МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Кафедра математического анализа

Е.Х. Бадаш

Основы интегрального исчисления

методические указания для самостоятельной работы студентов

Учебно-методическое пособие

Ижевск 2023

УДК 517.2/3(075.8)
ББК 22.161.12я73
Б15

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензенты:

Ицков А.Г., к.ф-м.н., доцент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» ФГБОУ ВО «ИжГТУ им. М. Т. Калашникова»

Чазова И.Ю., д.э.н., доцент, зав. кафедрой государственной службы и управления персоналом ИЭиУ ФГБОУ ВО «УдГУ»

Бадаш Е.Х.

Б15 Основы интегрального исчисления (методические указания для самостоятельной работы студентов): учебно – метод. пособие. – Ижевск: Изд-во ИЭиУ ФГБОУ ВО «УдГУ», 2023. – 56 с.

В учебно-методическом пособии рассмотрены основные методы вычисления неопределенных интегралов. Пособие содержит большое количество примеров с подробным решением и методическими указаниями.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов очной, заочной и очно-заочной форм обучения ИЭиУ, а также для студентов других институтов, изучающих раздел интегральное исчисление в курсе высшей математики.

УДК 517.2/3(075.8)

ББК 22.161.12я73

Содержание

Введение …………………………………………………………...…..4

1. Понятие первообразной функции ………..……………..…….5

2. Неопределенный интеграл ………….…………………......6

3. Основные свойства неопределенного интеграла ……………6

4. Таблица основных неопределенных интегралов …………...7

5. Непосредственное интегрирование …………………………8

6. Интегрирование методом подведения под знак
дифференциала …………………………………….……....11

7. Метод интегрирования по частям …………………………...29

8. Интегрирование дробей с квадратным трёхчленом
в знаменателе ………….……………………………...…36

9. Примеры для самостоятельного решения...…………..…….55

Список литературы……………………………..…………..…….55

Введение

Данное учебно-методическое пособие отражает многолетний опыт проведения занятий и организации самостоятельной работы по математике (высшей математике) у студентов Института экономики и управления в Удмуртском государственном университете.

Интегральное исчисление являются одним из разделов, изучаемым в курсе высшей математики (математики).

Настоящее пособие представляет собой систематизированное и доступное изложения материала по основным методам интегрального исчисления. Предложенный материал предполагается использовать для самостоятельной работы студентов. Учебно-методическое пособие состоит из 9 разделов. Каждый раздел (за исключением 9-го) содержат необходимый теоретический материал и большое число примеров с подробным решением.

Целью освоения раздела «Интегральное исчисление» является овладение основными методами вычисления неопределенных интегралов, приобретение навыков использования универсального понятийного аппарата и широкого арсенала технических приемов этого раздела при дальнейшем изучении профильных дисциплин, построении математических моделей различных экономических закономерностей и процессов, описании динамики социально-экономических систем и прогнозировании развития экономики.

Достижение этих целей позволяет сформировать следующие компетенции обучающегося:

УК - Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

ПК - Способен участвовать в формулировке и решении управленческих задач и разработке стратегии организации в условиях конкурентной среды.

Указанные компетенции способствуют социальной мобильности будущего выпускника, его устойчивости на рынке труда и успешной работе в самых разнообразных сферах (стратегическое планирование, аналитическая поддержка процессов принятия решений для управления предприятием и проч.).

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов института экономики и управления, изучающих интегральное исчисление в курсе математики. Но оно также может быть использовано для самостоятельной работы студентов на тех направлениях подготовки, где дисциплины «Высшая математика» или «Математика» включены в учебный план.

1. Понятие первообразной функции

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией (или просто первообразной) функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если в любой точке x интервала $(a;b)$ функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

В этом определении интервал $(a;\ b)$ может быть заменен на всю бесконечную прямую $(-\infty; +\infty)$ либо на одну из открытых полупрямых $(a; +\infty)$ или $(-\infty; b)$.

Так, функция $F(x) = \arcsin x$ является первообразной функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1;\ 1)$, так как всюду на этом интервале $(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; а функция $F(x)=sin\ x$ является первообразной функции $f(x) = \cos x$ на бесконечной прямой $(-\infty;+\infty)$, поскольку в любой точке бесконечной прямой $(sinx)' = cosx$; функция $F(x) = \ln x$ является первообразной функции $f(x)=\frac{1}{x}$ на открытой полупрямой $(0;+\infty)$, так как в любой точке x этой полупрямой $(lnx)' = \frac{1}{x}$.

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$, то, очевидно, и функция $F(x)+C$, где C – любая постоянная, так же является первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$, так как $(F(x) + C)' = (F(x))' + C' = f(x) + 0 = f(x)$. Возникает вопрос о том, как связаны между собой различные первообразные одной и той же функции $f(x)$.

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – любые две первообразные функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$, то всюду на этом интервале $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C – некоторая постоянная.

Доказательство. Пусть функция $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Так как каждая из функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ имеет в каждой точке x интервала $(a;\ b)$ производную, равную $f(x)$, то и функция $\Phi(x)$ имеет в каждой точке x интервала $(a;\ b)$ производную, причём, $\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ (всюду на этом интервале). Функция $\Phi(x)$, имеющая равную нулю производную на интервале $(a;\ b)$, является постоянной всюду на этом интервале. Теорема доказана.

Следствие из теоремы. Если функция $F(x)$ является одной из первообразных функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$, то любая первообразная $\Phi(x)$ функции $f(x)$ на этом интервале имеет вид $\Phi(x)=F(x)+C$, где C – некоторая постоянная.

2. Неопределенный интеграл

Определение. Совокупность всех первообразных функции *f(x)* на интервале (*a; b*) называется неопределенным интегралом от функции *f(x)* (на этом интервале) и обозначается символом $\int \boldsymbol{f(x)dx}$. В этом обозначении знак $\int$ называется знаком интеграла, выражение *f(x)dx* – подынтегральным выражением, а сама **функция *f(x)* – подынтегральной функцией**, dx – дифференциал независимой переменной.

Если функция *F(x)* является одной из первообразных функции *f(x)* на интервале (*a*; *b*), то (в силу следствия из теоремы (см. предыдущую стр.)) $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Так, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$ на интервале (-1; 1), так как функция *F(x)=arcsin x* является одной из первообразных функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на этом интервале; $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ на всей числовой прямой (-∞; +∞), потому что *F(x)=sin x* является одной из первообразных функции *f(x)=cos x* на бесконечной прямой.

Если первообразная функции *f(x)* на интервале (*a; b*) (а стало быть, и неопределенный интеграл от этой функции) существует, то подынтегральное выражение *f(x)dx* равно дифференциалу *dF* любой из первообразных *F(x)* функции *f(x)*.

Это следует из того, что по определению первообразной $F'(x) = f(x)$ на интервале (*a; b*) и поэтому $dF = F'(x)dx = f(x)dx$.

Операция нахождения первообразной или неопределенного интеграла от функции *f(x)* принято называть интегрированием этой функции.

3. Основные свойства неопределенного интеграла

Первые два свойства непосредственно вытекают из определения неопределенного интеграла.

1) $d\int f(x)dx = f(x)dx.$

Доказательство:

$$d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = d\big(F(x)\big) + d(C) = F'(x)dx + 0 = f(x)dx.$$

2) $\int dF(x) = F(x) + C.$

Доказательство: $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$

Следующие два свойства называются линейными свойствами неопределенного интеграла:

3) $\int\big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Доказательство: Пусть *F(x)* – первообразная функции *f(x)*, а *G(x)* – первообразная функции *g(x)*. Тогда функция (*F(x)*±*G(x)*) является первообразной функции (*f(x)*±*g(x)*), так как $\big(F(x) \pm G(x)\big)' = F'(x) \pm G'(x) =$ $= f(x) \pm g(x)$.

4) $\int(\alpha f(x))dx = \alpha \int f(x)dx$

Равенства в формулах 3) и 4) носят условный характер: его следует понимать, как равенство левой и правой частей с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

4. Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C.$

2. $\int 1dx = \int dx = x + C.$

3. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C.$

4. $\int x^k\, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$ (при k≠ - 1).

5. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C \quad (x \neq 0).$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0).$

7. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$

8. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{lna} + C$ (при $a > 0, a \neq 1$).

9. $\int e^x\, dx = e^x + C.$

10. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

11. $\int \cos x\, dx = sin\, x + C.$

12. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$ (при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$).

13. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$ (при $x \neq \pi n, n \in Z$).

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C, \\ -\arccos\frac{x}{a} + C \end{cases} \quad (-a < x < a).$

$$15. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C. \end{cases}$$

$$16. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (|x| \neq a).$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \ \ (|x| > a \text{ в случае знака } "-").$$

Интегралы, содержащиеся в этой таблице, принято называть **табличными.**

Справедливость приведенных формул проверяется непосредственно дифференцированием. Например, 4-ая формула верна, так как производная правой части этой формулы $(\frac{x^{k+1}}{k+1} + C)' = \frac{(k+1)x^k}{k+1} + 0 = x^k$ равна подынтегральной функции левой части этой формулы.

Докажем справедливость 5-ой формулы. Пусть $x > 0$. Тогда $|x| = x$ и $(ln|x| + C)' = (ln\, x + \mathrm{C})' = \frac{1}{x}$. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $(ln|x| + C)' =$ $= (ln(-x) + \mathrm{C})' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$, то есть в обоих случаях производная правой части 5-ой формулы равна подынтегральной функции левой части. Аналогично проверяются остальные формулы таблицы интегралов.

5. Непосредственное интегрирование

Этот вид интегрирования состоит в приведении исходного интеграла к одному или к нескольким табличным интегралом с помощью свойств интеграла и тождественных преобразований.

Пример 1. $\int \frac{x^2-3}{\sqrt{x}} dx$.

Подынтегральная функция представляет собой дробь, разделим числитель этой дроби почленно на знаменатель: $\frac{x^2-3}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x^{1/2}} - \frac{3}{x^{1/2}}$. В первой из полученных дробей воспользуемся свойством степеней – при делении показатели степеней вычитаются, то есть $\frac{x^2}{x^{1/2}} = x^{2-1/2} = x^{3/2}$. Во второй дроби перенесем выражение из знаменателя в числитель при этом измениться знак у показателя степени: $\frac{3}{x^{1/2}} = 3x^{-1/2}$. Тогда интеграл примет вид $\int \frac{x^2-3}{\sqrt{x}} dx = \int (\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}) dx = \int (\frac{x^2}{x^{1/2}} - \frac{3}{x^{1/2}}) dx =$ $= \int (x^{3/2} - 3x^{-1/2}) dx = \int x^{3/2} dx - \int 3x^{-\frac{1}{2}} dx$. Оба полученных интеграла можно вычислить с помощью 4-ой формулы.

$\int \frac{x^2-3}{\sqrt{x}} dx = \int x^{3/2} dx - \int 3x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - -3\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$
$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} + C$.

Обращаю внимание на то, что в конце решения записываем одну общую произвольную постоянную С, не выписывая постоянные от интегрирования отдельных слагаемых. В дальнейшем будем опускать при записи произвольные постоянные от интегрирования отдельных слагаемых до тех пор, пока выражение содержит хотя бы один неопределенный интеграл. В окончательном ответе тогда будет одна постоянная.

Пример 2. $\int \frac{dx}{sin^2x \cdot cos^2x}$.

Подынтегральное выражение можно переписать в виде $\frac{1}{sin^2x \cdot cos^2x} dx$, вспомним основное тригонометрическое тождество $sin^2x + cos^2x = 1$. Тогда интеграл примет вид $\int \frac{dx}{sin^2x \cdot cos^2x} = \int \frac{1}{sin^2x \cdot cos^2x} dx = \int \frac{sin^2x+cos^2x}{sin^2x \cdot cos^2x} dx.$

Разделим числитель этой дроби почленно на знаменатель, а затем каждую из полученных дробей сократим, тогда подынтегральная функция примет вид

$\frac{sin^2x+cos^2x}{sin^2x \cdot cos^2x} = \frac{sin^2x}{sin^2x \cdot cos^2x} + \frac{cos^2x}{sin^2x \cdot cos^2x} = \frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{sin^2x}$. Подставим

полученную функцию обратно в интеграл:

$$\int \frac{dx}{sin^2x \cdot cos^2x} = \int \frac{1}{sin^2x \cdot cos^2x} dx = \int \frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2x \cdot cos^2x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{sin^2x}{sin^2x \cdot cos^2x} + \frac{cos^2x}{sin^2x \cdot cos^2x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{sin^2x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{cos^2x} + \int \frac{dx}{sin^2x} = tgx - ctgx + C.$$

Пример 3. $\int tg^2x \, dx$.

Используя формулы тригонометрии, преобразуем подынтегральную функцию:

$tg^2x = \frac{sin^2x}{cos^2x} = \frac{1-cos^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x} - \frac{cos^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x} - 1$. Полученное в

результате преобразований выражение подставим в интеграл.

$$\int tg^2x \, dx = \int \left(\frac{1}{cos^2x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{cos^2x} dx - \int dx = tgx - x + C .$$

Пример 4. $\int \frac{dx}{3x^2+15}$.

Вынесем в знаменателе коэффициент 3 как общий множитель за скобку: $\int \frac{dx}{3x^2+15} = \int \frac{dx}{3(x^2+5)} = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{dx}{x^2+5}$. Тогда дробь $\frac{1}{3}$ является числовым коэффициентом и по свойству интеграла может быть вынесена за его знак. $\int \frac{dx}{3x^2+15} = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+5}$. Полученный интеграл можно вычислить по 15 формуле из таблицы интегралов, учитывая, что в нашем примере $a^2 = 5$, и следовательно, a=$\sqrt{5}$.

$$\int \frac{dx}{3x^2+15} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} arctg \ \frac{x}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{3\sqrt{5}} arctg \ \frac{x}{\sqrt{5}} + C .$$

Пример 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}}$.

Вынесем числовой коэффициент 4 как общий множитель за скобку, при этом оставляя всё выражение под знаком корня: $\sqrt{4x^2 - 25} = \sqrt{4\left(x^2 - \frac{25}{4}\right)}$,

а теперь вынесем множитель 4 из под знака корня:

$$\sqrt{4x^2 - 25} = \sqrt{4\left(x^2 - \frac{25}{4}\right)} = 2\sqrt{x^2 - \frac{25}{4}} .$$

Подставим полученный результат в интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x^2-\frac{25}{4}}} = \int \frac{1}{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{25}{4}}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{25}{4}}} .$$

Здесь, как и в предыдущем примере, числовой коэффициент $\frac{1}{2}$ вынесли за знак интеграла, а сам интеграл можно вычислить по 17 формуле из таблицы интегралов, учитывая, что $a^2 = \frac{25}{4}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{25}{4}}} = \frac{1}{2} \cdot ln \left| x + \sqrt{x^2 - \frac{25}{4}} \right| + C.$$

Пример 6. $\int \frac{x^2}{x^2-9} dx$.

В этой подынтегральной функции числитель только на одно число отличается от знаменателя, поэтому добьёмся того, чтобы в числителе присутствовало выражение такое же, как и в знаменателе. Для этого в числителе из x^2 вычтем 9, а затем, чтобы не нарушить знак равенства прибавим 9

$\int \frac{x^2}{x^2-9} dx = \int \frac{x^2-9+9}{x^2-9} dx = \int \frac{(x^2-9)+9}{x^2-9} dx$. В итоге в числителе получились два слагаемых: первое – это $(x^2 - 9)$, а второе – просто число 9. Разделим почленно каждое слагаемое числителя на знаменатель, получим

$$\int \frac{x^2}{x^2-9} dx = \int \frac{(x^2-9)+9}{x^2-9} dx = \int \left(\frac{x^2-9}{x^2-9} + \frac{9}{x^2-9}\right) dx = \int \left(1 + \frac{9}{x^2-9}\right) dx =$$

$= \int dx + \int \frac{9}{x^2-9} dx.$

Во втором интеграле числовой коэффициент 9 нужно вынести за знак интеграла, а сам интеграл вычислить по 16 формуле

$$\int \frac{x^2}{x^2-9} dx = \int dx + \int \frac{9}{x^2-9} dx = \int dx + 9 \int \frac{dx}{x^2-3^2} =$$

$$= x + 9 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C = x + \frac{3}{2} ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C.$$

6. **Интегрирование методом подведения под знак дифференциала**

Всякая формула интегрирования сохраняется не зависимо от того какой буквой обозначена переменная интегрирования и что она эта буква означает: независимую переменную или непрерывно дифференцируемую функцию. В таблице основных интегралов предполагается, что x есть независимая переменная или аргумент. Но можно вместо буквы x в записи интеграла написать и другую букву, например t или u, и смысл интеграла не измениться. В общем виде это будет выглядеть так:

$\int f(x)dx = F(x) + C$ или $\int f(u)du = F(u) + C$ или $\int f(t)dt = F(t) + C.$

А если выписать несколько формул из таблицы интегралов, формально заменив x на u или t, то получится следующее:

$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$ или $\int udu = \frac{u^2}{2} + C$ или $\int tdt = \frac{t^2}{2} + C$

$\int \cos x \, dx = sin\, x + C$ или $\int \cos u \, du = sin\, u + C$ или $\int \cos t \, dt = sin\, t + C$

$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$ или $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$ или $\int \frac{dt}{t} = ln|t| + C$ и т.д.

Но не стоит забывать, что любая из этих букв, а особенно u или t могут обозначать непрерывно дифференцируемые функции.

Ещё одно правило, которое нужно учитывать, используя таблицу интегралов, **выражение, стоящее под знаком дифференциала, и выражение, являющееся аргументом подынтегральной функции, должны совпадать**.

Рассмотрим пример.

Пример 1. $\int \cos 3x \, dx$,

в этом интеграле подынтегральной функцией является функция косинус, а её аргумент равен *3x*. А дифференциал независимой переменной в этом интеграле равен dx и выражение, стоящее под знаком дифференциала равно x и с аргументом *3x* не совпадает. Поэтому, прежде чем воспользоваться таблицей интегралов необходимо выполнить некоторые преобразования. Для этого воспользуемся одним из свойств дифференциала $\boldsymbol{dx = \frac{1}{\alpha} d(\alpha x)}$**,** где α – это любое число отличное от нуля ($\alpha \neq 0$). Для нашего примера это свойство будет выглядеть так $dx = \frac{1}{3}d(3x)$, чтобы под знаком дифференциала было выражение *3x*, так же, как и у подынтегральной функции *cos 3x*. Теперь интеграл будет выглядеть так:

$\int \cos 3x\, dx = \int \cos 3x \cdot \frac{1}{3} d(3x)$. Заменим выражение *3x* на *t*: *3x=t*.
И окончательно получим

$$\int \cos 3x\, dx = \int \cos 3x \cdot \frac{1}{3} d(3x) = [3x = t] = \int \cos t \cdot \frac{1}{3} d(t) = \frac{1}{3}\int \cos t\, dt =$$

$= \frac{1}{3} \cdot \sin t + C = \frac{1}{3}\sin 3x + C$. Здесь дробь $\frac{1}{3}$ является постоянным множителем, поэтому при вычислении интеграла её вынесли за знак интеграла. И ещё очень важно, после того как вычислили интеграл и получили ответ с переменной t, вернуться обратно к переменной x заменив t на $3x$.

Пример 2. $\int (x-5)^9 dx$.
Здесь подынтегральной функцией является степенная функция, для вычисления интеграла от которой используется 4-ая формула из таблицы интегралов. Но в этом примере не совпадают аргумент у подынтегральной функции и выражение под знаком дифференциала. Эту ситуацию необходимо исправить. Для этого воспользуемся ещё одним из свойств дифференциалов ***dx=d(x±C)***, где С-любое число. Формулировку этого свойства полезно запомнить, оно часто используется при вычислении интегралов. Звучит это так: «**Значение дифференциала не измениться, если к выражению, стоящему под знаком дифференциала, прибавит или вычесть любое число (любую константу)**».

В нашем примере вычтем из *x*, стоящего под знаком дифференциала, число (5) или, что тоже самое прибавим число (-5), согласно свойству получим *dx=d(x-5)*. Затем сделаем замену *x-5=t*, в итоге исходный интеграл будет выглядеть следующим образом:

$$\int (x-5)^9 dx = \int (x-5)^9 d(x-5) = [x-5=t] = \int t^9 dt = \frac{t^{10}}{10} + C =$$

$$= \frac{(x-5)^{10}}{10} + C.$$

И не забываем после вычисления интеграла вернуться к переменной x, заменив t на *(x-5)*.

Пример 3. $\int \frac{dx}{2x+3}$.

В знаменателе подынтегральной функции записана линейная функция, то есть переменная *x* находится в первой степени. А в записанной нами таблице интегралов только в формуле 5 переменная *x* содержится в знаменателе в первой степени. Поэтому этот интеграл можно попробовать вычислить, используя формулу 5 из таблицы интегралов. Но для того, чтобы воспользоваться этой формулой, нужно, чтобы знаменатель дроби и выражение, стоящее под знаком дифференциала, совпадали. Применим ещё одно свойство дифференциала $\boldsymbol{dx=\frac{1}{a}d(ax+b)}$, где *a* – любое число отличное от нуля ($a\neq 0$), b – любое число (как положительное, так и отрицательное). В нашем случае получится $dx=\frac{1}{2}d(2x+3)$. После этого можно будет сделать замену *2x+3=t* и вынести числовой коэффициент $\frac{1}{2}$ за знак интеграла. Запишем, что получится в интеграле

$$\int\frac{dx}{2x+3}=\int\frac{1}{2x+3}dx=\int\frac{1}{2x+3}\cdot\frac{1}{2}\,d(2x+3)=[2x+3=t]=$$
$$=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C\ .$$

Пример 4. $\int\frac{dx}{(2x-3)^5}$.

Этот интеграл очень похож на предыдущий, но у него в знаменателе скобка в пятой степени, поэтому формулой 5 из таблицы интегралов воспользоваться **нельзя**. Прежде чем приступить к вычислению интеграла, преобразуем подынтегральную функцию, использую школьную формулу «правило работы с отрицательными степенями». $\frac{1}{(2x-3)^5}=(2x-3)^{-5}$. А сейчас снова применим свойство дифференциала $\boldsymbol{dx=\frac{1}{a}d(ax+b)}$, то есть $dx=\frac{1}{2}d(2x-3)$. После этого можно будет сделать замену *2x-3=t*. В итоге в интеграле получится:

$$\int\frac{dx}{(2x-3)^5}=\int(2x-3)^{-5}dx=\int(2x-3)^{-5}\cdot\frac{1}{2}d(2x-3)=$$
$=[2x-3=t]=\int t^{-5}\cdot\frac{1}{2}dt.$ Числовой коэффициент $\frac{1}{2}$ вынесем за знак интеграла, получится интеграл от степенной функции, который можно вычислить по формуле 4 из таблицы.

$$\int\frac{dx}{(2x-3)^5}=\int(2x-3)^{-5}dx=\int(2x-3)^{-5}\cdot\frac{1}{2}d(2x-3)=$$
$$=[2x-3=t]=\int t^{-5}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{-5}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-4}}{-4}+C=-\frac{1}{8}\cdot t^{-4}+C=$$
$$=-\frac{1}{8t^4}+C=-\frac{1}{8(2x-3)^4}+C\ .$$

Пример 5. $\int\sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx.$

В первую очередь в этом интеграле необходимо записать корень пятой степени в другом формате, так как в нашей таблице интегралов нет формулы для вычисления интеграла от такого корня. Вспомним из школя, что корень пятой степени мы можем записать как дробный показатель степени $\frac{1}{5}$. Но здесь нужно учесть, что выражение, стоящее под знаком корня, имеет шестую степень, поэтому в итоге вся скобка окажется в степени $\frac{6}{5}$.

$\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx = \int (8-3x)^{\frac{6}{5}}\,dx.$ Получился интеграл от степенной функции, но в этом интеграле аргумент у подынтегральной функции не совпадает с выражением, стоящим под знаком дифференциала. Поэтому придется *dx* преобразовывать. Воспользуемся, как и в двух предыдущих примерах, свойством дифференциала $\boldsymbol{dx = \frac{1}{a}d(ax+b)}$**.** В этом случае $\boldsymbol{a}$ будет равно минус трем: $a=-3$, а $\boldsymbol{b}$ равно восьми: $b=8$. Тогда согласно свойству получим $dx = \frac{1}{-3}d(-3x+8) = -\frac{1}{3}d(8-3x)$. Подставим это выражение вместо dx в интеграл.

$\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx = \int (8-3x)^{\frac{6}{5}}\,dx = \int (8-3x)^{\frac{6}{5}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) d(8-3x).$

Числовой коэффициент $\left(-\frac{1}{3}\right)$ вынесем за знак интеграла, повторяющееся выражение *(8-3x)* заменим на переменную t.

$$\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx = \int (8-3x)^{\frac{6}{5}}\,dx = \int (8-3x)^{\frac{6}{5}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) d(8-3x) =$$

$$= [8-3x=t] = -\frac{1}{3}\int t^{\frac{6}{5}}\,dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{6}{5}+1}}{\frac{6}{5}+1} + C = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{11}{5}}}{\frac{11}{5}} + C =$$

$= -\frac{5}{33}t^{\frac{11}{5}} + C = -\frac{5}{33}(8-3x)^{\frac{11}{5}} + C$. После перехода к переменной t, получился интеграл, который вычисляли по формуле 4 из таблицы интегралов, значение показателя степени $k=\frac{6}{5}$.

Пример 6. $\int x \cdot e^{x^2}\,dx.$

В этом примере вычисляется интеграл от произведения двух функций. Формул для вычисления интеграла от произведения, аналогичным как формула производная произведения, нет. Поэтому необходимо преобразовать интеграл так, чтобы произведение там отсутствовало. Для этого в подынтегральной функции переставим сомножители местами: $\int x \cdot e^{x^2}\,dx = \int e^{x^2} \cdot x\,dx$. Рассмотрим выражение xdx, в этом выражении переменную x подведем под знак дифференциала d. Что означает подвести под знак дифференциала? Это значит нужно подобрать такую функцию, производная от которой равнялась бы x, т.е. (?)'= x. Вместо знака “?” нужно подобрать нужную функцию. В данном случае это будет функция $\frac{x^2}{2}$, потому что $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = (\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2}(x^2)' = \frac{1}{2}\cdot 2x = x$. И так, нужную функцию нашли и можем записать

$$xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right). \qquad (*)$$

Получилось, что переменная x перед знаком дифференциала “пропала”, но под знаком дифференциала появилась новая функция. Если хотите проверить, правильно ли выполнено подведение под знак дифференциала, можно воспользоваться формулой $df(x) = f'(x)dx$. Проверяем: $d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' dx = \frac{1}{2}(x^2)' dx = \frac{1}{2} \cdot 2xdx = xdx.$ Равенство (*) является верным, возвращаемся в интеграл.

$$\int x \cdot e^{x^2}\, dx = \int e^{x^2} \cdot x\, dx = \int e^{x^2}\, d\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Сейчас воспользуемся свойством дифференциала, а затем свойством интеграла и вынесем числовой коэффициент $\frac{1}{2}$ вначале за знак дифференциала, а после за знак интеграла $\int x \cdot e^{x^2}\, dx = \int e^{x^2}\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \int e^{x^2} \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\, d(x^2).$ В итоге подынтегральная функция перестала представлять собой произведение – это просто функция экспонента. А выражение, стоящее под знаком дифференциала, и выражение, являющееся аргументом подынтегральной функции, стали совпадать. Поэтому, мы можем воспользоваться таблицей интегралов. Для этого в интеграле сделаем замену $x^2 = t$, а затем воспользуемся формулой 9 из таблицы интегралов.

$$\int x \cdot e^{x^2}\, dx = \int e^{x^2}\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\, d(x^2) = [x^2 = t] =$$
$$= \frac{1}{2}\int e^t\, dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Пример 7. $\int \frac{ln^2 x}{x} dx.$

Под интегралом дробь. Напрямую таблицей не воспользуешься, никакими школьными формулами ничего не преобразуешь. Распишем подынтегральную дробь в виде произведения $\frac{ln^2 x}{x} = ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$. Выберем функцию $\frac{1}{x}$ и подведем её под знак дифференциала, а точнее будем работать с выражением $\frac{1}{x}dx$. Ещё раз, что означает: «Подведем под знак дифференциала?». Необходимо подобрать такую функцию производная, от которой равна $\frac{1}{x}$. Если вспомнить таблицу производных, то такой функцией, является функция *ln x*, так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. В итоге получим $\frac{1}{x}dx = d(\ln x)$. Перед знаком дифференциала функция $\frac{1}{x}$ исчезла, она “спряталась” под знак дифференциала, но, чтобы соблюдались правила высшей математики, функция $\frac{1}{x}$ ”трансформировалась” в функцию *ln x*. Если сомневаетесь, что, верно, подвели функцию под знак дифференциала, воспользуйтесь формулой вычисления дифференциала $\boldsymbol{df(x) = f'(x)dx}$ и сделайте проверку: $d(\ln x) = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx$.Следовательно, равенство, полученное при подведении верно. Вернемся к интегралу, используя результаты подведения под знак дифференциала.

$$\int \frac{ln^2 x}{x} dx = \int ln^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = \int ln^2 x \, d(\ln x) = [\ln x = t] = \int t^2 dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} + C = \frac{ln^3 x}{3} + \mathrm{C} .$$

Пример 8. $\int e^x \cdot cose^x dx.$

И снова, как и в примере 5, под знаком интеграла произведение. Попробуем одну из функций подвести под знак дифференциала. Выберем ту, что попроще, это экспонента – e^x. В результате подведения получим: $e^x dx = de^x$. Проверим данное равенство $de^x = (e^x)'dx = e^x dx$. Можно сделать вывод, что экспоненту под знак дифференциала подвели верно. Переходим к интегралу, и не забываем там сделать замену. Должен получится интеграл, который можно будет вычислить по 11-ой формуле из таблицы интегралов

$$\int e^x \cdot cose^x dx = \int cose^x \cdot e^x \, dx = \int cose^x de^x = [e^x = t] =$$

$$= \int \cos t \, dt = \sin t + C = \sin e^x + C.$$

Пример 9. $\int x \cdot \sin(x^2 + 1) \, dx.$

Как и в предыдущем примере под знаком интеграла записано произведение двух функций. Выберем из этих двух сомножителей более простой. Это сомножитель «x». И воспользовавшись формулой (*) из примера 6 подведем x под знак дифференциала. $xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right)$. Сразу вынесем числовой коэффициент $\frac{1}{2}$ за знак дифференциала. Тогда получится: $xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d(x^2)$. И вернемся в интеграл

$\int x \cdot \sin(x^2 + 1) \, dx = \int \sin(x^2 + 1) \cdot \frac{1}{2} d(x^2)$.

Ещё раз вынесем коэффициент $\frac{1}{2}$,но теперь уже за знак интеграла $\int x \cdot \sin(x^2 + 1) \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(x^2 + 1) \cdot d(x^2)$. Сравним выражения, стоящие под знаком дифференциала и под знаком синуса. Чтобы воспользоваться таблицей интегралов эти выражения должны быть одинаковые, а в этом примере они отличаются на единицу. Такое отличие нужно устранить. В примере 2 было сформулировано следующее свойство дифференциала: «Значение дифференциала не измениться, если к выражению, стоящему под знаком дифференциала, прибавит или вычесть любое число (любую константу)». Вот этим свойством и воспользуемся. Прибавим под знаком дифференциала к выражению x^2 единицу: $d(x^2) = d(x^2+1)$. Тогда в интеграле получим:

$\int x \cdot \sin(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(x^2+1)\,d(x^2) = \frac{1}{2}\int \sin(x^2+1)\,d(x^2+1)$.

Сделаем замену $x^2+1=t$ и воспользуемся 10 формулой из таблицы:

$$\int x \cdot \sin(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(x^2+1)\,d(x^2) = \frac{1}{2}\int \sin(x^2+1)\,d(x^2+1) =$$
$$= [x^2+1=t] = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos(x^2+1) + C.$$

Пример 10. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Воспользуемся уже знакомой формулой подведения x под знак дифференциала $xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right)$, и вынесем коэффициент $\frac{1}{2}$ за знак дифференциала, получим $xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d(x^2)$.

$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{2}d(x^2)$. В полученном интеграле выражения, стоящие под знаком корня и под знаком дифференциала, не совпадают. Изменить подкоренное выражение мы не сможем, а вот преобразовать дифференциал получиться. Сначала, подправим коэффициент перед x^2. Для этого умножим выражение, стоящее под знаком дифференциала на минус один, но, чтобы ничего не изменилось разделим всё выражение на минус один:

$d(x^2) = \frac{1}{-1}\,d(-x^2) = -1 \cdot d(-x^2)$. А теперь под знаком дифференциала прибавим к выражению "$-x^2$" число 1. По опыту предыдущего примера мы знаем, что величина дифференциала при этом не изменится.

$d(x^2) = \frac{1}{-1}\,d(-x^2) = -1 \cdot d(-x^2) = -1 \cdot d(-x^2+1) = -1 \cdot d(1-x^2)$.

Вернемся в интеграл:

$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{2}d(x^2) = \int \sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot d(1-x^2) =$

$= \int \sqrt{1-x^2}\,\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot d(1-x^2)$. Вынесем числовой коэффициент $\left(-\frac{1}{2}\right)$ за знак интеграла и заменим подкоренное выражение и выражение, стоящее под знаком дифференциала на переменную t.

$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-x^2}\,\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot d(1-x^2) = [1-x^2=t] = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt$.

Чтобы воспользоваться таблицей интегралов, необходимо корень квадратный записать как показатель степени $\frac{1}{2}$. Тогда интеграл можно будет вычислить по 4 формуле, полагая $k=\frac{1}{2}$.

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-x^2}\ \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot d(1-x^2) = [1-x^2=t] = -\tfrac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C.$$

Пример 11. $\int \frac{x^4}{\sqrt{4+x^5}}\,dx.$

В этом примере попробуем подвести под знак дифференциала функцию x^4. Такую функцию под знак дифференциала ещё не подводили, поэтому напоминаю основное правило подведения. $x^4dx = d(?)$. Под знаком дифференциала вместо «знака вопроса» должна получаться функция, производная от которой равняется x^4. В данном случае такой функцией является функция $\frac{x^5}{5}$. Проверим,

$d\left(\frac{x^5}{5}\right) = \left(\frac{x^5}{5}\right)'dx = \frac{1}{5}(x^5)'dx = \frac{1}{5}\cdot 5x^4dx = x^4dx$. Получилось верное равенство, поэтому выражение, содержащее «знак вопроса» под дифференциалом, можно переписать в виде $x^4dx = d\left(\frac{x^5}{5}\right)$, и сразу вынесем числовой коэффициент $\frac{1}{5}$ за знак дифференциала

$x^4dx = d\left(\frac{x^5}{5}\right) = \frac{1}{5}d(x^5)$. Вернемся в интеграл и вынесем числовой коэффициент $\frac{1}{5}$ за знак интеграла

$$\int\frac{x^4}{\sqrt{4+x^5}}\,dx = \int\frac{1}{\sqrt{4+x^5}}\cdot\frac{1}{5}\cdot d(x^5) = \frac{1}{5}\int\frac{1}{\sqrt{4+x^5}}\,d(x^5).$$

Сейчас получилось, что выражение, стоящее под знаком дифференциала и аргумент у подынтегральной функции не совпадают. Для того, чтобы устранить это расхождение прибавим под знаком дифференциала число четыре, при этом величина дифференциала останется неизменной (мы этим приемом уже неоднократно пользовались). А затем сделаем замену одинаковых выражений: $4+x^5=t$.

$$\int\frac{x^4}{\sqrt{4+x^5}}\,dx = \frac{1}{5}\int\frac{1}{\sqrt{4+x^5}}\,d(x^5) = \frac{1}{5}\int\frac{1}{\sqrt{4+x^5}}\,d(x^5+4) = [x^5+4=t] =$$

$= \frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{5}\cdot 2\sqrt{t} + C = \frac{2}{5}\sqrt{4+x^5} + C$. Для того, чтобы завершить вычисление этого интеграла воспользовались формулой 6 из таблицы.

Пример 12. $\int \frac{\cos x}{\sin x - 3} dx$.

Здесь попробуем подвести под знак дифференциала функцию косинус, потому что, если вспомнить таблицу производных, то там присутствуют и функция синус, и функция косинус, правда надо внимательно следить за их знаками. Снова воспользуемся формой записи со «знаком вопроса» $\cos x\, dx = d(?)$. Вместо «знака вопроса» должна быть записана функция производная от которой равна косинусу. В таблице производных легко найти формулу, что $(\sin x)' = \cos x$. Поэтому в результате подведения косинуса под знак дифференциала получим $\cos x\, dx = d(\sin x)$ (проверку, что подведение выполнено верно сделайте сами). Запишем, как будет выглядеть интеграл после подведения $\int \frac{\cos x}{\sin x - 3} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x - 3}$. Получилось, что выражения, стоящие под знаком дифференциала и в знаменателе, отличаются на число (-3). Это легко исправить. Прибавим к функции синус под знаком дифференциала число (-3), значение самого дифференциала, согласно его свойству не изменится. А затем сделаем замену общего выражения $(\sin x - 3)$ на переменную t.

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - 3} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x - 3} = \int \frac{d(\sin x - 3)}{\sin x - 3} = [\sin x - 3 = t] =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = ln|t| + C = ln|\sin x - 3| + C.$$

Пример 13. $\int tg\ x\ dx$.

Распишем функцию тангенс как синус, деленный на косинус. Тогда под знаком интеграла получится дробь: $\int tg\ x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. Как и в предыдущем примере подведем под знак дифференциала функцию, стоящую в числителе, в данном случае это синус. $\sin x\, dx = d(-\cos x)$. Проверим, что всё сделали верно.

$$d(-\cos x) = (-\cos x)' dx = (-1) \cdot (\cos x)' dx = (-1) \cdot (-\sin x) dx = \sin x\, dx$$

Вынесем числовой коэффициент (-1) вначале за знак дифференциала, и сразу же за знак интеграла $\int tg\ x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{d(-\cos x)}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$.
Заменим одинаковые выражения $\cos x$ переменной t и по 5 формуле из таблицы вычислим интеграл.

$$\int tg\ x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{d(-\cos x)}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = [\cos x = t] =$$
$$= -\int \frac{dt}{t} = -ln|t| + C = -ln|\cos x| + C .$$

Пример 14. $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$.

Воспользуемся уже знакомой формулой из 10 примера $xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d(x^2)$. Числовой коэффициент $\frac{1}{2}$ сразу вынесем за знак интеграла: $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(1+x^2)^2}$. И под знаком дифференциала прибавим число один, чтобы скобки в знаменателе и под знаком дифференциала совпадали, а затем сделаем уже привычную для нас замену.

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2} = [x^2+1=t] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}\right) + C = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C \ .$$

Пример 15. $\int \frac{xdx}{1+x^4}$.

Этот пример в чём-то похож на предыдущий, поэтому начнем решать его так же, как и 14 пример. Воспользуемся уже знакомой формулой $xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d(x^2)$. Числовой коэффициент $\frac{1}{2}$ сразу вынесем за знак интеграла $\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^4}$. А вот теперь начнутся существенные различия. Выражения, стоящие под знаком дифференциала и в знаменателе, отличатся не только слагаемым единица, но и показателем степени у x. Поэтому даже прибавив единицу под знак дифференциала, мы не получим одинаковых выражений и замену сделать не сможем. В этом примере преобразовывать придется знаменатель, а не выражение, стоящее под знаком дифференциала. Для этого, используя школьные формулы, перепишем икс в четвертой степени в следующем виде: $x^4 = (x^2)^2$. Вернёмся в интеграл $\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2}$. А сейчас вопрос: «Прибавлять или нет единицу под знаком дифференциала?» Под знаком дифференциала и в знаменателе сейчас общее выражение x^2, в знаменателе это выражение записано в скобках, и к нему в этих скобках ничего не прибавляется. Следовательно, и под знаком дифференциала к x^2 тоже ничего не нужно прибавлять. Общее выражение x^2 заменим на переменную t. В результате получим:

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = [x^2 = t] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} \ .$$

Чтобы удобнее было пользоваться таблицей интегралов, в знаменателе нашего примера поменяем слагаемые местами $\int \frac{dt}{t^2+1}$. Тогда мы сможем воспользоваться 15 формулой из таблицы. Согласно этой формуле у нас в интеграле $a^2 = 1$, следовательно, a тоже равно единице. В итоге получим

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = [x^2 = t] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} arctg\ \frac{t}{1} + C = \frac{1}{2} arctg\ t + C = \frac{1}{2} arctg\ x^2 + C\ .$$

Пример 16. $\int \frac{dx}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}}$.

Вопрос: «Что подводить под знак дифференциала?» Начнем с арксинуса. Посмотрим в таблицу производных, надо найти функцию производная, от которой равняется арксинусу. На первый взгляд, такой функции нет. Но ещё надо учесть, что арксинус находится в знаменателе, и это еще более сложная ситуация. Поэтому пока оставим арксинус в покое, а подынтегральную функцию перепишем в виде произведения $\int \frac{dx}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Сейчас попробуем подвести под знак дифференциала дробь $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. В таблице производных есть формула $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то есть существует функция производная от которой равна $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Это как раз то, что нужно для подведения рассматриваемой дроби под знак дифференциала: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = d(\arcsin x)$.Тогда интеграл примет вид $\int \frac{dx}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\arcsin x} d(\arcsin x)$ и заменим в нём одинаковые выражения переменной t.

$$\int \frac{dx}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\arcsin x} d(\arcsin x) =$$
$$= [\arcsin x = t] = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + C = ln|\arcsin x| + C\ .$$

Пример 17. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}$.

Самая простая функция здесь x^2 , подведем её под знак дифференциала. Похожие функции мы уже подводили под дифференциал, у нас должен получиться следующий результат $x^2dx = d\left(\frac{x^3}{3}\right)$. Сделаем проверку $d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' dx = \frac{1}{3}(x^3)'dx = \frac{1}{3} \cdot 3x^2dx = x^2dx$. Процедура подведения выполнена, верно, левая и правая части равны. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}} = \int \frac{d\left(\frac{x^3}{3}\right)}{\sqrt{x^6-1}}$.

Вынесем числовой коэффициент $\frac{1}{3}$ за знак дифференциала и за знак интеграла, и посмотрим, что останется под интегралом

$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}} = \int \frac{d\left(\frac{x^3}{3}\right)}{\sqrt{x^6-1}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\sqrt{x^6-1}}$. Под знак дифференциала подвели, но одинаковых выражений как в большинстве предыдущих примеров не получилось, замену сделать невозможно. Поскольку подведение сделано правильно, мы же делали проверку, нужно попробовать преобразовать подкоренное выражение. Запишем x^6 в следующей форме $x^6 = (x^3)^2$ и вернемся в интеграл $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}} = \int \frac{d\left(\frac{x^3}{3}\right)}{\sqrt{x^6-1}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\sqrt{x^6-1}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\sqrt{(x^3)^2-1}}$, сейчас в интеграле появились одинаковые выражения – это x^3 , их и заменим на переменную t.

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}} = \int \frac{d\left(\frac{x^3}{3}\right)}{\sqrt{x^6-1}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\sqrt{x^6-1}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\sqrt{(x^3)^2-1}} = [x^3 = t] = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{3}ln\left|t + \sqrt{t^2-1}\right| + C = \frac{1}{3}ln\left|x^3 + \sqrt{(x^3)^2-1}\right| + C =$$

$= \frac{1}{3}ln\left|x^3 + \sqrt{x^6-1}\right| + C$. Этот интеграл вычислили, используя 17 формулу из таблицы интегралов. Выбрали вариант формулы со знаком минус, а значение a^2 в нашем примере равно единице.

Пример 18. $\int \frac{e^x}{\sqrt{2+e^{2x}}}dx$.

Начнем с того, что подведём экспоненту под знак дифференциала, мы это уже делали в 8 примере. Более того функция e^x очень удобная для работы, потому что она не изменяется ни при вычислении производной, ни при вычислении интеграла, ни при подведении под знак дифференциала, т.е. $e^xdx = d(e^x)$. Тогда в интеграле получим $\int \frac{e^x}{\sqrt{2+e^{2x}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2+e^{2x}}}d(e^x)$. Но сейчас под знаком интеграла нет одинаковых выражении, которые можно было бы заменить одной переменной. Это ситуацию можно исправить, записав слагаемое с экспонентой в подкоренном выражение в другой форме $e^{2x} = (e^x)^2$.

$\int \frac{e^x}{\sqrt{2+e^{2x}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2+e^{2x}}}d(e^x) = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{2+(e^x)^2}}$. Сейчас под знаком интеграла есть одинаковые выражения – это e^x. Но обратите внимание, что экспонента под знаком корня записана в скобках и внутри этих скобок к ней ничего не добавляется, поэтому под знаком дифференциала к экспоненте тоже ничего добавляться не должно. И так, наша замена $e^x = t$.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{2+e^{2x}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2+e^{2x}}}d(e^x) = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{2+(e^x)^2}} = [e^x = t] = \int \frac{dt}{\sqrt{2+t^2}}.$$

Полученный интеграл вычислим, используя 17 формулу из таблицы интегралов, вариант со знаком плюс и значением $a^2 = 2$.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{2+e^{2x}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2+e^{2x}}}d(e^x) = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{2+(e^x)^2}} = [e^x = t] = \int \frac{dt}{\sqrt{2+t^2}} =$$

$$= ln\left|t + \sqrt{t^2+2}\right| + C = ln\left|e^x + \sqrt{(e^x)^2+2}\right| + C =$$

$$= ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+2}\right) + C.$$

Пример 19. $\int \frac{2^x}{1-4^x}dx$.

Для подведения под знак дифференциал выберем наиболее простую функцию – это показательная функция 2^x**.** С этой функцией мы ещё не работали, поэтому очень внимательно проверяем все действия.

$2^x dx = d\left(\frac{2^x}{ln2}\right)$. Функцию 2^x подвели под знак дифференциала, выражение $ln\,2$, которое появилось после подведения, является постоянной величиной (или числом), так как не содержит независимой переменной. А теперь проверим верно или нет выполнили подведение под знак дифференциала. Ещё раз напомню, что для этого нужно воспользоваться формулой вычисления дифференциала $\boldsymbol{df(x) = f'(x)dx}$.

$d\left(\frac{2^x}{ln2}\right) = \left(\frac{2^x}{ln2}\right)' dx = \frac{1}{\ln 2}(2^x)' dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x \cdot ln\,2\,dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot ln\,2 \cdot 2^x dx =$
$= 2^x dx.$ И так, получили как раз то выражение, с которого начали подведение под знак дифференциала, следовательно, все действия были выполнены верно. Возвращаемся в интеграл.

$\int \frac{2^x}{1-4^x}dx = \int \frac{1}{1-4^x} d\left(\frac{2^x}{ln2}\right)$. Поскольку, выражение $ln\,2$ является постоянной величиной, то дробь $\frac{1}{\ln 2}$ является числовым коэффициентом, и её можно вынести и за знак дифференциала, и за знак интеграла.

$\int \frac{2^x}{1-4^x}dx = \int \frac{1}{1-4^x} d\left(\frac{2^x}{ln2}\right) = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{1-4^x}d(2^x)$. После подведения под знак дифференциала, как было уже не раз, в интеграле не оказалось выражений, которые можно было бы заменить. Поэтому, используя формулы для работы со степенями, преобразуем показательную функцию в знаменателе: $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$. Тогда в подынтегральной функции в знаменателе, и под знаком дифференциал будет записано выражение 2^x, которое и заменим переменной t.

$$\int \frac{2^x}{1-4^x}dx = \int \frac{1}{1-4^x} d\left(\frac{2^x}{ln2}\right) = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{1-4^x}d(2^x) = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{1-(2^x)^2}d(2^x) =$$

$= [2^x = t] = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{1-t^2}$. Для того чтобы вычислить этот интеграл по 16 формуле из таблицы интегралов, необходимо поменять знак в знаменателе подынтегральной функции. Для этого умножим знаменатель подынтегральной функции на минус один, но чтобы ничего не изменилось весь интеграл тоже умножим на минус один, в итоге получим:

$$\int \frac{2^x}{1-4^x}dx = \int \frac{1}{1-4^x} d\left(\frac{2^x}{ln2}\right) = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{1-4^x} d(2^x) = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{1-(2^x)^2} d(2^x) =$$

$$= [2^x = t] = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t^2-1} = -\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2\cdot 1} ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2} ln\left|\frac{2^x-1}{2^x+1}\right| + C = -\frac{1}{2\ln 2} ln\left|\frac{2^x-1}{2^x+1}\right| + C \ .$$

Пример 20. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx$.

В этом интеграле у всех функций, находящихся под знаком интеграла, аргументом является выражение *3x*, а под знаком дифференциала стоит выражение x. Чтобы было удобнее вычислять интеграл, получим под знаком дифференциала тоже выражение *3x*. Для этого выражение, стоящее под знаком дифференциала, умножим на три, но, чтобы ничего не изменилось весь дифференциал разделим на три: $dx = \frac{1}{3}d(3x)$.

Тогда интеграл будет выглядеть так: $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx = \int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}\cdot\frac{1}{3}d(3x)$.

Для удобства заменим *3x* на переменную t, получим:

$$\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx = \int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}\cdot\frac{1}{3}d(3x) = [3x = t] = \int \frac{\sin t}{3+\cos t}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \frac{\sin t}{3+\cos t}dt \ .$$

В полученном интеграле подведем функцию *sin t* под знак дифференциала: *sin t dt = d(– cos t) = – d(cos t)* (самостоятельно проверьте, что подведение выполнено правильно). Но после подведения выражения, стоящие под знаком дифференциала и в знаменателе дроби подынтегральной функции, отличаются на слагаемое 3. Было бы намного удобнее, если бы они совпадали. Для этого прибавим под знак дифференциала число 3, знаем, что это действие согласно свойству дифференциала его значение не изменит. *sin t dt = d(– cos t) = – d(cos t) = – d(cos t+3)*. Вернёмся в интеграл

$$\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx = \int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}\cdot\frac{1}{3}d(3x) = [3x = t] = \int \frac{\sin t}{3+\cos t}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \frac{\sin t}{3+\cos t}dt =$$

$= \frac{1}{3}\int \frac{-d(\cos t+3)}{3+\cos t}$. Вынесем знак минус, как числовой коэффициент за знак интеграла, а выражение (*cos t+3*) заменим новой переменной z (переменную *t* в качестве замены второй раз в одном примере использовать нельзя). После этого получим интеграл, который можно будет вычислить по формуле 5 из таблицы интегралов.

$$\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx = \int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}\cdot\frac{1}{3}d(3x) = [3x = t] = \int \frac{\sin t}{3+\cos t}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \frac{\sin t}{3+\cos t}dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{-d(\cos t+3)}{3+\cos t} = [\cos t + 3 = z] = -\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{3}ln|z| + C =$$

$$= -\frac{1}{3}ln|\cos t + 3| + C = -\frac{1}{3}ln|\cos 3x + 3| + C = -\frac{1}{3}ln(\cos 3x + 3) + C .$$

В ответе этого примера под знаком логарифма можно убрать модуль, так как выражение $(\cos 3x + 3)$ при всех значениях переменной x является положительным. Ещё обратите внимание, что здесь пришлось два раза делать, так называемую, обратную замену. Сначала вернулись к переменной t, а затем уже к переменной x.

Пример 21. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$

В подынтегральной функции в числителе записана функция экспонента. И казалось бы, что эту функцию можно подвести под знак дифференциала. Но этому мешает то, что у экспоненты в показателе степени вместо переменной x находится дробь $\frac{1}{x}$. Для того, чтобы определить, какую функцию подвести под знак дифференциала, перепишем подынтегральную функцию в виде произведения $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \int e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}dx$. И подведем под знак дифференциала дробь $\frac{1}{x^2}$, должно получится: $\frac{1}{x^2}dx = d\left(-\frac{1}{x}\right)$.
Выполним по уже знакомой формуле проверку

$$d\left(-\frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{1}{x}\right)'dx = -\left(\frac{1}{x}\right)'dx = -\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{x^2}dx .$$

Получилась именно та функция, которую подводили под знак дифференциала, значит подведение выполнено верно. Тогда интеграл примет следующий вид: $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \int e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}dx = \int e^{\frac{1}{x}}\,d\left(-\frac{1}{x}\right)$. Вынесем знак минус, а точнее числовой коэффициент (-1), за знак дифференциала и за знак интеграла и сделаем замену $\frac{1}{x} = t.$ После замены переменной получится интеграл от экспоненты e^t , который можно будет вычислить по 9-ой формуле из таблицы интегралов.

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \int e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}dx = \int e^{\frac{1}{x}}\,d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\int e^{\frac{1}{x}}\,d\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\frac{1}{x} = t\right] =$$

$$= -\int e^t dt = -\,e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C .$$

Пример 22. $\int \frac{xdx}{\sin x^2}$.

Начнем с уже знакомого действия подведем x под знак дифференциала, получится $xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d(x^2)$. Подставим полученный результат в интеграл $\int \frac{xdx}{\sin x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}dx^2}{\sin x^2}$ и сделаем замену $x^2 = t$.

$\int \frac{xdx}{\sin x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}dx^2}{\sin x^2} = [x^2 = t] = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sin t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sin t}$. Осталось вычислить интеграл $\int \frac{dt}{\sin t}$. Для того, чтобы вычислить этот интеграл, в начале, нужно числитель и знаменатель подынтегральной функции умножить на $\sin t$, а затем уже подводить под знак дифференциала. $\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{\sin t\, dt}{sin^2 t}$. Подведем $\sin t$ под знак дифференциала, это мы делали уже неоднократно, поэтому сразу запишу результат. (Если забыли, как это делается посмотрите в примере 13). $\sin t\, dt = d(-cos\ t) = -d(\cos t)$. Запишем это в интеграл:

$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{\sin t\, dt}{sin^2 t} = \int \frac{d(-\cos t)}{sin^2 t} = \int \frac{-d(\cos t)}{sin^2 t}$. И так, синус под знак дифференциала подвели, но в интеграле не получилось одинаковых выражений, чтобы их можно было заменить новой переменной. Поэтому преобразуем знаменатель с помощью основного тригонометрического тождества $sin^2 t = 1 - cos^2 t$, и тогда в интеграле можно будет сделать замену $\cos t = z$.

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{\sin t\, dt}{sin^2 t} = \int \frac{d(-\cos t)}{sin^2 t} = \int \frac{-d(\cos t)}{sin^2 t} = \int \frac{-d(\cos t)}{1-cos^2 t} =$$

$= [\cos t = z] = \int \frac{-dz}{1-z^2}$. Для того, чтобы убрать знак минус из числителя и поменять знак в знаменателе подынтегральной функции, умножим числитель и знаменатель дроби на минус один, в итоге получим.

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{\sin t\, dt}{sin^2 t} = \int \frac{d(-\cos t)}{sin^2 t} = \int \frac{-d(\cos t)}{sin^2 t} = \int \frac{-d(\cos t)}{1-cos^2 t} =$$

$= [\cos t = z] = \int \frac{-dz}{1-z^2} = \int \frac{dz}{z^2-1}$. Данный интеграл можно вычислить по 16-ой формуле из таблицы, где $a^2 = 1$, и, следовательно, a=1.

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{\sin t\, dt}{sin^2 t} = \int \frac{d(-\cos t)}{sin^2 t} = \int \frac{-d(\cos t)}{sin^2 t} = \int \frac{-d(\cos t)}{1-cos^2 t} =$$

$$= [\cos t = z] = \int \frac{-dz}{1-z^2} = \int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2\cdot 1} ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \frac{1}{2} ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right| + C .$$

Интеграл почти сосчитали, осталось вернуться к исходной переменной x, и собрать вместе все выкладки. Вспомним какие действия выполняли при вычислении этого интеграла. Во – первых, здесь пришлось два раза подводить под знак дифференциала. Вначале подвели под знак дифференциала x, а затем $\sin t$. Во – вторых, применяли основное тригонометрическое тождество, и меняли знак в числителе и знаменателе подынтегральной функции. Теперь собираем все вместе.

$$\int \frac{xdx}{\sin x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}dx^2}{\sin x^2} = [x^2 = t] = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sin t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2}\int \frac{\sin t\, dt}{\sin^2 t} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(-\cos t)}{\sin^2 t} = \frac{1}{2}\int \frac{-d(\cos t)}{\sin^2 t} = \frac{1}{2}\int \frac{-d(\cos t)}{1-\cos^2 t} = [\cos t = z] = \frac{1}{2}\int \frac{-dz}{1-z^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 1} ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \frac{1}{4} ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right| + C = \frac{1}{4} ln\left|\frac{\cos x^2-1}{\cos x^2+1}\right| + C.$$

Пример 23. $\int \frac{x+arctg\, 2x}{1+4x^2}dx$.

В числителе подынтегральной функции находятся функции разных классов – одна из них, это линейная функция, а вторая – обратная тригонометрическая. Очевидно, что в вычислении интегралов от этих функций есть различия. Поэтому в подынтегральной функции разделим числитель почленно на знаменатель и в итоге получим сумму двух дробей. Затем будем вычислять интеграл отдельно от первого слагаемого и отдельно от второго.

$$\int \frac{x+arctg\, 2x}{1+4x^2}dx = \int \left(\frac{x}{1+4x^2} + \frac{arctg\, 2x}{1+4x^2}\right)dx = \int \frac{x}{1+4x^2}dx + \int \frac{arctg\, 2x}{1+4x^2}dx\ .$$

Выпишем первый из полученных интегралов $\int \frac{x}{1+4x^2}dx$. Для его вычисления подведем функцию x под знак дифференциала, поскольку это действие нам хорошо знакомо выполним подведение сразу же в интеграле.

$\int \frac{x}{1+4x^2}dx = \int \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{1+4x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2)}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+4x^2}$. Функция x^2, стоящая под знаком дифференциала и функция x^2, записанная в знаменателе отличаются друг от друга коэффициентом равным четырём. Чтобы можно было сделать замену, нужно чтобы под знаком дифференциала у x^2 тоже был коэффициент четыре. Для этого умножим выражение стоящие под знаком дифференциала на четыре, но, чтобы ничего не изменилось умножим весь дифференциал на $\frac{1}{4}$.

$d(x^2) = \frac{1}{4}d(4x^2)$. Чтобы выражение, стоящее под знаком дифференциала, совпадало со знаменателем подынтегральной функции прибавим под знаком дифференциала постоянную величину равную единице:

$d(x^2) = \frac{1}{4}d(4x^2) = \frac{1}{4}d(4x^2 + 1)$. Сейчас в интеграле можно будет сделать замену, вынести числовой коэффициент $\frac{1}{4}$ за знак интеграла и после этого вычислить интеграл по 5-ой формуле из таблицы.

$\int \frac{x}{1+4x^2}dx = \int \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{1+4x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2)}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{4}d(4x^2+1)}{1+4x^2} =$

$= [4x^2+1=t] = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{4}dt}{t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{8}\ ln|t| + C = \frac{1}{8}\ ln|4x^2+1| +$

$+C = \frac{1}{8}ln(4x^2+1) + C$. Первый из двух интегралов вычислили, здесь в ответе у натурального логарифма можно убрать модуль, так как выражение, стоящее под знаком модуля, всегда положительное.

Перейдем к вычислению второго интеграла, предварительно переписав его знаменатель в следующем виде: $1+4x^2 = 1+(2x)^2$.

$\int \frac{arctg\ 2x}{1+4x^2}dx = \int \frac{arctg\ 2x}{1+(2x)^2}dx$. Сейчас в интеграле и у функции арктангенс, и в знаменателе в качестве аргумента записано выражение $2x$, поэтому получим такое же выражение и под знаком дифференциала. Для этого умножим выражение, стоящее под знаком дифференциала, на два, а чтобы ничего не изменилось разделим весь дифференциала на два или что тоже самое умножим его на одну вторую. $dx = \frac{1}{2}d(2x)$.

$\int \frac{arctg\ 2x}{1+4x^2}dx = \int \frac{arctg\ 2x}{1+(2x)^2}dx = \int \frac{arctg\ 2x}{1+(2x)^2}\cdot\frac{1}{2}d(2x)$. Заменим $2x$ на переменную t и вынесем числовой коэффициент $\frac{1}{2}$ за знак интеграла

$\int \frac{arctg\ 2x}{1+4x^2}dx = \int \frac{arctg\ 2x}{1+(2x)^2}dx = \int \frac{arctg\ 2x}{1+(2x)^2}\cdot\frac{1}{2}d(2x) = [2x=t] =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{arctg\ t}{1+t^2}dt$. Чтобы вычислить получившийся интеграл подведем выражение, записанное в знаменателе, под знак дифференциала, получится $\frac{1}{1+t^2}dt = d(arctg\ t)$. Сделаем проверку: $d(arctg\ t) = (arctg\ t)'dt =$ $= \frac{1}{1+t^2}dt$. Вернулись к исходному выражению, с которого и начинали подведение, следовательно, все действия выполнены верно. Подставим полученный результат в интеграл.

$\int \frac{arctg\ 2x}{1+4x^2}dx = \int \frac{arctg\ 2x}{1+(2x)^2}dx = \int \frac{arctg\ 2x}{1+(2x)^2}\cdot\frac{1}{2}d(2x) = [2x=t] =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{arctg\ t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int arctg\ t\cdot\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int arctg\ t\ d(arctg\ t)$.

Сейчас можно сделать ещё одну замену и получить табличный интеграл, который вычисляется по 3-ей формуле из таблицы.

$\int \frac{arctg\ 2x}{1+4x^2}dx = \int \frac{arctg\ 2x}{1+(2x)^2}dx = \int \frac{arctg\ 2x}{1+(2x)^2}\cdot\frac{1}{2}d(2x) = [2x=t] =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{arctg\ t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int arctg\ t \cdot \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int arctg\ t\ d(arctg\ t) =$$

$$= [arctg\ t = z] = \frac{1}{2}\int z\,dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{2} + C = \frac{1}{4}arctg^2 t + C =$$

$= \frac{1}{4}arctg^2 2x + C$. Собираем вместе оба интеграла:

$$\int \frac{x + arctg\ 2x}{1+4x^2}dx = \int\left(\frac{x}{1+4x^2} + \frac{arctg\ 2x}{1+4x^2}\right)dx = \int \frac{x}{1+4x^2}dx +$$

$$+ \int \frac{arctg\ 2x}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}ln(4x^2+1) + \frac{1}{4}arctg^2 2x + \mathrm{C}\ .$$

7. **Метод интегрирования по частям**

Среди свойств неопределенного интеграла нет свойства интегрирование произведения функций. И один из методов, который позволяет вычислить интеграл от произведения функций является метод интегрирования по частям. Но надо сказать, что этот метод позволяет вычислять интегралы не только от произведения функций, в этом убедимся немного позже.

Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы дифференцирования произведения двух функций.

Теорема. Пусть функции *u(x)* и *v(x)* определены и дифференцируемы на некотором промежутке $\boldsymbol{X}$ и пусть функция $u'(x)v(x)$ интегрируема на этом промежутке. Тогда на промежутке $\boldsymbol{X}$ функция $u(x)v'(x)$ также интегрируема и справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx\ .$$

Доказательство. Из равенства производная произведения $\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, путём переноса слагаемого $u'(x)v(x)$ в другую часть равенства, получим $u(x)v'(x) = \big(u(x)v(x)\big)' - u'(x)v(x)$. Первообразной функции $\big(u(x)v(x)\big)'$ является функция $u(x)v(x)$. Функция $u'(x)v(x)$ интегрируема по условию теоремы. Следовательно, и функция $u(x)v'(x)$ интегрируема как разность интегрируемых функций. Интегрируя последнее равенство, получим

$\int u(x)v'(x)\,dx = \int\big(u(x)v(x)\big)'\,dx - \int v(x)u'(x)\,dx$. По определению неопределенного интеграла средний интеграл, с точностью до произвольной постоянной, будет равен $\int\big(u(x)v(x)\big)'\,dx = u(x)v(x)$.Окончательно получим $\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$. Эта формула называется формулой интегрирования по частям. Запишем её в более компактном виде. Так как $v'(x)dx = dv$, и $u'(x)dx = du$, то формулу **интегрирования по частям** можно записать в виде $\boldsymbol{\int u dv = uv - \int v du}$. Эта формула позволяет свести вычисление интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться более простым для интегрирования.

Пример 1. $\int xe^x dx.$

Для удобства запишем вначале формулу интегрирования по частям, а затем посмотрим, как её применить к этому примеру. $\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu}$. Левая часть этой формулы соответствует тому интегралу, который нужно вычислить. Нужно только разобраться, что в нашем примере соответствует функции u , а что дифференциалу dv. Определить с первого раза это не всегда получается. Единственный признак, указывающий, что это выражение может быть выбрано в качестве функции u , это то, что это выражение записано перед знаком дифференциала. Но в этом примере перед знаком дифференциала находятся сразу две функции: это функция x и функция экспонента. Какую из них выбрать в качестве функции u? Попробуем это сделать наугад. Не получится переделаем. Здесь всего два варианта, и если не получится с первого раза, то должно получится со второго.

Пусть функция u равна x, то есть $u = x.$ Тогда все остальные выражения, стоящие под знаком интеграла, это будут dv: $dv = e^x dx$. Левую часть формулы разобрали. Посмотрим какие выражения необходимо знать, чтобы записать правую часть формулы интегрирования по частям для этого примера. Нужно знать функцию u, мы ее уже знаем, $u = x.$ Необходима функция v. Для того, чтобы ее найти, нужно проинтегрировать левую и правую части равенства $dv = e^x dx.$ То есть $\int dv = \int e^x dx.$ Оба это табличные интегралы, они легко вычисляются по формулам из таблицы интегралов, левый – по второй формуле, а правый по девятой. Но, обязательно стоит учесть, что при вычислении именно этих интегралов в методе интегрирование по частям, не пишется произвольная постоянная С. В итоге $v = e^x$. Осталось найти du. du – это дифференциал функции u, и вычисляется он по формуле $du = u'dx$. В нашем случае $du = x'dx = 1 \cdot dx = = dx$. Соберем всё вместе, что сейчас сосчитали и подставим в формулу интегрирования по частям.

$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x \\ dv = e^x dx \\ \int dv = \int e^x dx \\ v = e^x \\ du = x'dx = dx \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx$. Осталось разобраться с интегралом, который получился после применения формулы интегрирования по частям. Если этот интеграл получился проще, чем исходный или такой же по уровню сложности, это означает, что функцию u и дифференциал dv выбрали верно. У нас получился табличный интеграл, который может быть вычислен по девятой формуле из таблицы, то есть все наша действия были верными. Завершаем вычисление интеграла.

$$\int xe^x dx = \left[\begin{matrix} u = x \\ dv = e^x dx \\ \int dv = \int e^x dx \\ v = e^x \\ du = x' dx = dx \end{matrix}\right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример 2. $\int x\, sinx\, dx$.

Выпишем формулу интегрирования по частям$\int u dv = uv - \int v du$. В качестве функции u можно выбрать или функцию x, или функцию $\sin x$. Пусть u равняется $\sin x$, тогда всё что осталось под знаком интеграла это будет dv, то есть $dv = x dx$. Найдем чему равняется функция v. $\int dv = \int x dx$. Интеграл в левой части равенства вычисляем по второй формуле из таблицы интегралов, в правой части – по третьей. В итоге получаем $v = \frac{x^2}{2}$. Находим du: $du = (\sin x)'\, dx = \cos x\, dx$. Подставим всё в формулу интегрирования по частям.

$$\int x\, sinx\, dx = \left[\begin{matrix} u = \sin x \\ dv = x dx \\ \int dv = \int x\, dx \\ v = \frac{x^2}{2} \\ du = \cos x\, dx \end{matrix}\right] = \frac{x^2}{2} \cdot \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x\, dx.$$

Во вновь получившемся интеграле нужно обязательно вынести числовой коэффициент за знак интеграла. Тогда этот «новый» интеграл примет вид $\int \frac{x^2}{2} \cos x\, dx = \frac{1}{2} \int x^2 \cos x\, dx$. И надо понять, как вычислять этот интеграл. В первую очередь его нужно сравнить с исходным интегралом. «Новый» интеграл оказался сложнее исходного, потому что в исходном интеграле функция x имеет первую степень, а в полученном интеграле эта же функция уже во второй степени. Чем выше степень у функции x, тем сложнее становится интеграл, потому что функции синус и косинус, входящие в интегралы, имеют одинаковый уровень сложности. И так интеграл $\int x^2 \cos x\, dx$, который получился после применения формулы интегрирования по частям, оказался труднее исходного интеграла. Это означает, что в самом начале решения **неверно** были выбраны функция u и дифференциал dv. То есть это решение никуда не годится, забываем о нем и начинаем пример с начала.

Сейчас в качестве функции u выберем функцию x, а dv будет равно $sinx\, dx$. Найдем чему равняется функция v. $\int dv = \int sinx\, dx$, следовательно, $v = -\cos x$. Дифференциал du как и в предыдущем примере равен: $du = x' dx = 1 \cdot dx = dx$. Собираем вместе все вычисления.

$$\int x\, sinx\, dx = \begin{bmatrix} u = x \\ dv = sinxdx \\ \int dv = \int sinx\, dx \\ v = -\cos x \\ du = dx \end{bmatrix} = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx =$$

$= -xcos\, x + \int \cos x\, dx = -xcos\, x + \sin x + C$. Интеграл вычислен.

Пример 3. $\int x^2 \ln x\, dx$.

Функции, которые могут быть выбраны в качестве функции u, это или функция x^2, или функция $ln\, x$. Пусть $u = x^2$. Тогда дифференциал dv равен $dv = lnxdx$. Найдём функцию v. $\int dv = \int lnx\, dx$. Интеграл, записанный в правой части равенства, табличным не является, и чтобы его вычислить придется применять формулу интегрирования по частям. То есть сейчас вычислить интеграл $\int lnx\, dx$ не сможем. А это означает, что не сможем найти функцию v. Причиной этого стало то, что изначально неверно выбрали функцию u и дифференциал dv. Переделываем.

Функция u равна $ln\, x$, а $dv = x^2 dx$. Находим функцию v. $\int dv = \int x^2\, dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$. Осталось вычислить дифференциал функции u: $du = (\ln x)'\, dx = \frac{1}{x} dx$. Подставляем всё в формулу интегрирования по частям.

$$\int x^2 \ln x\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \\ \int dv = \int x^2\, dx \\ v = \frac{x^3}{3} \\ du = (\ln x)'\, dx = \frac{1}{x} dx \end{bmatrix} = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx.$$

После применения формулы интегрирования по частям получили интеграл $\int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$, его обязательно нужно упростить. Числовой коэффициент $\frac{1}{3}$ нужно вынести за знак интеграла, а в подынтегральной функции сократить на x числитель и знаменатель. В итоге получим $\int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x} dx = \frac{1}{3} \int x^2 dx$. Вернемся в исходный интеграл.

$$\int x^2 \ln x\, dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2\, dx =$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C.$$

Пример 4. $\int\ arctg\, x\, dx$.

В этом примере перед знаком дифференциала только одна функция – это арктангенс, поэтому выбора, что принять за u, нет. Здесь $u = arctg\ x$. Тогда $dv = dx$ и функция $v = x$. Осталось вычислить дифференциал функции u: $du = (arctg\ x)'dx = \frac{1}{1+x^2}dx$. Перейдем к вычислению интеграла

$$\int arctg\ x\, dx = \begin{bmatrix} u = arctg\ x \\ dv = dx \\ \int dv = \int dx \\ v = x \\ du = \frac{1}{1+x^2}dx \end{bmatrix} = arctg\ x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}dx\ .$$

Вычислим отдельно вновь полученный интеграл. Для этого функцию x и дифференциал dx запишем в числитель, а затем x подведем под знак дифференциала (мы неоднократно это делали в предыдущем разделе).

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \int \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{1+x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = [1 + x^2 = t] =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}ln|t| + C = \frac{1}{2}ln|1 + x^2| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C.$$

В ответе у этого интеграла под знаком натурального логарифма можно убрать модуль, так как выражение, стоящее под знаком модуля, всегда является положительным. Завершаем вычисление исходного интеграла.

$$\int arctg\ x\ dx = arctg\ x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}dx = x \cdot arctg\ x - \int \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x\ artgx - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C\ .$$

Пример 5. $\int x^2\, cos\, x\, dx$.

Этот интеграл похож на интеграл в третьем примере, различие только в одной функции. Но решение от третьего примера будет отличаться, хотя по-прежнему используем формулу интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$. Перед знаком дифференциала записаны две функции – тригонометрическая функция $cos\ x$ и квадратичная функция x^2. Одну из этих функций нужно выбрать в качестве функции u. Пусть $u = x^2$, тогда $dv = \cos x\, dx$. Подставим всё в формулу интегрирования по частям.

$$\int x^2\, cos\, x\, dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \\ dv = \cos x\, dx \\ \int dv = \int \cos x\, dx \\ v = \sin x \\ du = (x^2)'dx = 2xdx \end{bmatrix} = x^2 \cdot \sin x - \int \sin x\ \cdot 2xdx.$$

Займемся вычислением получившегося интеграла. В первую очередь вынесем числовой коэффициент 2 за знак интеграл, сам интеграл перепишем в виде $2\int x\cdot\sin x\,dx$. Сравним его с исходным интегралом. Полученный интеграл стал проще. Функция косинус поменялась на синус, это на уровень сложности интеграла не сказалось. А вот степень у переменной икс стала ниже, была вторая стала первая. Это и позволяет утверждать, что интеграл стал проще. То есть, это означает, что функция u и дифференциал dv были выбраны верно. Получившийся интеграл $\int x\cdot\sin x\,dx$ тоже нужно считать по частям. **В этом примере формулу интегрирование по частям приходится применять дважды.** Что выбрать за u и dv во второй раз? Выбор полностью зависит от того, что было сделано при первом применении формулы. Если за u в первый раз принимали квадратичную функцию x^2, то сейчас в интеграле вместо квадратичной функции находится функция x, вот её и примем за u. В дифференциал dv в первый раз входила тригонометрическая функция, сейчас будет аналогично. Выпишем интеграл, который осталось вычислить, и выполним все необходимые действия.

$$\int x\cdot\sin x\,dx=\begin{bmatrix} u=x\\ dv=\sin x\,dx\\ \int dv=\int\sin x\,dx\\ v=-\cos x\\ du=(x)'dx=1\cdot dx\end{bmatrix}=x(-\cos x)-\int-\cos x\,dx=$$

$$=-xcos\,x+\int\cos x\,dx=-xcosx+\sin x+C.$$

Соберём всё решение вместе.

$$\int x^2\,cos\,x\,dx=\begin{bmatrix} u=x^2\\ dv=\cos x\,dx\\ \int dv=\int\cos x\,dx\\ v=\sin x\\ du=(x^2)'dx=2xdx\end{bmatrix}=x^2\cdot\sin x-\int\sin x\;\cdot 2xdx=$$

$$=x^2\cdot\sin x-2\int x\cdot\sin x\;\,dx=\begin{bmatrix} u=x\\ dv=\sin x\,dx\\ \int dv=\int\sin x\,dx\\ v=-\cos x\\ du=(x)'dx=dx\end{bmatrix}=x^2\cdot\sin x-$$

$$-2(x(-\cos x)-\int-\cos x\,dx)=x^2\cdot\sin x-2(-xcos\,x+\int\cos x\,dx)=$$

$$=x^2\cdot\sin x-2(-xcosx+\sin x)+C=x^2\cdot\sin x+2xcos\,x-2\sin x+C.$$

Пример 6. $\int\frac{xcos\,x}{sin^2x}dx$.

В этом примере подынтегральная функция содержит три функции, поэтому вопрос какую из них выбрать за u становится сложнее. Попробуем в качестве функции u выбрать x. Тогда за dv приходится принимать $\frac{\cos x}{sin^2x}dx$.

То есть $u = x$, а $dv = \frac{\cos x}{sin^2 x} dx$. По предыдущим примерам уже известно, что dv нам необходимо, чтобы найти функцию V. Для этого придется вычислить интеграл $\int \frac{\cos x}{sin^2 x} dx$, разберемся как это сделать. Этот интеграл вычисляется методом подведения под знак дифференциала. Подведем под знак дифференциала функцию $\cos x$ (подробно, как это сделать можно посмотреть в предыдущем разделе). Получится $\cos x\, dx = d(\sin x)$. После этого в интеграле можно будет сделать замену $\sin x = t$.

$$\int \frac{\cos x}{sin^2 x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{sin^2 x} = [\sin x \ = t] = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x} + C.$$

Перейдём к вычислению основного интеграла.

$$\int \frac{x cos\, x}{sin^2 x} dx = \begin{bmatrix} u = x \\ dv = \frac{\cos x}{sin^2 x} dx \\ \int dv = \int \frac{\cos x}{sin^2 x} dx \\ v = -\frac{1}{\sin x} \\ du = dx \end{bmatrix} = x \cdot \left(-\frac{1}{\sin x}\right) - \int -\frac{1}{\sin x} dx =$$

$$= -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin x} dx.$$

Интеграл $\int \frac{1}{\sin x} dx$ был вычислен в предыдущем разделе, пример 22, только там переменная интегрирования была обозначена буквой t, а не x. Поэтому не будем этот интеграл вычислять по новой, а воспользуемся результатами предыдущего раздела: $\int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2} ln \left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C$. Завершаем вычисление исходного интеграла

$$\int \frac{x cos\, x}{sin^2 x} dx = x \cdot \left(-\frac{1}{\sin x}\right) - \int -\frac{1}{\sin x} dx = -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin x} dx =$$

$$= -\frac{x}{\sin x} + \frac{1}{2} ln \left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C\ .$$

Пример 7. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$.

Пусть $u = \arcsin x$, тогда всё что осталось под знаком интеграла будет дифференциалом dv.

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx = \left[\begin{array}{c} u = \arcsin x \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}} \\ \displaystyle\int dv = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{x+1}} \\ v = 2\sqrt{x+1} \\ du = (\arcsin x)'\,dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \end{array}\right] = \arcsin x \cdot 2\sqrt{x+1} -$$

$$-\int 2\sqrt{x+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\arcsin x\sqrt{x+1} - 2\int\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx .$$

Разберём, как вычислить полученный интеграл. В начале упростим подынтегральную функцию, для этого разложим подкоренное выражение в знаменателе по формуле сокращенного умножения $1-x^2=(1-x)(1+x)$. $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$. Запишем корень от произведения, как произведение двух корней, и тогда можно будет сократить числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{x+1}$, в итоге подынтегральная функция упроститься $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Подставим полученную функцию в интеграл и вычислим его.

$$\int\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{(-1)}d(-x+1) = [1-x=t] =$$

$$= \int\frac{1}{\sqrt{t}}(-1)dt = -\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -2\sqrt{t}+C = -2\sqrt{1-x}+C.$$

Завершим вычисление исходного интеграла, подставив вместо интеграла $\int\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ результат его вычислений.

$$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx = 2\arcsin x\sqrt{x+1} - 2\int\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\arcsin x\sqrt{x+1} -$$

$$-2\left(-2\sqrt{1-x}\right)+C = 2\arcsin x\sqrt{x+1} + 4\sqrt{1-x} + \mathrm{C} .$$

8. **Интегрирование дробей с квадратным трёхчленом в знаменателе**

К дробям с квадратным трехчленом в знаменатель будем относить следующие дроби

I. $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ II. $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$

III. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ IV. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$

Основной прием вычисления этих интегралов состоит в выделении полного квадрата у квадратного трёхчлена. Что значит выделить полный квадрат в квадратном трёхчлене? Это задание означает, что исходный квадратный трёхчлен с помощью тождественных преобразований надо привести вот к такому виду: $ax^2 + bx + c = a(x + m)^2 + n$. Для того чтобы можно было выделить полный квадрат, прежде всего, необходимо знать формулы сокращенного умножения. Хотя бы две из них — квадрат суммы и квадрат разности:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суммы,

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат разности.

Но ещё более важно уметь словами сформулировать правые части этих равенств. Это будет выглядеть так: «Квадрат первого числа плюс или минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа». Именно этим правилом и будем пользоваться при выделении полного квадрата для вычисления интегралов.

Квадратные трехчлены, в которых в дальнейшем придется выделять полные квадраты будут иметь вид: $x^2 + px + q$ или $-x^2 + px + q$, где p и q – действительные числа. Начнём с квадратного трехчлена $x^2 + px + q$. Первое слагаемое это уже квадрат первого числа x. Нужно разобраться с удвоенным произведением. px – это и есть удвоенное произведение, но цифры два не видно. Перепишем выражение px так, чтобы коэффициент два было видно: $px = 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x = 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2}$. Сейчас видно коэффициент 2, первое число x и второе число $\frac{p}{2}$. Пока получилось следующее $x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + q$. В правой части равенства получилось: квадрат первого число плюс удвоенное произведение первого числа на второе. Не хватает только квадрата второго числа, это $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$. Добавим это слагаемое в правую часть равенства, но, чтобы ничего не изменилось его же и вычтем:

$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q$. В правой части равенства переставим местами два последних слагаемых и сгруппируем первые три слагаемые.

$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}\right) + q - \frac{p^2}{4}$. То, что получилось в скобках это и есть полный квадрат, свернём его по формуле сокращенного умножения, получим $x^2 + px + q = \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}\right) + q - \left(\frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$.

Рассмотри квадратный трехчлен со знаком минус перед x^2 . Для того, чтобы в этом случае можно было выделить полный квадрат, нужно **обязательно** знак минус вынести, как общий множитель, за скобку и поменять знак у всего выражения. $\boldsymbol{-x^2 + px + q = -(x^2 - px - q)}$.

Сейчас внутри скобок будем выделять полный квадрат, точно, так же как только что делали. Знак минус **пока** остается за скобкой и участия в наших преобразованиях не принимает. Выписываем из скобок квадратный трехчлен. Расписываем: квадрат первого числа, минус удвоенное произведение первого числа на второе (в этом случае именно минус), затем прибавляем и сразу же вычитаем квадрат второго числа. Заключаем полученный полный квадрат в скобки.

$x^2 - px - q = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} - q = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}\right) - \left(\frac{p^2}{4} + q\right) =$
$= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} + q\right)$. Теперь учтём тот минус, который оставался за скобками: $-x^2 + px + q = -(x^2 - px - q) = -\left(\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} + q\right)\right)$.

Раскроем внешние скобки, в результате чего сменятся знаки перед внутренними скобками, и окончательно получим

$-x^2 + px + q = \left(\frac{p^2}{4} + q\right) - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$.

Посмотрим, как эти два подхода к выделению полного квадрата реализуются на практике.

Задание. Выделить полный квадрат

а) $x^2 - 7x + 10$; б) $4x - 3 - x^2$.

Начинаем с задание под буквой а). Самое главное правильно расписать удвоенное произведение, тогда всё остальное будет проще. Поэтому его распишем отдельно: $-7x = -2 \cdot \frac{7}{2} \cdot x = -2 \cdot x \cdot \frac{7}{2}$. Итак, первое число в данном полном квадрате – это x, а второе – это $\frac{7}{2}$. Объединяем всё вместе

$$x^2 - 7x + 10 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 10 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 10 =$$
$$= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Выпишем окончательный результат $x^2 - 7x + 10 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$. В скобках записан, выделенный полный квадрат.

Выполним задание под буквой б). Для этого вначале переставим слагаемые в квадратном трехчлене $-x^2 + 4x - 3$. Вынесем знак минус за скобку: $-(x^2 - 4x + 3)$. Полный квадрат будем выделять у выражения, записанного в скобках, знак минус пока не трогаем. Распишем вначале удвоенное произведение, в этом примере это сделать легко:
$-4x = -2 \cdot 2x = -2 \cdot x \cdot 2$. Получилось, что первое слагаемое в полном квадрате – это, как обычно, x, а втрое – это 2. Запишем, что получится, если выделять полный квадрат у выражения в скобках
$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 3 = (x - 2)^2 - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1.$
Сейчас будем работать с минусом. $-(x^2 - 4x + 3) = -((x - 2)^2 - 1)$.

Раскроем внешние скобки. $-(x^2-4x+3)=-((x-2)^2-1)=1-(x-2)^2$.
Окончательный ответ $4x-3-x^2=-(x^2-4x+3)=1-(x-2)^2$.

Переходим к вычислению интегралов. Вначале разберем правила вычисления интегралов I и III типов.

$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ – в этом интеграле вынесем числовой коэффициент a, как общий множитель, за скобку, а затем за знак интеграла. $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=$ $=\int\frac{dx}{a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}$. В знаменателе заменим дробные коэффициенты $\frac{b}{a}=p, \frac{c}{a}=q$. Тогда интеграл можно записать в следующем виде $\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2+px+q}$. Далее, выделяем полный квадрат у трехчлена в знаменателе, как это делать мы уже подробно обсуждали, поэтому сразу запишем результат. $\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}$.

Под знаком дифференциала добавим число $\frac{p}{2}$, и сделаем замену.

$$\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=\left[x+\frac{p}{2}=t\right]=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}.$$

В зависимости от знака выражения $q-\frac{p^2}{4}$, полученный интеграл будет вычисляться или по 15, или по 16 формулам из таблицы интегралов. Поскольку мы уже добрались до табличного интеграла, и формулы для его вычисления у нас есть, на этом этапе завершим преобразования интеграла в общем виде и перейдем к решению примера.

Пример 1. $\int\frac{dx}{x^2-7x+10}$.

В этом интеграле у квадратного трехчлена коэффициент пред икс в квадрате равен единице, поэтому выносить за скобку ничего не нужно. Сразу начинаем выделять полный квадрат. А поскольку у этого квадратного трехчлена полный квадрат уже выделяли (см. задание под буквой а)), запишем сразу результат $x^2-7x+10=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$.

$\int\frac{dx}{x^2-7x+10}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}$. Прибавим к x под знаком дифференциала число $\left(-\frac{7}{2}\right)$, напоминаю, что такое действие в интеграле ничего не изменит, а дальше сделаем замену $\left(x-\frac{7}{2}\right)=t$.

$$\int \frac{dx}{x^2-7x+10} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}} = \int \frac{d\left(x-\frac{7}{2}\right)}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}} = \left[x-\frac{7}{2}=t\right] = \int \frac{dt}{t^2-\frac{9}{4}}$$

Получили интеграл, который нужно вычислить по 16 формуле из таблицы интегралов, в нашем примере a^2 из этой формулы равно $\frac{9}{4}$, следовательно a будет равно $\frac{3}{2}$. $\int \frac{dt}{t^2-\frac{9}{4}} = \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{2}}{t+\frac{3}{2}}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{2}}{t+\frac{3}{2}}\right| + C$.

Соберем вместе все вычисления

$$\int \frac{dx}{x^2-7x+10} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}} = \int \frac{d\left(x-\frac{7}{2}\right)}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}} = \left[x-\frac{7}{2}=t\right] = \int \frac{dt}{t^2-\frac{9}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{2}}{t+\frac{3}{2}}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{2}}{t+\frac{3}{2}}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}}{x-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{3}ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right| + C.$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

В знаменателе в квадратном трехчлене перед x^2 стоит коэффициент четыре, вначале его вынесем как общий множитель за скобку, а затем за знак интеграла. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{4\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{4}}$.

Из квадратного трехчлена $x^2 + x + \frac{5}{4}$ выделим полный квадрат. x^2 – это квадрат первого числа, x – это удвоенное произведение первого числа на второе, распишем это: $x = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x = 2\cdot x\cdot\frac{1}{2}$. И так, в полном квадрате первое слагаемое равно x, второе слагаемо равно $\frac{1}{2}$. Завершаем выделение полного квадрата

$$x^2 + x + \frac{5}{4} = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{4} = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} =$$

$$= \left(x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1 .$$

Переходим к вычислению интеграла.

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{4\left(x^2+x+\frac{5}{4}\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{4}} = \begin{bmatrix} x^2+x+\frac{5}{4} = \\ = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1 \end{bmatrix} =$$

$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}$. Добавим под знаком дифференциала слагаемое $\frac{1}{2}$ и сделаем замену, получится интеграл, который можно будет вычислить по 15 формуле из таблицы интегралов.

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{4}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} =$$

$$= \left[x+\frac{1}{2}=t\right] = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}arctg\ t + C = \frac{1}{4}arctg\left(x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

Рассмотрим интегралы III типа $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Способ их вычислений похож на способ вычисления интегралов I типа. Разберём случай, когда числовой коэффициент a больше нуля. Случай для a отрицательного разберем на конкретных примерах. В первую очередь вынесем числовой коэффициент a из под знака интеграла.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a}\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}}$$

Заменим дробные коэффициент $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ на p и q соответственно и выделим в полученном квадратном трехчлене полный квадрат.

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}} = \left[\frac{b}{a}=p;\ \frac{c}{a}=q\right] = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \Big[x^2+px+q =$$

$$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\Big] = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}}$$

. Полный квадрат такого квадратного трехчлена мы уже выделяли, поэтому сразу записан результат. Прибавим под знаком дифференциала слагаемое $\frac{p}{2}$ и сделаем замену.

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}} = \left[x+\frac{p}{2}=t\right] = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+q-\frac{p^2}{4}}}\ .$$

Получился табличный интеграл, который можно вычислить по 17 формуле.

Пример 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$.

Выделяем полный квадрат у подкоренного выражения. x^2 – это квадрат первого числа, $2x = 2\cdot x\cdot 1$ – это удвоенное произведение первого числа на второе, поэтому второе число равно 1. Чтобы завершить выделение полного квадрата нужно прибавить квадрат второго числа, то есть 1^2, но, чтобы ничего не изменилось эту же величину и вычесть.

$x^2-2x+5=x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2+5=(x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2)+5-1=$ $=(x-1)^2+4$. Добавим под знаком дифференциала число (-1) и сделаем замену. Получится табличный интеграл, для вычисления которого нужно воспользоваться 17-ой формулой.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}=\ [x^2-2x+5=(x-1)^2+4]=\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=$$

$$=[x-1=t]=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+C=$$

$$=ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2+4}\right|+C=ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C.$$

Пример 4. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}$.

Вынесем числовой коэффициент перед x^2 как общий множитель за скобку, а затем вынесем его из под знака корня.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3\left(x^2-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}\right)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{x^2-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}}}\ .$$

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении. Как обычно x^2 – это квадрат первого числа, а $\frac{11}{3}x$ – это удвоенное произведение первого числа на второе. Нужно разобраться чему равно второе число. $\frac{11}{3}x=2\cdot\frac{11}{6}\cdot x=2x\cdot\frac{11}{6}$. И так, второе слагаемое равно $\frac{11}{6}$, поэтому необходимо добавить квадрат этого числа, а чтобы ничего не изменилось ровно столько же вычесть.

$$x^2-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}=x^2-2\cdot x\cdot\frac{11}{6}+\left(\frac{11}{6}\right)^2-\left(\frac{11}{6}\right)^2+\frac{2}{3}=\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\frac{2}{3}-\frac{121}{36}=$$
$$=\left(x-\frac{11}{6}\right)^2-\frac{97}{36}\ .$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{x^2-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}}}=\left[x^2-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}=\left(x-\frac{11}{6}\right)^2-\frac{97}{36}\right]=$$

$=\int\frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{\left(x-\frac{11}{6}\right)^2-\frac{97}{36}}}$. Вынесем числовой коэффициент $\frac{1}{\sqrt{3}}$ за знак интеграла, добавим под знаком дифференциала дробь $\left(-\frac{11}{6}\right)$ и сделаем замену.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{x^2-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{\left(x-\frac{11}{6}\right)^2-\frac{97}{36}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(x-\frac{11}{6}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{11}{6}\right)^2-\frac{97}{36}}}=\left[x-\frac{11}{6}=t\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{97}{36}}}=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} ln\left|t + \sqrt{t^2 - \frac{97}{36}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{3}} ln\left|x - \frac{11}{6} + \sqrt{\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{97}{36}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} ln\left|x - \frac{11}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{2}{3}}\right| + C .$$

Пример 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

В этом интеграле коэффициент при x^2 отрицательный, поэтому выделять полный квадрат нужно очень внимательно. Выпишем квадратный трехчлен: $-x^2 - x + 1$. Вынесем (-1) как общий множитель за скобки: $-(x^2 + x - 1)$. У выражения, стоящего в скобках, и будем выделять полный квадрат. Выпишем его отдельно.

$$x^2 + x - 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x - 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 =$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} .$$

Вернемся к скобкам, не забывая перед ними поставить знак минус $-(x^2 + x - 1) = -\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)$. Раскроем внешние скобки, чтобы перед ними не стоял знак минус, в итоге получим:

$$-x^2 - x + 1 = -(x^2 + x - 1) = -\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 .$$

Выделение полного квадрата завершено, можно переходить к вычислению интеграла.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} = \left[-x^2 - x + 1 = \frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right] = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}} = \left[x + \frac{1}{2} = t\right] = \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4} - t^2}} = arcsin \frac{t}{\sqrt{5/4}} + C =$$

$$= arcsin \frac{2t}{\sqrt{5}} + C = arcsin \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}} + C = arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C .$$

Пример 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2 - 2}}$.

Коэффициент при x^2 в квадратном трехчлене равен (-9). В начале вынесем число 9, как общий множитель за скобку, **оставляя знак минус перед x^2.** Выносить за скобку (-9) **нельзя**, потому что в дальнейшем из этого числа придется извлекать корень квадратный, а из отрицательного числа в действительных числах корень не извлечь.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{12}{9}x-x^2-\frac{2}{9}\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}x-x^2-\frac{2}{9}}} = \int \frac{dx}{3\cdot\sqrt{\frac{4}{3}x-x^2-\frac{2}{9}}}\,.$$

Можно переходить к выделению полного квадрата. Коэффициент при x^2 равен (-1), поэтому повторяем действия пятого примера. Вынесем (-1) как общий множитель за скобки: $-\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{9}\right)$. У выражения, записанного в скобках, и будем выделять полный квадрат. Слагаемое $\frac{4}{3}x$ – это удвоенное произведение, то есть $\frac{4}{3}x = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot x = 2\cdot x\cdot\frac{2}{3}$. И так, первое слагаемое – это x, а второе – это $\frac{2}{3}$. Запишем, что получится внутри скобок.

$$x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{9} = x^2-2\cdot x\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{9} = x^2-2\cdot x\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{9} =$$

$$= \left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+\frac{2}{9} = \left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{9}.$$ Полный квадрат выделен, но не забываем, что у квадратного трехчлена перед скобкой стоит **знак минус**. Завершаем преобразования с учетом этого знака.

$$\frac{4}{3}x-x^2-\frac{2}{9} = -\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{9}\right) = -\left(\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{9}\right) = \frac{2}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2.$$

Возвращаемся к вычислению интеграла. Числовой коэффициент $\frac{1}{3}$ вынесем за знак интеграла, под знаком дифференциала прибавим слагаемое $\left(-\frac{2}{3}\right)$, сделаем замену и получим интеграл, который вычисляется по 14 формуле из таблицы интегралов.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}} = \int \frac{dx}{3\cdot\sqrt{\frac{4}{3}x-x^2-\frac{2}{9}}} = \left[\frac{4}{3}x-x^2-\frac{2}{9} = \frac{2}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{2}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}} = \left[x-\frac{2}{3} = t\right] = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{2}{9}-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}arcsin\frac{t}{\sqrt{{}^2/_9}}+C = \frac{1}{3}arcsin\frac{3t}{\sqrt{2}}+C = \frac{1}{3}arcsin\frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{2}}+C =$$

$$= \frac{1}{3}arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C\,.$$

Разберем вычисление интеграла II типа $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$. Вычисление этого интеграла начинается так же, как и интеграла I типа. Вынесем числовой коэффициент a, как общий множитель, за скобку, а затем за знак интеграла.

$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{Ax+B}{a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)}dx = \frac{1}{a}\int \frac{Ax+B}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}dx.$ В знаменателе заменим дробные коэффициенты $\frac{b}{a} = p, \frac{c}{a} = q$. Тогда интеграл можно записать в следующем виде $\frac{1}{a}\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$. Далее, выделяем полный квадрат у трехчлена в знаменателе и под знаком дифференциала добавляем число $\frac{p}{2}$,

$$\frac{1}{a}\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{1}{a}\int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx = \frac{1}{a}\int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}d\left(x+\frac{p}{2}\right).$$

Сделаем замену $x + \frac{p}{2} = t$, из этого равенства выразим переменную x: $x = t - \frac{p}{2}$ и подставим это выражение в числитель подынтегральной функции вместо переменной x.

$$\frac{1}{a}\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{1}{a}\int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}d\left(x+\frac{p}{2}\right) = \begin{bmatrix} x+\frac{p}{2}=t \\ x = t-\frac{p}{2}\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt.$$ Раскроем в числителе скобки и приведём подобные

$A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B = At - A\cdot\frac{p}{2} + B = At + \left(B - A\cdot\frac{p}{2}\right)$. Подставим это выражение в числитель подынтегральной функции.

$\frac{1}{a}\int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt = \frac{1}{a}\int \frac{At+\left(B-A\cdot\frac{p}{2}\right)}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt.$ Разделим почленно числитель на знаменатель, получим интеграл от суммы двух дробей и вычислим интеграл отдельно от первого слагаемого, отдельно от второго.

$$\frac{1}{a}\int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt = \frac{1}{a}\int \frac{At+\left(B-A\cdot\frac{p}{2}\right)}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt = \frac{1}{a}\int\left(\frac{At}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} + \frac{B-A\cdot\frac{p}{2}}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{At}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt + \frac{1}{a}\int \frac{B-A\cdot\frac{p}{2}}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt .$$

Вынесем в каждом интеграле числовые коэффициенты за знак интеграла

$$\frac{1}{a}\int \frac{At}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt + \frac{1}{a}\int \frac{B-A\cdot\frac{p}{2}}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt = \frac{A}{a}\int \frac{tdt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} + \frac{B-A\cdot\frac{p}{2}}{a}\int \frac{dt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}} .$$

Первый из двух полученных интегралов вычисляется методом подведения переменной t под знак дифференциала, а второй интеграл – это табличный интеграл, который может быть вычислен по 15 или 16 формуле из таблицы.

Остался интеграл IV типа $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Для его вычисления используются такие же действия, как и для вычисления интегралов II и III типов. Более подробно это разберем на конкретных примерах.

Пример 7. $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}dx.$

Выделим полный квадрат у квадратного трехчлена в знаменателе. Это делали уже много раз, поэтому будем сразу выписывать необходимые для этого алгебраические преобразования.

$$x^2-7x+12 = x^2-2\cdot\frac{7}{2}\cdot x+12 = x^2-2\cdot x\cdot\frac{7}{2}+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2+12 =$$
$$=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+12=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$$

Подставим выделенный полный квадрат в знаменатель подынтегральной функции, а под знаком дифференциала добавим слагаемое $\left(-\frac{7}{2}\right)$.

$\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}dx = \int \frac{x-2}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}d\left(x-\frac{7}{2}\right).$ Сделаем замену $x-\frac{7}{2}=t,$ и из этого равенства выразим переменную x: $x=t+\frac{7}{2}$. Подставим всё в интеграл.

$$\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}dx = \int \frac{x-2}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}d\left(x-\frac{7}{2}\right) = \begin{bmatrix} x-\frac{7}{2}=t \\ x=t+\frac{7}{2}\end{bmatrix} = \int \frac{t+\frac{7}{2}-2}{t^2-\frac{1}{4}}dt=$$

$=\int \frac{t+\frac{3}{2}}{t^2-\frac{1}{4}}dt.$ Разделим почленно числитель подынтегральной функции на знаменатель: $\int \frac{t+\frac{3}{2}}{t^2-\frac{1}{4}}dt = \int\left(\frac{t}{t^2-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{3}{2}}{t^2-\frac{1}{4}}\right)dt = \int\frac{tdt}{t^2-\frac{1}{4}}+\int\frac{\frac{3}{2}dt}{t^2-\frac{1}{4}}.$

Вычислим отдельно интеграл от первого слагаемого, отдельно от второго. В первом интеграле $\int\frac{tdt}{t^2-\frac{1}{4}}$ подведем t под знак дифференциала и прибавим под знаком дифференциала слагаемое $\left(-\frac{1}{4}\right)$. Сделав замену, получим табличный интеграл.

$$\int\frac{tdt}{t^2-\frac{1}{4}} = \int\frac{d\left(\frac{t^2}{2}\right)}{t^2-\frac{1}{4}} = \int\frac{\frac{1}{2}d\left(t^2-\frac{1}{4}\right)}{t^2-\frac{1}{4}} = \left[t^2-\frac{1}{4}=z\right] = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z} =$$
$$=\frac{1}{2}ln|z|+C=\frac{1}{2}ln\left|t^2-\frac{1}{4}\right|+C$$

Во втором интеграле $\int\frac{\frac{3}{2}dt}{t^2-\frac{1}{4}}$ вынесем числовой коэффициент $\frac{3}{2}$ за знак интеграла и вычисли интеграл по 16 формуле из таблицы интегралов.

$$\int\frac{\frac{3}{2}dt}{t^2-\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\right|+C = \frac{3}{2}ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\right|+C.$$

Собираем все интегралы и все замены и вычисления вместе.

$$\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}dx = \int \frac{x-2}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} d\left(x-\frac{7}{2}\right) = \begin{bmatrix} x-\frac{7}{2}=t \\ x=t+\frac{7}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{t+\frac{7}{2}-2}{t^2-\frac{1}{4}}dt=$$

$$= \int \frac{t+\frac{3}{2}}{t^2-\frac{1}{4}}dt = \int \left(\frac{t}{t^2-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{3}{2}}{t^2-\frac{1}{4}}\right)dt = \int \frac{tdt}{t^2-\frac{1}{4}} + \int \frac{\frac{3}{2}dt}{t^2-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}ln\left|t^2-\frac{1}{4}\right| + \frac{3}{2}ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\right| + \mathrm{C} = \frac{1}{2}ln\left|\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right| + \frac{3}{2}ln\left|\frac{x-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}}\right| +$$

$$+\mathrm{C} = \frac{1}{2}ln|x^2-7x+12| + \frac{3}{2}ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right| + C\ .$$

Пример 8. $\int \frac{(4-3x)dx}{5x^2+6x+18}$.

Этот пример отличается от предыдущего только тем, что числовой коэффициент при x^2 не равен единице. Вынесем коэффициент 5, как общий множитель за скобку, а затем коэффициент $\frac{1}{5}$ вынесем за знак интеграла.

$$\int \frac{(4-3x)dx}{5x^2+6x+18} = \int \frac{(4-3x)dx}{5\left(x^2+\frac{6}{5}x+\frac{18}{5}\right)} = \frac{1}{5}\int \frac{(4-3x)dx}{x^2+\frac{6}{5}x+\frac{18}{5}}.$$

Будем работать с интегралом $\int \frac{(4-3x)dx}{x^2+\frac{6}{5}x+\frac{18}{5}}$, а уже потом учтем коэффициент $\frac{1}{5}$. Алгоритм вычисления этого интеграла такой же, как и в предыдущем 7-ом примере.

Выделим полный квадрат у квадратного трехчлена в знаменателе. Слагаемое $\frac{6}{5}x$ является удвоенным произведением первого слагаемого на второе. Распишем это подробно: $\frac{6}{5}x = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot x = 2\cdot x\cdot\frac{3}{5}$. Получается:

$$x^2+\frac{6}{5}x+\frac{18}{5} = x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{5}+\frac{18}{5} = x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2+\frac{18}{5} =$$

$$= \left(x+\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{25}+\frac{18}{5} = \left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{81}{25}.$$

Подставим выделенный полный квадрат в знаменатель подынтегральной функции, а под знаком дифференциала добавим слагаемое $\frac{3}{5}$.

$\int \frac{(4-3x)dx}{x^2+\frac{6}{5}x+\frac{18}{5}} = \int \frac{4-3x}{\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{81}{25}} d\left(x+\frac{3}{5}\right).$ Сделаем замену $x+\frac{3}{5}=t$, и из этого равенства выразим переменную x: $x=t-\frac{3}{5}$. Подставим всё в интеграл.

$$\int \frac{(4-3x)dx}{x^2+\frac{6}{5}x+\frac{18}{5}} = \int \frac{4-3x}{\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{81}{25}} d\left(x+\frac{3}{5}\right) = \begin{bmatrix} x+\frac{3}{5}=t \\ x=t-\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \int \frac{4-3\left(t-\frac{3}{5}\right)}{t^2+\frac{81}{25}} dt =$$

$$= \int \frac{4-3t+\frac{9}{5}}{t^2+\frac{81}{25}} dt = \int \frac{-3t+\frac{29}{5}}{t^2+\frac{81}{25}} dt.$$

Разделим почленно числитель подынтегральной функции на знаменатель. Вычислим отдельно интеграл от первого слагаемого, отдельно от второго.

$$\int \frac{-3t+\frac{29}{5}}{t^2+\frac{81}{25}} dt = \int \left(\frac{-3t}{t^2+\frac{81}{25}} + \frac{\frac{29}{5}}{t^2+\frac{81}{25}}\right) dt = \int \frac{-3t}{t^2+\frac{81}{25}} dt + \int \frac{\frac{29}{5}}{t^2+\frac{81}{25}} dt.$$

В первом интеграле $\int \frac{-3t}{t^2+\frac{81}{25}} dt$ вынесем числовой коэффициент (-3) за знак интеграла, подведем t под знак дифференциала и прибавим под знаком дифференциала слагаемое $\frac{81}{25}$. Сделав замену, получим табличный интеграл.

$$\int \frac{-3t}{t^2+\frac{81}{25}} dt = -3\int \frac{tdt}{t^2+\frac{81}{25}} = -3\int \frac{d\left(\frac{t^2}{2}\right)}{t^2+\frac{81}{25}} = -3\int \frac{\frac{1}{2}d\left(t^2+\frac{81}{25}\right)}{t^2+\frac{81}{25}} =$$

$$= \left[t^2+\frac{81}{25}=z\right] = -\frac{3}{2}\int \frac{dz}{z} = -\frac{3}{2} ln|z| + C = -\frac{3}{2} ln\left|t^2+\frac{81}{25}\right| + C.$$

Во втором интеграле $\int \frac{\frac{29}{5}dt}{t^2+\frac{81}{25}}$ вынесем числовой коэффициент $\frac{29}{5}$ за знак интеграла и вычисли интеграл по 15 формуле из таблицы интегралов.

$$\int \frac{\frac{29}{5}dt}{t^2+\frac{81}{25}} = \frac{29}{5}\int \frac{dt}{t^2+\frac{81}{25}} = \frac{29}{5} \cdot \frac{1}{9/5} arctg\ \frac{t}{9/5} + C = \frac{29}{9} arctg\ \frac{5t}{9} + C.$$

Собираем все вычисления вместе.

$$\int \frac{(4-3x)dx}{x^2+\frac{6}{5}x+\frac{18}{5}} = \int \frac{4-3x}{\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{81}{25}} d\left(x+\frac{3}{5}\right) = \begin{bmatrix} x+\frac{3}{5}=t \\ x=t-\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \int \frac{-3t+\frac{29}{5}}{t^2+\frac{81}{25}} dt =$$

$$= \int \frac{-3t}{t^2+\frac{81}{25}} dt + \int \frac{\frac{29}{5}}{t^2+\frac{81}{25}} dt = -\frac{3}{2} ln\left|t^2+\frac{81}{25}\right| + \frac{29}{9} arctg\ \frac{5t}{9} + C =$$

$$= -\frac{3}{2} ln\left|\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{81}{25}\right| + \frac{29}{9} arctg\ \frac{5\left(x+\frac{3}{5}\right)}{9} + C =$$

$$= -\frac{3}{2} ln\left|x^2+\frac{6}{5}x+\frac{18}{5}\right| + \frac{29}{9} arctg\ \frac{5x+3}{9} + C\ .$$

Вспоминаем, что в самом начале решения примера выносили числовой коэффициент $\frac{1}{5}$ за знак интеграла, и планировали учесть это в конце вычисления интеграла. Сейчас сделаем это.

$$\int \frac{(4-3x)dx}{5x^2+6x+18} = \frac{1}{5}\int \frac{(4-3x)dx}{x^2+\frac{6}{5}x+\frac{18}{5}} = \frac{1}{5}\left(-\frac{3}{2}\ln\left|x^2+\frac{6}{5}x+\frac{18}{5}\right| + \right.$$

$$\left. + \frac{29}{9} arctg\ \frac{5x+3}{9}\right) + C = -\frac{3}{10}\ln\left|x^2+\frac{6}{5}x+\frac{18}{5}\right| + \frac{29}{45} arctg\ \frac{5x+3}{9} + C\ .$$

Пример 9. $\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$.

Вынесем числовой коэффициент перед x^2 как общий множитель за скобку, а затем вынесем его из-под знака корня.

$$\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}} = \int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4\left(x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}\right)}} = \int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4}\sqrt{x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}}} = \int \frac{(2-5x)dx}{2\cdot\sqrt{x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}}}$$

Вынесем числовой коэффициент $\frac{1}{2}$ за знак интеграла и вычислим сначала интеграл $\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}}}$, а уже потом учтем коэффициент $\frac{1}{2}$ **.** Выделим полный квадрат в подкоренном выражении. Как обычно x^2 – это квадрат первого числа, а $\frac{9}{4}x$ — это удвоенное произведение первого числа на второе, то есть $\frac{9}{4}x = 2\cdot\frac{9}{8}\cdot x = 2x\cdot\frac{9}{8}$. И так, второе слагаемое равно $\frac{9}{8}$, поэтому

$$x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4} = x^2+2\cdot x\cdot\frac{9}{8}+\left(\frac{9}{8}\right)^2-\left(\frac{9}{8}\right)^2+\frac{1}{4} = \left(x+\frac{9}{8}\right)^2-\frac{81}{64}+\frac{1}{4} =$$

$= \left(x+\frac{9}{8}\right)^2-\frac{65}{64}$. Подставим выделенный полный квадрат под знак корня, а под знаком дифференциала добавим слагаемое $\frac{9}{8}$.

$\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}}} = \int \frac{2-5x}{\sqrt{\left(x+\frac{9}{8}\right)^2-\frac{65}{64}}}\, d\left(x+\frac{9}{8}\right)$. Сделаем замену $x+\frac{9}{8}=t$, и из этого равенства выразим переменную x: $x = t-\frac{9}{8}$. Подставим всё в интеграл.

$$\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}}} = \int \frac{2-5x}{\sqrt{\left(x+\frac{9}{8}\right)^2-\frac{65}{64}}}\, d\left(x+\frac{9}{8}\right) = \begin{bmatrix} x+\frac{9}{8}=t \\ x=t-\frac{9}{8} \end{bmatrix} = \int \frac{2-5\left(t-\frac{9}{8}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}}\, dt =$$

$$= \int \frac{2-5t+\frac{45}{8}}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}}\, dt = \int \frac{-5t+\frac{61}{8}}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}}\, dt.$$

Разделим почленно числитель подынтегральной функции на знаменатель. Вычислим отдельно интеграл от первого слагаемого, отдельно от второго.

$$\int \frac{-5t+\frac{61}{8}}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}}\,dt = \int\left(\frac{-5t}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}}+\frac{\frac{61}{8}}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}}\right)dt = \int \frac{-5t}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}}dt + \int \frac{\frac{61}{8}}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}}dt\ .$$

В первом интеграле $\int \frac{-5t}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}}dt$ вынесем числовой коэффициент (-5) за знак интеграла, подведем t под знак дифференциала и прибавим под знаком дифференциала слагаемое $\left(-\frac{65}{64}\right)$. Сделав замену, получим табличный интеграл.

$$\int \frac{-5t}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}}dt = -5\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}} = -5\int \frac{d\left(\frac{t^2}{2}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}} = -\,5\int \frac{\frac{1}{2}d\left(t^2-\frac{65}{64}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}} =$$

$$= -\frac{5}{2}\int \frac{d\left(t^2-\frac{65}{64}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}} = \left[t^2-\frac{65}{64}=z\right] = -\frac{5}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{5}{2}\cdot 2\sqrt{z}+C =$$

$$= -5\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}+C\ .$$

Во втором интеграле $\int \frac{\frac{61}{8}}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}}dt$ вынесем числовой коэффициент $\frac{61}{8}$ за знак интеграла и вычисли интеграл по 17 формуле из таблицы интегралов.

$$\int \frac{\frac{61}{8}}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}}dt = \frac{61}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}} = \frac{61}{8}ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}\right|+C.$$

Запишем все вычисления вместе и ещё учтем числовой коэффициент $\frac{1}{2}$.

$$\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{2-5x}{\sqrt{\left(x+\frac{9}{8}\right)^2-\frac{65}{64}}}\,d\left(x+\frac{9}{8}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} x+\frac{9}{8}=t \\ x=t-\frac{9}{8}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{-5t+\frac{61}{8}}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}}dt = \frac{1}{2}\left(\int \frac{-5t}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}}dt + \int \frac{\frac{61}{8}}{\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}}dt\right) =$$

$$=\frac{1}{2}\left(-5\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}+\frac{61}{8}ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}\right|\right)+\mathrm{C} =$$

$$= -\frac{5}{2}\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}+\frac{61}{16}ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{65}{64}}\right|+\mathrm{C} = -\frac{5}{2}\sqrt{\left(x+\frac{9}{8}\right)^2-\frac{65}{64}}+$$

$$+\frac{61}{16}ln\left|x+\frac{9}{8}+\sqrt{\left(x+\frac{9}{8}\right)^2-\frac{65}{64}}\right|+C=-\frac{5}{2}\sqrt{x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}}+$$

$$+\frac{61}{16}ln\left|x+\frac{9}{8}+\sqrt{x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}}\right|+C\ .$$

Пример 10. $\int\frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

Выделим полный квадрат у квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня. У данного квадратного трёхчлена коэффициент при x^2 отрицательный, поэтому выделять полный квадрат нужно очень внимательно. Выпишем квадратный трехчлен: $-x^2+2x+5$. Вынесем (-1) как общий множитель за скобки: $-(x^2-2x-5)$. У выражения, стоящего в скобках, и будем выделять полный квадрат. Выпишем его отдельно.

$x^2-2x-5=x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2-5=(x-1)^2-1-5=(x-1)^2-6$.

Вернемся к скобкам, не забывая перед ними поставить знак минус $-(x^2-2x-5)=-\left((x-1)^2-6\right)$. Раскроем внешние скобки, чтобы перед ними не стоял знак минус, в итоге получим:

$-x^2+2x+5=-(x^2-2x-5)=-((x-1)^2-6)=6-(x-1)^2$.

Выделение полного квадрата завершено, можно переходить к вычислению интеграла. Подставим выделенный полный квадрат под знак корня, а под знаком дифференциала добавим слагаемое (-1) .

$\int\frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}=\int\frac{8x-11}{\sqrt{6-(x-1)^2}}d(x-1)$. Сделаем замену $x-1=t$, и из этого равенства выразим переменную x: $x=t+1$. Подставим в интеграл.

$$\int\frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}=\int\frac{8x-11}{\sqrt{6-(x-1)^2}}d(x-1)=\begin{bmatrix}x-1=t\\x=t+1\end{bmatrix}=\int\frac{8(t+1)-11}{\sqrt{6-t^2}}dt=$$

$$=\int\frac{8t+8-11}{\sqrt{6-t^2}}dt=\int\frac{8t-3}{\sqrt{6-t^2}}dt$$

Разделим почленно числитель подынтегральной функции на знаменатель. Вычислим отдельно интеграл от первого слагаемого, отдельно от второго.

$$\int\frac{8t-3}{\sqrt{6-t^2}}dt=\int\left(\frac{8t}{\sqrt{6-t^2}}+\frac{-3}{\sqrt{6-t^2}}\right)dt=\int\frac{8t}{\sqrt{6-t^2}}dt+\int\frac{-3}{\sqrt{6-t^2}}dt\ .$$

В первом интеграле $\int\frac{8t}{\sqrt{6-t^2}}dt$ вынесем числовой коэффициент 8 за знак интеграла, подведем t под знак дифференциала:

$$\int\frac{8t}{\sqrt{6-t^2}}dt=8\int\frac{tdt}{\sqrt{6-t^2}}=8\int\frac{d\left(\frac{t^2}{2}\right)}{\sqrt{6-t^2}}=8\int\frac{\frac{1}{2}dt^2}{\sqrt{6-t^2}}=8\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{\sqrt{6-t^2}}=$$

$=4\int\frac{dt^2}{\sqrt{6-t^2}}$. В полученном интеграле умножим выражение, стоящее под знаком дифференциала на минус один, но, чтобы ничего не изменилось умножим дифференциал на минус один. А затем прибавим к выражению, стоящему под знаком дифференциала, слагаемое 6. Тогда рассматриваемый интеграл примет вид:

$$\int \frac{8t}{\sqrt{6-t^2}}dt = 4\int \frac{dt^2}{\sqrt{6-t^2}} = 4\int \frac{(-1)\cdot d(-t^2)}{\sqrt{6-t^2}} = -4\int \frac{d(-t^2+6)}{\sqrt{6-t^2}}\ .$$

Сделаем замену и получим интеграл, который можно будет вычислить по 6 формуле из таблицы интегралов.

$$\int \frac{8t}{\sqrt{6-t^2}}dt = 4\int \frac{dt^2}{\sqrt{6-t^2}} = -4\int \frac{d\left(-t^2+6\right)}{\sqrt{6-t^2}} = [6-t^2 = z] = -4\int \frac{dz}{\sqrt{z}} =$$
$$= -4\cdot 2\sqrt{z} + C = -8\sqrt{6-t^2} + C\ .$$

Во втором интеграле $\int \frac{-3}{\sqrt{6-t^2}}dt$ вынесем числовой коэффициент (-3) за знак интеграла и получим табличный интеграл, который вычисляется по 14-ой формуле.

$$\int \frac{-3}{\sqrt{6-t^2}}dt = -3\int \frac{dt}{\sqrt{6-t^2}} = -3\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-t^2}} = -3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C\ .$$

Соберём вместе все полученные результаты.

$$\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \int \frac{8x-11}{\sqrt{6-(x-1)^2}}d(x-1) = \begin{bmatrix} x-1=t \\ x=t+1 \end{bmatrix} = \int \frac{8t-3}{\sqrt{6-t^2}}dt =$$
$$= \int \frac{8t}{\sqrt{6-t^2}}dt + \int \frac{-3}{\sqrt{6-t^2}}dt = -8\sqrt{6-t^2} - 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C =$$
$$= -8\sqrt{6-(x-1)^2} - 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + C = -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + C.$$

Пример 11. $\int \frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx.$

Начнём с выделения полного квадрата в подкоренном выражении. Но коэффициент при x^2 в квадратном трехчлене равен (-3). В начале вынесем число 3, как общий множитель за скобку, **оставляя знак минус перед x^2.** Выносить за скобку (-3) **нельзя**, потому что в дальнейшем из этого числа придется извлекать корень квадратный, а из отрицательного числа в действительных числах корень не извлечь.

$$\int \frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx = \int \frac{2x-7}{\sqrt{3\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x-x^2\right)}}\,dx = \int \frac{2x-7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x-x^2}}\,dx.$$

Можно переходить к выделению полного квадрата в подкоренном выражении. Коэффициент при x^2 равен (-1), поэтому повторяем действия предыдущего примера. Вынесем (-1) как общий множитель за скобки: $-\left(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)$. У выражения, записанного в скобках, и будем выделять полный квадрат.

$x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}=x^2+2\cdot x\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=x^2+2\cdot x\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}=$
$=\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{9}$. Полный квадрат выделен, но не забываем, что у квадратного трехчлена перед скобкой стоит **знак минус**. Завершаем преобразования с учетом этого знака.

$$\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x-x^2=-\left(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)=-\left(\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{9}\right)=\frac{7}{9}-\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$$

Выделение полного квадрата завершено. Возвращаемся к вычислению интеграла. Числовой коэффициент $\frac{1}{\sqrt{3}}$ вынесем за знак интеграла, подставим выделенный полный квадрат под знак корня, а под знаком дифференциала прибавим слагаемое $\left(\frac{2}{3}\right)$.

$\int\frac{2x-7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x-x^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{2x-7}{\sqrt{\frac{7}{9}-\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}}d\left(x+\frac{2}{3}\right)$. Сделаем замену $x+\frac{2}{3}=t$, и из этого равенства выразим x: $x=t-\frac{2}{3}$. Подставим всё в интеграл.

$$\int\frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}}dx=\int\frac{2x-7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x-x^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{2x-7}{\sqrt{\frac{7}{9}-\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}}d\left(x+\frac{2}{3}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}x+\frac{2}{3}=t\\ x=t-\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{2\left(t-\frac{2}{3}\right)-7}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{2t-\frac{4}{3}-7}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{2t-\frac{25}{3}}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}dt$$

Разделим почленно числитель подынтегральной функции на знаменатель. Вычислим отдельно интеграл от первого слагаемого, отдельно от второго.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{2t-\frac{25}{3}}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\left(\frac{2t}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}-\frac{\frac{25}{3}}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}\right)dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\int\frac{2t\,dt}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}-\int\frac{\frac{25}{3}dt}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}\right)$$

В первом интеграле $\int\frac{2t\,dt}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}$ подведем t под знак дифференциала:

$\int\frac{2tdt}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}=\int\frac{2d\left(\frac{t^2}{2}\right)}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}=\int\frac{2\cdot\frac{1}{2}dt^2}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}=\int\frac{dt^2}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}$. В полученном интеграле умножим выражение, стоящее под знаком дифференциала на минус один, но, чтобы ничего не изменилось умножим дифференциал на минус один. А затем прибавим к выражению, стоящему под знаком дифференциала, слагаемое $\frac{7}{9}$. Тогда рассматриваемый интеграл примет вид:

$$\int \frac{2tdt}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}} = \int \frac{dt^2}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}} = \int \frac{(-1)\cdot d(-t^2)}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}} = \int \frac{(-1)\cdot d\left(-t^2+\frac{7}{9}\right)}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}} = -\int \frac{d\left(\frac{7}{9}-t^2\right)}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}$$

Сделаем замену и получим интеграл, который можно будет вычислить по 6-ой формуле из таблицы интегралов.

$$\int \frac{2tdt}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}} = \int \frac{dt^2}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}} = -\int \frac{d\left(\frac{7}{9}-t^2\right)}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}} = \left[\frac{7}{9} - t^2 = z\right] = -\int \frac{dz}{\sqrt{z}} =$$

$$= -2\sqrt{z} + C = -2\sqrt{\frac{7}{9} - t^2} + C\ .$$

Во втором интеграле $\int \frac{\frac{25}{3}}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}dt$ вынесем числовой коэффициент $\left(\frac{25}{3}\right)$ за знак интеграла и получим табличный интеграл, который вычисляется по 14-ой формуле.

$$\int \frac{\frac{25}{3}}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}dt = \frac{25}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}} = \frac{25}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 - t^2}} = \frac{25}{3} arcsin \frac{t}{\sqrt{7}/3} + C =$$

$$= \frac{25}{3} arcsin \frac{3t}{\sqrt{7}} + C.$$

Соберём вместе все полученные результаты.

$$\int \frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}}\,dx = \int \frac{2x-7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x-x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2x-7}{\sqrt{\frac{7}{9}-\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}}\,d\left(x+\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} x + \frac{2}{3} = t \\ x = t - \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2\left(t-\frac{2}{3}\right)-7}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2t-\frac{25}{3}}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \left(\frac{2t}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}} - \frac{\frac{25}{3}}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}\right)dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\int \frac{2t\,dt}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}} - \int \frac{\frac{25}{3}\,dt}{\sqrt{\frac{7}{9}-t^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-2\sqrt{\frac{7}{9}-t^2} - \frac{25}{3} arcsin\frac{3t}{\sqrt{7}}\right) + C = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{7}{9} - \left(x+\frac{2}{3}\right)^2} -$$

$$- \frac{25}{3\sqrt{3}} arcsin \frac{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{7}} + C = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{4}{3}x - x^2} - \frac{25}{3\sqrt{3}} arcsin\frac{3x+2}{\sqrt{7}} + C\ .$$

9. Примеры для самостоятельного решения

1. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$
2. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$
3. $\int \frac{x^2 dx}{x^6+4}$
4. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$
5. $\int \frac{\sin x\, dx}{cos^2 x}$
6. $\int \frac{dx}{cos^2 x\sqrt{4+tgx}}$
7. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-ln^2 x}}$
9. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}} dx$
10. $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$
11. $\int \frac{ctgx}{\ln sinx} dx$
12. $\int x \sin x \cos x\, dx$
13. $\int x^3 e^{x^2}\, dx$
14. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$
16. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2-11x+3x^2}}$
17. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1} dx$
18. $\int \frac{7x+5}{\sqrt{4-x^2+3x}} dx$

Список литературы

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учебное пособие / Г. Н. Берман. – 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 492 с.
2. Шипачев, В.С. Высшая математика: учебник и практикум / В. С. Шипачев. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2017. — 447 с.

Учебное издание

Бадаш Елена Хаимовна

Основы интегрального исчисления методические указания для самостоятельной работы студентов

Учебно-методическое пособие

Подготовка к изданию М.Д. Кононыхиной

Подписано в печать 27.06.2023. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 3,25. Уч.- изд. 3,24.
Заказ № 10. Тираж 20 экз.

Издательство Института экономики и управления ФГБОУ ВО «УдГУ»
426034, Ижевск, ул. Университетская 1, корп.4