центром в начале координат, расположенной в третьем квадранте.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная первой петлей лемнискаты Бернулли $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

12. Для сжатия пружины на 3 см необходимо совершить работу в 16 Дж. На какую длину можно сжать пружину, совершив работу в 144 Дж?

13. Интегрированием по частям доказать неравенство:

$$\left| \int\limits_{x}^{x+\alpha} \frac{\sin t}{t} dt \right| < \frac{2}{x}, \quad x > 0, \ \alpha > 0.$$

## 3.17. Вариант 16

1. Найти длину дуги кривой $y = \ln(x^2 - 1)$, $2 \leqslant x \leqslant 3$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги

$$\begin{cases} x = 6at^5, \\ y = 5at(1-t^8) \end{cases}$$

   от точки $A(0,0)$ до точки $B(6a,0)$.

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = e^{\frac{4\varphi}{3}}$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $xy = 4$, $x + y - 5 = 0$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\begin{cases} x = \cos^3 \dfrac{t}{2}, \\ y = \sin^3 \dfrac{t}{2}. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $r = 2(2 + \cos\varphi)$.

7. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$, вокруг прямой $x = 3$.

8. Найти объем тела вращения вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $x^2 = 2y$, $y = |x|$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением части кривой $y^2 = 4 + x$, отсеченной прямой $x = 2$, вокруг оси $Ox$.

10. Найти координаты центра масс однородной дуги окружности радиуса $R$ с центром в начале координат, расположенной в третьем квадранте.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная осями координат и параболой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

12. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость удельного веса $\gamma$ из вертикальной цилиндрической бочки, имеющей радиус основания $R$ и высоту $h$.

13. Найти функции $f(x)$, $x \in (0, +\infty)$, удовлетворяющие условию $f'(x^2) = \dfrac{1}{x}$.

## 3.18. Вариант 17

1. Найти длину дуги кривой $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, $\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги
$$\begin{cases} x = 2a \operatorname{sh}^3 t, \\ y = 3a \operatorname{ch} t \end{cases}$$
от точки $A(0, 3a)$ до точки $B(x_0, y_0)$.

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{\varphi}{2}}$, $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y^2 = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t, \\ y = 3 - t^2. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = \dfrac{1}{2} + \sin\varphi$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = xe^x$, $x = 1$, $y = 0$.

8. Найти объем тела вращения вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$, $y = x$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $9x^2 = y(3-y)^2$ вокруг оси $Ox$.

10. Найти координаты центра тяжести дуги астроиды, расположенной в первом квадранте, если линейная плотность в каждой ее точке пропорциональна абсциссе точки.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная полукубической параболой $ay^2 = x^3$ и прямой $x = a$ $(a > 0)$.

12. Найти силу давления воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м.

13. Функция $f \in \mathbb{C}[a,b]$ и для любых $\alpha, \beta \in [a,b]$ выполняется $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \geqslant 0$. Доказать, что $f(x) \geqslant 0, \forall x \in [a,b]$.

### 3.19. Вариант 18

1. Найти длину дуги кривой $y = \arcsin e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги

$$\begin{cases} x = 2a\cos t, \\ y = 2a\sin t, \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \\ z = at, \end{cases}$$

3. Найти длину дуги кардиоиды $r = 2(1+\cos\varphi)$, находящейся внутри окружности $r = 1$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $4y = x^2$, $y^2 = 4x$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases} \qquad x = 1\ (x \geqslant 1).$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = 2\cos\varphi$, $r = 3\cos\varphi$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = 5\cos x$, $y = \cos x$, $x = 0$ $(x \geqslant 0)$.

8. Найти объем тела вращения вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линией $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{100} = 1$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $\rho = 2a\sin\varphi$ вокруг полярной оси.

10. Найти центр тяжести однородной дуги астроиды

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$$

расположенной правее оси $Oy$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная кривыми $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$.

12. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью $v_0$, без учета сопротивления воздуха, дается формулой $v - v_0 - gt$, где $t$ — время от начала движения и $g$ — ускорение силы тяжести. На каком расстоянии от начального положения будет находиться тело черз $T$ с. от момента бросания?

13. Функция $f \in \mathbb{C}[a, b]$ и для любых $\alpha, \beta \in [a, b]$ выполняется $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = 0$. Доказать, что $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

## 3.20. Вариант 19

1. Найти длину дуги кривой $y^2 = \dfrac{9}{4}(2 - x)^3$, отсеченной прямой $x = -1$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги
$$\begin{cases} x = 2a\cos t, \\ y = 2a\sin t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \\ z = at, \end{cases}$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = e^{2\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y^2 = (4 - x)^3$, $x = 0$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой
$$\begin{cases} x = 3\sin t, \\ y = 3\sin 2t. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 2 + \sin 2\varphi$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$, $y = x^2$.

8. Найти объем тела вращения вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = \sin^2 x + x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси кривой $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

10. Найти координаты центра тяжести дуги окружности радиуса $R$, стягивающей центральный угол $\alpha$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная кривыми $(y - x)^2 = x^3$, $x = 1$.

12. Плотина имеет форму трапеции с верхним основанием 20 м, нижним — 10 м, высотой 6 м. Вычислить давление воды на плотину.

13. Доказать,что если функция $f(x)$ — непрерывная, неотрицательная функция и $\int\limits_a^b f(t)dt = 0$, то $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

## 3.21. Вариант 20

1. Найти длину дуги кривой $y = \dfrac{2}{5}x\sqrt[4]{x} - \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{25}{9}$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2, \\ y = -\dfrac{4}{3}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \\ z = \dfrac{1}{3}t^3 + t^2, \end{cases}$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{3}$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = x^2 \cos x$, $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2}. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$, $x = 0$.

8. Найти объем тела вращения вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y = \operatorname{tg}^2 x$, $y = 0$, $x = \sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси кривой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

10. Найти координаты центра тяжести первой арки циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры Ф, где Ф — фигура, ограниченная кривыми $4x^2 + 9y^2 = 36$, $x^2 + y^2 = 9$ и расположенная в I четверти.

12. Какую работу нужно затратить, чтобы поднять всю воду из цилиндрической цистерны диаметром 2 м и глубиной 4 м на высоту 15 м над верхним краем цистерны?

13. Пусть $f(x)$ — непрерывная, $2\pi$–периодическая функция. Доказать, что функция $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ есть сумма $2\pi$– периодической и линейной функций.

## 3.22. Вариант 21

1. Найти длину дуги кривой $y = \arcsin e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \\ z = ht, \end{cases}$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 1 - \sin\varphi$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\begin{cases} x = 2\sin 4t, \\ y = 2\sin 2t. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = \sin\varphi$, $r = 2\cos\varphi$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$, $y = \dfrac{9x^2}{2\pi^2}$.

8. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $Oy$ плоской фигуры, ограниченной осями координат и кривой $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

вокруг ее оси симметрии.

10. Найти координаты центра тяжести первой арки циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры Ф, где Ф — фигура, ограниченная кривыми $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$.

12. Найти силу, с которой вода давит на вертикальную стенку, имеющую форму эллипса, большая ось которого равна 6 м и находится на поверхности воды, а малая — 4 м.

13. Пусть $f(x)$ — непрерывная, $2\pi$–периодическая функция. Доказать, что если среднее значение функции $f(x)$ равно нулю, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ будет периодической.

## 3.23. Вариант 22

1. Найти длину дуги кривой $y = \sqrt{(x-1)^3}$, $1 \leqslant x \leqslant 3\frac{1}{3}$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \\ z = a\cos 2t. \end{cases}$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 2(1 + \sin\varphi)$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = (x-1)^2$, $y^2 = x - 1$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой
$$\begin{cases} x = 3\cos 3t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = \sin^2 3\varphi$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 1$, $y^2 = \frac{3}{2}x$.

8. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной кривыми $y = 2x^2$, $y = x^2 + 1$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$ дуги кривой $y = \dfrac{1}{6}\sqrt{x}(x - 12)$ между точками ее пересечения с осью $Ox$.

10. Найти координаты центра тяжести дуги астроиды
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$$
расположенной в первом квадранте.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = a^2$, расположенной над осью $Ox$.

12. Снаряд ракеты поднимается вертикально вверх. Считая, что при постоянной силе тяги ускорение ракеты за счет уменьшения ее веса растет по закону $J = \dfrac{A}{a - bt}$ $(a - bt > 0)$, найти скорость ракеты в любой момент времени $t$, если начальная скорость ее равна нулю. Найти также высоту, достигнутую ракетой к моменту времени $t = T$.

13. Пусть $f \in \mathbb{C}(-\infty, +\infty)$ и $F(x) = \displaystyle\int\limits_a^x f(t)dt$. Доказать, что если $f(x)$ — четная функция, то $F(x)$ является нечетной.

### 3.24. Вариант 23

1. Найти длину дуги кривой $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ над осью $Ox$ в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги
$$\begin{cases} x = a(t\cos t - \sin t), \\ y = a(t\sin t + \cos t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0. \\ z = ht, \end{cases}$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 2\varphi^2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 4$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $x = \sqrt{4 - y^2}$, $x = 0$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой
$$\begin{cases} x = 5\cos^3 \dfrac{t}{4}, \\ y = 5\sin^3 \dfrac{t}{4}. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = a\cos^2 3\varphi$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = \sin^2 x$, $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

8. Найти объем тела вращения вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y = \arcsin x$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$ линии, заданной параметрически
$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t \end{cases}$$
при $t \in [0, 2]$.

10. Найти декартовы координаты центра тяжести дуги логарифмической спирали $\rho = ae^{\varphi}$ $\left(\text{от } \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2} \text{ до } \varphi_2 = \pi\right)$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная кривыми $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$.

12. Согласно эмпирическим данным удельная теплоемкость воды при температуре $t°C$ $(0 \leqslant t \leqslant 100°)$ равна $c = 0,9983 - 5,184 \cdot 10^{-5}t + 6,912 \cdot 10^{-7}t^2$. Какое количество тепла нужно затратить, чтобы 1 г воды нагреть от температуры $0°C$ до $60°C$?

13. Пусть $f \in \mathbb{C}(-\infty, +\infty)$ и $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Доказать, что если $f(x)$ — нечетная функция, то $F(x)$ является четной.

## 3.25. Вариант 24

1. Найти длину дуги кривой $x = \ln \dfrac{1}{\cos y}$, $0 \leqslant y \leqslant 3a$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой
$$\begin{cases} x = a\Big(\cos t + \ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}\Big), \\ y = a \sin t \end{cases}$$
от точки $A(0, a)$ до точки $B(x_0, y_0)$.

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = a \sin^4 \dfrac{\varphi}{4}$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 2y$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3 + 6 \sin t, \end{cases} \qquad y = 6 \; (y \geqslant 6).$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 1 - \sin 3\varphi$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = \sin \sqrt{x}$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi^2$.

8. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной кривыми $y = \dfrac{2}{1 + x^2}$, $y = x^2$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Oy$ части кривой $y = 1 - x^2$, расположенной над осью абсцисс.

10. Найти декартовы координаты центра тяжести дуги кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$).

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная кривыми $y^2 = x^3 - x^2$, $x = 2$.

12. Ветер производит равномерное давление $p$ Г/см$^2$ на дверь, ширина которой $b$ см и высота $h$ см. Найти момент силы давления ветра, стремящейся повернуть дверь на петлях.

13. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная, положительная функция при $x \geqslant 0$, то функция

$$\varphi(x) = \frac{\int\limits_0^x tf(t)dt}{\int\limits_0^x f(t)dt}$$

возрастает при $x \geqslant 0$.

## 3.26. Вариант 25

1. Найти длину дуги кривой $y = \ln\sqrt{x}$, $\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{15}$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = \dfrac{1}{1+\cos\varphi}$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = \dfrac{8}{4+x^2}$, $y = \dfrac{x^2}{4}$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 2 - \sin^2 2\varphi$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1$, $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = -1$.

8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = (x+4)^3$, $x = 0$, вокруг оси $Oy$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$ кривой $y^2 + 4x = 2\ln y$, $1 \leqslant y \leqslant 2$.

10. Найти декартовы координаты центра тяжести лепестка четырехлепестковой розы $\rho = 2|\sin 2\varphi|$ $\left(\text{от } \varphi_1 = 0 \text{ до } \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}\right)$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная кривыми $y^2 = x^3 - x^2$, $x = 2$.

12. Цилиндрический стакан наполнен ртутью. Найти силу давления ртути на боковую поверхность стакана, если его высота 0,1 м, а радиус основания 0,04 м. Плотности ртути 13600 кг/м$^3$.

13. Функция $f$ непрерывно дифференцируема и возрастает на промежутке $[0, +\infty)$. Доказать, что функция
$$y = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt$$
возрастает на интервале $(0, +\infty)$.

## 3.27. Вариант 26

1. Найти длину дуги кривой $y = 2\ln(4 - x^2)$, $y \geqslant 0$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой
$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = \varphi^2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 4$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $x^2 + y^2 = 16x$, $y^2 = 8x$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t). \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 2 - \cos^2 2\varphi$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = 0$, $x = 1$ $(x \geqslant 0)$.

8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривыми $y = x^3$, $y = x^2$ вокруг оси $Oy$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$ кривой $y = \dfrac{1}{x}$, $0 < a \leqslant x \leqslant b$.

10. Найти координаты центра тяжести дуги эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в первом квадранте.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная линиями $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$.

12. Горизонтально расположенная цилиндрическая цистерна наполнена до половины керосином. Найти силу давления на каждую из боковых стенок, если радиус дна цистерны равен $2r$, плотность керосина равна 0,8 г/см$^3$.

13. Исследовать на экстремум функцию:

$$F(x) = \int\limits_0^{e^x} \frac{t^4 - 16}{1 + t}\,dt.$$

## 3.28. Вариант 27

1. Найти длину дуги кривой $8y^2 = x^2(1-x^2)$ в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = \sin^4 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = \varphi^4$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 4$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = x^2 \ln x$, $y = 0$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases}$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r^2 = 2\cos 2\varphi$, $r = 1$ $(r \geqslant 1)$.

7. Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{6}$.

8. Найти объем тела вращения вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y = \arcsin \dfrac{x}{3}$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Oy$ кривой $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \leqslant b)$.

10. Найти координаты центра тяжести дуги кривой $\rho = 2\sin\varphi$ от точки $(0, 0)$ до точки $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная кривыми $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{3} = 1$, $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

12. Плоский прямоугольный затор шлюза, расположенный вертикально, имеет ширину 10 м и высоту 12 м. Найти силу давления на затор, если вода доходит до его верхнего края.

13. Доказать,что если функция $f(x)$ непрерывна и возрастает на отрезке $[0, 2]$, то

$$2f(1) \leqslant \int_0^2 f\left(x^2 - 2x + 2\right) dx \leqslant 2f(2).$$

## 3.29. Вариант 28

1. Найти длину дуги кривой $3y^3 = x^2$ внутри окружности $x^2 + y^2 = 6$ в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = \varphi^3$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 4$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $x^2 + y^2 = 9$, $y^2 = 3(3 - x)$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \qquad x = \frac{3}{\sqrt{2}} \left(x \geqslant \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = a(1 + \cos\varphi)$, $r = a\cos\varphi$.

7. Парабола $y^2 = 10x$ вращается вокруг своей оси. Найти объем параболоида вращения, отсеченного плоскостью, перпендикулярной оси вращения и отстоящей от вершины параболоида на 3 единицы.

8. Найти объем тела вращения вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$ кривой $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \leqslant b)$.

10. Найти координаты центра тяжести дуги кривой $y = \operatorname{ch} x$, $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная кривыми $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

12. Какую работу нужно затратить на выкачивание воды из сосуда, имеющего форму верхней половины сферы? Диаметр сферы равен 20 м.

13. Доказать,что если функция $f(x)$ непрерывна и убывает на отрезке $[0, 1]$, то
$$f(1) \leqslant \int\limits_0^1 f\left(2x - x^2\right) dx \leqslant f(0).$$

## 3.30. Вариант 29

1. Найти длину дуги кривой $y = \dfrac{4}{5} x \sqrt[4]{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 9$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой
$$\begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{t} \sin t, \\ z = \sqrt{t} \cos t, \end{cases} \qquad 1 \leqslant t \leqslant 2.$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 6(1 - \sin \varphi)$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = x \ln x$, $y = x \ln^2 x$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases} \qquad x = 3\sqrt{3}\,(x \geqslant 3\sqrt{3}).$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = \sin\varphi + \cos\varphi$.

7. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $y = \sqrt{x}e^{-x}$, $y = 0$, $x = 1$, вокруг оси $Ox$.

8. Найти объем тела вращения вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y = \arccos\dfrac{x}{5}$, $y = \arccos\dfrac{x}{3}$, $y = 0$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой

$$\begin{cases} x = 2a\sin^2 t, \\ y = 2a\cos t \end{cases}$$

вокруг оси $Ox$.

10. Найти координаты центра масс однородной дуги окружности радиуса $R$ с центральным углом $2\alpha$.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура, ограниченная линиями $ay^2 = x^3$, $x = a$ $(a > 0)$.

12. Два тела одновременно начали прямолинейное движение из некоторой точки в одном направлении со скоростями $v_1 = 6t^2 + 4t$ м/с и $v_2 = 4t$ м/с. Через сколько секунд расстояние между ними будет равно 64 м?

13. Доказать,что

$$\int\limits_a^b xf\,(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f\,(x)\,dx.$$

## 3.31. Вариант 30

1. Найти длину дуги кривой $y = \sqrt{2x - x^2} - 1$, $\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$, в декартовых координатах.

2. Найти длину дуги кривой
$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t + \dfrac{t^3}{3}, \\ z = t - \dfrac{t^3}{3}, \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}.$$

3. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 6\cos^3\dfrac{\varphi}{3}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями $y = x^2 e^{-x}$, $y = 0$, $x = 2$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases} \qquad y = 1\ (y \geqslant 1).$$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах $r = a\cos\varphi$, $r = 2a\cos\varphi$.

7. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$, вокруг оси $Ox$.

8. Найти объем тела вращения вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = \sin^2 x$.

9. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой
$$\begin{cases} x = a\Big(\cos t + \ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\Big), \\ y = a\sin t, \end{cases} \qquad \Big(\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4}\Big)$$
вокруг оси $Ox$.

10. Найти координаты центра масс дуги окружности радиуса $R$, лежащей ниже оси абсцисс.

11. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры $\Phi$, где $\Phi$ — фигура $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

12. Квадратная пластинка помещена вертикально в воду так, что одна из вершин квадрата лежит на поверхности воды, а одна из диагоналей параллельна поверхности. Сторона квадрата равна $a$. С какой силой давит вода на каждую сторону пластинки?

13. Доказать равенство:

$$\int\limits_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx.$$

## Список рекомендуемой литературы

1. Архипов, Г.И. Лекции по математическому анализу / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. — М.: Дрофа, 2008. — 640 с.

2. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. — М.: Дрофа, 2001. Ч. 1. — 725 с.

3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. — М.: Лань, 2022. — 624 с.

4. Ильин, В.А. Математический анализ. Продолжение курса / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. — М.: изд. МГУ, 1987. — 357 с.

5. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа: в 3-х т. / Л.Д. Кудрявцев. — М.: Юрайт, 2023. Т. 1. — 703 с.

6. Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, А.Д. Чехлов, М.И. Шабунин. — М.: ФИЗМАТЛИТ , 2012. — 504 с.

7. Кулешов, А.А. Анализ I. Краткий курс. URL: https://vk.com/doc2162375_661399774?hash=7ExKmVKbjie8gEa9CTtcuvFGFxspzGvFPKNwUz7n6nD&dl=pJP12PyHr6ruc6zLZ2GW2GdziUMpEF0XAcIFJEDQFzH

8. Латыпова, Н.В. Неопределенные интегралы: учебно–метод. пособие. Ижевск: Изд. центр «Удмуртский университет», 2019. — 50 с.

9. Никольский, С.М. Курс математического анализа: в 2-х т. / С.М. Никольский. — М.: Наука, 1983. Т. 2. — 448 с.

10. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х т./ Г.М. Фихтенгольц. — М.: Лань, 2022. Т. 2. — 800 с.

11. Сайт В.Н. Дятлова для студентов и школьников (абитуриентов НГУ) URL: http://math.nsc.ru/ dvn/mf18-20.html

# Приложение

*Таблица интегралов*

1. $\displaystyle\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$, где $\mu \neq -1$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C$

4. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

5. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + C$ («длинный» логарифм)

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ («высокий» логарифм)

Приведем небольшой список формул, которые могут пригодиться при нахождении первообразных:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y, \quad \cos(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y,$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big),$$

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big),$$

$$\cos x\sin y = \frac{1}{2}\big(\sin(x+y) - \sin(x-y)\big),$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x,$$

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},$$

$$y = \operatorname{arch} x = \begin{cases} \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right),\ x\geqslant 1,\ y\leqslant 0,\\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),\ x\geqslant 1,\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

## Геометрические приложения определенного интеграла

*Площади плоских фигур*

$$P = \int\limits_a^b \big[f_1(x) - f_2(x)\big]dx,$$

где $P$ — площадь фигуры, заключенной между графиками функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$, $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, $a < b$.

$$P = \left|\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt\right|,$$

где $P$ — площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi,$$

где $P$ — площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, и двумя полярными радиусами, составляющими с полярной осью углы $\alpha$ и $\beta$.

*Длины дуг кривых*

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx,$$

где $L$ — длина кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}dt,$$

где $L$ — длина кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho'_{\varphi})^2} d\varphi,$$

где $L$ — длина кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \beta$.

*Объемы тел вращения*

$$V_x = \pi \int\limits_{a}^{b} y^2 dx,$$

где $V$ — объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ вокруг оси $Ox$.

$$V_y = \pi \int\limits_{c}^{d} x^2 dy,$$

где $V$ — объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $0 \leqslant x \leqslant \varphi(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ вокруг оси $Oy$.

*Площади поверхностей вращения*

$$Q_x = 2\pi \int\limits_{a}^{b} y\sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

где $Q_x$ — площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, вокруг оси $Ox$.

$$Q_y = 2\pi \int\limits_{c}^{d} x\sqrt{1 + (x'_y)^2} dy,$$

где $Q_y$ — площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной уравенением $x = \varphi(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, вокруг оси $Oy$.

$$Q = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt,$$

где $Q$ — площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

$$Q_\rho = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho_\varphi')^2}d\varphi,$$

где $Q_\rho$ — площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$.

*Центр тяжести кривой*

$$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_a^b \rho(x)x\sqrt{1 + (y')^2}dx, \quad y_c = \frac{1}{m}\int\limits_a^b \rho(x)y\sqrt{1 + (y')^2}dx,$$

где $(x_c, y_c)$ — координаты центра тяжести кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $\rho = \rho(x)$ — плотность распределения массы $m = \int\limits_a^b \rho(x)\sqrt{1 + (y')^2}dx$ на заданной кривой.

$$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(t)x\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt, \quad y_c = \frac{1}{m}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(t)y\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt,$$

где $(x_c, y_c)$ — координаты центра тяжести кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\rho = \rho(t)$ — плотность распределения массы $m = \int\limits_a^b \rho(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt$ на заданной кривой.

$$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi)r\cos\varphi\sqrt{r^2 + (r')^2}d\varphi, \; y_c = \frac{1}{m}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi)r\sin\varphi\sqrt{r^2 + (r')^2}d\varphi,$$

где $(x_c, y_c)$ — координаты центра тяжести кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $\rho = \rho(\varphi)$ — плотность распределения массы $m = \int\limits_a^b \rho(\varphi)\sqrt{r^2 + (r')^2}d\varphi$ на заданной кривой.

*Центр тяжести однородной плоской фигуры*

$$x_c = \frac{1}{P}\int\limits_a^b x\big[f_1(x) - f_2(x)\big]dx, \quad y_c = \frac{1}{2P}\int\limits_a^b \big[f_1^2(x) - f_2^2(x)\big]dx,$$

где $(x_c, y_c)$ — координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ $(f_1(x) \geqslant f_2(x)$, $a < b)$. Здесь $P = \int\limits_a^b \big[f_1(x) - f_2(x)\big]dx$ — площадь заданной фигуры.

## Физические приложения определенного интеграла

*Работа силы перемещения*

Работа силы $F(x)$ перемещения при движении материальной точки от значения $a$ к значению $b$ определяется по формуле

$$A = \int\limits_a^b F(x)dx.$$

*Работа по выкачиванию жидкости из резервуара*

Количество работы, необходимой для выкачки вещества с удельным весом $\gamma$ из резервуара с площадью сечения $Q(x)$ определяется по формуле

$$A = \int\limits_a^b xQ(x)\gamma dx.$$

*Путь, пройденный точкой*

Путь, пройденный точкой от времени $t$ до $T$ определяется по формуле

$$S = \int\limits_t^T v(t)dt.$$

*Давление жидкости на вертикальную пластинку*

Давление жидкости с удельным весом $\gamma$ на вертикально погруженную пластину, ограниченную линиями $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ $(f_1(x) \geqslant f_2(x))$ определяется по формуле

$$P = \gamma \int\limits_a^b x\big[f_1(x) - f_2(x)\big]dx.$$

*Вычисление массы тонкого стержня*

Масса неоднородного прямолинейного тонкого стержня с линейной плотностью $\rho(x)$, занимающего на оси $Ox$ положение отрезка $[a, b]$ определяется по формуле

$$m = \int\limits_a^b \rho(x)dx.$$

*Вычисление количества заряда*

Количество заряда, протекающее за данный промежуток времени $[t_1, t_2]$, при известной силе тока $I(t)$ определяется по формуле

$$q = \int\limits_{t_1}^{t_2} I(t)dt.$$

*Вычисление количества теплоты*

Количество теплоты, необходимое для нагревания тела теплоемкостью $c(t)$ в промежуток времени $[t_1, t_2]$ определяется по формуле

$$q = \int\limits_{t_1}^{t_2} c(t)dt.$$

*Учебное издание*

**Ким Инна Геральдовна**
**Латыпова Наталья Владимировна**

**ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**
**И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ**
Учебно-методическое пособие

*Авторская редакция*

Подписано в печать 26.06.2023. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 7,15. Уч. изд. л. 7,99.
Тираж 33 экз. Заказ № 1116.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел. : + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18