К. А. Щелчков

Относительная оптимальность в нелинейных дифференциальных играх с дискретным управлением

Рассматриваются две задачи управления с помехой, в качестве которой выступает второй игрок в дифференциальной игре. Динамика первой задачи описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений первого порядка, динамика второй – нелинейной системой дифференциальных уравнений второго порядка. Управление осуществляется посредством кусочно постоянного управления, множество значений которого является конечным. Целью управления является движение сколь угодно близко к конечной траектории, описываемой вспомогательной системой управления простого вида, при любых действиях помехи. В обеих задачах получены фазовые ограничения на вспомогательную систему, в рамках которых управление вспомогательной системы может быть любым. Для любой окрестности и произвольного управления вспомогательной системы, которое удовлетворяет полученным ограничениям, в исходных задачах существуют допустимые управления, обеспечивающие в каждый момент времени нахождение фазовой точки исходной системы в указанной окрестности соответствующей фазовой точки вспомогательной системы. Таким образом, с учетом полученных ограничений, выбирая управление вспомогательной системы оптимальным в каком-либо смысле, можно осуществить сколь угодно близкое движение исходной системы к такому решению вспомогательной системы при любых действиях помехи.

Библиография: 29 названий.

Ключевые слова: дифференциальная игра, нелинейная система, преследователь, убегающий.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9851

§ 1. Введение

Дифференциальные игры двух лиц, рассмотренные первоначально Р. Айзексом в [1], в настоящее время представляют широкое поле для исследований (см. [2]–[7]). Были разработаны методы решения различных классов игровых задач: метод Айзекса, основанный на анализе определенного уравнения в частных производных и его характеристик, метод экстремального прицеливания Красовского, метод Понтрягина и другие. Н. Н. Красовским и представителями его научной школы создана теория позиционных игр, в основе которой лежат понятие максимального стабильного моста и правило экстремального

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01483-23-00, проект FEWS-2020-0010.

прицеливания. Однако эффективное построение таких мостов для исследования реальных конфликтно управляемых процессов (в первую очередь нелинейных дифференциальных игр) весьма затруднительно, а иногда даже невозможно. Удобнее строить мосты, не являющиеся максимальными, но обладающие свойством стабильности и дающие эффективно реализуемые процедуры управления для отдельных классов игр, обладающих дополнительными свойствами. Построение приближения стабильных мостов в нелинейных дифференциальных играх, в том числе численно, рассматривается, в частности, в работах [8], [9].

Достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейном примере Л. С. Понтрягина получены в [10]. В работе [11] представлены достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейной дифференциальной игре при некоторых дополнительных условиях на множество значений правой части системы дифференциальных уравнений и терминальное множество. В работе [12] получены достаточные условия поимки в нелинейной игре, описываемой стационарной нелинейной системой, исследуется оптимальность времени поимки для некоторого случая на плоскости. Задача, рассматриваемая в работе [12], сравнима с представленной. Условия поимки в [12] оказываются значительно сильнее условий, полученных в настоящей работе. При этом в [12] преследователь использует контрстратегию. В работе [13] с использованием формализации дифференциальной игры рассматривается нелинейная задача управления с помехой. Получены достаточные условия существования выигрышной стратегии. В работе [14] рассматривается нелинейная дифференциальная игра двух лиц с интегральным критерием качества. Игроки используют кусочно программные управления специального вида, причем временной интервал делится на две части. Получены необходимые и достаточные условия существования седловой точки для рассматриваемой игры. В работе [15] рассматривается дифференциальная игра преследования на плоскости, динамика которой описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений определенного вида. Целевым множеством является начало координат. Получены условия осуществления поимки посредством позиционной контрстратегии и характеристики игры в явном виде, приведены примеры.

В работе [16] было введено понятие положительного базиса, которое в работах [16]–[18] эффективно использовалось для исследования свойства управляемости нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями в конечномерном евклидовом пространстве. В работах [19]–[21] свойства положительного базиса использовались для исследования управляемых систем на многообразиях. В работах [22]–[26] свойства положительного базиса были использованы для исследования задачи преследования группой преследователей одного или нескольких убегающих в линейных дифференциальных играх с равными возможностями игроков. В этих работах концепция положительного базиса используется для описания начальных положений игроков.

В работах [27] и [29] рассматривалась задача поимки в нелинейной дифференциальной игре, аналогичной дифференциальной игре настоящей работы. В них получены достаточные условия на параметры игры для существования окрестности нуля, из которой происходит поимка. Ключевым было условие, что некоторый набор векторов образует положительный базис. В работе [28] получены дополнительные свойства выигрышной стратегии для задачи.

Настоящая работа является продолжением исследований [27]–[29]. Рассматриваются две задачи управления с помехой, в качестве которой выступает второй игрок в дифференциальной игре. Динамика первой задачи описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений первого порядка, динамика второй – нелинейной системой дифференциальных уравнений второго порядка. Получены условия, при которых возможно удерживать траекторию исходной системы вблизи траектории некоторой системы простого вида при любых действиях помехи.

§ 2. Система с производной первого порядка

В пространстве $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$, рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(x_0)$ двух лиц: преследователя P и убегающего E. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,u) + g(x,v), \qquad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ – фазовый вектор, u и v – управляющие воздействия; $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, $u_i \in \mathbb{R}^l$, $i = 1, \ldots, m$. Множество $V \subset \mathbb{R}^s$ – компакт. Функция $f\colon \mathbb{R}^k \times U \to \mathbb{R}^k$ для каждого $u \in U$ липшицева по x. Функция $g\colon \mathbb{R}^k \times V \to \mathbb{R}^k$ липшицева по совокупности переменных. То есть существуют положительные числа L_1, L_2 такие, что

$$\|f(x_1,u_i) - f(x_2,u_i)\| \leqslant L_1\|x_1 - x_2\|, \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$\|g(x_1,v_1) - g(x_2,v_2)\| \leqslant L_2\bigl(\|x_1 - x_2\| + \|v_1 - v_2\|\bigr), \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k, \quad v_1, v_2 \in V.$$

Здесь и всюду далее норма считается евклидовой.

Под разбиением σ промежутка $[0,T]$ будем понимать конечное разбиение $\{\tau_q\}_{q=0}^{\eta}$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_\eta = T$.

Определение 1. *Кусочно постоянной стратегией* W преследователя P на промежутке $[0,T]$ называется пара (σ, W_σ), где σ – разбиение промежутка $[0,T]$, а W_σ – семейство отображений $d_r, r = 0, 1, \ldots, \eta - 1$, ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r))$ постоянное управление $\overline{u}_r(t) \equiv \overline{u}_r \in U$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.

Под управлением убегающего будем понимать произвольную измеримую функцию $v\colon [0,\infty) \to V$.

Определение 2. В игре $\Gamma(x_0)$ *происходит ε-поимка*, если существует $T > 0$ такое, что для любого $\widehat{\varepsilon} > 0$ существует кусочно постоянная стратегия W преследователя P на промежутке $[0,T]$ такая, что для любого допустимого управления убегающего $v(\cdot)$ выполнено неравенство $\|x(\tau)\| < \widehat{\varepsilon}$ для некоторого $\tau \in [0,T]$.

Целью преследователя является осуществление ε-поимки. Цель убегающего – воспрепятствовать этому.

Определение 3 (см. [16]). Совокупность векторов $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ называется *положительным базисом*, если для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^k$ существуют числа $\mu_1, \dots, \mu_n \geqslant 0$ такие, что $\xi = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i$.

Введем следующие обозначения: $\operatorname{Int} A$ – внутренность множества A; $\operatorname{co} A$ – выпуклая оболочка множества A; $O_\varepsilon(x)$ – открытый шар радиуса ε с центром в точке x; $D_\varepsilon(x)$ – замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x.

Справедлива следующая теорема о поимке.

Теорема 1 (см. [27]). *Пусть $f(0,u_1), \dots, f(0,u_m)$ образуют положительный базис и $-g(0,V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(0,u_1), \dots, f(0,u_m)\})$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in O_{\varepsilon_0}(0)$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε-поимка.*

В [28] доказано, что для любого $x_0 \in O_{\varepsilon_0}(0)$ (ε_0 – значение из теоремы 1) ε-поимка происходит за время $\|x_0\|/\alpha(\|x_0\|)$, где

$$\alpha(r) = \min_{x \in D_r(0)} \min_{\|p\|=1} \min_{v \in V} \max_{i=1,\dots,m} \big\langle f(x,u_i) + g(x,v), p \big\rangle.$$

При этом для построения стратегии преследователя P достаточно использовать разбиение с фиксированным шагом.

Введем вспомогательную управляемую систему

$$\dot{y} = w, \qquad \|w\| \leqslant \rho, \quad y(0) = x_0, \tag{2.1}$$

где $w, y \in \mathbb{R}^k$. Допустимым управлением системы (2.1) считаем измеримые функции $w(t)$, $\|w(t)\| \leqslant \rho$, $t \geqslant 0$.

Пусть ε_0 – значение из теоремы 1. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $f(0,u_1), \dots, f(0,u_m)$ образуют положительный базис,*

$$-g(0,V) \subset \operatorname{Int}\big(\operatorname{co}\{f(0,u_1), \dots, f(0,u_m)\}\big),$$

заданы $R \in (0, \varepsilon_0)$, $x_0 \in O_R(0)$, $T > 0$, $\rho \in (0, \alpha(R)]$, а $w(\cdot)$ – произвольное допустимое управление системы (2.1), для которого $\|y(t)\| < R$ для всех $t \in [0,T]$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует кусочно постоянная стратегия W преследователя P на промежутке $[0,T]$ такая, что для любого допустимого управления v убегающего E справедливо неравенство $\|x(t) - y(t)\| \leqslant \delta$ для всех $t \in [0,T]$.

Доказательство. Согласно доказательству теоремы 1 для всех $x \in D_R(0)$ справедливо вложение

$$-g(x,V) \subset \operatorname{Int}\big(\operatorname{co}\{f(x,u_1), \dots, f(x,u_m)\}\big).$$

Пусть $b_0, b_1 \in O_R(0)$ и выполнено включение $b_0 \in D_{\widehat{r}}(b_1) \subset D_R(0)$ для некоторого $\widehat{r} > 0$. Тогда при переносе начала координат в точку b_1 выполняется теорема 1, т.е. за конечное время из точки b_0 исходную систему можно привести сколь угодно близко к точке b_1 при любых допустимых действиях убегающего. При этом, согласно [28], конечное время можно взять равным $\|b_1 - b_0\|/\alpha(R)$ и шаг разбиения фиксированным. Отметим, что в таком случае если $\|x(\tau_j) - b_1\| \leqslant \varepsilon$, где ε является радиусом целевой окрестности, то для всех $t \in (\tau_j, \tau_\eta]$ справедливо неравенство $\|x(t) - b_1\| < \varepsilon$.

Зафиксируем $\delta > 0$. Так как функция $y(t)$, $t \in [0, T]$, является непрерывной и $\|y(t)\| < R$ для всех $t \in [0, T]$, то справедливо следующее неравенство:

$$\max\{r \geqslant 0 \,|\, y(t) + D_r(0) \subset D_R(0),\ t \in [0, T]\} \doteq \delta_1 > 0. \tag{2.2}$$

Пусть q – произвольное натурально число такое, что

$$\frac{\rho T}{q} \leqslant \frac{\min\{\delta, \delta_1\}}{4}.$$

Обозначим $\widehat{\delta} = \rho T/q$, $\Delta = T/q$, $\widehat{\varepsilon} = \widehat{\delta}/q$, $t_0 = 0$, $t_1 = \Delta$, $t_2 = 2\Delta, \dots, t_q = q\Delta = T$.

На интервале $[t_0, t_1)$ считаем точку $\xi_1 = y(t_1)$ целевой. Тогда существует кусочно постоянная стратегия преследователя с фиксированным шагом разбиения такая, что $x(t_1) \in \xi_1 + D_{\widehat{\varepsilon}}(0) = y(t_1) + D_{\widehat{\varepsilon}}(0)$. Далее, обозначим через ξ_2 ближайшую точку к $x(t_1)$ на множестве $y(t_2) + D_{\widehat{\varepsilon}}(0)$. Следовательно, $\|x(t_1) - \xi_2\| \leqslant \Delta\rho$. На интервале $[t_1, t_2)$ считаем точку ξ_2 целевой. Существует кусочно постоянная стратегия преследователя с фиксированным шагом разбиения такая, что $x(t_2) \in \xi_2 + D_{\widehat{\varepsilon}}(0) \subset y(t_2) + D_{2\widehat{\varepsilon}}(0)$. Далее, обозначим через ξ_3 ближайшую точку к $x(t_2)$ на множестве $y(t_2) + D_{2\widehat{\varepsilon}}(0)$. Аналогично, $\|x(t_2) - \xi_3\| \leqslant \Delta\rho$, ξ_3 – целевая точка, и мы приводим систему в $\xi_3 + D_{\widehat{\varepsilon}}(0) \subset y(t_3) + D_{3\widehat{\varepsilon}}(0)$. И так далее.

На последнем шаге получаем $x(T) = x(t_q) \in y(t_q) + D_{q\widehat{\varepsilon}}(0) = y(T) + D_{\widehat{\delta}}(0)$. Так как для всех $l = 0, \dots, q-1$ справедливы включения $x(t_l) \in y(t_l) + D_{\widehat{\delta}}(0)$, $x(t_{l+1}) \in y(t_{l+1}) + D_{\widehat{\delta}}(0)$ и $\|y(t_{l+1}) - y(t_l)\| \leqslant \widehat{\delta}$, то в силу [27] $x(t) \in y(t_{l+1}) + D_{3\widehat{\delta}}(0)$. Таким образом, в силу (2.2) для каждого $l = 0, \dots, q-1$ справедливы следующие неравенства:

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant 4\widehat{\delta} \leqslant \delta \quad \text{для всех} \ \ t \in [t_l, t_{l+1}],$$
$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \delta_1 \quad \text{для всех} \ \ t \in [t_l, t_{l+1}].$$

Теорема 2 доказана.

§ 3. Система с производной второго порядка

В пространстве $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$, рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(x_0, \dot{x}_0)$ двух лиц: преследователя P и убегающего E. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, u) + g(x, \dot{x}, v), \qquad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \tag{3.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ – фазовая переменная, u и v – управляющие воздействия; $U = \{u_1, \dots, u_m\}$, $u_i \in \mathbb{R}^l$, $i = 1, \dots, m$. Множество $V \subset \mathbb{R}^s$ – компакт. Функция $f\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times U \to \mathbb{R}^k$ для каждого $u \in U$ липшицева по совокупности переменных x и $\dot{x}$, функция $g\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times V \to \mathbb{R}^k$ липшицева по совокупности переменных, т.е. существуют положительные числа L_1, L_2 такие, что

$$\|f(x_1, \dot{x}_1, u_i) - f(x_2, \dot{x}_2, u_i)\| \leqslant L_1(\|x_1 - x_2\| + \|\dot{x}_1 - \dot{x}_2\|),$$
$$x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2 \in \mathbb{R}^k, \qquad i = 1, \ldots, m,$$
$$\|g(x_1, \dot{x}_1, v_1) - g(x_2, \dot{x}_2, v_2)\| \leqslant L_2(\|x_1 - x_2\| + \|\dot{x}_1 - \dot{x}_2\| + \|v_1 - v_2\|),$$
$$x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2 \in \mathbb{R}^k, \qquad v_1, v_2 \in V.$$

Под разбиением σ промежутка $[0, T]$ будем понимать конечное разбиение $\{\tau_q\}_{q=0}^{\gamma}$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_\gamma = T$.

Определение 4. *Кусочно постоянной стратегией* W преследователя P на промежутке $[0, T]$ называется пара (σ, W_σ), где σ – разбиение промежутка $[0, T]$, а W_σ – семейство отображений d_r, $r = 0, 1, \ldots, \gamma - 1$, ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r), \dot{x}(\tau_r))$ постоянное управление $\overline{u}_r(t) \equiv \overline{u}_r \in U$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.

Под управлением убегающего будем понимать произвольную измеримую функцию $v\colon [0, \infty) \to V$.

Определение 5. В игре $\Gamma(x_0, \dot{x}_0)$ *происходит ε-поимка*, если существует $T > 0$ такое, что для любого $\widehat{\varepsilon} > 0$ существует кусочно постоянная стратегия W преследователя P на промежутке $[0, T]$ такая, что для любого допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E выполнено неравенство $\|x(\tau)\| < \widehat{\varepsilon}$ для некоторого $\tau \in [0, T]$.

Целью преследователя является осуществление ε-поимки, цель убегающего – воспрепятствовать этому.

В [29] доказана теорема о поимке в данной задаче для системы вида

$$\ddot{x} = f(x, u) + g(x, v), \qquad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Теорема 3 (см. [29]). *Пусть $f(0, u_1), \ldots, f(0, u_m)$ образуют положительный базис и $-g(0, V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(0, u_1), \ldots, f(0, u_m)\})$. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\theta > 0$ и $T > 0$ такие, что для любых начальных положений $x_0, \dot{x}_0$ таких, что $\|x_0\| + \theta\|\dot{x}_0\| < \varepsilon_0$, в игре $\Gamma(x_0, \dot{x}_0)$ происходит ε-поимка за время T.*

Подход, используемый при доказательстве данной теоремы, будет применен и для получения условий разрешимости задачи преследования с динамикой (3.1). Кроме того, по аналогии с [28] преследователю достаточно выбирать стратегии с фиксированным шагом разбиения временного интервала. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $f(0, 0, u_1), \ldots, f(0, 0, u_m)$ образуют положительный базис и $-g(0, 0, V) \subset \operatorname{Int}(\operatorname{co}\{f(0, 0, u_1), \ldots, f(0, 0, u_m)\})$. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\theta > 0$ и $T > 0$ такие, что для любых начальных положений $x_0, \dot{x}_0$ таких, что $\|x_0\| + \theta\|\dot{x}_0\| < \varepsilon_0$, в игре $\Gamma(x_0, \dot{x}_0)$ происходит ε-поимка за время T. Кроме того, преследователю для построения стратегии достаточно использовать разбиение временного интервала с фиксированным шагом.*

Доказательство. Схема доказательства и общие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 3.

1^0. Покажем, что существуют $\overline{\alpha} > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любых точек $x, \dot{x} \in D_{\varepsilon_0}(0)$ и вектора $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, найдется $i \in \{1, \ldots, m\}$ такое, что для любого $v \in V$ выполнено

$$\bigl\langle f(x, \dot{x}, u_i) + g(x, \dot{x}, v), p \bigr\rangle \geqslant \overline{\alpha}.$$

Данное неравенство справедливо в силу липшицевости функций f, g в указанном смысле и свойств положительного базиса (см. [16]). То есть для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и для любых $x, \dot{x} \in D_{\varepsilon_0}(0)$ справедливо вложение

$$-g(x, \dot{x}, V) \subset \operatorname{Int}\bigl(\operatorname{co}\{f(x, \dot{x}, u_1), \ldots, f(x, \dot{x}, u_m)\}\bigr).$$

Следовательно, в силу свойств положительного базиса (см. [16]) векторы

$$\bigl\{f(x, \dot{x}, u_1) + g(x, \dot{x}, v), \ldots, f(x, \dot{x}, u_m) + g(x, \dot{x}, v)\bigr\}$$

образуют положительный базис для любого $v \in V$. Таким образом, существуют $\widehat{x}, \widetilde{x} \in D_{\varepsilon_0}(0)$, $\widehat{p} \in \mathbb{R}^k$, $\|\widehat{p}\| = 1$, $\widehat{v} \in V$, $\widehat{i} \in \{1, \ldots, m\}$ такие, что

$$\min_{x, \dot{x} \in D_{\varepsilon_0}(0)} \min_{\|p\|=1} \min_{v \in V} \max_{i=1,\ldots,m} \bigl\langle f(x, \dot{x}, u_i) + g(x, \dot{x}, v), p \bigr\rangle = \bigl\langle f(\widehat{x}, \widetilde{x}, u_{\widehat{i}}) + g(\widehat{x}, \widetilde{x}, \widehat{v}), \widehat{p} \bigr\rangle.$$

Отсюда получаем $\overline{\alpha} = \langle f(\widehat{x}, \widetilde{x}, u_{\widehat{i}}) + g(\widehat{x}, \widetilde{x}, \widehat{v}), \widehat{p} \rangle > 0$.

2^0. Введем ряд обозначений. Так как функции f, g являются липшицевыми, то достигается следующий максимум:

$$\max_{x, \dot{x} \in D_{2\varepsilon_0}(0), u \in U, v \in V} \|f(x, \dot{x}, u) + g(x, \dot{x}, v)\| = \overline{D}.$$

Обозначим

$$D = \max\bigl\{\overline{D}, 2\varepsilon_0\bigr\}.$$

Определим число h так:

$$h = \min\left\{\frac{\overline{\alpha}}{4(L_1 + L_2)}, \varepsilon_0\right\}.$$

Пусть $\overline{x}, \dot{\overline{x}} \in D_{\varepsilon_0}(0)$, $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, $x \in D_h(\overline{x})$, $\dot{x} \in D_h(\dot{\overline{x}})$, $v \in V$ и

$$\max_{u \in U} \bigl\langle f(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, u), p \bigr\rangle = \bigl\langle f(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, \overline{u}), p \bigr\rangle.$$

Отметим, что, в силу п. 1^0 для любого $v \in V$

$$\bigl\langle f(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, \overline{u}) + g(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, v), p \bigr\rangle \geqslant \overline{\alpha}.$$

Аналогично доказательству теоремы 3 получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \bigl\langle f(x, \dot{x}, \overline{u}) + g(x, \dot{x}, v), p \bigr\rangle &\geqslant \overline{\alpha} - L_1(\|x - \overline{x}\| + \|\dot{x} - \dot{\overline{x}}\|) - L_2(\|x - \overline{x}\| + \|\dot{x} - \dot{\overline{x}}\|) \\ &\geqslant \overline{\alpha} - 2h(L_1 + L_2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любых $\overline{x}, \dot{\overline{x}} \in D_{\varepsilon_0}(0)$, $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, $x \in D_h(\overline{x})$, $\dot{x} \in D_h(\dot{\overline{x}})$, $v \in V$ справедливо неравенство

$$\bigl\langle f(x, \dot{x}, \overline{u}) + g(x, \dot{x}, v), p \bigr\rangle \geqslant \frac{\overline{\alpha}}{2} = \alpha.$$

3^0. В данном пункте определим размер шага разбиения временного отрезка.

Зафиксируем $0 < \delta \leqslant \varepsilon_0$. Выберем шаг разбиения

$$\Delta = \min\left\{\frac{\alpha\delta}{D^2}, \frac{h}{D}\right\}.$$

Отметим, что в силу п. 2^0, если $x(0), \dot{x}(0) \in D_{\varepsilon_0}(0)$, $t \in [0, \Delta]$, то для любых допустимых управлений игроков справедливы следующие неравенства:

$$\|x(t) - x(0)\| \leqslant h, \qquad \|\dot{x}(t) - \dot{x}(0)\| \leqslant h,$$
$$\|f(x(t), \dot{x}(t), u(t)) + g(x(t), \dot{x}(t), v(t))\| \leqslant D, \qquad \|\dot{x}(t)\| \leqslant D.$$

4^0. Произведем оценку приближения к нулю функции скорости $\dot{x}(\cdot)$ за один шаг разбиения.

Без ограничения общности можно рассмотреть только интервал $[0, \Delta)$. Значение управления преследователя будем выбирать следующим образом. Если $\dot{x}(0) = 0$, то $\overline{u}_0 \in U$ произвольное. Если $\dot{x}(0) \neq 0$, то обозначим $p = -\dot{x}(0)/\|\dot{x}(0)\|$ и $\overline{u}_0 \in U$ выбираем из следующего равенства:

$$\max_{u\in U}\big\langle f(x(0), \dot{x}(0), u), p\big\rangle = \big\langle f(x(0), \dot{x}(0), \overline{u}_0), p\big\rangle.$$

Таким образом, в силу пп. 2^0 и 3^0 для любых $t \in [0, \Delta)$, $v \in V$ справедливо следующее неравенство:

$$\big\langle f(x(t), \dot{x}(t), \overline{u}_0) + g(x(t), \dot{x}(t), v), p\big\rangle \geqslant \alpha.$$

Пусть $t \in [0, \Delta)$. Оценим квадрат нормы скорости:

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}(t)\|^2 &= \left\|\dot{x}(0) + \int_0^t \big(f(x(s), \dot{x}(s), \overline{u}_0) + g(x(s), \dot{x}(s), v(s))\big)\, ds\right\|^2 \\
&= \|\dot{x}(0)\|^2 + \left\|\int_0^t \big(f(x(s), \dot{x}(s), \overline{u}_0) + g(x(s), \dot{x}(s), v(s))\big)\, ds\right\|^2 \\
&\qquad + 2\int_0^t \big\langle f(x(s), \dot{x}(s), \overline{u}_0) + g(x(s), \dot{x}(s), v(s)), \dot{x}(0)\big\rangle\, ds \\
&\leqslant \|\dot{x}(0)\|^2 + D^2t^2 - 2t\alpha\|\dot{x}(0)\|.
\end{aligned}$$

Оценим последний трехчлен $A = \|\dot{x}(0)\|^2 + D^2t^2 - 2t\alpha\|\dot{x}(0)\|$.

Если $\|\dot{x}(0)\| \geqslant \delta$, то

$$\begin{aligned}
\Delta \leqslant \frac{\alpha\delta}{D^2} \quad &\Longrightarrow \quad D^2t^2 - t\alpha\|\dot{x}(0)\| \leqslant t(D^2\Delta - \alpha\delta) \leqslant 0 \\
&\Longrightarrow \quad A \leqslant \|\dot{x}(0)\|^2 - t\alpha\|\dot{x}(0)\| \leqslant \left(\|\dot{x}(0)\| - \frac{t\alpha}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Если $\|\dot{x}(0)\| \leqslant \delta$, то трехчлен A достигает своего максимума при $\|\dot{x}(0)\| = 0$ или при $\|\dot{x}(0)\| = \delta$. Отметим, что в силу п. 2^0 $D \geqslant 2\alpha$. Тогда если $\|\dot{x}(0)\| = 0$, то

$$A = D^2t^2 \leqslant D^2\Delta^2 \leqslant \frac{\alpha^2\delta^2}{D^2} \leqslant \frac{\delta^2}{4}.$$

Если $\|\dot{x}(0)\| = \delta$, то

$$A = \delta^2 + D^2t^2 - 2t\alpha\delta \leqslant \delta^2 + t(D^2\Delta - 2\alpha\delta) \leqslant \delta^2.$$

Таким образом, если $\|\dot{x}(0)\| \geqslant \delta$, то $\|\dot{x}(\Delta)\| \leqslant \|\dot{x}(0)\| - \Delta\alpha/2$.

Если $\|\dot{x}(0)\| < \delta$, то $\|\dot{x}(t)\| \leqslant \delta$ для всех $t \in [0, \Delta]$.

5^0. В данном пункте построим стратегию для приведения функции $\dot{x}(\cdot)$ в $D_\delta(0)$ и оценим время.

На каждом интервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, \dots, \eta - 1$, будем выбирать управление преследователя в соответствии с п. 4^0, где вместо векторов $x(0)$, $\dot{x}(0)$ используем $x(\tau_i)$, $\dot{x}(\tau_i)$ соответственно. Выберем такое неотрицательное целое η, что

$$\frac{\Delta\alpha\eta}{2} < \|\dot{x}(0)\| \leqslant \frac{\Delta\alpha(\eta+1)}{2},$$

т.е.

$$\eta = \left[\frac{2\|\dot{x}(0)\|}{\Delta\alpha}\right].$$

Следовательно, в силу оценок из п. 4^0 $\|\dot{x}(\tau_\eta)\| \leqslant \delta$. Действительно, если $\|\dot{x}(\tau_\eta)\| > \delta$, то в силу оценок из п. 4^0 для каждого $i = 0, \dots, \eta - 1$ справедливо неравенство $\|\dot{x}(\tau_i)\| > \delta$. При этом $D\Delta \leqslant \delta/2$. Следовательно, $\|\dot{x}(\tau_{\eta+1})\| > \delta/2$ и $\|\dot{x}(\tau_{\eta+1})\| \leqslant \|\dot{x}(0)\| - \Delta\alpha(\eta + 1)/2$, т.е. получаем противоречие.

Оценим τ_η:

$$\tau_\eta = \eta\Delta \leqslant \frac{2\|\dot{x}(0)\|\Delta}{\Delta\alpha} = \frac{2\|\dot{x}(0)\|}{\alpha}.$$

Таким образом, если выполнено условие $\|x(0)\| + \tau_\eta\|\dot{x}(0)\| < \varepsilon_0$, то $\|x(t)\| < \varepsilon_0$ для всех $t \in [0, \tau_\eta]$.

6^0. Пусть $\zeta \in D_{\varepsilon_0/3}(0)$, $\dot{x}(\tau_q) \in D_{2\varepsilon_0/3}(\zeta)$, $q \geqslant 0$. Покажем, что можно привести значение функции $\dot{x}(\cdot)$ сколь угодно близко к точке ζ из положения $\dot{x}(\tau_q)$ к некоторому моменту $\bar{t}$.

Для выбора вектора управления преследователя в п. 4^0 будем использовать вектор $p = \zeta - \dot{x}(\tau_q)$, т.е. целевая точка вместо точки 0 изменяется на ζ. В момент τ_{q+1} имеем $p = (\zeta - \dot{x}(\tau_{q+1}))/\|\zeta - \dot{x}(\tau_{q+1})\|$ и т.д. Согласно п. 4^0 имеем включение $\dot{x}(t) \in D_{2\varepsilon_0/3}(\zeta)$, т.е. $\dot{x}(t) \in D_{\varepsilon_0}(0)$ для всех $t \in [t_q, \bar{t}]$. Аналогично п. 5^0 получаем оценку времени

$$\bar{t} - t_q \leqslant \frac{2\|\zeta - \dot{x}(\tau_q)\|}{\alpha}.$$

7^0. В данном пункте построим продолжение стратегии из п. 5^0, приводящее функцию $x(\cdot)$ за конечное время в любую наперед заданную окрестность нуля.

Пусть выполнена процедура из п. 5^0, т.е. $\|\dot{x}(\tau_\eta)\| \leqslant \delta$. Обозначим $\varphi = -x(\tau_\eta)/\|x(\tau_\eta)\|$. Здесь и далее будем брать такое $\delta \leqslant \varepsilon_0/3$, что $\varepsilon_0/(3\delta) = \mu \in \mathbb{N}$. Кроме того, предполагаем, что $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon_0$, $t > \tau_\eta$. Далее в доказательстве получим условия, гарантирующие выполнения этого неравенства.

Далее, считая начальным положением $\dot{x}(\tau_\eta)$, в соответствии с п. 6^0 можем привести функцию $\dot{x}(\cdot)$ в шар $D_\delta(\delta\varphi)$ за время $\Delta_1 \leqslant 4\delta/\alpha$, т.е. к моменту $\tau_\eta + \Delta_1$.

Затем, считая начальным положением $\dot{x}(\tau_\eta + \Delta_1)$, приводим функцию $\dot{x}(\cdot)$ в шар $D_\delta(2\delta\varphi)$ за время $\Delta_2 \leqslant 4\delta/\alpha$, т.е. к моменту $\tau_\eta + \Delta_1 + \Delta_2$.

Продолжаем данную процедуру до попадания функции $\dot{x}(\cdot)$ в шар $D_\delta(\mu\delta\varphi) = D_\delta(\varphi\varepsilon_0/3)$. Это произойдет к моменту $\tau_\eta + \Delta_1 + \dots + \Delta_\mu$. Здесь $\Delta_i \leqslant 4\delta/\alpha$, $i = 1, \dots, \mu$. После этого в качестве целевой до окончания игры выбираем точку $\varphi\varepsilon_0/3$. Таким образом, в силу п. 4^0 $\dot{x}(t) \in D_\delta(\varphi\varepsilon_0/3)$, $t \geqslant \tau_\eta + \Delta_1 + \dots + \Delta_\mu$.

Представим $\dot{x}(t) = \beta(t)\varphi + \psi(t)$, где $\beta(t) = i\delta$ при $t \in \big[\tau_\eta + \sum_{j=1}^{i-1}\Delta_j, \tau_\eta + \sum_{j=1}^{i}\Delta_j\big)$, $i = 1, \dots, \mu$, и $\beta(t) = \varepsilon_0/3$ при $t \geqslant \tau_\eta + \Delta_1 + \dots + \Delta_\mu$. Отметим, что $\|\psi(t)\| \leqslant 2\delta$, $\tau_\eta \leqslant t \leqslant \tau_\eta + \Delta_1 + \dots + \Delta_\mu$, и $\|\psi(t)\| \leqslant \delta$ при $t > \tau_\eta + \Delta_1 + \dots + \Delta_\mu$.

Таким образом, найдется и единственное $\widehat{t} \geqslant 0$ такое, что

$$x(\tau_\eta) + \int_{\tau_\eta}^{\tau_\eta + \widehat{t}} \beta(t)\varphi\, ds = 0.$$

Так как $\|x(\tau_\eta)\| \leqslant \varepsilon_0$, то $\widehat{t} \leqslant \Delta_1 + \dots + \Delta_\mu + 3$.

Если $\widehat{t} \leqslant \Delta_1$, то

$$\begin{aligned}\|x(\tau_\eta + \widehat{t})\| &= \left\| x(\tau_\eta) + \int_{\tau_\eta}^{\tau_\eta + \widehat{t}} \beta(t)\varphi\, ds + \int_{\tau_\eta}^{\tau_\eta + \widehat{t}} \psi(s)\, ds \right\| \\ &\leqslant \|x(\tau_\eta) + \varphi\delta\widehat{t}\| + 2\delta\widehat{t} = (\|x(\tau_\eta)\| - \delta\widehat{t}) + 2\delta\widehat{t} = 2\delta\widehat{t} \leqslant 2\delta\Delta_1.\end{aligned}$$

Если $\Delta_1 < \widehat{t} \leqslant \Delta_1 + \Delta_2$, то

$$\|x(\tau_\eta + \widehat{t})\| \leqslant (\|x(\tau_\eta)\| - \delta\Delta_1 - 2\delta(\widehat{t} - \Delta_1)) + 2\delta\Delta_1 + 2\delta(\widehat{t} - \Delta_1) = \|x(\tau_\eta)\| + \delta\Delta_1.$$

Если $\Delta_1 + \Delta_2 < \widehat{t} \leqslant \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_2$, то

$$\|x(\tau_\eta + \widehat{t})\| \leqslant \|x(\tau_\eta)\| + \delta\Delta_1 - \delta(\widehat{t} - \Delta_1 - \Delta_2).$$

И так далее.

Таким образом, так как $\Delta_1 \leqslant 4\delta/\alpha$, то для выполнения неравенства $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon_0$, $t > \tau_\eta$, достаточно выполнения следующего неравенства:

$$\|x(\tau_\eta)\| + \frac{4\delta^2}{\alpha} \leqslant \varepsilon_0.$$

Оценим норму $\|x(\tau_\eta + \widehat{t})\|$:

$$\|x(\tau_\eta + \widehat{t})\| \leqslant 2\delta \sum_{i=1}^{\mu} \Delta_i + \delta\left(\widehat{t} - \sum_{i=1}^{\mu} \Delta_i\right) \leqslant 2\delta \cdot \frac{4\delta\mu}{\alpha} + 3\delta = \delta\left(\frac{8\varepsilon_0}{3\alpha} + 3\right).$$

Следовательно, так как мы можем выбирать сколь угодно малое δ, то можем привести траекторию $x(\cdot)$ сколь угодно близко к нулю за время

$$\tau_\eta + \widehat{t} \leqslant \frac{2\|\dot{x}(0)\|}{\alpha} + \Delta_1 + \dots + \Delta_\mu + 3 \leqslant \frac{2\varepsilon_0}{\alpha} + \frac{4\varepsilon_0}{3\alpha} + 3 = \frac{10\varepsilon_0}{3\alpha} + 3 = T.$$

В силу п. 5^0, если $\|x(0)\| + \tau_\eta\|\dot{x}(0)\| < \varepsilon_0$, то $\|x(t)\| < \varepsilon_0$ для всех $t \in [0, \tau_\eta]$. Так как $\tau_\eta \leqslant 2\|\dot{x}(0)\|/\alpha \leqslant 2\varepsilon_0/\alpha$, то получаем искомое $\theta = \max\{2\varepsilon_0/\alpha, 1\}$.

Теорема 4 доказана.

Введем вспомогательную управляемую систему

$$\ddot{y} = w, \qquad \|w\| \leqslant \rho, \quad y(0) = x_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{x}_0, \tag{3.2}$$

где $w, y \in \mathbb{R}^k$. Допустимыми управлением системы (3.2) считаем измеримые функции $w(t)$, $\|w(t)\| \leqslant \rho$, $t \geqslant 0$.

Пусть ε_0 и θ те же, что и в теореме 4.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $f(0,0,u_1), \ldots, f(0,0,u_m)$ образуют положительный базис, $-g(0,0,V) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{co}\{f(0,0,u_1), \ldots, f(0,0,u_m)\})$, заданы $x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}^k$, $\|x_0\| + \theta\|\dot{x}_0\| < \varepsilon_0$, $T > 0$. Тогда существует $\rho > 0$ такое, что для любого произвольного допустимого управления $w(\cdot)$ системы (3.2), удовлетворяющего условиям $\|y(t)\| < \varepsilon_0$ и $\|\dot{y}(t)\| < \varepsilon_0$ для всех $t \in [0,T]$, и для любого $\delta > 0$ существует кусочно постоянная стратегия W преследователя P на промежутке $[0,T]$ такая, что для любого допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E справедливы неравенства $\|x(t) - y(t)\| \leqslant \delta$ и $\|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\| \leqslant \delta$ для всех $t \in [0,T]$.*

Доказательство. В доказательстве теоремы 4 поимка осуществляется путем управления положением функции скорости $\dot{x}(\cdot)$. Вследствие доказательства теоремы 4 (см. п. 6^0), если $b_0, b_1 \in O_{\widehat{\varepsilon}_0}(0)$ и $b_0 \in D_{\widehat{r}}(b_1) \subset D_{\varepsilon_0}(0)$ для некоторого $\widehat{r} > 0$, то функцию $\dot{x}(\cdot)$ из начальной точки b_0 за конечное время $2\|b_1 - b_0\|/\alpha$ можно привести в любую окрестность точки b_1 при любых действиях убегающего при условии $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon_0$, $t \in [0, 2\|b_1 - b_0\|/\alpha]$. Здесь α соответствует п. 2^0 доказательства теоремы 4.

Положим $\rho = \alpha/2$. Тогда согласно определению θ в п. 7^0 доказательства теоремы 4 для любых начальных положений, удовлетворяющих условию $\|x_0\| + \theta\|\dot{x}_0\| < \varepsilon_0$, и произвольного $T > 0$ найдется управление $w(\cdot)$ системы (3.2) такое, что $\|y(t)\| < \varepsilon_0$, $\|\dot{y}(t)\| < \varepsilon_0$ и $\|w(t)\| \leqslant \rho$ для всех $t \in [0,T]$. Действительно, можем выбрать $w(t) = -\rho\dot{y}(0)/\|\dot{y}(0)\|$ при $t \in [0, \|\dot{y}(0)\|/\rho)$ и $w(t) \equiv 0$ при $t \geqslant \|\dot{y}(0)\|/\rho$. Тогда при $t \in [0, \|\dot{y}(0)\|/\rho]$ справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leqslant \|y(0)\| + t\|\dot{y}(0)\| < \|y(0)\| + \frac{\|\dot{y}(0)\|\varepsilon_0}{\rho} \\ &= \|y(0)\| + \frac{2\|\dot{y}(0)\|\varepsilon_0}{\alpha} \leqslant \|x_0\| + \theta\|\dot{x}_0\| < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

При $t > \|\dot{y}(0)\|/\rho$ справедливо равенство $\|y(t)\| = \|y(\|\dot{y}(0)\|/\rho)\|$.

Зафиксируем $\delta > 0$. Так как функции $y(t)$, $\dot{y}(t)$, $t \in [0,T]$, являются непрерывными, $\|y(t)\| < \varepsilon_0$ и $\|\dot{y}(t)\| < \varepsilon_0$ для всех $t \in [0,T]$, то получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &\max\{r \geqslant 0 \,|\, y(t) + D_r(0) \subset D_{\varepsilon_0}(0),\, t \in [0,T]\} \doteq \delta_1 > 0, \\ &\max\{r \geqslant 0 \,|\, \dot{y}(t) + D_r(0) \subset D_{\varepsilon_0}(0),\, t \in [0,T]\} \doteq \delta_2 > 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Положим $\delta_3 = \delta_1/T$, $\delta_4 = \delta/T$. Отсюда, если $\|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\| \leqslant \delta_3$, получаем $\|x(t) - y(t)\| \leqslant \delta_1$, т.е. $x(t) \in D_{\varepsilon_0}(0)$ для всех $t \in [0,T]$. Если $\|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\| \leqslant \delta_4$, то $\|x(t) - y(t)\| \leqslant \delta$ для всех $t \in [0,T]$. Пусть q – произвольное натуральное число такое, что

$$\frac{\rho T}{q} \leqslant \frac{\min\{\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}}{4}. \tag{3.4}$$

Обозначим $\widehat{\delta} = \rho T/q$, $\Delta = T/q$, $\widehat{\varepsilon} = \widehat{\delta}/q$, $t_0 = 0$, $t_1 = \Delta$, $t_2 = 2\Delta, \ldots, t_q = q\Delta = T$.

Далее, аналогично доказательству теоремы 2 строится стратегия приведения значения функции скорости $\dot{x}(\cdot)$ в окрестность точки $\dot{y}(t)$, т.е. из точки $x(t_0)$ в $D_{\widehat{\varepsilon}}(y(t_1))$, из $x(t_1)$ в $D_{2\widehat{\varepsilon}}(y(t_2))$ и т.д. В силу (3.3) и (3.4) для всех $t \in [0, T]$ справедливы следующие включения: $\|x(t) - y(t)\| \leqslant \delta$, $\|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\| \leqslant \delta$, $x(t) \in D_{\varepsilon_0}(0)$, $\dot{x}(t) \in D_{\varepsilon_0}(0)$.

Теорема 5 доказана.

Определение 6. В игре $\Gamma(x_0, \dot{x}_0)$ *происходит мягкая ε-поимка*, если существует $T > 0$ такое, что для любого $\widehat{\varepsilon} > 0$ существует кусочно постоянная стратегия W преследователя P на промежутке $[0, T]$ такая, что для любого допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E выполнены неравенства $\|x(\tau)\| < \widehat{\varepsilon}$ и $\|\dot{x}(\tau)\| < \widehat{\varepsilon}$ для некоторого $\tau \in [0, T]$.

Справедливо следующее следствие.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и $\|x_0\| + \theta\|\dot{x}_0\| < \varepsilon_0$. Тогда в игре $\Gamma(x_0, \dot{x}_0)$ происходит мягкая ε-поимка.*

Доказательство. В доказательстве теоремы 5 достаточно дополнительно ограничить управление $w(\cdot)$ вспомогательной системы (3.2): $y(T) = 0$ и $\dot{y}(T) = 0$. Всегда существует такое $T \geqslant 0$ и управление вспомогательной системы. Обозначим $t_1 = \|\dot{y}(0)\|/\rho$, $t_2 = t_1 + \sqrt{\|y(t_1)/\rho\|}$, $t_3 = t_2 + \sqrt{\|y(t_1)/\rho\|}$. Определим управление следующим образом:

$$
\begin{aligned}
w(t) &= \frac{-\rho\dot{y}(0)}{\|\dot{y}(0)\|} \quad \text{при} \quad t \in [0, t_1), \\
w(t) &= \frac{-\rho y(t_1)}{\|y(t_1)\|} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, t_2), \\
w(t) &= \frac{\rho y(t_1)}{\|y(t_1)\|} \quad \text{при} \quad t \in [t_2, t_3].
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
y(t_3) &= y(t_1) + (t_3 - t_1)\dot{y}(t_1) + \int_{t_1}^{t_3} \dot{y}(s)\,ds \\
&= y(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{-s\rho y(t_1)}{\|\dot{y}(0)\|}\,ds + \int_{t_2}^{t_3} \left(\frac{-y(t_1)}{2} + \frac{s\rho y(t_1)}{\|\dot{y}(0)\|} \right) ds \\
&= y(t_1) - \frac{y(t_1)}{2} - \frac{y(t_1)}{2} = 0.
\end{aligned}
$$

Следствие доказано.

§ 4. Заключение

Рассмотрены две задачи управления с помехой, в качестве которой выступает второй игрок в дифференциальной игре. Динамика в первой задаче описывается системой вида $\dot{x} = f(x, u) + g(x, v)$. Показано, что если решение вспомогательной системы $\dot{y} = w$, $\|w\| \leqslant \rho$, ограничено некоторым образом, то для любого $\delta > 0$ существует такая допустимая стратегия игрока, что при любых действиях помехи $\|x(t)-y(t)\| \leqslant \delta$ для всех $t \in [0,T]$. Динамика во второй задаче описывается системой вида $\ddot{x} = f(x,\dot{x},u) + g(x,\dot{x},v)$. Показано, что если решение вспомогательной системы $\ddot{y} = w$, $\|w\| \leqslant \rho$, ограничено некоторым образом, то для любого $\delta > 0$ существует такая допустимая стратегия игрока, что при любых действиях помехи $\|x(t)-y(t)\| \leqslant \delta$ и $\|\dot{x}(t)-\dot{y}(t)\| \leqslant \delta$ для всех $t \in [0,T]$. Таким образом, с учетом полученных ограничений, выбирая управление вспомогательной системы оптимальным в каком-либо смысле, можно осуществить сколь угодно близкое движение исходной системы к такому решению вспомогательной системы при любых действиях помехи.

Список литературы

[1] Р. Айзекс, *Дифференциальные игры*, Мир, М., 1967, 479 с.; пер. с англ.: R. Isaacs, *Differential games. A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization*, John Wiley & Sons, Inc, New York–London–Sydney, 1965, xvii+384 pp.

[2] A. Blaquiere, F. Gerard, G. Leitmann, *Quantitative and qualitative differential games*, Math. Sci. Eng., **58**, Academic Press, New York–London, 1969, xi+172 pp.

[3] Н. Н. Красовский, *Игровые задачи о встрече движений*, Наука, М., 1970, 420 с.

[4] A. Friedman, *Differential games*, Pure Appl. Math., **XXV**, Wiley-Interscience [A division of John Wiley & Sons, Inc.], New York–London, 1971, xii+350 pp.

[5] O. Hajek, *Pursuit games. An introduction to the theory and applications of differential games of pursuit and evasion*, Math. Sci. Eng., **120**, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York–London, 1975, xii+266 pp.

[6] G. Leitmann, *Cooperative and non-cooperative many players differential games*, Internat. Centre for Mech. Sci. (CISM) Courses and Lectures, **190**, Springer-Verlag, Vienna, 1974, 77 pp.

[7] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974, 456 с.; англ. пер.: N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin, *Game-theoretical control problems*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, New York, 1988, xii+517 pp.

[8] П. Е. Двуреченский, Г. Е. Иванов, “Алгоритмы вычисления операторов Минковского и их применение в дифференциальных играх”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:2 (2014), 224–255; англ. пер.: P. E. Dvurechensky, G. E. Ivanov, “Algorithms for computing Minkowski operators and their application in differential games”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:2 (2014), 235–264.

[9] В. Н. Ушаков, А. А. Ершов, “К решению задач управления с фиксированным моментом окончания”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **26**:4 (2016), 543–564.

[10] М. С. Никольский, “Одна нелинейная задача преследования”, *Кибернетика*, 1973, № 2, 92–94.

[11] Б. Н. Пшеничный, Н. Б. Шишкина, “Достаточные условия конечности времени преследования”, *ПММ*, **49**:4 (1985), 517–523; англ. пер.: B. N. Pshenichnyi, N. B. Shishkina, “Sufficient conditions of finiteness of the pursuit time”, *J. Appl. Math. Mech.*, **49**:4 (1985), 399–404.

[12] Н. Сатимов, “К задаче преследования в нелинейных дифференциальных играх”, *Кибернетика*, 1973, № 3, 88–93.

[13] P. Soravia, “$\mathscr{H}_\infty$ control of nonlinear systems: differential games and viscosity solutions”, *SIAM J. Control Optim.*, **34**:3 (1996), 1071–1097.

[14] T. Natarajan, D. A. Pierre, G. Naadimuthu, E. S. Lee, “Piecewise suboptimal control laws for differential games”, *J. Math. Anal. Appl.*, **104**:1 (1984), 189–211.

[15] А. А. Азамов, “Об одном классе нелинейных дифференциальных игр”, *Матем. заметки*, **30**:4 (1981), 619–625; англ. пер.: A. A. Azamov, “A class of nonlinear differential games”, *Math. Notes*, **30**:4 (1981), 805–808.

[16] Н. Н. Петров, “Об управляемости автономных систем”, *Дифференц. уравнения*, **4**:4 (1968), 606–617.

[17] Н. Н. Петров, “Локальная управляемость автономных систем”, *Дифференц. уравнения*, **4**:7 (1968), 1218–1232.

[18] Н. Н. Петров, “Плоские задачи теории управляемости”, *Вестн. ЛГУ*, 1969, № 13, 69–78.

[19] А. Я. Нарманов, Н. Н. Петров, “Нелокальные проблемы теории оптимальных процессов. I”, *Дифференц. уравнения*, **21**:4 (1985), 605–614.

[20] А. Я. Нарманов, “О стабильности вполне управляемых систем”, *Дифференц. уравнения*, **36**:10 (2000), 1336–1344; англ. пер.: A. Ya. Narmanov, “Stability of completely controllable systems”, *Differ. Equ.*, **36**:10 (2000), 1475–1483.

[21] А. Я. Нарманов, “О стабильности вполне управляемых систем”, *Матем. тр.*, **4**:1 (2001), 94–110; англ. пер.: A. Ya. Narmanov, “On stability of totally controlled systems”, *Siberian Adv. Math.*, **11**:4 (2001), 110–125.

[22] А. С. Банников, Н. Н. Петров, “К нестационарной задаче группового преследования”, Тр. ИММ УрО РАН, **16**, № 1, 2010, 40–51; англ. пер.: A. S. Bannikov, N. N. Petrov, “On a nonstationary problem of group pursuit”, *Proc. Steklov Inst. Math.* (*Suppl.*), **271**, suppl. 1 (2010), S41–S52.

[23] Н. Н. Петров, “Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями”, *Автомат. и телемех.*, 1992, № 5, 22–26; англ. пер.: N. N. Petrov, “A certain simple pursuit problem with phase constraints”, *Autom. Remote Control*, **53**:5 (1992), 639–642.

[24] Н. Н. Петров, “Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **27**:1 (2017), 54–59.

[25] Н. Н. Петров, Н. А. Соловьева, “Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями”, Тр. ИММ УрО РАН, **21**, № 2, 2015, 178–186; англ. пер.: N. N. Petrov, N. A. Solov’eva, “Multiple capture in Pontryagin’s recurrent example with phase constraints”, *Proc. Steklov Inst. Math.* (*Suppl.*), **293**, suppl. 1 (2016), 174–182.

[26] М. Н. Виноградова, Н. Н. Петров, Н. А. Соловьева, “Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх”, Тр. ИММ УрО РАН, **19**, № 1, 2013, 41–48.

[27] К. А. Щелчков, “Об одной нелинейной задаче преследования с дискретным управлением и неполной информацией”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **28**:1 (2018), 111–118.

[28] К. А. Щелчков, “Оценка времени поимки и построение стратегии преследователя в нелинейной дифференциальной игре двух лиц”, *Дифференц. уравнения*, **58**:2 (2022), 260–269; англ. пер.: K. A. Shchelchkov, “Estimate of the capture time and construction of the Pursuer’s strategy in a nonlinear two-person differential game”, *Differ. Equ.*, **58**:2 (2022), 264–274.

[29] K. Shchelchkov, “ε-capture in nonlinear differential games described by system of order two”, *Dyn. Games Appl.*, **12**:2 (2022), 662–676.

Кирилл Александрович Щелчков
(Kirill A. Shchelchkov)
Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск
E-mail: `incognitobox@mail.ru`

Поступила в редакцию
23.10.2022 и 10.05.2023