Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики

И.Г. Ким, Н.В. Латыпова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2023

УДК 517.23(075)
ББК 22.161.1я73
К 40

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом УдГУ.

Рецензент: д-р. физ.-мат. наук, зав. науч. лаб. мат. теории упр. ин-та математики, информ. технологий и физики ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» В.А. Зайцев

Ким И.Г, Латыпова Н.В.

К40 Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных : учеб.-метод. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – Ижевск : Удмуртский университет, 2023. – 150 с.

Предлагаемое учебно-методическое пособие посвящено изучению такого раздела курса математического анализа, как дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Приводятся основные понятия, свойства и теоремы дифференциального исчисления, рассматриваются их приложения. Теоретический материал подробно иллюстрируется примерами. В пособии предлагаются варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов бакалавриата направлений по укрупненным группам: 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки», а также будет полезно всем интересующимся математическим анализом.

УДК 517.23(075)
ББК 22.161.1я73

Содержание

Предисловие

Одним из разделов курса математического анализа, вызывающим наибольшие трудности в понимании и усвоении как теоретического, так и практического материала, является раздел «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных». Данное пособие призвано помочь преодолеть возникающие трудности студентам математических, ИТ, инженерных направлений подготовки, так и иных.

Пособие состоит из трёх частей. В первой части излагается необходимый в дальнейшем теоретический материал. Во второй части приводится разбор примеров и задач с методическими рекомендациями, решение которых не только иллюстрирует представленную теорию, но и может служить образцом для предлагаемых в третьей части индивидуальных заданий.

Символ $\triangle$ означает окончание решения примера. Еще один используемый в пособии значок "$\circeq$" представляет собой обозначение для данного выражения или определение для него. Остальные символы, встречающиеся в пособии, являются стандартными и общеупотребительными в математической литературе.

Студент, изучив представленные методические рекомендации и подробно разобранные примеры, должен выполнить индивидуальный вариант своей работы. Индивидуальные задания позволяют систематизировать и закрепить теоретические знания студентов, развить навыки их самостоятельной работы, могут использоваться в качестве домашних заданий.

1. Основные понятия и теоремы

1.1. Линии и поверхности уровня функции

Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, C — некоторое число.

Определение 1. Множество точек (x, y), в которых $f(x, y) = C$, называется *линией уровня.*

Пусть $f(x, y, z)$ — функция трех переменных, C — некоторое число.

Определение 2. Множество точек (x, y, z), в которых $f(x, y, z) = C$, называется *поверхностью уровня.*

Если изобразить на чертеже линии (поверхности) уровня для значений $C = C_1, C_2, \ldots$ с постоянным шагом $C_{k+1} - C_k$, то по этим линиям можно судить о ходе изменения функции: там, где линии гуще, функция изменяется быстрее, где реже — медленнее.

Пример 1. Рассмотрим функцию $z = x^2 + y^2$, задаюшую параболоид (см. рис. 1).

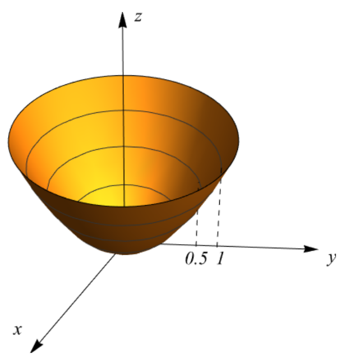

Рис. 1. Параболоид $z = x^2 + y^2$

Линии уровня этой функции $x^2 + y^2 = k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ образуют семейство концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом $r_k = \sqrt{k}$. Так как $r_{k+1} - r_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} =$

$\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \to 0$ при $k \to \infty$, то при удалении в бесконечность линии уровня сгущаются (см. рис. 2).

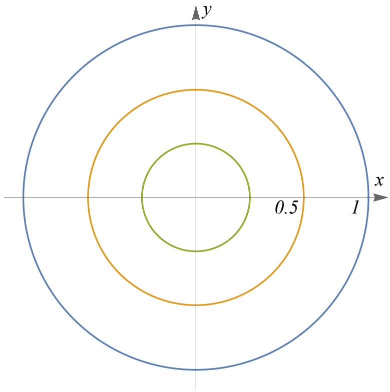

Рис. 2. Линии уровня параболоида $z = x^2 + y^2$

Пример 2. Рассмотрим функцию $u = x^2+y^2+z^2$. Поверхности уровня этой функции $x^2 + y^2 + z^2 = k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ образуют семейство концентрических сфер с центром в начале координат и радиусом $r_k = \sqrt{k}$ (см. рис. 3). Так как $r_{k+1} - r_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \to 0$ при $k \to \infty$, то при удалении в бесконечность поверхности уровня сгущаются, а значит, график функции идет все круче и круче.

1.2. Предел функции нескольких переменных

Понятие предела основывается на понятии базы. Пусть X — некоторое множество.

Определение 3. Семейство $B = \{B_\alpha\}$ подмножеств из X называется *базой* во множестве X, если

1. $\forall B_\alpha \in B\colon B_\alpha \neq \varnothing$;

2. $\forall B_\alpha, B_\gamma \in B\colon B_\alpha \cap B_\gamma \in B$.

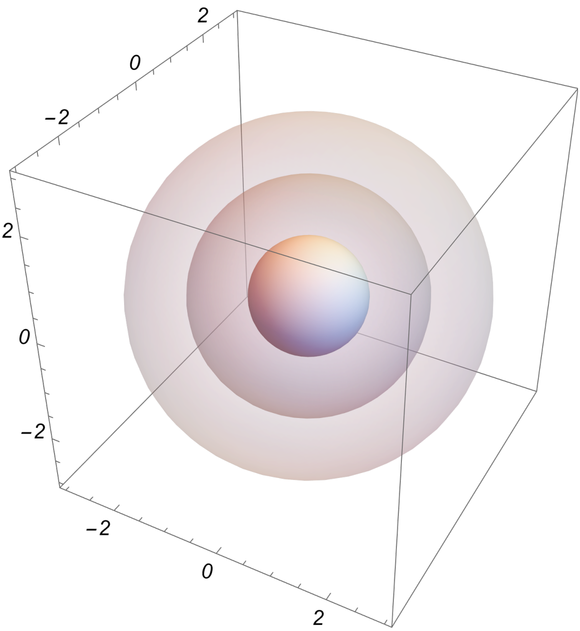

Рис. 3. Поверхности уровня функции $u = x^2 + y^2 + z^2$

Пример 3. Базой в метрическом пространстве X является семейство $B_\delta = \dot{O}(a;\delta)$ проколотых окрестностей с центром в точке a и радиусом δ. Эту базу обозначают $x \to a$.

Пример 4. Пусть a — предельная точка для множества E метрического пространства X. Тогда семейство множеств $B_\delta = \dot{O}(a;\delta) \cap E$ образует базу в E. Она обозначается $x \xrightarrow{E} a$ Когда ясно, о каком множестве E идет речь, то знак множества в обозначении базы опускается.

Определение 4. Пусть X, Y — метрические пространства, функция $f\colon E \subset X \to Y$ и $B = \{B_\alpha\}$ — база в E. Точка $b \in Y$ называется *пределом функции* f по базе B, если

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B_\alpha \in B,\ \forall x \in E\colon x \in B_\alpha \Longrightarrow \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon. \tag{1}$$

Обозначение: $\lim\limits_{B} f(x) = b$.

Так как $\rho_Y(f(x),b) < \varepsilon \iff f(x) \in O_Y(b;\varepsilon)$, то высказывание (1) можно записать таким образом:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists B_\alpha \in B,\ \forall x \in E\colon x \in B_\alpha \Longrightarrow f(x) \in O_Y(b;\varepsilon)$$

или еще

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists B_\alpha \in B\colon f(B_\alpha) \subset O_Y(b,\varepsilon).$$

Применительно к базе $x \xrightarrow{E} a$ данные формулировки примут следующий вид.

Пусть $f\colon E \subset X \to Y$ и a — предельная точка для множества E. Точка $b \in Y$ называется *пределом функции* f в точке a по множеству E, если

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in E\colon 0 < \rho_X(x,a) < \delta \Longrightarrow \rho_Y(f(x),b) < \varepsilon, \qquad (2)$$

или в терминах окрестностей:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ \forall x \in E\colon x \in \dot{O}_X(a;\delta) \Longrightarrow f(x) \in O_Y(b,\,\varepsilon).$$

Когда X и Y — нормированные пространства, то (2) будет выглядеть так:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ \forall x \in E\colon 0 < ||x-a||_X < \delta \Longrightarrow ||f(x)-b||_Y < \varepsilon.$$

Для предела функции в точке наряду с определением на языке $\varepsilon - \delta$ (предел по Коши) можно дать еще определение на языке последовательностей (предел по Гейне).

Определение 5. Пусть $f\colon E \subset X \to Y$ и a — предельная точка для множества E. Точка $b \in E$ называется *пределом функции* f в точке a по множеству E, если

$$\forall x_p \in E\diagdown\{a\}\colon\ x_p \to a \Longrightarrow f(x_p) \to b.$$

Введем еще понятие предела функции по направлению. Направление ℓ в точке a нормированного пространства X определяется заданием какой-то его точки b, отличной от точки a. Оно задается уравнением $x = (1-t)a + tb$, $t \in (-\infty,+\infty)$. Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a. На части направления, находящейся в этой окрестности, имеем $f(x) = f\big((1-t)a + tb\big) = \varphi(t)$. Это уже функция вещественного переменного t, определенная в некоторой окрестности нуля.

Определение 6. Величина $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t)$ и называется *пределом функции f в точке a по направлению ℓ.*

Замечание. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то существует предел функции f в точке a по любому направлению и он тоже равен b. Обратное неверно: наличие одного и того же предела по всем направлениям не гарантирует существования предела функции в точке. Но если функция по двум разным направлениям имеет разные пределы, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует.

Пример 5. Областью определения функции $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ является множество $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Найдем пределы по направлению в точке $(0,0)$. Возьмем произвольное направление $x = k_1 t$, $y = k_2 t$ $(-\infty < t < +\infty)$, определяемое точкой $(k_1,k_2) \neq (0,0)$. На нем

$$\varphi(t) = f(k_1 t, k_2 t) = \frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2}.$$

Следовательно, предел по направлению $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t) = \dfrac{k_1 k_2}{k_1^2+k_2^2}$. Существуют пределы по всем направлениям, но они не совпадают между собой. Значит, функция f не имеет предела в точке $(0,0)$.

Пример 6. Областью определения функции $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$ является множество $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Нас опять интересуют пределы по направлению в точке $(0,0)$. На произвольном направлении $x = k_1 t$, $y = k_2 t$ $(k_1^2 + k_2^2 > 0)$ имеем

$$f(x) = f(k_1 t, k_2 t) = \varphi(t) = \frac{k_1^2 k_2 t}{k_1^4 t^2 + k_2^2} \to 0 \text{ при } t \to 0.$$

Пределы по всем направлениям существуют и совпадают. Однако функция все равно не имеет предела в точке. В самом деле, возьмем две последовательности $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \to (0,0)$ и $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}\right) \to (0,0)$. В точках первой из них имеем

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n^2+1} \to 0,\ n \to \infty,$$

а в точках второй

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2},\ n \to \infty.$$

Получили разные пределы. Значит, предел функции в точке $(0,0)$ не существует.

Замечание. Утверждение об единственности предела остаётся верным для отображений из одного метрического пространства в другое. Остаются в силе и теоремы о пределе суммы, произведения и частного функций, о предельном переходе в неравенстве, если только выполнены указанные операции и отношения.

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены на множестве E и $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} f(x) = B$. Тогда имеют место следующие арифметические свойства пределов:

1. $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} \big(f(x) \pm g(x)\big) = A \pm B$;
2. $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = AB$;
3. $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, если $B \neq 0$.

1.3. Непрерывность функции нескольких переменных

Определение 7. Пусть X и Y — метрические пространства, и пусть $f\colon X \to Y$, $a \in X$. Функция f называется *непрерывной в точке* a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Класс функций, непрерывных в точке a, обозначим $\mathbb{C}(a)$.

Замечание. Ввиду того что данное определение непрерывности функции в точке точно такое же, как и в одномерном анализе, то для отображений в произвольном метрическом пространстве сохраняют силу известные теоремы о непрерывности суммы, произведения, частного и суперпозиции функций, лишь бы указанные операции были определены.

Определение 8. Функция f, непрерывная в каждой точке метрического пространства X, называется *непрерывной* на X. Класс функций, непрерывных на X, обозначается $\mathbb{C}(X)$.

Пример 7. Метрика $\rho(x,\, y)$ пространства X — непрерывная функция. Для доказательства воспользуемся определением непрерывности по Гейне. Пусть x и y — любые две точки метрического пространства X, $x_n \to x$, $y_n \to y$. Тогда в силу неравенства $|\rho(a,b) - \rho(a,c)| \leqslant \rho(b,c)$ имеем

$$\begin{gathered}|\rho(x_n,y_n) - \rho(x,y)| = |\rho(x_n,y_n) - \rho(x_n,y) + \rho(x_n,y) - \rho(x,y)| \leqslant \\ \leqslant |\rho(x_n,y_n) - \rho(x_n,y)| + |\rho(x_n,y) - \rho(x,y)| \leqslant \\ \leqslant \rho(y_n,y) + \rho(x_n,x) \to 0 \text{ при } n \to \infty.\end{gathered}$$

Таким образом, функция $\rho(x,\, y)$ непрерывна в каждой точке $(x,\, y)$, т.е. на всем пространстве X. Отсюда, в частности, вытекает непрерывность функции $||x|| = \rho(x,\, 0)$ на нормированном пространстве X.

Перейдем теперь к разбору специфики непрерывных функций многих переменных. Пусть $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. В этом случае можно заменить круговую окрестность квадратной, что дает определение непрерывности функции в такой форме:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X\colon \begin{cases} |x_1 - a_1| < \delta \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ |x_n - a_n| < \delta \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\|f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)\| < \varepsilon. \tag{3}$$

Приняв $x_k = a_k$ для $k \neq i$, мы превратим функцию f в функцию одной переменной x_i — $f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n) = \varphi_i(x_i)$. Фиксация указанных переменных означает, что функция f рассматривается только на прямой, проходящей через точку a параллельно координатной оси x_i.

Если функция $\varphi_i(x_i)$ непрерывна в точке a_i, то говорят, что функция f непрерывна в точке a по переменной x_i. Из (3) видно, что непрерывность функции f в точке a по совокупности переменных влечет ее непрерывность по каждой переменной. Обратное неверно. Приведем соответствующий контрпример.

Пример 8. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ числовую функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{если} \quad x = y = 0, \end{cases}$$

и исследуем ее непрерывность в точке (0, 0). Фиксируя сначала $x = 0$, а затем $y = 0$, мы получаем функции, тождественно равные нулю. Значит, функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$ по каждой из переменных x и y. В то же время несложно проверить, что эта функция не имеет в точке $(0, 0)$ даже предела (см. пример 5). Следовательно, не может быть и речи о непрерывности функции по совокупности переменных.

Замечание. Очевидно, что все сказанное о связи между непрерывностью по совокупности переменных и по отдельной переменной имеет место для функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, у которых вместо числовых аргументов x_i стоят точки любого метрического пространства.

Пусть $f = (f_1, \ldots, f_m) \colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $a \in X$. Ясно, что непрерывность функции f должна как-то зависеть от свойств ее координатных функций $f_1, \ldots, f_m$.

Теорема 1. *Функция $f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{C}(a)$ тогда и только тогда, когда для каждого $i = 1, 2, \ldots, m \colon f_i \in \mathbb{C}(a)$.*

Свойства непрерывных функций

Теорема 2 (Вейрштрасса). *Непрерывный образ компакта есть компакт.*

Следствие 1. *Непрерывная функция на компактном метрическом пространстве ограничена.*

Следствие 2. *Непрерывная функция f преобразует замкнутое ограниченное множество $X \subset \mathbb{R}^n$ в замкнутое ограниченное множество $f(X) \subset \mathbb{R}^m$.*

Следствие 3. *Непрерывная числовая функция на компактном метрическом пространстве достигает наибольшего и наименьшего значений.*

Отметим еще, что предложение, обратное теореме Вейерштрасса, неверно: при непрерывном отображении прообраз компакта не обязан быть компактом. Примером может служить функция $f(x) = \mathrm{const}$ отображающая любое множество (в том числе и некомпактное) в точку, т.е. в компактное множество.

Теорема 3 (об обратном отображении). *Если f — непрерывное биективное отображение компактного метрического пространства X на* *метрическое пространство Y, то обратное отображение f^{-1} существует и $f^{-1} \in \mathbb{C}(Y)$.*

Теорема 4. *Непрерывный образ любого линейно-связного множества есть линейно-связное множество.*

Особо интересен случай $Y = \mathbb{R}$.

Теорема 5 (Больцано–Коши)**.** *Если непрерывная на линейно-связном метрическом пространстве X числовая функция f принимает какие-то значения a и b, то отрезок $[a,b] \subset f(X)$.*

Теорему Больцано–Коши обычно формулируют несколько иначе: если непрерывная на линейно-связном метрическом пространстве X числовая функция f принимает различные значения a и b, то $\forall c \in (a,b)$ $\exists\, x \in X\colon f(x) = c$.

Отметим важный частный случай теоремы Больцано–Коши.

Следствие 4. *Если непрерывная на линейно-связном метрическом пространстве X числовая функция f принимает какие-то значения $a < 0$ и $b > 0$, то $\exists\, x \in X\colon f(x) = 0$.*

Теорему Больцано–Коши называют еще теоремой о промежуточном значении непрерывной функции.

1.4. Равномерная непрерывность

Определение 9. Пусть $f\colon X \to Y$. Функция f называется *равномерно непрерывной* на метрическом пространстве X, если

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0, \; \forall x', x'' \in X\colon \rho_X(x', x'') < \delta \Longrightarrow \rho_Y\left(f(x'), f(x'')\right) < \varepsilon$$

или, если X и Y — нормированные пространства,

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0, \; \forall x', x'' \in X\colon \|x' - x''\|_X < \delta \Longrightarrow \|f(x') - f(x'')\|_Y < \varepsilon.$$

Из данного определения видно, что функция, равномерно непрерывная на множестве X, будет и поточечно непрерывной на X. Обратное неверно. Соответствующие примеры приводились уже для отображений $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Теорема 6 (Кантора)**.** *Функция f, непрерывная на компактном метрическом пространстве X, равномерно непрерывна на нем.*

Следствие 5. *Пусть $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to Y$. Функция f, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве X, равномерно непрерывна на X.*

1.5. Частные производные и дифференциалы

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области E, (x_0, y_0) — внутренняя точка E. Пусть $y = y_0$, тогда $f(x, y_0) = \varphi(x)$ — функция одной переменной x.

Определение 10. Производная функции $\varphi(x)$ и называется *частной производной первого порядка по переменной x функции $z = f(x, y)$ в точке* (x_0, y_0), то есть

$$\varphi'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Для обозначения производной первого порядка по переменной x функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) используется следующая символика:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \quad \text{или} \quad f'_x(x_0, y_0) \quad \text{или} \quad f'_x\Big|_{(x_0, y_0)}.$$

Аналогично при $x = x_0$ определим $f(x_0, y) = \psi(y)$ функцию одной переменной y.

Определение 11. Производная функции $\psi(y)$ называется *частной производной первого порядка по переменной y функции $z = f(x, y)$ в точке* (x_0, y_0), то есть

$$\psi'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Для обозначения производной первого порядка по переменной y функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) используется следующая символика:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \quad \text{или} \quad f'_y(x_0, y_0) \quad \text{или} \quad f'_y\Big|_{(x_0, y_0)}.$$

Для функции трех переменных $u = g(x, y, z)$ определения частных производных по переменным x, y, z в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ выглядят следующим образом:

$$g'_x(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial g(M_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - g(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x};$$

$$g'_y(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial g(M_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{g(x_0,y_0+\Delta y,z_0)-g(x_0,y_0,z_0)}{\Delta y};$$

$$g'_z(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial g(M_0)}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{g(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-g(x_0,y_0,z_0)}{\Delta z}.$$

На практике при вычислении частной производной по соответствующей переменной считают остальные переменные фиксированными постоянными.

Определение 12. *Частными производными второго порядка или вторыми частными производными* называют частные производные от производных первого порядка.

Так для функции двух переменных $f(x,y)$ имеем частные производные $f''_{x^2}=(f'_x)'_x$, $f''_{y^2}=\left(f'_y\right)'_y$, $f''_{xy}=(f'_x)'_y$ и $f''_{yx}=\left(f'_y\right)'_x$, а для функции трех переменных $g(x,y,z)$ уже будут $g''_{x^2}=(g'_x)'_x$, $g''_{y^2}=\left(g'_y\right)'_y$, $g''_{z^2}=(g'_z)'_z$, $g''_{xy}=(g'_x)'_y$, $g''_{xz}=(g'_x)'_z$, $g''_{yx}=\left(g'_y\right)'_x$, $g''_{zx}=(g'_z)'_x$, $g''_{yz}=\left(g'_y\right)'_z$, $g''_{zy}=(g'_z)'_y$. Если частные производные первого порядка функции непрерывные, то смешанные производные совпадают (см. теоремы Шварца и Юнга): $f''_{xy}=f''_{yx}$, или $g''_{xy}=g''_{yx}$, $g''_{xz}=g''_{zx}$, $g''_{xz}=g''_{zx}$.

Аналогично можно находить частные производные любого порядка.

Определение 13. *Дифференциалом (первого порядка) или первым дифференциалом функции $z=f(x,y)$ двух переменных* называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных:

$$dz=f'_x dx+f'_y dy. \tag{4.1}$$

Аналогично определяется дифференциал функции $u=g(x,y,z)$ трех переменных:

$$du=g'_x dx+g'_y dy+g'_z dz. \tag{4.2}$$

Определение 14. *Дифференциалом второго порядка или вторым дифференциалом* называется дифференциал от дифференциала этой функции:

$$n=2: \qquad d^2z=d\,(dz)=f''_{x^2}dx^2+f''_{xy}dxdy+f''_{yx}dydx+f''_{y^2}dy^2;$$

$$\begin{aligned} n=3: \qquad d^2u=d\,(du)&=g''_{x^2}dx^2+g''_{xy}dxdy+g''_{yx}dydx+g''_{y^2}dy^2+\\ &+g''_{xz}dxdz+g''_{zx}dzdx+g''_{yz}dydz+g''_{zy}dzdy+g''_{z^2}dz^2.\end{aligned}$$

В силу равенств смешанных производных получим

$$n = 2: \qquad d^2z = f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}dy^2; \tag{5}$$

$$\begin{aligned} n = 3: \qquad d^2u &= g''_{x^2}dx^2 + g''_{y^2}dy^2 + g''_{z^2}dz^2 + \\ &+ 2g''_{xy}dxdy + 2g''_{xz}dxdz + 2g''_{yz}dydz. \end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что формулы (5), (6) имеют место в случае, когда x, y, z — независимые переменные. В общем случае, когда это зависимые переменные, второй дифференциал (как и дифференциал более высокого порядка) не сохраняет своей формы.

Аналогичным образом можно определить дифференциалы любого порядка.

Определение 15. *Градиентом функции двух переменных $z = f(x, y)$ в точке* $M(x_0, y_0)$ называется вектор grad f с началом в точке $M(x_0, y_0)$ и с координатами, равными частным производным этой функции в заданной точке: grad $f = \left(f'_x, f'_y\right)$.

Градиент в данной точке указывает направление наибыстрейшего роста функции в этой точке. Градиент функции двух переменных в точке $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярен линии уровня, проходящей через данную точку. Длина вектора градиента вычисляется по формуле

$$\left|\text{grad } f\right| = \sqrt{(f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2}.$$

Определение 16. *Градиентом функции трех переменных $u = g(x, y, z)$ в точке* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется вектор grad g с началом в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и с координатами, равными частным производным этой функции в заданной точке: grad $g = \left(g'_x, g'_y, g'_z\right)$.

Длина вектора градиента вычисляется по формуле

$$\left|\text{grad } g\right| = \sqrt{(g'_x)^2 + \left(g'_y\right)^2 + (g'_z)^2}.$$

Пример 9. Найдем величину и направление градиента функции $z = x^y$ в точке $M_0(1, 1)$. Частные производные этой функции: $z'_x = yx^{y-1}$ и $z'_y = x^y \ln x$. Найдем их значения в заданной точке $M_0(1, 1)$: $z'_x(1, 1) = 1$ и $z'_y(1, 1) = 0$. Тогда вектор градинта имеет координаты grad $z(1, 1) = (1, 0)$ с началом в точке $M_0(1, 1)$ и длиной $|\text{grad } z| = 1$.

1.6. Дифференцируемость функции нескольких переменных

Для того чтобы исследовать функцию двух переменных на дифференцируемость, нужно воспользоваться определением.

Определение 17. Функция $f(x, y)$ называется *дифференцируемой в точке* $M_0(x_0, y_0)$ ($f \in \mathscr{D}(M_0)$) если имеет место равенство

$$\Delta f(M_0) = Dh + o\,(\|h\|) \ \ (h \to 0), \tag{7}$$

где $\Delta f(M_0) = \doteq f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ — приращение функций двух переменных, $D = \big(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\big) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0)$, $h = (\Delta x, \Delta y)$, $Dh = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$, $\|h\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Отсюда можно записать **АЛГОРИТМ** исследования функции двух переменных $f(x, y)$ на дифференцируемость в заданной точке $M_0(x_0, y_0)$:
1. Найти значение функции в заданной точке $f(x_0, y_0)$.
2. Найти приращение функции
$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.
3. Вычислить частные производные первого порядка данной функции в заданной точке: $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$.
4. Проверить асимптотическое равенство

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

при $\Delta x \to 0, \ \Delta y \to 0$. Для этого по определению "o" надо рассмотреть

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)\Delta x - f'_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

5. Если этот предел равен нулю, то асимптотическое равенство имеет место, а значит, данная функция дифференцируема в заданной точке: $f \in \mathscr{D}(M_0)$. Если же этот предел отличен от нуля, то данная функция не является дифференцируемой в заданной точке: $f \notin \mathscr{D}(M_0)$.

Формула (7) в определении дифференцируемости функции для трех переменных остается в силе при условии, что $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\Delta f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$, $h = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $D = (f'_x, f'_y, f'_z)\Big|_{M_0} = \operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$. Тогда **АЛГОРИТМ** исследования функции трех переменных $f(x, y, z)$ на дифференцируемость в

заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ формулируется следующим образом:
1. Найти значение функции в заданной точке $f(x_0, y_0, z_0)$.
2. Найти приращение функции
$\Delta f(M_0) \doteq \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$.
3. Вычислить частные производные первого порядка данной функции в заданной точке по каждому аргументу: $f'_x(x_0, y_0, z_0)$, $f'_y(x_0, y_0, z_0)$ и $f'_z(x_0, y_0, z_0)$.
4. Проверить асимптотическое равенство

$$\Delta f(M_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + f'_z(M_0)\Delta z + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\right)$$

($\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0,\ \Delta z \to 0$), то есть надо рассмотреть предел при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0, \Delta z \to 0$ выражения

$$\frac{\Delta f(M_0) - f'_x(M_0)\Delta x - f'_y(M_0)\Delta y - f'_z(M_0)\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}.$$

5. Если этот предел равен нулю, то асимптотическое равенство имеет место, а значит, данная функция дифференцируема в заданной точке: $f \in \mathscr{D}(M_0)$. Если же этот предел отличен от нуля, то данная функция не является дифференцируемой в заданной точке, $f \notin \mathscr{D}(M_0)$.

Легко видеть, что алгоритм можно перенести на случай любого числа переменных.

1.7. Производная по направлению

Пусть $f\colon O(x_0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Рассмотрим направление

$$\ell\colon x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

однозначно определяемое точкой x_1 с $\|x_1 - x_0\| = 1$, так что $x_1 - x_0$ единичный вектор направления ℓ. На прямой ℓ функция f принимает значения

$$\varphi(t) = f\big(x_0 + t(x_1 - x_0)\big),$$

зависящие от одной вещественной переменной t.

Определение 18. Производная $\varphi'(0) = \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial \ell}$ называется производной функции f в точке x_0 по направлению ℓ.

На основании теоремы о производной сложной функции можно сделать вывод: если функция f дифференцируема в точке x_0, то у функции f существует в точке x_0 производная по любому направлению ℓ и

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = \varphi'(0) = f'(x_0)(x_1 - x_0).$$

Из формулы видно: если $f'(x_0) = 0$, то производная по любому направлению ℓ также равна 0. Дальше всюду предполагается, что $f'(x_0) \neq 0$.

Для отображения f, действующего из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^1$, имеем

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) = (\operatorname{grad} f(x_0), x_1 - x_0).$$

Тогда, исходя из геометрической интерпретации скалярного произведения и из того, что вектор $x_1 - x_0$ единичный, можно написать

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial \ell} = (\operatorname{grad} f(x_0), x_1 - x_0) = \|\operatorname{grad} f(x_0)\| \cos\omega, \tag{8}$$

где ω — угол между векторами $\operatorname{grad} f(x_0)$ и $x_1 - x_0$, т.е. угол наклона вектора $\operatorname{grad} f(x_0)$ к направлению ℓ. Отсюда следует:

а) производная по направлению ℓ есть проекция вектора $\operatorname{grad} f(x_0)$ на это направление;

б) в направлении $\operatorname{grad} f(x_0)$ производная $\dfrac{\partial f}{\partial \ell}$ принимает наибольшее значение, равное $\|\operatorname{grad} f(x_0)\|$, а в противоположном направлении — наименьшее значение, равное $-\|\operatorname{grad} f(x_0)\|$, т.е. в направлении градиента скорость возрастания функции наибольшая, а в противоположном ему направлении скорость убывания функции наименьшая;

в) в направлении, ортогональном $\operatorname{grad} f(x_0)$, производная $\dfrac{\partial f}{\partial \ell} = 0$.

Заметим, что по определению производной

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial \ell} = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t(x_1 - x_0)) - f(x_0)}{t},$$

поэтому частная производная $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$ есть производная функции f в точке x_0 по направлению, параллельному оси x_i.

Для отображения f из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^1$ единичный вектор e направления ℓ определяется направляющими косинусами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, т.е. имеем

$e = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, а $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$. Тогда формула (8) дает

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(x_0, y_0, z_0) = \\ = f'_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f'_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma.$$

Если же f есть отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^1$, то формула (8) примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha,$$

где α — угол наклона направления ℓ к оси x.

Разберем еще вопрос о соотношении между дифференцируемостью функции в точке по всему пространству и дифференцируемостью в точке по направлению. Дифференцируемость функции в точке по всему пространству влечет дифференцируемость в точке по всем направлениям.

Обратное неверно. Так как дифференцируемость функции в этой точке по направлению зависит только от значений функции, принимаемых ею на этом направлении, то понятно, что, будучи хорошей на одном или нескольких отдельных направлениях, функция может оказаться плохой вне взятых направлений. Так, в частности, может обстоять дело и с частными производными: функция может иметь в точке все частные производные, но не быть дифференцируемой по остальным направлениям, а значит, и не быть дифференцируемой в точке по всему пространству.

Пример 10. Пусть $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ — функция, действующая из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^1$. Исследуем ее на дифференцируемость по направлению в точке $(0, 0)$. Зададим произвольное направление параметрическими уравнениями $x = kt$, $y = nt$ $(k^2 + n^2 > 0)$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Тогда имеем

$$\varphi(t) = f(kt, nt) = \sqrt{|kn|} \cdot |t|.$$

На осях координат, т.е. если $k = 0$ или $n = 0$, функция $\varphi(t)$ обращается в нуль. Следовательно, существуют частные производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$, равные нулю. В других направлениях коэффициент $\sqrt{|kn|} \neq 0$. Поэтому функция φ недифференцируема в точке $t = 0$, что равнозначно утверждению: функция f недифференцируема в точке $(0, 0)$ по этим направлениям. Итак, функция f дифференцируема в точке $(0,0)$ только по двум направлениям. Значит, она недифференцируема в точке $(0,0)$ по всему пространству. Заметим, что все это не мешает функции f быть непрерывной в точке $(0,0)$.

Следующий пример показывает, что даже дифференцируемость функции в точке по всем направлениям не гарантирует дифференцируемость в точке по всему пространству.

Пример 11. Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{если} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{если} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

На произвольном направлении $x = kt$, $y = nt$ $(k^2 + n^2 > 0)$, $t \in (-\infty, +\infty)$ функция f принимает значения

$$\varphi(t) = f(kt, nt) = \frac{k^2 n}{k^2+n^2} t.$$

Видим, что функция φ дифференцируема в точке $t = 0$. Значит, функция f дифференцируема в точке $(0,0)$ по любому направлению ℓ и

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(0,0) = \frac{k^2 n}{k^2+n^2}.$$

В частности, $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Убедимся, что функция f недифференцируема в точке $(0,0)$ по всему пространству. Допустим противное: $f \in \mathscr{D}(0,0)$. Тогда должно иметь место представление

$$\Delta f(0,0) = df(0,0) + o(h_1,h_2), \quad (h_1,h_2) \to (0,0)$$

или

$$f(h_1,h_2) - f(0,0) = f'_x(0,0)h_1 + f'_y(0,0)h_2 + o(h_1,h_2),$$

что применительно к данному случаю дает соотношение

$$\frac{h_1^2 h_2}{h_1^2+h_2^2} = o(h_1,h_2).$$

Следовательно, величина при $(h_1,h_2) \to (0,0)$

$$\alpha(h_1,h_2) = \frac{h_1^2|h_2|}{(h_1^2+h_2^2)\|(h_1,h_2)\|} = \frac{h_1^2|h_2|}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} = o(1).$$

Полагая здесь $h_1 = h_2 = h$ и устремляя $h \to 0$, получаем

$$\alpha(h,h) = \frac{|h|^3}{2\sqrt{2}|h|^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = o(1),$$

что невозможно.

1.8. Геометрические приложения

Рассмотрим пространственную кривую $\Gamma : r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$. Уравнение касательной прямой, проведенной к кривой Γ в точке $M(x_0, y_0, z_0) = r\left(t_0\right)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{x_t'(M)} = \frac{y - y_0}{y_t'(M)} = \frac{z - z_0}{z_t'(M)}, \tag{9}$$

а тогда уравнение нормальной плоскости

$$x_t'(M)\left(x - x_0\right) + y_t'(M)\left(y - y_0\right) + z_t'(M)\left(z - z_0\right) = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим поверхность S, заданную в неявном виде уравнением: $F(x, y, z) = 0$. Уравнение касательной плоскости, проведенной к поверхности S в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

$$F_x'(M)\left(x - x_0\right) + F_y'(M)\left(y - y_0\right) + F_z'(M)\left(z - z_0\right) = 0, \tag{11}$$

а уравнение нормали

$$\frac{x - x_0}{F_x'(M)} = \frac{y - y_0}{F_y'(M)} = \frac{z - z_0}{F_z'(M)}. \tag{12}$$

В случае, если поверхность S задана в явном виде $z = f(x, y)$, то соответствующие уравнения для касательной плоскости и нормальной прямой определяются:

$$z - z_0 = z_x'(M)\left(x - x_0\right) + z_y'(M)\left(y - y_0\right),$$

$$\frac{x - x_0}{z_x'(M)} = \frac{y - y_0}{z_y'(M)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

1.9. Экстремум функции нескольких переменных

Пусть функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в окрестности точки $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$.

Определение 19. Точка $x^{(0)}$ называется *точкой строгого минимума (строгого максимума)* функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ выполнено строгое неравенство $f(x) > f\left(x^{(0)}\right)$ $\left(f(x) < f\left(x^{(0)}\right)\right)$.

Если неравенство в определении 19 нестрогое, то точку $x_0^{(0)}$ называют точкой *минимума* (*максимума*).

Необходимое условие экстремума. *Дифференцируемая функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может достигать экстремума лишь в стационарной точке $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, то есть в такой точке, что*

$$\operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right) = 0, \text{ или } \quad \frac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_p} = 0 \quad \forall p = 1, 2, \ldots, n.$$

Второй дифференциал функции $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, определяемый по формуле

$$d^2 f\left(x^{(0)}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

является квадратичной формой переменных x_1, …, x_n, а частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_i \partial x_j}$ — коэффициентами этой квадратичной формы.

Достаточное условие экстремума. *Если в стационарной точке $x^{(0)}$ квадратичная форма $d^2 f\left(x^{(0)}\right)$ — положительно определенная, то функция $f(x)$ достигает в точке $x^{(0)}$ строгого минимума. Если в стационарной точке $x^{(0)}$ квадратичная форма $d^2 f\left(x^{(0)}\right)$ — отрицательно определенная, то функция $f(x)$ достигает в точке $x^{(0)}$ строгого максимума. Если в стационарной точке $x^{(0)}$ квадратичная форма $d^2 f\left(x^{(0)}\right)$ — неопределенная, то функция $f(x)$ не достигает в точке $x^{(0)}$ ни максимума, ни минимума.*

Как правило, для исследования квадратичной формы используют критерий Сильвестра.

Критерий Сильвестра. *Квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы квадратичной формы положительны. Квадратичная форма является отрицательно определенной, тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы квадратичной формы нечетного порядка отрицательны, а миноры четного порядка положительны.*

Критерий неопределенной формы. *Квадратичная форма является неопределенной тогда и только тогда, когда у матрицы квадратичной формы либо имеется отрицательный главный минор четного порядка, либо существуют два главных минора нечетного порядка разных знаков.*

Рассмотрим сначала частный **случай функции двух переменных** $z = f(x, y)$. Пусть (x_0, y_0) — стационарная точка. Обозначим через $A = f''_{x^2}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{y^2}(x_0, y_0)$. Значения частных производных второго порядка в точке (x_0, y_0) являются коэффициентами $d^2z(x_0, y_0)$ — квадратичной формы от переменных dx, dy. Матрица этой квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Определитель Δ матрицы квадратичной формы равен $\Delta = AC - B^2$. Тогда достаточное условие экстремума в этом случае можно сформулировать следующим образом:

- Если $\Delta > 0$ и $A > 0$ (или $C < 0$), то функция $z = f(x, y)$ достигает в точке (x_0, y_0) строгого *минимума.*

- Если $\Delta > 0$ и $A < 0$ (или $C < 0$), то функция $z = f(x, y)$ достигает в точке (x_0, y_0) строгого *максимума.*

- Если $\Delta < 0$, то у функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) нет ни максимума, ни минимума.

- Если $\Delta = 0$, то вопрос об экстремуме остается открытым.

Пример 12. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^k + (x - y)^2$ при $k = 3, 4$. Найдем стационарные точки. Для этого вычислим частные производные первого порядка и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} f'_x = kx^{k-1} + 2(x - y) = 0, \\ f'_y = -2(x - y) = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, имеем единственную стационарную точку $(0, 0)$. Тогда $f''_{x^2} = k(k - 1)x^{k-2} + 2$, $f''_{xy} = -2$, $f''_{y^2} = 2$. А значит, в стационарной точке имеем $A = f''_{x^2}(0, 0) = 2$, $B = f''_{xy}(0, 0) = -2$, $C = f''_{y^2}(0, 0) = 2$, $\Delta = AC - B^2 = 0$.

Пусть $k = 3$, то есть $f(x, y) = x^3 + (x - y)^2$. $f(0, 0) = 0$. Пусть $y = x$. На этой прямой наша функция принимает вид: $f(x, x) = x^3$. Тогда в любой окрестности точки $(0, 0)$ на этой прямой при $x > 0$ функция $f(x, y) > f(0, 0)$, а при $x < 0$ имеем противоположное: $f(x, y) < f(0, 0)$. Другими словами, в этом случае экстремума нет.

Аналогично рассмотрим второй случай $k = 4$, то есть функция $f(x, y) = x^4 + (x - y)^2$ и $f(0, 0) = 0$. Причем, в силу неотрицательности каждого слагаемого функции $f(x, y)$ имеем неравенство $f(x, y) \geqslant f(0, 0)$, а это по определению означает, что в точке $(0, 0)$ будет минимум (нестрогий) данной функции.

Таким образом, при $\Delta = 0$ экстремум как может быть, так и нет. В этом случае в каждой ситуации нужен особый подход.

Запишем **АЛГОРИТМ** исследования функции двух переменных $f(x, y)$ на экстремум:

1. Рассмотреть область определения функции.
2. Найти частные производные первого порядка f'_x и f'_y.
3. Приравнивая полученные производные нулю, составить и решить систему уравнений. Решения этой системы, удовлетворяющие области определения функции, являются стационарными точками.
4. Найти частные производные второго порядка f''_{x^2}, f''_{xy} и f''_{y^2}.
5. В каждой стационарной точке вычислить A, B, C и Δ.
6. Используя достаточное условие экстремума, сделать вывод по каждой стационарной точке. Случай $\Delta = 0$ исследовать отдельно.

Перейдем теперь к **исследованию функции трех переменных** $u = f(x, y, z)$. Пусть (x_0, y_0, z_0) — стационарная точка.

Запишем **АЛГОРИТМ** исследования функции трех переменных $f(x, y, z)$ на экстремум:

1. Рассмотреть область определения функции.
2. Найти частные производные первого порядка f'_x, f'_y и f'_z.
3. Приравнивая полученные производные нулю, составить и решить систему уравнений. Решения этой системы, удовлетворяющие области определения функции, являются стационарными точками.
4. Найти частные производные второго порядка f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2}, f''_{xy}, f''_{xz} и f''_{yz}.
5. В каждой стационарной точке M_i, $i = 1, 2, \ldots$, вычислить значения полученных частных производных второго порядка. Эти значения будут коэффициентами второго дифференциала $d^2f(\cdot)$ — квадратичной формы от переменных dx, dy, dz, где через M_i обозначена соответствующая стационарная точка.
6. Составить матрицу квадратичной формы для каждой стационарной точки

$$\begin{pmatrix} f''_{x^2}(M_i) & f''_{xy}(M_i) & f''_{xz}(M_i) \\ f''_{xy}(M_i) & f''_{y^2}(M_i) & f''_{yz}(M_i) \\ f''_{xz}(M_i) & f''_{yx}(M_i) & f''_{z^2}(M_i) \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

и вычислить все главные миноры этой матрицы

$$\Delta_1 = f''_{x^2}(M_i), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{x^2}(M_i) & f''_{xy}(M_i) \\ f''_{xy}(M_i) & f''_{y^2}(M_i) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f''_{x^2}(M_i) & f''_{xy}(M_i) & f''_{xz}(M_i) \\ f''_{xy}(M_i) & f''_{y^2}(M_i) & f''_{yz}(M_i) \\ f''_{xz}(M_i) & f''_{yx}(M_i) & f''_{z^2}(M_i) \end{vmatrix}$$

7. Воспользоваться критерием Сильвестра.

- Если в стационарной точке M_i, $i = 1, 2, \ldots$, главные миноры матрицы удовлетворяют неравенствам

  $$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0,$$

  то $d^2f(M_i)$ является положительно определенной квадратичной формой, и функция $u = f(x, y, z)$ достигает в точке M_i строгого *минимума*.

- Если в стационарной точке M_i главные миноры матрицы удовлетворяют неравенствам

  $$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0,$$

то $d^2f(M_i)$, то $d^2f(\cdot)$ является отрицательно определенной квадратичной формой, и функция $u = f(x, y, z)$ достигает в точке M_i строгого *максимума.*

8. Ситуацию, когда критерий Сильвестра не выполняется, требуется исследовать отдельно.

Этот алгоритм практически без изменений переносится на случай произвольного числа переменных.

1.10. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных

Так же, как и в случае функции одной переменной, наибольшее и наименьшее значения функции многих переменных на некоторой области достигаются либо в точках экстремума, лежащих внутри этой области, либо на границе этой области. Поэтому **АЛГОРИТМ** нахождения наибольшего и наименьшего значений функции нескольких переменных в области Ω следующий:
1. Найти стационарные точки функции, принадлежащие области Ω, и вычислить значения функции в этих точках.
2. Исследовать функцию на границе области Ω. На каждом участке границы области найти соответствующее наибольшее и наименьшее значения функции (как правило, имеющей меньшее число переменных по сравнению с исходной функцией).
3. Из найденных значений в стационарных точках и точках границы выбрать наибольшее и наименьшее.

1.11. Условный экстремум функции нескольких переменных

Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_i(x) = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m,\ m < n)$ — непрерывно дифференцируемые функции, определенные в некоторой области $E \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим множество Ω, состоящее из точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ координаты которых удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{13}$$

Определение 20. Уравнения (13) называются *уравнениями связи.*

Определение 21. Точка $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \in \Omega$ называется *точкой минимума (максимума) функции f относительно множества* Ω, если существует окрестность точки $x^{(0)}$ — $O\left(x^{(0)}\right)$ такая, что для всех $x \in O\left(x^{(0)}\right) \cap \Omega$ выполнено неравенство $f(x) \geqslant f\left(x^{(0)}\right)$ $\left(f(x) \leqslant f\left(x^{(0)}\right)\right)$.

Так как здесь экстремум рассматривается при заданных условиях, то его называют *условным (или относительным) экстремумом* в отличие от определенного ранее, который ещё называют абсолютным экстремумом.

Снова ограничимся только случаями функций двух и трех переменных. При этом в случае функции двух переменных $z = f(x, y)$ мы можем иметь только одно уравнение связи $\varphi(x, y) = 0$, а в случае функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ возможно либо одно уравнение связи $\varphi(x, y, z) = 0$, либо два уравнения связи $\varphi(x, y, z) = 0$ и $\psi(x, y, z) = 0$.

Задача о нахождении относительного экстремума часто сводится к задаче об абсолютном экстремуме следующим образом. Если из уравнения связи можно выразить какую-то переменную, то, подставляя данное выражение в исходную функцию, получится функция на одну переменную меньше, которую и требуется исследовать на экстремум (причем здесь уже придется искать абсолютный экстремум).

Если ни одна из переменных не выражается явно из уравнений связи, то используют метод Лагранжа. Рассмотрим его суть в самом общем случае. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_i(x) = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m,\ m < n)$ — непрерывно дифференцируемые функции, определенные в некоторой области $E \subset \mathbb{R}^n$. Пусть множество Ω состоит из точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений связи $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Введем вспомогательную функцию

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x),$$

которая называется *функцией Лагранжа.* Эта функция

$$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$$

$n + m$ переменных. Требуется исследовать функцию Лагранжа на экстремум.

АЛГОРИТМ нахождения условного экстремума методом Лагранжа:

1. Составить функцию Лагранжа $L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x)$.
2. Найти ее частные производные первого порядка по всем переменным x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и приравнять их нулю.
3. К данным уравнениям добавить уравнения связи. Получим систему $n + m$ уравнений с $n + m$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$, которую требуется решить. Решения этой системы, удовлетворяющие области Ω, являются стационарными точками.
4. Найти частные производные второго порядка $L''_{x_i x_j}$. В каждой стационарной точке вычислить значения полученных частных производных второго порядка.
5. Записать полный дифференциал второго порядка d^2L для каждой стационарной точки. Этот дифференциал d^2L является квадратичной формой относительно переменных dx_i.
6. Найти полные дифференциалы первого порядка уравнений связи $d\varphi_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.
7. Исследовать квадратичную форму d^2L в каждой стационарной точке на знакоположительность или знакоотрицательность при полученных условиях $d\varphi_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

- Если в стационарной точке квадратичная форма d^2L — отрицательно определенная, то функция $f(x)$ достигает в точке *условного максимума.*

- Если в стационарной точке квадратичная форма d^2L — положительно определенная, то функция $f(x)$ достигает в точке *условного минимума.*

ВАЖНО! Для применения данного алгоритма необходимо, чтобы $\operatorname{rang}\left(\dfrac{\partial d\varphi_i(x^{(0)})}{\partial x_j}\right) = m$ или требование линейной независимости функций $\{\operatorname{grad}\varphi(x)\}_{i=1}^{m}$, где m — количество уравнений связи, а $x^{(0)}$ — стационарная точка. Если это условие не выполняется, следует использовать другие методы.

Заметим, что метод Лагранжа можно применять и в случае, когда одна из переменных выражается явно. Рассмотрим это на примере 13.

Пример 13. Найдем экстремум функции

$$u = (3 - x)(6 - y)(9 - z)$$

при условии $x+y+z=6$. Воспользуемся алгоритмом.
1. Для того чтобы составить функцию Лагранжа, преобразуем уравнение связи, оставив правую часть, равную нулю $x+y+z-6=0$, и только в таком виде можно подставить уравнение связи в функцию Лагранжа:

$$L=(3-x)(6-y)(9-z)-\lambda(x+y+z-6).$$

2. Найдем частные производные первого порядка функции L по переменным x, y, z и приравняем их нулю:
$L'_x=-(6-y)(9-z)-\lambda=0,$
$L'_y=-(3-x)(9-z)-\lambda=0,$
$L'_z=-(3-x)(6-y)-\lambda=0.$
3. Добавив уравнение связи, получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными x, y, z и λ :

$$\begin{cases} -(6-y)(9-z)=\lambda, \\ -(3-x)(9-z)=\lambda, \\ -(3-x)(6-y)=\lambda \\ x+y+z=6. \end{cases}$$

Исключаем переменную λ, приравнивая левые части первого и второго, второго и третьего уравнений:

$$\begin{cases} -(6-y)(9-z)=-(3-x)(9-z), \\ -(3-x)(9-z)=-(3-x)(6-y), \\ x+y+z=6. \end{cases}$$

В первом и втором уравнениях перенесем все в одну часть и сгруппируем, приводя подобные:

$$\begin{cases} (9-z)(y-x-3)=0, \\ (3-x)(z-y-3)=0, \\ x+y+z=6. \end{cases}$$

Учитывая, что произведение равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, данная система равносильна совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} 9-z=0, \\ 3-x=0, \\ x+y+z=6, \end{cases} \quad \begin{cases} 9-z=0, \\ z-y-3=0, \\ x+y+z=6, \end{cases}$$

$$
\begin{cases} y - x - 3 = 0, \\ 3 - x = 0, \\ x + y + z = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} y - x - 3 = 0, \\ z - y - 3 = 0, \\ x + y + z = 6. \end{cases}
$$

Решая каждую из систем, получим четыре стационарные точки $(3, -6, 9)$, $(-9, 6, 9)$, $(3, 6, -3)$, $(-1, 2, 5)$.

4. Найдем частные производные второго порядка функции L

$$
L''_{x^2} = 0,\ L''_{xy} = 9 - z,\ L''_{xz} = 6 - y,\ L''_{y^2} = 0,\ L''_{yz} = 3 - x,\ L''_{z^2} = 0.
$$

5. Запишем для нее дифференциал второго порядка:

$$
d^2L = 2(9 - z)dxdy + 2(6 - y)dxdz + 2(3 - x)dydz.
$$

6. Заметим, что дифференцал первого порядка уравнения связи имеет вид: $dx + dy + dz = 0$. Откуда $dz = -dx - dy$.

7. Исследуем знак d^2L в каждой стационарной точке.

$d^2L(3, -6, 9) = 12dxdz$. Очевидно, в зависимости от знака дифференциалов dx и dz эта квадратичная форма может быть, как положительной, так и отрицательной, то есть является неопределенной. А значит, в точке $(3, -6, 9)$ экстремума нет.

Далее, будем повторять пункт ***7*** для остальных стационарных точек.

$d^2L(-9, 6, 9) = 12dydz$. Аналогично, в зависимости от знака дифференциалов dy и dz эта квадратичная форма может быть, как положительной, так и отрицательной, то есть является неопределенной. Поэтому в точке $(-9, 6, 9)$ экстремума нет.

$d^2L(3, 6, -3) = 12dxdy$. Здесь ситуация повторяется: в зависимости от знака дифференциалов dx и dy эта квадратичная форма может быть, как положительной, так и отрицательной, то есть является неопределенной. Следовательно, в точке $(3, 6, -3)$ экстремума нет.

$d^2L(-1, 2, 5) = 8dxdy + 8dxdz + 8dydz$. Подставив выражение $dz = -dx - dy$, имеем $d^2L(-1, 2, 5) = -dx^2 - dxdy - dy^2$. Матрица квадратичной формы в этом случае принимает вид:

$$
\begin{pmatrix} -1 & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.
$$

Вычислим главные миноры этой матрицы:

$$\Delta_1 = -1 < 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0.$$

По критерию Сильвестра получаем отрицательно определенную квадратичную форму: $d^2L(-1,2,5) < 0$. Следовательно, $(-1,2,5)$ есть точка условного максимума функции $u = (3-x)(6-y)(9-z)$ при условии $x+y+z=6$. △

Сравните решение, полученное методом Лагранжа, с решением, полученным сведением задачи к отысканию абсолютного экстремума (см. разбор задачи 18 а) главы 2).

1.12. Замена переменной дифференцирования

1. *Замена переменных в выражении, содержащем обыкновенные производные.*

Пусть в выражении

$$A = \Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(k)}), \tag{14}$$

где y зависит от переменной x, требуется перейти к новым переменным t, u, приняв t за новую независимую переменную, u — функцию переменной t. Переменные x, y связаны с переменными t, u уравнениями

$$\begin{cases} x = f_1(t,u), \\ y = f_2(t,u). \end{cases} \tag{15}$$

Схема решения.

1. Найдем y':

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}. \tag{16}$$

2. Для нахождения старших производных воспользуемся операторной формулой

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dt}.$$

Тогда, например,

$$y'' = \frac{1}{\dot{x}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}. \tag{17}$$

3. Дифференцируя равенства в (15) и подставляя их в производные функции y по переменной x, получим представление этих производных в новых переменных t, u. 4. Далее, перейдем к новым переменным в исходном выражении (14).

2. *Замена переменных в выражении, содержащем частные производные.*

Ради простоты изложения ограничимся случаем функций двух переменных. Пусть в выражении

$$A = \Phi(x, y, z, z'_x, z'_y, z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{y^2}, \ldots), \tag{18}$$

где z — функция, зависящая от переменных x, y, требуется перейти к новым переменным u, v, w, где u, v — независимые переменные, а w — функция аргументов u, v. Переменные x, y, z связаны с переменными u, v, w уравнениями

$$g_i(x, y, z, u, v, w) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{19}$$

Часто формулы замены переменных (19) задаются в форме, разрешенной относительно либо старых переменных x, y, z, либо новых переменных u, v, w.

Рассмотрим эти случаи.

а) Пусть формулы замены переменных (19) имеют вид

$$\begin{cases} x = f_1\big(u, v, w(u, v)\big), \\ y = f_2\big(u, v, w(u, v)\big), \\ z = f_3\big(u, v, w(u, v)\big), \end{cases} \tag{20}$$

где f_i, $(i = 1, 2, 3)$ — функции, дифференцируемые достаточное число раз.

Схема решения.

1. Найдем частные производные первого порядка функции

$z = z\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ по переменным u и v, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned} \tag{21}$$

2. Решив систему (21) относительно неизвестных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}}. \end{aligned} \tag{22}$$

3. Продифференцируем равенства в (20) и подставим в (22). Для нахождения производных более высокого порядка функции $z = z(x,y)$, следует продиффиренцировать выражения $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
4. Далее, в исходном выражении (18) перейдем к новым переменным u, v, w.
б) Пусть теперь формулы замены переменных (19) имеют вид

$$\begin{cases} u = f_1(x, y, z(x,y)), \\ v = f_2(x, y, z(x,y)), \\ w = f_3(x, y, z(x,y)), \end{cases} \tag{23}$$

где f_i, $(i = 1, 2, 3)$ — функции, дифференцируемые достаточное число раз.

Схема решения.
1. Найдем частные производные первого порядка функции $w = w(u(x,y), v(x,y))$ по переменным x и y, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \tag{24}$$

2. Дифференцируя первые два равенства в (23), найдем $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ и подставим в (24).

3. С другой стороны, вычислим $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, дифференцируя последнее равенство в (23):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}. \end{aligned} \tag{25}$$

4. Приравнивая $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ из равенств (24), (25), выразим $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Для нахождения производных более высокого порядка функции $z = z(x, y)$, следует продиффиренцировать выражения $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5. Далее, в исходном выражении (18) перейдем к новым переменным u, v, w.

2. Разбор типовых заданий с методическими рекомендациями

В данном разделе даются методические рекомендации по решению и оформлению индивидуальных заданий для студентов, приведенные в третьей части данного пособия.

1. *Дать расшифровку на языке $\varepsilon - N$ определения предела последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где x_n, $a \in X$ — метрическое пространство.*

Решение.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : n > N\ \ \Rightarrow \rho(x_n, a) < \varepsilon,$$

где $\rho\,(x_n, a)$ — расстояние (метрика) между точками последовательности x_n и a.

2. Дана функция

$$u = \sqrt{1 - |x| - |y|}.$$

а) Определить и изобразить область существования функции.
б) Построить линии уровня.

Решение. *а)* Область существования функции u определяется условием $1 - |x| - |y| \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ |x| + |y| \leqslant 1$. Граница этой области задается уравнением $|x| + |y| = 1$. Раскроем модули. Имеем в первой координатной четверти ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$): $x + y = 1$, во второй ($x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$): $-x + y = 1$, в третьей ($x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$): $-x - y = 1$, в четвертой ($x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$): $x - y = 1$. Будем строить прямые, заданные полученными уравнениями, в соотвествующих координатных четвертях. Линия $|x| + |y| = 1$ разбивает плоскость на 2 части: внутренность квадрата и за его пределами.

Для нахождения требуемого множества воспользуемся методом пробной точки. Возьмем точку, например, с координатами $(0, 0)$. Подставим $x = 0$, $y = 0$ в неравенство $|x| + |y| \leqslant 1$, получим $0 \leqslant 1$, противоречий нет. Следовательно, точка $(0, 0)$ «лежит внутри» замкнутой линии $|x| + |y| = 1$. В общем случае все точки, удовлетворяющие неравенству $|x| + |y| \leqslant 1$, являются либо внутренними либо граничными точками множества $|x| + |y| \leqslant 1$. Построим искомую область существования функции u (см. рис. 4).

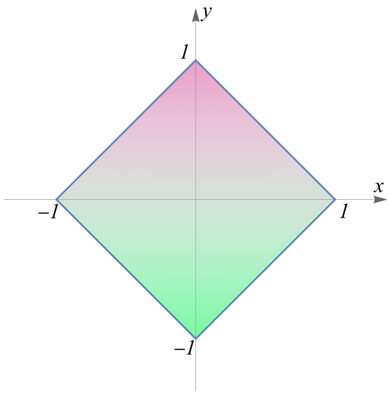

Рис. 4. Множество точек, удовлетворяющих неравенству $|x| + |y| \leqslant 1$

б) По определению 1 п. 1.1 уравнение линии уровня функции $u = \sqrt{1 - |x| - |y|}$ имеет вид $\sqrt{1 - |x| - |y|} = C$ или $|x| + |y| = 1 - C^2$, $C \in [-1, 1]$. Построим линии уровня для некоторых C, например, $C = 0$, $C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $C = 1$ (см. рис. 5)

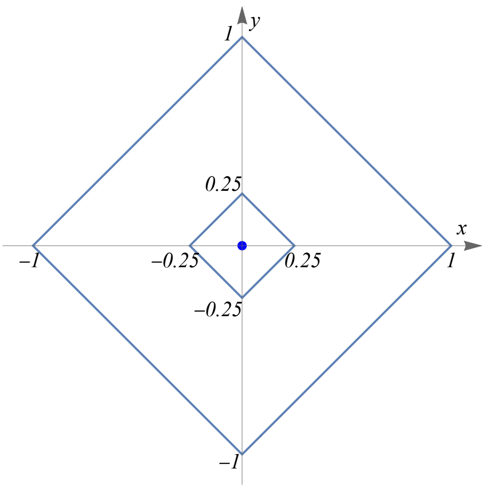

Рис. 5. Линии уровня функции $u = \sqrt{1 - |x| - |y|}$

3. *а) Найти двойной предел:* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^6+y^4}$;

б) Исследовать на непрерывность функцию

$$u = \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}.$$

Решение. *а)* Вычислим предел, оценивая функцию, стоящую под знаком предела, сверху и снизу:

$$0 \leqslant \frac{x^2+y^2}{x^6+y^4} = \frac{x^2}{x^6+y^4} + \frac{y^2}{x^6+y^4} \leqslant \frac{x^2}{x^6} + \frac{y^2}{y^4} = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^2}.$$

Используя арифметические свойство 1 предела п. 1.2, получаем, что

$$0 \leqslant \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^6+y^4} \leqslant \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{1}{x^4} + \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{1}{y^2} = 0.$$

Таким образом, по принципу двух милиционеров получаем, что данный предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^6+y^4} = 0$.

б) Точками, подозрительными на разрыв, являются точки, при которых обращается в нуль знаменатель, то есть $x = y$. Заметим, что числитель и знаменатель функции можно разложить на множители и сократить:

$$u = \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}.$$

При $x = y \neq 0$ функция принимает вид $u = \dfrac{2x}{3x^2} = \dfrac{2}{3x}$, которая является непрерывной при всех $x \neq 0$.

Следовательно, (x, x), где $x \neq 0$ — точки устранимого разрыва.

Пусть теперь $x = y = 0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{3x} = \infty$, то точка $(0, 0)$ является точкой разрыва второго рода.

4. *Найти частные производные до второго порядка включительно для функции* $z = x^y$.

Решение. Вычисляя частную производную этой функции по переменной x, переменную y считаем постоянной. Тогда функция $z = x^y$ в этом случае является степенной и ее производная равна $z'_x = yx^{y-1}$. Вычисляя частную производную функции по переменной y, переменную x считая постоянной, получим показательную функцию и ее производная равна $z'_y = x^y \ln x$.

Чтобы найти частную производную второго порядка по переменной x, продифференцируем функцию z'_x по переменной x: $z''_{x^2} = \left(yx^{y-1}\right)'_x = y(y-1)x^{y-2}$. Аналогично
$z''_{xy} = \left(yx^{y-1}\right)'_y = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = z''_{yx}$,
$z''_{y^2} = \left(x^y \ln x\right)'_y = x^y \ln^2 x$.
Заметим, что частные производные первого порядка z'_x и z'_y непрерывны, поэтому смешанные производные второго порядка совпадают.

5. *Найти дифференциалы первого и второго порядков функции*

$$u = \left(\frac{x}{y}\right)^z.$$

Решение. Функция u является непрерывной функцией. Дифференциалы первого и второго порядка непрерывной функции u будем вычислять по формулам (4.2), (6) определений 13, 14 соответственно. Найдем частные производные первого порядка функции u и упростим их:

$$u'_x = z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \cdot \frac{1}{y} = \frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1},$$
$$u'_y = z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z},$$
$$u'_z = \left(\frac{x}{y}\right)^{z} \cdot \ln\frac{x}{y}.$$

ВАЖНО! Перед нахождением производных второго порядка следует максимально упростить производные первого порядка.

Подставляя найденные производные в формулу (4.2), получим первый дифференциал функции u:

$$du = \frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} dx - \frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z} dy + \left(\frac{x}{y}\right)^{z} \cdot \ln\frac{x}{y} dz.$$

Вычислим частные производные второго порядка функции u и упростим их:

$$u''_{x^2} = \frac{z}{y}\cdot(z-1)\left(\frac{x}{y}\right)^{z-2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z},$$

$$u''_{y^2} = -\left(-\frac{z}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z} + \frac{z}{y}z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right) = \frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z},$$

$$u''_{z^2} = \ln\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\ln\frac{x}{y} = \ln^2\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z},$$

$$u''_{xy} = -\frac{z}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} + \frac{z}{y}(z-1)\left(\frac{x}{y}\right)^{z-2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{z^2}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1},$$

$$u''_{yz} = -\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z} - \frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\ln\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right),$$

$$u''_{xz} = \frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} + \frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\ln\frac{x}{y} = \frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right).$$

Подставляя найденные производные в формулу (6), получим второй дифференциал функции u

$$d^2u = \frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z} dx^2 + \frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z} dy^2 + \ln^2\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z} dz^2 -$$
$$- \frac{2z^2}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} dxdy - \frac{2}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right) dydz +$$
$$+ \frac{2}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(1+z\ln\frac{x}{y}\right) dxdz.$$

6. *Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции*

$$u = \varphi(x+y, z^2),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

Решение. Запишем данную функцию как $u = \varphi(t, v)$, где $t = x + y$, $v = z^2$. Используя эти обозначения, вычислим производные первого первого порядка функции u

$$u'_x = \varphi'_t \cdot t'_x + \varphi'_v \cdot v'_x = \varphi'_t \cdot 1 + \varphi'_v \cdot 0 = \varphi'_t,$$
$$u'_y = \varphi'_t \cdot t'_y + \varphi'_v \cdot v'_y = \varphi'_t \cdot 1 + \varphi'_v \cdot 0 = \varphi'_t,$$
$$u'_z = \varphi'_t \cdot t'_z + \varphi'_v \cdot v'_z = \varphi'_t \cdot 0 + \varphi'_v \cdot 2z = 2z\varphi'_v.$$

Подставляя производные в формулу (4.2), получим

$$du = \varphi'_t dx + \varphi'_t dy + 2z\varphi'_v dz.$$

Вычислим производные второго порядка функции u

$$u''_{x^2} = \varphi''_{t^2} \cdot t'_x + \varphi''_{tv} \cdot v'_x = \varphi''_{t^2} \cdot 1 + \varphi''_{tv} \cdot 0 = \varphi''_{t^2},$$
$$u''_{y^2} = \varphi''_{t^2} \cdot t'_y + \varphi''_{tv} \cdot v'_y = \varphi''_{t^2} \cdot 1 + \varphi''_{tv} \cdot 0 = \varphi''_{t^2},$$
$$u''_{z^2} = 2\varphi'_v + 2z(\varphi''_{vt} \cdot t'_z + \varphi''_{v^2} \cdot v'_z) = 2\varphi'_v + 2z(\varphi''_{tv} \cdot 0 + \varphi''_{v^2} \cdot 2z) =$$
$$= 2\varphi'_v + 4z^2\varphi''_{v^2},$$
$$u''_{xy} = \varphi''_{t^2} \cdot t'_y + \varphi''_{tv} \cdot v'_y = \varphi''_{t^2} \cdot 1 + \varphi''_{tv} \cdot 0 = \varphi''_{t^2},$$
$$u''_{xz} = \varphi''_{t^2} \cdot t'_z + \varphi''_{tv} \cdot v'_z = \varphi''_{t^2} \cdot 0 + \varphi''_{tv} \cdot 2z = 2z\varphi''_{tv},$$
$$u''_{yz} = u''_{xz} = 2z\varphi''_{tv}.$$

Подставляя производные второго порядка в формулу (6), получим

$$d^2u = \varphi''_{t^2} dx^2 + \varphi''_{t^2} dy^2 + (2\varphi'_v + 4z^2\varphi''_{v^2})dz^2 +$$
$$+ 2\varphi''_{t^2} dxdy + 4z\varphi''_{tv} dxdz + 4z\varphi''_{tv} dydz.$$

7. *Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, заданной неявно $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y} + 1$.*

Решение. Для нахождения z'_x продифференцируем обе части равенства $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y} + 1$ по переменной x, учитывая, что функция z зависит от x, получим

$$\frac{z - xz'_x}{z^2} = \frac{y}{z} \cdot \frac{z'_x}{y}. \tag{26}$$

Выразим из последнего равенства z'_x:

$$\frac{1}{z}-\frac{xz'_x}{z^2}-\frac{z'_x}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{z'_x}{z}\left(\frac{x}{z}+1\right)=\frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{z'_x}{z^2}(x+z)=\frac{1}{z},$$
$$z'_x=\frac{z}{x+z}.$$

Для нахождения z'_y продифференцируем обе части равенства $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}+1$ по переменной y, учитывая, что функция z зависит от y, получим

$$-\frac{x}{z^2}\cdot z'_y=\frac{y}{z}\left(\frac{z'_y y-z}{y^2}\right). \tag{27}$$

Выразим из последнего равенства z'_y:

$$-\frac{x}{z^2}\cdot z'_y=\frac{z'_y y-z}{yz} \Leftrightarrow -\frac{x}{z^2}\cdot z'_y-\frac{z'_y}{z}+\frac{1}{y}=0 \Leftrightarrow z'_y\left(\frac{x}{z^2}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{y},$$
$$z'_y=\frac{z^2}{y(x+z)}.$$

ВАЖНО! Если требуется найти производные 2-го порядка функции z, заданной неявно, то нужно будет продифференцировать равенства (26), (27) по соответствующей переменной x или y, учитывая, что z, z'_x, z'_y — это функции от этих переменных.

8. *Найти* $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, *если* $\begin{cases} x^2+y^2-2z=1, \\ x+xy+y+z=1. \end{cases}$

Решение. Учитывая, что $x=x(z)$, $y=y(z)$, продифференцируем каждое уравнение системы по z:

$$\begin{cases} 2x\cdot x'_z+2y\cdot y'_z-2=0, \\ x'_z+x'_z y+xy'_z+y'_z+1=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot x'_z+y\cdot y'_z=1, \\ x'_z+x'_z y+xy'_z+y'_z=-1. \end{cases}$$

Найдем решение полученной линейной системы уравнений относительно неизвестных x'_z, y'_z, например, методом Крамера. Вычислим определитель матрицы системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} x & y \\ 1+y & 1+x \end{vmatrix}=x(x+1)-y(y+1)=x^2+x-y^2-y.$$

Вычислим величину Δ_1, как определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой первого столбца на вектор правой части:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & y \\ -1 & 1+x \end{vmatrix} = 1 + x + y.$$

Аналогично Δ_1 вычислим Δ_2:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1+y & -1 \end{vmatrix} = -x - y - 1.$$

Тогда решение системы уравнений примет вид

$$x'_z = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1+x+y}{x^2+x-y^2-y} = \frac{1+x+y}{(1+x+y)(x-y)} = \frac{1}{x-y},$$
$$y'_z = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-1-x-y}{x^2+x-y^2-y} = -\frac{1}{x-y}.$$

9. *Показать, что функция*

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$$

(a и x_0 — числа) удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Решение. Вычислим левую часть уравнения, т.е. продифференцируем функцию $u = u(t, x)$ по переменной t:

$$u'_t = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{2(\sqrt{t})^3} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} \frac{(x-x_0)^2}{4a^2t^2} \right) =$$
$$= \frac{1}{4at\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} \left(-1 + \frac{(x-x_0)^2}{2a^2t} \right).$$

Для нахождения правой части заданного уравнения продифференцируем функцию $u = u(t, x)$ дважды по переменной x:

$$u'_x = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} \left(\frac{-2(x-x_0)}{4a^2t} \right) = -\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}} (x-x_0) e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}},$$

$$u''_{x^2} = -\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}} \left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} + (x-x_0) e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} \left[-\frac{2(x-x_0)}{4a^2t} \right] \right) =$$
$$= -\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} \left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2t} \right) =$$
$$= \frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} \left(-1 + \frac{(x-x_0)^2}{2a^2t} \right)$$

Подставляя u'_t, u''_{x^2} в уравнение, приходим к тождеству. Таким образом, функция u удовлетворяет уравнению теплопроводности.

10. *Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ если } u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y).$$

Решение. Вычислим частные производные вторых порядков функции u. Заметим, что функции φ и ψ зависят от одной переменной $t = x + y$, поэтому опустим нижний индекс у φ' и ψ'.

$$u'_x = \varphi(x+y) + x\varphi'(x+y)\cdot(x+y)'_x + y\psi'(x+y)\cdot(x+y)'_x =$$
$$= \varphi(x+y) + x\varphi'(x+y) + y\psi'(x+y),$$
$$u''_{x^2} = \varphi'(x+y)\cdot(x+y)'_x + \varphi'(x+y) + x\varphi''(x+y)\cdot(x+y)'_x +$$
$$+ y\psi''(x+y)\cdot(x+y)'_x = \varphi'(x+y) + \varphi'(x+y) + x\varphi''(x+y) +$$
$$+ y\psi''(x+y) = 2\varphi'(x+y) + x\varphi''(x+y) + y\psi''(x+y),$$
$$u''_{xy} = \varphi(x+y)\cdot(x+y)'_y + x\varphi''(x+y)\cdot(x+y)'_y + \psi'(x+y) +$$
$$+ y\psi''(x+y)\cdot(x+y)'_y =$$
$$= \varphi'(x+y) + \psi'(x+y) + x\varphi''(x+y) + y\psi''(x+y),$$

$$u'_y = x\varphi'(x+y)\cdot(x+y)'_y + \psi(x+y) + y\psi'(x+y)\cdot(x+y)'_y =$$
$$= x\varphi'(x+y) + \psi(x+y) + y\psi'(x+y),$$
$$u''_{y^2} = x\varphi''(x+y)\cdot(x+y)'_y + \psi'(x+y)\cdot(x+y)'_y + \psi'(x+y) +$$
$$+ y\psi''(x+y)\cdot(x+y)'_y = x\varphi''(x+y) + \psi'(x+y) + \psi'(x+y) +$$
$$+ y\psi''(x+y) = 2\psi'(x+y) + x\varphi''(x+y) + y\psi''(x+y).$$

Подставляя u''_{x^2}, u''_{xy}, u''_{y^2} в исходное дифференциальное уравнение, получим тождество

$$2\varphi'(x+y) + x\varphi''(x+y) + y\psi''(x+y) -$$
$$- 2\left(\varphi'(x+y) + \psi'(x+y) + x\varphi''(x+y) + y\psi''(x+y)\right) +$$
$$+ 2\psi'(x+y) + x\varphi''(x+y) + y\psi''(x+y) = 0 \Leftrightarrow 0 \equiv 0.$$

11. *Исследовать на дифференцируемость в точке* $(0,0)$ *функцию а)* $z(x,y) = \sin(x+y)$; *б)* $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.

Решение. Исследование функции на дифференцируемость в точке будем проводить, следуя алгоритму, приведенному п. 1.6.

а) ***1.*** Заметим, что $z(0,0) = 0$.

2. Вычислим приращение функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$:

$$\Delta z(0,0) = z(\Delta x, \Delta y) - z(0,0) = \sin(\Delta x + \Delta y).$$

3. Найдем частные производные первого порядка в точке $(0,0)$:

$$z'_x(x,y) = z'_y(x,y) = \cos(x+y),\ \ z'_x(0,0) = z'_y(0,0) = 1.$$

Тогда

$$Dh = \Delta x + \Delta y.$$

4. Осталось проверить асимптотическое равенство

$$\sin(\Delta x + \Delta y) = \Delta x + \Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)\ \ (\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0).$$

Так как $\sin\alpha = \alpha + o(\alpha)$ при $\alpha \to 0$, то $\sin(\Delta x + \Delta y) = \Delta x + \Delta y + o\,(\Delta x + \Delta y)$ $(\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0)$. А значит, надо проверить, что

$o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right) = o\left(\Delta x+\Delta y\right)\;\; (\Delta x \to 0,\; \Delta y \to 0)$ или что стоящие под знаком "o" функции одного порядка малости, то есть $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = O^*\left(\Delta x+\Delta y\right)\;\; (\Delta x \to 0,\; \Delta y \to 0)$. Для этого рассмотрим

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x+\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

и покажем, что он конечен.

$$0 \leqslant \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{|\Delta x+\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \sqrt{\frac{\left(\Delta x+\Delta y\right)^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \sqrt{1+\frac{2\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}}.$$

В силу неравенства $2ab \leqslant a^2+b^2$ имеем $\dfrac{2\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2} \leqslant 1$. Следовательно, правая часть в пределе не превосходит $\sqrt{2}$. Таким образом, получаем, что

$$0 \leqslant \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{|\Delta x+\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \leqslant \sqrt{2},$$

а значит, конечен.

5. Тогда асимптотическое равенство при $\Delta x \to 0,\; \Delta y \to 0$

$$\sin(\Delta x+\Delta y) = \Delta x+\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$$

верно и данная функция дифференцируема в точке $(0,0)$.

б) ***1.*** Заметим, что $f(0,0)=0$.

2. Вычислим приращение функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$:

$$\Delta f(0,0) = f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) = \sqrt[3]{\Delta x^3+\Delta y^3}.$$

3. Найдем частные производные первого порядка в точке $(0,0)$:

$$f'_x(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}},\;\; f'_y(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}.$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} f'_x(x,0) = 1,\ \ f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} f'_y(0,y) = 1.$$

Тогда

$$Dh = \Delta x + \Delta y.$$

4. Осталось проверить асимптотическое равенство

$$\Delta f(x_0, y_0) = \Delta x + \Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)\ \ (\Delta x \to 0,\ \ \Delta y \to 0).$$

Для этого по определению "o" надо показать, что

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} - (\Delta x + \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

5. Легко видеть, что при $\Delta y = \Delta x$ этот предел отличен от нуля, а значит, данная функция недифференцируема в точке $(0,0)$.

12. *а) В уравнении $y''(y')^{-3} - x = 0$ принять y за новую независимую переменную, а x — за новую функцию.*
б) В уравнении $(1+x^2)^2 y'' = y$ перейти к новым переменным t и u, где $u = u(t)$, если $x = \operatorname{tg} t$, $y = \dfrac{u}{\cos t}$.

Решение. *а)* Введем новые переменные t и u ($u = u(t)$): $t = y$, $u = x$. Продифференцируем эти равенства по t: $1 = \dot y$, $\dot u = \dot x$. Учитывая эти соотношения из (16), (17) получим:

$$y' = \frac{1}{\dot u}, \quad y'' = -\frac{\ddot u}{\dot u^3}.$$

Переходя к новым переменным в исходном уравнении, получим

$$-\frac{\ddot u}{\dot u^3} \cdot \left(\frac{1}{\dot u}\right)^{-3} - u = 0.$$

После преобразований уравнение примет вид $\ddot u + u = 0$.

б) Снова имеем функцию $y = y(x)$, а требуется получить $u = u(t)$. Продифференцируем по t выражения x, y, заданные по формулам замены переменных, получим

$$\dot x = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad \dot y = \frac{\dot u \cos t + u \sin t}{\cos^2 t}.$$

Тогда y', y'' найдём по формулам (16), (17):

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{u}\cos t + u\sin t,$$
$$y'' = \frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dt}(\dot{u}\cos t + u\sin t) = \cos^3 t(\ddot{u} + u).$$

Переходя к новым переменным в исходном уравнении, получим

$$(1 + \operatorname{tg}^2 t)^2 \cos^3 t(\ddot{u} + u) = \frac{u}{\cos t}.$$

После преобразований уравнение примет вид $\ddot{u} = 0$.

13. *а) Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

если

$$u = x, \quad v = x + y, \quad w = x + y + z. \tag{28}$$

б) В уравнении $\left(x\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}$ перейти к переменным u, v, w, где $w = w(u,v)$, если

$$x = ue^w, \quad y = ve^w, \quad z = we^w. \tag{29}$$

Решение. *а)* Требуется осуществить переход от функции $z = z(x,y)$ к функции $w = w(u,v)$. Из равенства (28) вытекает, что $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, следовательно, $w = w\big(u(x,y), v(x,y)\big)$. Продифференцируем функцию $w = w\big(u(x,y), v(x,y)\big)$ по переменным x и y, получим

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x, \quad w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y. \tag{30}$$

Частные производные u'_x, v'_x, u'_y, v'_y в равенстве (30) найдем, дифференцируя первые 2 равенства в (28)

$$u'_x = 1, \quad v'_x = 1, \quad u'_y = 0, \quad v'_y = 1.$$

Подставим их в равенство (30), получим

$$w'_x = w'_u + w'_v, \quad w'_y = w'_v. \tag{31}$$

С другой стороны, дифференцируя третье равенство в (28) по переменным x и y и учитывая, что $z = z(x, y)$, получим

$$w'_x = 1 + z'_x, \quad w'_y = 1 + z'_y. \tag{32}$$

Приравняем w'_x, w'_y из равенств (31), (32) и выразим z'_x, z'_y:

$$\begin{cases} w'_u + w'_v = 1 + z'_x, \\ w'_v = 1 + z'_y, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z'_x = w'_u + w'_v - 1, \\ z'_y = w'_v - 1. \end{cases}$$

Найдем вторые производные функции z, дифференцируя z'_x, z'_y,

$$z''_{x^2} = w''_{u^2} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x + w''_{vu} \cdot u'_x + w''_{v^2} \cdot v'_x = w''_{u^2} + 2w''_{uv} + w''_{v^2},$$
$$z''_{yx} = w''_{vu} \cdot u'_x + w''_{v^2} \cdot v'_x = w''_{vu} + w''_{v^2},$$
$$z''_{y^2} = w''_{vu} \cdot u'_y + w''_{v^2} \cdot v'_y = w''_{v^2}.$$

и подставим в исходное уравнение

$$w''_{u^2} + 2w''_{uv} + w''_{v^2} - 2(w''_{vu} + w''_{v^2}) + \left(1 + \frac{x}{y}\right) w''_{v^2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$w''_{u^2} - w''_{v^2} + \frac{v}{u} w''_{v^2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$w''_{u^2} - \left(1 - \frac{v}{u}\right) w''_{v^2} = 0.$$

б) Для нахождения z'_x, z'_y по формулам (22) продифференцируем равенства в (29) по переменным u и v:

$$\begin{aligned} x'_u &= e^w(1 + uw'_u), & x'_v &= ue^w w'_v, \\ y'_u &= ve^w w'_u, & y'_v &= e^w(1 + vw'_v), \\ z'_u &= e^w(1 + w)w'_u, & x'_v &= e^w(1 + w)w'_v. \end{aligned}$$

Тогда после преобразований z'_x, z'_y примут вид

$$z'_x = \frac{(1 + w)w'_u}{1 + vw'_v + uw'_u}, \quad z'_y = \frac{(1 + w)w'_v}{1 + vw'_v + uw'_u}.$$

Далее, в исходном уравнении перейдем к новым переменным u, v, w:

$$\frac{u^2(1+w)^2e^{2w}(w'_u)^2+v^2(1+w)^2e^{2w}(w'_v)^2}{(1+vw'_v+uw'_u)^2}=\frac{w^2e^{2w}(1+w)^2w'_uw'_v}{(1+vw'_v+uw'_u)^2}.$$

После преобразований уравнение примет вид

$$(uw'_u)^2+(vw'_v)^2=w^2w'_uw'_v.$$

14. *Найти производную функции* $f(x,y)=3x^4+y^3+xy$ *в точке* $A(1,2)$ *по направлению луча, образующего угол* 135° *с осью* OX.

Решение. Производная функции $f(x,y)$ в точке A по направлению луча ℓ вычислим по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_A\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_A\cdot\cos\beta, \qquad (33)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ — направляющие косинусы вектора ℓ, то есть косинусы углов, которые вектор ℓ образует с осями Ox, Oy соответственно. Вычислим их. По условию задачи угол $\alpha=135^\circ$, очевидно, что угол $\beta=45^\circ$. Тогда $\cos\alpha=\cos 135^\circ=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Вычислим производные функции $f(x,y)$ по x и y, получим

$$f'_x\Big|_A=12x^3+y\Big|_{(1,2)}=12\cdot 1^3+2=14,$$
$$f'_y\Big|_A=3y^2+x\Big|_{(1,2)}=3\cdot 2^2+2=13.$$

По формуле (33) найдем производную исходной функции в точке $A(1,2)$ по направлению луча ℓ, образующего угол 135° с осью OX, получим

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}=14\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+13\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

15. *а) Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой* $x=t$, $y=2t^2$, $z=-2t^4$ *в заданное точке* $(1,2,-2)$.

б) Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $e^z - z + xy = 3$ в заданной точке $(2, 1, 0)$.

Решение. *а)* Уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t) \end{cases}$ в точке (x_0, y_0, z_0) имеют вид (9), (10).

Вычислим t_0. Имеем $(t_0, 2t_0^2, -2t_0^4) = (1, 2, -2)$, это равенство верно при $t_0 = 1$. Найдем производные заданной кривой:

$$x' = 1, \quad y' = 4t, \quad z = -8t^3$$

и вычислим их значения в точке $t_0 = 1$

$$x'(1) = 1, \quad y'(1) = 4, \quad z'(1) = -8.$$

Запишем уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к заданной кривой в точке $(1, 2, -2)$

$$x - 1 = \frac{y-2}{4} = -\frac{z+2}{8},$$
$$x - 1 + 4(y-2) - 8(z+2) = 0 \quad \text{или} \quad x + 4y - 8z - 25 = 0.$$

б) Если поверхность задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности имеют вид (11), (12).

Вычислим частные производные исходной функции, заданной в неявном виде выражением $F(x, y, z) = e^z - z + xy - 3$:

$$F'_x = y, \quad F_y = x, \quad F_z = e^z - 1.$$

Найдем их значения в точке $(2, 1, 0)$

$$F'_x(2, 1, 0) = 1, \quad F'_y(2, 1, 0) = 2, \quad F_z(2, 1, 0) = 0.$$

Запишем уравнение касательной плоскости и нормали в точке $(2, 1, 0)$ поверхности $e^z - z + xy = 3$:

$$x - 2 + 2(y-1) = 0 \quad \text{или} \quad x + 2y - 4 = 0,$$
$$x - 2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}.$$

16. *Исследовать на экстремум функцию*

$$f(x, y) = \sin 2x + \cos 3y \text{ *при* } 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ \ 0 \leqslant y \leqslant \pi.$$

Решение. Исследование функции на экстремум будем проводить, следуя алгоритму, приведенному в п. 1.9.

1. Данная функция определена на всей координатной плоскости OXY, а значит, и в заданном квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.
2. Вычислим частные производные первого порядка $f'_x = 2\cos 2x,\ f'_y = -3\sin 3y$.
3. Приравняем f'_x, f'_y нулю:

$$\begin{cases} 2\cos 2x = 0, \\ -3\sin 3y = 0. \end{cases}$$

Решение этой систем имеет вид: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n\pi}{2}$, $y = \dfrac{k\pi}{3}$, $n, k \in \mathbb{Z}$. Учитывая неравенства $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, получаем 4 стационарные точки: $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ и $\left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$.
4. Найдем теперь частные производные второго порядка: $f''_{x^2} = -4\sin 2x,\ f''_{xy} = 0,\ f''_{y^2} = -9\cos 3y$.
5. Вычислим A, B, C и Δ для каждой стационарной точки. Рассмотрим точку $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$: $A = f''_{x^2}\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right) = -4$, $B = f''_{xy}\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$, $C = f''_{y^2}\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right) = 9$, $\Delta = AC - B^2 = -36 < 0$.
6. Следовательно, в точке $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ экстремума нет.

Далее, будем повторять действия ***4***, ***5***, ***6*** алгоритма для остальных стационарных точек.

Аналогично, в точке $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$: $A = f''_{x^2}\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}\right) = -4$, $B = 0$, $C = f''_{y^2}\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}\right) = -9$, $\Delta = AC - B^2 = 36 > 0$. В силу $A < 0$ в точке $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ получаем максимум функции, значение которого равно $f\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}\right) = 2$.

Исследуем точку $\left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$. Имеем $A = f''_{x^2}\left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right) = 4$, $B = 0$, $C = f''_{y^2}\left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right) = 9$, $\Delta = AC - B^2 = 36 > 0$. Так как $A > 0$, то точка $\left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ минимума со значением функции равным $f\left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right) = -2$.

Для точки $\left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ получаем $A = f''_{x^2}\left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}\right) = 4$, $B = 0$, $C = f''_{y^2}\left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}\right) = -9$, $\Delta = AC - B^2 = -36 < 0$. Следовательно, точка $\left(\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ не является экстремальной точкой.

17. *Исследовать на экстремум функцию*
а) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xz - 2yz + 2x + 2y - 4z - 3$;
б) $f(x, y, z) = xy\,(1 - x - 2y + 4z) - 2z^2$.
Если экстремума в точке нет, убедиться в этом с помощью определения.

Решение. Исследование функции на экстремум будем проводить, следуя алгоритму, приведенному в п. 1.9.

а) ***1.*** Область определения функции: $\mathbb{R}^3$.
2. Найдем её частные производные первого порядка:
$u'_x = 2x - 2z + 2$, $u'_y = 2y - 2z + 2$, $u'_z = 8z - 2x - 2y - 4$.
3. Приравняем нулю u'_x, u'_y, u'_z

$$\begin{cases} 2x - 2z + 2 = 0, \\ 2y - 2z + 2 = 0, \\ 8z - 2x - 2y - 4 = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x - z + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0, \\ -x - y + 4z - 2 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе уравнение, имеем равенство $y = x$, подставляя которое в первое и третье уравнения, получаем систему:

$$\begin{cases} x = y \\ x - z + 1 = 0 \\ -2x + 4z - 2 = 0 \end{cases} .$$

Умножая второе уравнение системы на 2 и складывая с третьим, получаем $z = 0$. Откуда $x = y = -1$. Таким образом, имеем единственную стационарную точку: $(-1, -1, 0)$.
4. Найдем частные производные второго порядка: $u''_{x^2} = 2$, $u''_{y^2} = 2$, $u''_{z^2} = 8$, $u''_{xy} = 0$, $u''_{xz} = -2$ и $u''_{yz} = -2$.
5. Частные производные второго порядка постоянны.
6. Матрица квадратичной формы будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные миноры этой матрицы:

$$\Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 16.$$

7. Так как все главные миноры $\Delta_i > 0$ при $i = 1, 2, 3$, то по критерию Сильвестра данная квадратичная форма является положительно определенной, то есть $d^2u > 0$. А значит, точка $(-1, -1, 0)$ — это точка минимума этой функции со значением равным $u(-1, -1, 0) = -5$.

б) ***1.*** Данная функция также определена при любых переменных x, y и z.
2. Найдем её частные производные первого порядка $u'_x = y(1 - 2x - 2y + 4z)$, $u'_y = x(1 - x - 4y + 4z)$, $u'_z = 4xy - 4z$.
3. Приравняем u'_x, u'_y, u'_z нулю

$$\begin{cases} y(1 - 2x - 2y + 4z) = 0, \\ x(1 - x - 4y + 4z) = 0, \\ 4xy - 4z = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1 - 2x - 2y + 4z) = 0, \\ x(1 - x - 4y + 4z) = 0, \\ z = xy. \end{cases}$$

Учитывая, что произведение равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, имеем совокупность четырех систем:

$$\begin{cases} y = 0, \\ x = 0, \\ z = xy, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ 1 - x - 4y + 4z = 0, \\ z = xy, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-2x-2y+4z=0, \\ x=0, \\ z=xy, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-2x-2y+4z=0, \\ 1-x-4y+4z=0, \\ z=xy. \end{cases}$$

Решая каждую из полученных систем, имеем пять стационарных точек: $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$, $\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\right)$.

4. Найдем частные производные второго порядка: $u''_{x^2} = -2y$, $u''_{y^2} = -4x$, $u''_{z^2} = -4$, $u''_{xy} = 1-2x-4y+4z$, $u''_{xz} = 4y$ и $u''_{yz} = 4x$.

5. Рассмотрим первую стационарную точку $(0,0,0)$. Частные производные второго порядка в точке $(0,0,0)$ равны $u''_{x^2} = 0$, $u''_{y^2} = 0$, $u''_{z^2} = -4$, $u''_{xy} = 1$, $u''_{xz} = 0$ и $u''_{yz} = 0$.

6. Тогда соответствующая матрица квадратичной формы будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные миноры этой матрицы:

$$\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 4.$$

7. Так как критерий Сильвестра не выполняется, то данная квадратичная форма не является положительно или отрицательно определенной. В силу того что $\Delta_2 < 0$, то по критерию неопределенной формы данная квадратичная форма является неопределенной. А значит, в точке $(0,0,0)$ экстремума нет.

Далее, будем повторять действия ***5***, ***6***, ***7*** алгоритма для остальных стационарных точек.

Частные производные второго порядка в стационарной точке $(1,0,0)$ равны $u''_{x^2} = 0$, $u''_{y^2} = -4$, $u''_{z^2} = -4$, $u''_{xy} = -1$, $u''_{xz} = 0$ и $u''_{yz} = 4$, тогда соответствующая матрица квадратичной формы будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные миноры этой матрицы:

$$\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -1,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 4.$$

Так как критерий Сильвестра не выполняется, то данная квадратичная форма не является положительно или отрицательно определенной. В силу того что $\Delta_2 < 0$, то по критерию неопределенной формы данная квадратичная форма является неопределенной. А значит, в точке $(1, 0, 0)$ экстремума нет.

Частные производные второго порядка в стационарной точке $\left(0, \dfrac{1}{2}, 0\right)$ равны $u''_{x^2} = -1$, $u''_{y^2} = 0$, $u''_{z^2} = -4$, $u''_{xy} = -1$, $u''_{xz} = 2$ и $u''_{yz} = 0$, тогда соответствующая матрица квадратичной формы будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные миноры этой матрицы:

$$\Delta_1 = -1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 4.$$

Так как критерий Сильвестра не выполняется, то данная квадратичная форма не является положительно или отрицательно определенной. В силу критерия неопределенной формы данная квадратичная форма является неопределенной. А значит, в точке $\left(0, \dfrac{1}{2}, 0\right)$ экстремума нет.

Частные производные второго порядка в четвертой стационарной точке $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ равны $u''_{x^2} = -1$, $u''_{y^2} = -4$, $u''_{z^2} = -4$, $u''_{xy} = -1$, $u''_{xz} = 2$ и $u''_{yz} = 4$, тогда соответствующая матрица квадратичной формы будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные миноры этой матрицы:

$$\Delta_1 = -1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 3,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 4.$$

В силу критерия неопределенной формы ($\Delta_1 < 0,\ \Delta_3 > 0$) данная квадратичная форма является неопределенной. А значит, в точке $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ экстремума нет.

Наконец, частные производные второго порядка в стационарной точке $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}\right)$ равны $u''_{x^2} = -\dfrac{1}{2}$, $u''_{y^2} = -2$, $u''_{z^2} = -4$, $u''_{xy} = -\dfrac{1}{2}$, $u''_{xz} = 1$ и $u''_{yz} = 2$, тогда соответствующая матрица квадратичной формы будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим главные миноры этой матрицы:

$$\Delta_1 = -\frac{1}{2},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} = \frac{3}{4},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -1.$$

Так как $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, то по критерию Сильвестра данная квадратичная форма является отрицательно определенной, то есть $d^2u < 0$. А значит, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}\right)$ — точка максимума этой функции со значением равным $u\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{1}{32}$.

Покажем с помощью определения 19, что в точках $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $\left(0, \dfrac{1}{2}, 0\right)$, $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ нет экстремума. Рассмотрим точку $(0,0,0)$. Заметим, что $u(0,0,0) = 0$. Чтобы по определению 19 получить отсутствие экстремума в данной точке $(0,0,0)$, надо для любой сколь угодно малой окрестности стационарной точки показать, что имеют место неравенства $u(x,y,z) > u(0,0,0)$ и $u(x,y,z) < u(0,0,0)$. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим окрестность точки $(0,0,0) : |x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$, $|z| < \varepsilon$. При $z = 0$ получим $u(x,y,z) = xy(1-x-2y)$. Тогда взяв $\varepsilon < \dfrac{1}{3}$, выражение в скобках всегда при $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$, будет положительно $1-x-2y > 0$, а значит, в зависимости от знака переменных x и y функцию $u(x,y,z) = xy(1-x-2y)$ можно сделать как положительной, так и отрицательной. Следовательно, в этой точке экстремума нет.

Рассмотрим точку $(1,0,0)$. Заметим, что $u(1,0,0) = 0$. Чтобы по определению 19 получить отсутствие экстремума в точке $(1,0,0)$, надо для любой сколь угодно малой окрестности этой точки показать, что имеют место неравенства $u(x,y,z) > u(1,0,0)$ и $u(x,y,z) < u(1,0,0)$. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим окрестность точки $(1,0,0) : |x-1| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$, $|z| < \varepsilon$. При $z = 0$ получим $u(x,y,z) = xy(1-x-2y)$. Тогда взяв $x = 1+\varepsilon$, функция примет вид: $u(x,y,z) = (1+\varepsilon)y(-\varepsilon-2y)$. При $-\dfrac{\varepsilon}{4} < y < 0$ выражение $u(x,y,z) = (1+\varepsilon)y(-\varepsilon-2y) > 0$, при $-\varepsilon < y < -\dfrac{\varepsilon}{4}$ выражение $u(x,y,z) = (1+\varepsilon)y(-\varepsilon-2y) < 0$. А значит, в точке $(1,0,0)$ нет экстремума.

Рассмотрим точку $\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$. Имеем $u\left(0,\dfrac{1}{2},0\right) = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ возьмём окрестность точки $\left(0,\dfrac{1}{2},0\right) : |x| < \varepsilon$, $\left|y-\dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$, $|z| < \varepsilon$. При $z = 0$ получим $u(x,y,z) = xy(1-x-2y)$. Тогда взяв $y = \dfrac{1}{2} - \varepsilon$, функция примет вид: $u(x,y,z) = x\left(\dfrac{1}{2}-\varepsilon\right)(-x+2\varepsilon)$. При $0 < x < \varepsilon$ выражение $u(x,y,z) = x\left(\dfrac{1}{2}-\varepsilon\right)(-x+2\varepsilon) > 0$, при $-\varepsilon < x < 0$ выражение $u(x,y,z) = x\left(\dfrac{1}{2}-\varepsilon\right)(-x+2\varepsilon) < 0$. А значит, в точке $\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$ нет экстремума.

Рассмотрим точку $\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. Имеем $u\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right) = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим окрестность точки $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: $|x-1| < \varepsilon$, $\left|y - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. При $x = 1$ получим

$$u(x, y, z) = y(-2y + 4z) - 2z^2 = -2(y - z)^2 < 0.$$

Требуется найти хотя бы одну точку из нашей окрестности, в которой функция будет положительна. При $z = y$ получим

$$u(x, y, z) = xy(1 - x + 2y) - 2y^2 = y(1 - x)(x - 2y).$$

Тогда взяв $x = 1 - \varepsilon$, $y = \frac{1}{2} - \varepsilon$, функция примет вид:

$$u(x, y, z) = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right).$$

При $\varepsilon < \frac{1}{2}$ данное выражение будет положительно. И снова в точке $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ нет экстремума.

18. *Найти точки условных экстремумов функции*
а) $f(x, y, z) = (3 - x)(6 - y)(9 - z)$ *при* $x + y + z = 6$.
б) $f(x, y, z) = xyz$ *при* $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$.

Решение. *а)* Выразим из уравнения связи $x + y + z = 6$ одну из переменных, например, z. Получим $z = 6 - x - y$ и, подставив это выражение в исходную функцию, имеем следующее:

$$u = (3 - x)(6 - y)(3 + x + y) \mathrel{\hat{=}} g(x, y).$$

Это функция двух переменных, найдем её экстремум, следуя алгоритму, приведенному в п. 1.9.

1. Функция g определена на всей координатной плоскости.

2. Найдем частные производные первого порядка

$$g'_x = (6 - y)(-2x - y), \quad g'_y = (3 - x)(3 - x - 2y).$$

3. Приравняем нулю производные первого порядка:

$$\begin{cases} (6 - y)(-2x - y) = 0, \\ (3 - x)(3 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что произведение равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, полученная система будет эквивалентна совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} 6-y=0, \\ 3-x=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 6-y=0, \\ 3-x-2y=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x-y=0, \\ 3-x=0, \end{cases} \quad \begin{cases} -2x-y=0, \\ 3-x-2y=0. \end{cases}$$

Решая каждую из систем, получим четыре стационарные точки: $(3,6)$, $(-9,6)$, $(3,-6)$, $(-1,2)$.
4. Чтобы выяснить вопрос об экстремуме, найдем производные второго порядка: $g''_{x^2}=-2(6-y)$, $g''_{xy}=2x+2y-6$, $g''_{y^2}=-2(3-x)$.
5. Вычислим их значения в каждой стационарной точке.

$(3,6): A=0,\ B=12,\ C=0,\ \Delta=-144<0.$
6. Следовательно, в данной точке экстремума нет.

Далее, будем повторять пункты ***5***, ***6*** алгоритма для каждой стационарной точки.

$(-9,6): A=0,\ B=-12,\ C=-24,\ \Delta=-144<0.$ Следовательно, в данной точке экстремума нет.

$(3,-6): A=-24,\ B=-12,\ C=0,\ \Delta=-144<0.$ Следовательно, в данной точке экстремума нет.

$(-1,2): A=-8,\ B=-4,\ C=-8,\ \Delta=48>0.$ Следовательно, в данной точке максимум функции $g(x,y)$. А значит, вычисляя z, получаем, что в точке $(-1,2,5)$ исходная функция u имеет условный максимум и значение функции равно 64.

Замечание. Сравните с решением и ответом примера 13.

б) Будем искать точки условного экстремума функции, следуя алгоритму, приведенному в п. 1.11.

1. Запишем функцию Лагранжа:

$$L=xyz-\lambda(x+y+z-5)-\mu(xy+yz+zx-8).$$

2. Найдем ее частные производные первого порядка и приравняем их нулю:
$L_x=yz-\lambda-\mu(y+z)=0,$

$L_y = xz - \lambda - \mu(x+z) = 0,$
$L_z = xy - \lambda - \mu(x+y) = 0.$
3. Добавив уравнения связи, получим систему пяти уравнений с пятью неизвестными x, y, z, μ и λ :

$$\begin{cases} yz - \mu(y+z) = \lambda, \\ xz - \mu(x+z) = \lambda, \\ xy - \mu(x+y) = \lambda, \\ x+y+z = 5 \\ xy+yz+zx = 8. \end{cases}$$

Исключаем переменную λ, приравнивая левые части первого и второго, второго и третьего уравнений:

$$\begin{cases} yz - \mu(y+z) = xz - \mu(x+z), \\ xz - \mu(x+z) = xy - \mu(x+y), \\ x+y+z = 5, \\ xy+yz+zx = 8. \end{cases}$$

В первом и втором уравнении перенесем все в одну часть и сгруппируем, приводя подобные:

$$\begin{cases} (z-\mu)(y-x) = 0, \\ (x-\mu)(z-y) = 0, \\ x+y+z = 5, \\ xy+yz+zx = 8. \end{cases}$$

Учитывая, что произведение равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, данная система равносильна совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} y = x, \\ z = y, \\ x+y+z = 5, \\ xy+yz+zx = 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x, \\ x = \mu, \\ x+y+z = 5, \\ xy+yz+zx = 8, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \mu, \\ z = y, \\ x+y+z = 5, \\ xy+yz+zx = 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \mu, \\ x = \mu, \\ x+y+z = 5, \\ xy+yz+zx = 8. \end{cases}$$

Первая система решений не имеет, а три оставшиеся дают по два решения каждая. В итоге, получаем шесть стационарных точек $(2,2,1)$ при $\lambda=-4$, $\mu=2$; $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$ при $\lambda=-\frac{16}{9}$, $\mu=\frac{4}{3}$; $(1,2,2)$ при $\lambda=-4$, $\mu=2$; $\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ при $\lambda=-\frac{16}{9}$, $\mu=\frac{4}{3}$; $(2,1,2)$ при $\lambda=-4$, $\mu=2$; $\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$ при $\lambda=-\frac{16}{9}$, $\mu=\frac{4}{3}$.

4. Найдем частные производные второго порядка функции L

$L''_{x^2}=0,\ L''_{xy}=z-\mu,\ L''_{xz}=y-\mu,\ L''_{y^2}=0,\ L''_{yz}=x-\mu,\ L''_{z^2}=0.$

5. Запишем для нее дифференциал второго порядка

$$d^2L=2(z-\mu)dxdy+2(y-\mu)dxdz+2(x-\mu)dydz.$$

6. Заметим, что дифференцал первого порядка уравнений связи имеют вид:

$$\begin{cases} dx+dy+dz=0,\\ (y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz=0. \end{cases}$$

7. Исследуем знак d^2L в каждой стационарной точке.

$d^2L(2,2,1)=-2dxdy$, причем дифференциал для уравнений связи принимает вид:

$$\begin{cases} dx+dy+dz=0,\\ 3dx+3dy+4dz=0. \end{cases}$$

Откуда $dz=0$, $dy=-dx$. Подставляя в дифференциал второго порядка,получим $d^2L(2,2,1)=2dx^2>0$. Это означает, что квадратичная форма положительно определенная, и точка $(2,2,1)$ — точка условного минимума исходной функции u со значением, равным 4.

Далее, будем повторять пункт ***7*** алгоритма для каждой стационарной точки.

$d^2L\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)=2dxdy$, причем дифференциал для уравнений связи принимает вид:

$$\begin{cases} dx+dy+dz=0,\\ \frac{11}{3}dx+\frac{11}{3}dy+\frac{8}{3}dz=0. \end{cases}$$

Откуда $dz = 0$, $dy = -dx$. Подставляя в дифференциал второго порядка, получим $d^2L\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = -2dx^2 < 0$. Это означает, что квадратичная форма является отрицательно определенной, и точка $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$ — точка условного максимума исходной функции u со значением, равным $\frac{112}{27}$.

$d^2L(1,2,2) = -2dzdy$, причем дифференциал для уравнений связи принимает вид:

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ 4dx + 3dy + 3dz = 0. \end{cases}$$

Откуда $dx = 0$, $dy = -dz$. Подставляя в дифференциал второго порядка,получим $d^2L(1,2,2) = 2dy^2 > 0$. Следовательно, что квадратичная форма положительно определенная, и точка $(1,2,2)$ — точка условного минимума исходной функции u со значением, равным 4.

$d^2L\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = 2dzdy$, причем дифференциал для уравнений связи принимает вид:

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ \frac{8}{3}dx + \frac{11}{3}dy + \frac{11}{3}dz = 0. \end{cases}$$

Откуда $dx = 0$, $dy = -dz$. Подставляя в дифференциал второго порядка,получим $d^2L\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -2dy^2 < 0$. Поэтому квадратичная форма является отрицательно определенной, и точка $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ — точка условного максимума исходной функции u со значением, равным $\frac{112}{27}$.

$d^2L(2,1,2) = -2dxdz$, причем дифференциал для уравнений связи принимает вид:

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ 3dx + 4dy + 3dz = 0. \end{cases}$$

Откуда $dy = 0$, $dz = -dx$. Подставляя в дифференциал второго порядка,получим $d^2L(2,1,2) = 2dx^2 > 0$. Тогда точка $(2,1,2)$

— точка условного минимума исходной функции u со значением, равным 4.

$d^2L\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right) = 2dxdz$, причем дифференциал для уравнений связи принимает вид:

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ \frac{11}{3}dx + \frac{8}{3}dy + \frac{11}{3}dz = 0. \end{cases}$$

Откуда $dy = 0$, $dz = -dx$. Подставляя в дифференциал второго порядка,получим $d^2L\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right) = -2dx^2 < 0$. Значит, что точка $\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$ — точка условного максимума исходной функции u со значением, равным $\frac{112}{27}$.

19. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции*
а) $f(x,y) = 5x - x^2 - xy + 2y$ *в заданной области* $\Omega = \{(x,y) : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y = 4\}$;
б) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 3$ *в заданной области* $\Omega = \left\{(x,y,z) : z \geqslant 0,\ z = 4 - x^2 - y^2\right\}$.

Решение. *а)* Будем искать наибольшее и наименьшее значения функции, следуя алгоритму, приведенному в п. 1.10.

1. Данная область представляет собой прямоугольный треугольник. Найдем стационарные точки этой функции. Для этого найдем частные производные первого порядка и приравняем их нулю:

$$z'_x = 5 - 2x - y = 0,\ z'_y = -x + 2 = 0.$$

Решая полученную систему, имеем единственную стационарную точку $x = 2$, $y = 1$, которая принадлежит нашей области Ω. Значение функции в этой точке равно $z(2,1) = 6$. Заметим, что исследовать стационарную точку на экстремум не обязательно.
2. Исследуем теперь границу области, которая состоит из трех кусков.

При $x = 0$, $y \in [0,4]$ функция принимает вид: $z = 2y$. Это функция одной переменной y, возрастающая на всей числовой прямой, в том числе и на отрезке $[0, 4]$. Поэтому наибольшее значение функция достигает в правом конце, а наименьшее — в левом: $z(0, 4) = 8$, $z(0, 0) = 0$.

Функция принимает вид: $z = 5x - x^2 \stackrel{\circ}{=} f$ при $y = 0$, $x \in [0, 4]$. Это квадратичная функция одной переменной x, у которой необходимо найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[0, 4]$. Для этого можно использовать производную. Но в этом случае можно найти и вершину $x_0 = 2,5 \in [0, 4]$. Тогда $f(2,5) = 6,25$, $f(0) = 0$, $f(4) = 4$. Поэтому наибольшее значение функции $z(2,5; 0) = 6,25$, а наименьшее $z(0, 0) = 0$.

При $x + y = 4$ выражаем одну из переменных, например, y через $x : y = 4 - x$, $x \in [0, 4]$. Тогда функция принимает вид: $z = 8 - x$. Это функция одной переменной x, убывающая на всей числовой прямой, в том числе и на отрезке $[0, 4]$. Поэтому наибольшее значение функция достигает в левом конце, а наименьшее — в правом: $z(0, 4) = 8$, $z(4, 0) = 4$.

3. Выбирая из найденных значений, получаем ответ: наибольшее значение функции равно 8 и достигается в точке $(0, 4)$, а наименьшее значение функции равно 0 и достигается в точке $(0, 0)$.

б) ***1.*** Данная область представляет собой часть параболоида с вершиной в точке $(0, 0, 4)$ и ограниченного плоскостью $z = 0$. Найдем стационарные точки заданной функции. Для этого найдем частные производные первого порядка и приравняем их нулю: $u'_x = 2x = 0$, $u'_y = 2y = 0$, $u'_z = 2z - 2 = 0$. Решая полученную систему, имеем единственную стационарную точку $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, которая принадлежит нашей области Ω. Значение функции в этой точке равно $u(0, 0, 1) = 2$. Заметим, что исследовать стационарную точку на экстремум не обязательно. Ну, а если бы мы исследовали ее, то получили бы точку минимума функции.

2. Исследуем теперь границу области, которая состоит из двух кусков.

Сперва рассмотрим поверхность параболоида. Учитывая вид функции u, выразим из уравнения поверхности

$$x^2 + y^2 = 4 - z$$

и подставим в функцию: $u = 4 - z + z^2 - 2z + 3 = z^2 - 3z + 7 \stackrel{\circ}{=} f$, где $z \in [0, 4]$. $f(z)$ — квадратичная функция с вершиной $z = \dfrac{3}{2}$. Функция одной переменной принимает наибольшее и наименьшее значения либо в стационарной точке (в нашем случае — это вершина параболы), либо на концах отрезка $[0,4]$. $f(0)=7$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=4,75$, $f(4)=11$.

При $z=0$, $x^2+y^2\leqslant 4$, исходная функция принимает вид: $z=x^2+y^2+3\triangleq g$. Это функция двух переменных x и y, определенная на круге $x^2+y^2\leqslant 4$. Её можно исследовать по стандартной схеме, а можно заметить, что в силу задания функции $g(x,y)$, учитывая неравенство $0\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$, получаем множество значений этой функции $3\leqslant x^2+y^2+3\leqslant 7$. Поэтому наибольшее значение функции равно 7, а наименьшее — 3.

3. Выбирая из найденных значений, получаем ответ: наибольшее значение функции равно 11 и достигается в точке $(0,0,4)$, а наименьшее значение функции равно 2 и достигается в точке $(0,0,1)$.

20. *Найти наименьшее из расстояний между точкой* (x_0,y_0,z_0) *и точками плоскости* $Ax+By+Cz+D=0$.

Решение. Из курса аналитической геометрии известна формула кратчайшего расстояния между точкой (x_0,y_0,z_0) и плоскостью, заданной общим уравнением $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Выведем эту формулу. Расстояние ρ между точкой (x_0,y_0,z_0) и точкой (x,y,z) плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ определяется формулой $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. Исходная задача равносильна задаче об условном минимуме функции

$$\rho^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$$

при условии связи $Ax+By+Cz+D=0$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x,y,\lambda)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda(Ax+By+Cz+D).$$

Найдем производные функции $L(x,y,\lambda)$ по каждой из переменных

$$L'_x=2(x-x_0)+\lambda A,\quad L'_y=2(y-y_0)+\lambda B,$$
$$L'_z=2(z-z_0)+\lambda C,\quad L'_\lambda=Ax+By+Cz+D,$$

и приравняем эти производные к нулю, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2(x-x_0)+\lambda A=0, \\ 2(y-y_0)+\lambda B=0, \\ 2(z-z_0)+\lambda C=0, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$$

Из первых трех уравнений выразим x, y, z соответственно

$$\begin{aligned} x &= \frac{2x_0-\lambda A}{2} = x_0 - \frac{\lambda A}{2}, \\ y &= \frac{2y_0-\lambda B}{2} = y_0 - \frac{\lambda B}{2}, \\ z &= \frac{2z_0-\lambda C}{2} = z_0 - \frac{\lambda C}{2}, \end{aligned}$$

подставим в последнее уравнение системы

$$A\left(x_0-\frac{\lambda A}{2}\right)+B\left(y_0-\frac{\lambda B}{2}\right)+C\left(z_0-\frac{\lambda C}{2}\right)=0$$

и выразим λ

$$\lambda\left(\frac{A^2}{2}+\frac{B^2}{2}+\frac{C^2}{2}\right)=Ax_0+By_0+Cz_0+D \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 2\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}.$$

Далее, подставляя найденную λ в x, y, z, получим

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{A(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}, \\ y &= y_0 + \frac{B(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}, \\ z &= z_0 + \frac{C(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}. \end{aligned}$$

Теперь вычислим второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2L = 2dx^2+2dy^2+2dz^2.$$

Очевидно, что $d^2L > 0$ всюду. Отсюда следует, что функция ρ^2 имеет в точке с координатами (x, y, z), найденными выше, условный минимум. Вычислим ρ^2:

$$\rho^2 = \left(x_0 + \frac{A(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2} - x_0\right)^2 +$$
$$+ \left(y_0 + \frac{A(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2} - y_0\right)^2 +$$
$$+ \left(z_0 + \frac{A(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2} - z_0\right)^2 =$$
$$= \frac{(A^2 + B^2 + C^2)(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} =$$
$$= \frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Найдем наименьшее расстояние ρ

$$\rho = \sqrt{\frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

ВАЖНО! Задание 20 — это текстовая задача на экстремум, которая решается аналогично подобным задачам в главе Дифференциальные исчисления функции одной переменной. Вводятся неизвестные величины, составляется функция, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти, и выписываются условия, связывающие неизвестные данные и введённые неизвестные. Получается, как правило, задача на нахождение условного экстремума, которую решаем по известному алгоритму.

21. *а) Существует ли предел* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$*?*

б) Показать, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{если } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

непрерывная по каждой переменной по отдельности (при фиксированном значении другой переменной), не является непрерывной по совокупности этих переменных.

Решение. *а)* Предел не существует, если пределы по разным направлениям различны (см. п. 1.2). Поэтому в случае подозрения на то, что предел не существует, надо подобрать хотя бы два направления, при которых получаются разные значения пределов. Например, ℓ_1: $x = \dfrac{1}{n}$, $y = \dfrac{1}{n}$, которые стремятся к нулю при $n \to \infty$, получаем, что $f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{2\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 1$, а значит,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \ell_1}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = 1.$$

С другой стороны, ℓ_2: $x = 0$, $y = \dfrac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$, получаем, что $f\left(0, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{n}}{0 + \frac{1}{n^2}} = 0$, а значит, $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \ell_2}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = 0.$

Или, например, ℓ_3: $x = \dfrac{1}{n}$, $y = -\dfrac{1}{n}$, которые стремятся к нулю при $n \to \infty$, получаем, что $f\left(\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{-2\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = -1$, а значит,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \ell_3}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = -1.$$

Таким образом, данный предел не существует, так как по разным направлениям ℓ_i, $i = 1, 2, 3$, его значения различны.

б) Зафиксируем переменную y, то есть пусть $y = c$. Тогда функция $f(x, y)$ становится функцией одной переменной

$$g(x) \mathrel{\mathring{=}} f(x, c) = \begin{cases} \dfrac{2xc}{x^2+c^2}, \text{ если } x \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что при $c \neq 0$ функция $g(x)$ является непрерывной при любом x. При $c = 0 \quad g(x) \equiv 0$, которая также, очевидно, непрерывна при любом x.

Так как переменные x и y симметричны, то рассуждения для переменной y повторяются.

Функция $f(x, y)$ не является непрерывной в точке $(0, 0)$, так как выше в 21 а) доказано, что не существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

3. Индивидуальные задания

3.1. Вариант 1

1. Дать определение предела функции по направлению.

2. Определить и изобразить область существования функции:

$$u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}.$$

3. Найти $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = e^{x^2+y^2-3z}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{z}$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(x^2 + y^2, y^2 + z^2, z^2 + x^2),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, заданной неявно: $z(1 + x^2) = y(1 + z^4)$.

8. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $\begin{cases} x^2 = z^2 + y^2, \\ ax + by + cz = 1. \end{cases}$

9. Проверить, что функция $z(x, y)$, определяемая соотношением

$$F\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z}, \frac{1}{x-y} + \frac{1}{z}\right) = 0,$$

является решением уравнения $(x^2 + y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$.

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial z}{\partial r} \right), \text{ если } z = \frac{\varphi(r-at)+\psi(r+at)}{r}.$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $M\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ функцию

$$f(x,y) = \cos(x+y).$$

12. Приняв y за новое независимое переменное, а x — за функцию от y, преобразовать уравнение: $y'y''' - 3(y'')^2 = 0$.

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 4\frac{\partial z}{\partial x} + 4\frac{\partial z}{\partial y} + z = 0,$$

если $u = 2y - x, \ v = x, \ z = we^{-x-y}$.

14. Найти производную функции $f(x,y) = x^3 - x^2y + y^3 - 1$ в точке $A(2,1)$ по направлению, образующему угол $\dfrac{\pi}{6}$ с осью OX.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $4x = t^4$, $3y = t^3$, $2z = t^2$, в заданной точке $M\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{1 + x^4 + y^4 - 2x^2y^2}.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 8y - 22z + 1.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции

$$f(x,y,z) = 2x - y - z + 1 \text{ при } x^2 + y^2 + 2z^2 = 22.$$

19. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y) = 2\sin x + 2\sin y + \sin(x + y)$$

в заданной области $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

20. Представить положительное число a в виде суммы n положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

21. Найти множество всех предельных точек m-мерного шара.

3.2. Вариант 2

1. Дать определение предела функции по множеству E по Гейне.

2. Построить линии уровня функции $z = (x + y)^2$.

3. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = x^y + y^2 - 3\operatorname{arctg} z$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = \dfrac{\ln(x + y)}{\ln z}$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(xe^z, ye^z, ze^{x-y}),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, заданной неявно: $z\sin x + y\sin z + x\sin y = 3$.

8. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $\begin{cases} x^3 - 3z + y^2 + a = 0, \\ z^2 - 2y^2 - x + 6 = 0. \end{cases}$

9. Проверить, что функция $z(x, y)$, определяемая соотношением

$$F\left(z^2 - y^2, x^2 + (y - z)^2\right) = 0,$$

является решением уравнения $(z-y)^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + xz\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$.

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если } z = \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \psi(t)dt.$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $M\,(0, \pi)$ функцию

$$f(x, y) = \operatorname{tg}(x + y).$$

12. Приняв y за новое независимое переменное, а x — за функцию от y, преобразовать уравнение: $y'' + (e^y - x)(y')^3 = 0$.

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \text{где } u = x + y, \ v = \frac{y}{x}, \ w = \frac{z}{x}.$$

14. Найти производную функции $f(x, y) = x - x^2y + y^4$ в точке $A(1, 1)$ по направлению вектора $\overline{AB}$, где $B(4, -2)$.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2y^3 - xy^2 = z + \dfrac{3}{8}$ в заданной точке $M\left(2, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{8}\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3}.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2 - 2.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x, y) = x - y$ при условии $\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg} y = 0,\ |x| < \dfrac{\pi}{2},\ |y| < \dfrac{\pi}{2}$.

19. Найти в заданной области $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y, z) = x + y + z$.

20. Представить положительное число a в виде суммы n положительных слагаемых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы произведение

$$z = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

(α_i — заданные положительные числа) было наибольшим.

21. Найти множество всех предельных точек открытого m-мерного шара.

3.3. Вариант 3

1. Дать определение непрерывной функции по Коши.

2. Определить и изобразить область существования функции:

$$u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}.$$

3. Найти $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln^2(x + y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = z^{x^2+y^2}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные)

$$u = z^{x+y} + x^{y+z} + y^{z+x}.$$

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(\sin xz, \sin yz, \sin xy),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, заданной неявно: $z\cos x + y\cos z + x\cos y = 3$.

8. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $\begin{cases} x^3 + z^3 + y^3 - 3xyz = 0, \\ x + y + z = a. \end{cases}$

9. Проверить, что функция $z(x, y)$, определяемая соотношением
$$F\left(\frac{z}{x}, 2x - 4z - y^2\right) = 0,$$
является решением уравнения $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz$.

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$
если $z = \varphi(x + \sqrt{t}, y + \sqrt{t}) + \psi(x - \sqrt{t}, y - \sqrt{t})$.

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $M\,(0, 1)$ функцию
$$f(x, y) = \ln(x + y).$$

12. Приняв y за новое независимое переменное, а x — за функцию от y, преобразовать уравнение:
$$(y''' + yy')(y')^2 - (y'')^2(3y' + x^2) = 0.$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение
$$\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \text{если } u = \frac{y}{x},\ v = y,\ w = yz - x.$$

14. Найти производную функции $f(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 + 2z^3$ в точке $A(1, 2, 3)$ по направлению вектора $\overline{a}(1, -1, 1)$.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\dfrac{t}{2}$, в заданной точке $M\left(\dfrac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2}\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 3$.

17. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x, y, z) = z \ln z - z - z \ln xy + xy + x^2 + 2y^2 - 4x - 2y.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x, y) = xy$ при условии $x^3 + y^3 - axy = 0,\ a > 0$.

19. Найти в заданной области $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y, z) = xy + yz + zx$.

20. Определить наибольшее значение корня n–й степени из произведения положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при условии, что их сумма равна заданному числу a. Используя эту задачу, доказать, что среднее геометрическое нескольких положительных чисел не больше их среднего арифметического.

21. Найти множество всех предельных точек m-мерной сферы.

3.4. Вариант 4

1. Дать расшифровку на языке $\varepsilon - N$ определения предела последовательности в метрическом пространстве.

2. Построить линии уровня функции $z = \sqrt{xy}$.

3. Исследовать на непрерывность функцию
$$f(x, y, z) = \begin{cases} ax^2 + \dfrac{xyz}{z^2 + y^2}, & z^2 + y^2 \neq 0; \\ ax^2, & z^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \ln(x^3 + 3xzy^2 - 5z^4x)$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные)
$$u = \frac{x - y}{z} + \frac{y - z}{x} + \frac{z - x}{y}.$$

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(x + z^2, y + x^2, z + y^2),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, заданной неявно: $\dfrac{z}{x^2 + y^2} = \ln(x + z + y)$.

8. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $\begin{cases} \cos x + \cos z + \cos y = a, \\ x^3 + y^3 + z^3 = b. \end{cases}$

9. Проверить, что функция $z(x, y)$, определяемая соотношением

$$F\left(x^2 + y^2, \frac{z}{x}\right) = 0,$$

является решением уравнения $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} - x^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz$.

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial z}{\partial y} + xyz = 0, \text{ если } z = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left(\varphi(x) + \psi(y)\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $M\,(1, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \ln(x + y).$$

12. Приняв y за новое независимое переменное, а x — за функцию от y, преобразовать уравнение: $y'' - y' - (y')^3 x^3 = 0$.

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$(1 - x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 - y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y},$$

если $x = \cos u$, $y = \cos v$, $z = e^w$.

14. Найти производную функции $f(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - 4xz + z^3 + 2$ в точке $A(1, -2, 3)$ по направлению вектора $\overline{a}(2, 1, 1)$.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^8 + y^{13} + 5z = 7$ в заданной точке $M\,(1,1,1)$.

16. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x,y) = x + y + 8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2},\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi.$$

17. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x,y,z) = \frac{9}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{3} - 2\ (x,y,z > 0).$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x,y,z) = xyz$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ a > 0$.

19. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$
в заданной области $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a,\ a > 1$.

20. Через точку M, лежащую внутри данного угла, провести прямую так, чтобы она отсекала от угла треугольник наименьшей площади.

21. Докажите, что предел функции $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2}$ в точке $O(0,0)$ не существует.

3.5. Вариант 5

1. Дать определение предела функции по базе.

2. Определить и изобразить область существования функции:
$$u = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Найти
$$\lim_{x\to\infty, y\to 3}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = (x - z)\ln(x^3 + y^3 - z^2)$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные)

$$u = \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y}.$$

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(x - y + z, x^2 + y^2 + 2z^2),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, заданной неявно: $xyz = x^2 + y^2 + z^2$.

8. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $\begin{cases} \sin^2 y - \sin z \cos x = 0, \\ 2x - y \operatorname{tg} z = 0. \end{cases}$

9. Проверить, что функция $z(x, y)$, определяемая соотношением

$$F\big((x - y)(z + 1), (x + y)(z - 1)\big) = 0,$$

является решением уравнения $(xz + y)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (x + yz)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1 - z^2$.

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

если $z = \varphi(xy)\ln y + \psi(xy)$.

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $M\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ функцию

$$f(x, y) = 1 - \cos(x + y).$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$y^2 + (x^2 - xy)y' = 0, \quad \text{если } y = tx,\ y = y(t).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 4,$$

где $u = x + y,\ \ v = x - y,\ \ w = xz.$

14. Найти производную функции $z = x^3 - 3y^2$ в точке $A(0, 1)$ по направлению касательной к кривой $2xy - x^2 = 1$ в точке $B(1, 1)$.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой

$$x = \frac{3t^2}{1+t^3},\ y = \frac{(1+t^3)^2 - 9t^4}{(1+t^3)^2},\ z = \frac{3t}{1+t^3}$$

в заданной точке $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = e^{-2y}(x^2 + 2x - y) - 2.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = yx^3 z^2 (2 - y - 2z - 3x).$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x, y, z) = xyz$ при условии $xy + yz + zx = a^2,\ a > 0,\ x, y, z > 0.$

19. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$$

в заданной области $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a$, где $3 < a < 9$.

20. Внутри данного угла B поместить отрезок DE длины b, концы которого — точки D и E — находятся на сторонах угла, так чтобы площадь треугольника DBE была наибольшей.

21. Существуют ли предел (по совокупности переменных) и повторные пределы функции

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

в точке $(0, 0)$? Ответ аргументируйте.

3.6. Вариант 6

1. Дать определение на языке $\varepsilon - \delta$ предела функции $f\colon X \to Y$, где X, Y — нормированные пространства.

2. Построить линии уровня функции $z = |x| + y$.

3. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \operatorname{arctg}(2xy^2z^3)$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = \arcsin \dfrac{y}{xz}$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(2x + y^2, 3y, 4z + x^2),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, заданной неявно: $z^4 + zx^3 + zy^3 = a^4$.

8. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, $\dfrac{du}{dx}$, если $\begin{cases} u^2 + x^2 + z^2 + y^2 = a^2, \\ \ln xy + \dfrac{y}{x} = b^2, \\ \ln \dfrac{z}{x} + zx = c^2. \end{cases}$

9. Показать, что функция $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{y}}$ удовлетворяет данному уравнению:
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если } z = \sqrt{\frac{x}{y}}\varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функцию
$$f(x,y) = \operatorname{tg}(x+y).$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:
$$y' + 2xy = 2x^3y^3, \ \text{ если } u = \frac{1}{y^2}, \ u = u(x).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$
где $u = x + y, \ v = y - x, \ w = xy - z$.

14. Найти производную функции $z = 3x^4 - \sqrt{y}$ в точке $A(0,0)$ по направлению нормали к кривой $2y - 3x^2 = 1$ в точке $(1,2)$.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + z^3 - 3xz = 3$ в заданной точке $M\,(1,4,2)$.

16. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

17. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x,y,z) = z + \frac{y^2}{4z} + \frac{x^2}{y} + \frac{2}{x} \ \ (x, \ y, \ z > 0).$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x, y, z) = xyz$ при условии $x + y + z = 5,\ xy + yz + zx = 8$.

19. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y) = (x - y^2)\sqrt[3]{(1 - x)^2} \text{ в заданной области } y^2 \leqslant x \leqslant 2.$$

20. В данный круг вписать треугольник так, чтобы сумма квадратов длин его сторон была наибольшей.

21. Существуют ли предел (по совокупности переменных) и повторные пределы функции

$$f(x, y) = \log_x(x + y)$$

в точке $(1, 0)$? Ответ аргументируйте.

3.7. Вариант 7

1. Дать определение на языке окрестностей предела функции $f\colon X \to Y$, где X, Y — метрические пространства.

2. Определить и изобразить область существования функции:

$$u = \ln(xyz).$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{\ln(y + e^x)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = a^{2^x y^2 z^3}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{yz}$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(x^{yz}, y^{xz}),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x = e^u \sin v, y = e^u \cos v, z = uv$.

8. Найти частные производные первого порядка функций $z(x, y)$ и $u(x, y)$, если
$$\begin{cases} x + y + z + u = a, \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = b. \end{cases}$$

9. Показать, что функция $u = \ln(x^2 + y^2)$ удовлетворяет данному уравнению:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство
$$(x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ если } z = \frac{\varphi(x - y) + \psi(x + y)}{x}.$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ функцию
$$f(x, y) = 2 + \sin(x - y).$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:
$$(xy + x^2y^3)^{-1}y' = 1, \text{ если } u = \frac{1}{y^2},\ u = u(x).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$
если $u = xy,\ \ v = y,\ \ w = z - y$.

14. Найти производную функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в заданной точке $A\left(\dfrac{a}{8}, \dfrac{3\sqrt{3}a}{8}\right)$ к кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ по направлению внутренней нормали этой кривой.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ \frac{z}{c} = \operatorname{arctg} \frac{bx}{ay},$$
в заданной точке $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{c\pi}{4}\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 18y - 30x + 5.$$

17. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x, y, z) = \ln(xy) - z(x - y) - x^2 - y^2 + 2xy - y.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции
$$f(x, y, z) = xy + yz \text{ при условиях } x^2 + y^2 = 2, \ y + z = 2, \ x, y, z > 0.$$

19. Найти в заданной области $0 \leqslant x \leqslant \pi, \ 0 \leqslant y \leqslant \pi$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = \cos x - \cos y$.

20. Определить положение точки относительно вершин остроугольного треугольника ABC, чтобы сумма расстояний от этой точки до вершин треугольника была наименьшей.

21. Существуют ли предел (по совокупности переменных) и повторные пределы функции
$$f(x, y) = \frac{\sin x + \sin y}{x + y}$$
в точке $(0, 0)$? Ответ аргументируйте.

3.8. Вариант 8

1. Дать определение предела функции по множеству E по Коши.

2. Построить линии уровня функции $z = |x| + |y| - |x + y|$.

3. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \sin \frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}.$$

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = x^{y^2} z^3$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = \operatorname{arctg} \dfrac{xy}{z}$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(xy, x - 2y, x^3 + y),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x = \operatorname{arctg} \dfrac{u}{v}$, $y = \ln(u^2 + v^2)$ и $z = u - v$.

8. Найти частные производные первого порядка функций $z(x, y)$ и $u(x, y)$, если

$$\begin{cases} x + y + z + u = a, \\ xyzu = b. \end{cases}$$

9. Показать, что функция $u = e^{-x}(x - y)^2$ удовлетворяет данному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если } z = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ функцию

$$f(x, y) = 2 + \cos(x - y).$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$xy'' - y' + xy = 0, \text{ если } t = \frac{x^2}{4},\ y = y(t).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

если $u = x,\ \ v = x - y,\ \ w = x - y + z.$

14. Найти производную функции $u = xy + \dfrac{z}{y}$ в точке $A\,(2, 1, 2)$ по направлению градиента функции $V = xyz$ в этой точке.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $xy + xz + yz = x^3 + y^3 + z^3$ в заданной точке $M\,(1, 1, 1)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = x^4 + 16y^4 - 2x^2 + 8xy - 8y^2 + 4.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = x^2 - 2xy + 4y^2 + 6z^2 + 6yz - 6z.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x, y, z) = xy^2z^3$ при условии $x + my^2 + nz^3 = 1,\ m, n > 0,\ x, y, z > 0.$

19. Найти в заданной области $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 2$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^6 + y^6 - 3x^2 + 6xy - 3y^2$.

20. На плоскости XOY даны две точки $P_1(5, 1)$ и $P_2(2, 2)$. Найти точку Q_1 на оси OX и точку Q_2 на оси OY, чтобы длина ломаной $P_1Q_1Q_2P_2$ была наименьшей.

21. Ограничена ли функция $u = x^2 - y^2$ в круге $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 \leqslant 25\}$? Ответ аргументируйте.

3.9. Вариант 9

1. Дать определение на языке окрестностей предела функции $f\colon X \to Y$, где X, Y — нормированные пространства.

2. Определить и изобразить область существования функции:
$$u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2).$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty, y\to\infty} \dfrac{y^2 - x^2}{x^3 - y^3}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \ln \dfrac{2x - y^2}{z^3 + x}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные)
$$u = \ln(x^3 y^2 z),\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции
$$u = \varphi\left(\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{z}, \frac{z^2}{x}\right),$$
если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x = u^2 - v^2,\ y = uv,\ z = u + 2v$.

8. Найти первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)$, если
$$x^2 + zx + y + z^2 = 0.$$

9. Показать, что функция $u = e^{x+y}(x + y)$ удовлетворяет данному уравнению:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\varphi'',\ \text{если } z = \varphi(y - x) - x\varphi'(y - x).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0, \text{ если } x = e^t, \ y = y(t).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$(xy + z)\frac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2)\frac{\partial z}{\partial y} = x + yz,$$

если $u = yz - x, \ \ v = xz - y, \ \ w = xy - z.$

14. Найти производную функции $f(x, y) = x^2 - x^2 y + y^3 - x$ в точке $A(1, 1)$ по направлению, образующему угол $\dfrac{\pi}{3}$ с осью OX.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \ 2x^2 + y^2 - z^2 = 0$ в заданной точке $M\left(\dfrac{r}{2}, \dfrac{r}{2\sqrt{2}}, \dfrac{r\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = 3x^2 y + y^3 - 18x - 30y.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z) \ \ (0 \leqslant x, y, z \leqslant \pi).$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m$ при условии $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a, \ m > 1.$

19. Найти в заданной области $\left\{x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} \leqslant 1\right\}$ наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y) = \frac{xy}{2} - \frac{x^2 y}{6} - 3\frac{xy^2}{8}.$$

20. Из всех конусов с данной боковой поверхностью найти конус с наибольшим объемом.

21. Ограничена ли функция $u = x^2 - y^2$ на множестве точек вне круга $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 \leqslant 25\}$? Ответ аргументируйте.

3.10. Вариант 10

1. Дать определение непрерывной функции по Гейне.

2. Построить линии уровня функции $z = \min(x, y)$.

3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x, y) = \dfrac{1}{\cos x \cos y}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = z^{\frac{2x}{y^3}}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные)

$$u = \ln(xyz),\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi\left(\frac{x}{y^2}, \frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}\right),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x^y + y^z = 3$.

8. Найти первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)$, если

$$x^3 + y^3 - 3xyz - z^3 = 1.$$

9. Показать, что функция $u = x \cos \dfrac{y}{x}$ удовлетворяет данному уравнению:

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z, \text{ если } z = e^{-x}\varphi\left(x - y\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(\pi, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \cos(x + y).$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0, \text{ если } t = \ln x, \ y = y(t).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} = e^z,$$

если $u = x^2 + y^2$, $v = \operatorname{arctg} xy$ и $w = (x^2 + y^2)e^{-z}$.

14. Найти производную функции $f(x, y) = x^3 - 2x^2 y + y^4$ в точке $A(1, 2)$ по направлению вектора $\overline{AB}$, где $B(2, -2)$.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 = -xyz$ в заданной точке $M\left(1, -1, -1\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = x^2 + 3xy - 8\ln|x| - 6\ln|y|.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = xy^3 z^2 (14 - x - 3y - 2z).$$

18. При условии $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = k^2$ найти точки условных экстремумов функции $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, где α_i — произвольные постоянные.

19. Найти в заданной области $0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 2$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 3xy$.

20. Среди всех четырехугольников с заданными сторонами найти такой, площадь которого наибольшая.

21. Ограничена ли функция $u = \dfrac{ax^2 + by^2}{x^2 + y^2}$ при $x^2 + y^2 \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$? Ответ аргументируйте.

3.11. Вариант 11

1. Дать определение непрерывной функции на языке окрестностей.

2. Определить и изобразить область существования функции:
$$u = \ln(-4 - x^2 + y^2 - z^2).$$

3. Найти $\lim\limits_{y\to\infty, x\to 5} \left(1 - \dfrac{1}{y}\right)^{\frac{y^2}{x+y}}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = e^{\frac{2x - y^2}{z}}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = x^y + y^z + z^x$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции
$$u = \varphi\left(\frac{xz}{y}, \frac{yx}{z}, \frac{zy}{x}\right),$$
если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x + y + z = \cos xyz$.

8. Найти первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)$, если
$$2\ln(xyz) = x^2 + y^2 - z^2 - 1.$$

9. Показать, что функция $u = \dfrac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{x}$ удовлетворяет данному уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если } z = \varphi\left(x+y\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(\pi, 0)$ функцию

$$f(x,y) = \operatorname{tg}(x+y).$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$xy'' + 2y' - xy = e^x, \text{ если } y = \frac{u}{x},\ u = u(x).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x}\sin^2 x + \operatorname{ctg} x \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z,$$

если $u = 2y + \operatorname{tg} z \operatorname{ctg} x$, $v = \operatorname{ctg} x(\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} x)$, $w = \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} z$.

14. Найти производную функции $f(x,y,z) = x^2 - xy + y^3 + 2z^3$ в точке $A(-1,2,1)$ по направлению вектора $\overline{a}(1,1,1)$.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47$, $x^2 + 2y^2 - z = 0$ в заданной точке $M\left(-2,1,6\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y).$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 4z - 3.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции
$$f(x,y,z) = 2x^2 - y^3 - z + 1 \text{ при условии } x^2 + y^2 + 2z^2 = 2.$$

19. Найти в заданной области $0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y) = x^3 + 3y^2 - x + 18y - 4$.

20. В данный круг вписать четырехугольник $ABCD$ наибольшей площади, если величина угла BAD равна α.

21. Ограничена ли функция $u = \dfrac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{xy}$ при $xy \neq 0$? Ответ аргументируйте.

3.12. Вариант 12

1. Дать определение на языке $\varepsilon - \delta$ предела функции $f\colon X \to Y$, где X — метрическое пространство, а Y — нормированное пространство.

2. Построить линии уровня функции $z = \max(|x|, |y|)$.

3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\cos x \sin y}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \left(\dfrac{2x - y^2}{z}\right)^2$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = \cos(e^x y^2 z)$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции
$$u = \varphi\left(\frac{x}{y}, yz, \frac{z}{x}\right),$$
если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = \ln(xy + yz)$.

8. Найти первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)$, если

$$x^4 + y^4 + z^4 = 4xyz.$$

9. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x, y)$, заданной неявно, если

$$F(xyz, x + 2y) = 0.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z, \text{ если } z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(\pi, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \cos(y - x) - 1.$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$y'' + \frac{2}{x}y' - a^2y = 2, \text{ если } y = \frac{u}{x},\ u = u(x).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ если } u = \frac{y}{x},\ v = y,\ w = yz - x.$$

14. Найти производную функции $f(x, y, z) = 3x^2 - 5xy + y^2 + 2z^4$ в точке $A(-1, 2, 2)$ по направлению вектора $\overline{a}(1, 0, 1)$.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ в заданной точке $M\left(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)\right)$, где $u_0 = 1$, $v_0 = 2$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3 + 12yz + 2x - 5.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x,y) = x - y$ при условии $\operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg} y = 0,\ |x| < \dfrac{\pi}{2},\ |y| < \dfrac{\pi}{2}$.

19. Найти в заданной области $0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$ наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x,y) = xy - x^2y - \frac{1}{2}xy^2.$$

20. Найти длины осей эллипса, полученного в сечении цилиндра, заданного уравнением $x^2 + 2y^2 = 1$, плоскостью $x + y + z = 0$.

21. Ограничена ли функция $u = \dfrac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{xy}$ при $xy \neq 0$? Ответ аргументируйте.

3.13. Вариант 13

1. Дать определение на языке $\varepsilon - \delta$ предела функции $f\colon X \to Y$, где X — нормированное пространство, а Y — метрическое пространство.

2. Определить и изобразить область существования функции:

$$u = \ln(4 - x^2 - y^2).$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty, y\to\infty} \dfrac{y^3 - x^3}{x^4 - y^4}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \left(\dfrac{y^2}{z}\right)^x$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = xy + yz + zx$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(xyz, xy + yz - 2zx, x^2 - y^2 + z^2),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x + y + z = \ln(xyz)$.

8. Найти первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)$, если

$$x = u \cos v,\ \ y = u \sin v,\ \ z = uv.$$

9. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x, y)$, заданной неявно, если

$$F(xy, yz, zx) = 0.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство

$$xy\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} + x(1 + x^2) = 0, \text{ если } \ 4xyz = -x^4 - 2x^2 + \varphi\left(x \cdot y\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(\pi, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \sin(x - y) - 2.$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$x^4 y'' - c^2 y = 0, \text{ если } \ y = \frac{u}{t},\ x = \frac{1}{t},\ u = u(t).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + z + x + y = 0,$$

если $u = x + y,\ \ v = x - y,\ \ w = xz.$

14. Найти производную функции $z = x^3 - \sqrt{y}$ в точке $A(1,1)$ по направлению касательной к кривой $3y - 5x^3 + xy = 6$ в точке $B(0,2)$.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $y^2 + z^2 = 25,\ x^2 + y^2 = 10$ в заданной точке $M(1,3,4)$.

16. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5 - 8.$$

17. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x,y,z) = \frac{4}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{2} - 2 \ \ (x,\ y,\ z > 0).$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x,y) = xy$ при условии $x^3 + y^3 - axy = 0,\ a > 0$.

19. Найти в заданной области $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ наибольшее и наименьшее значения функции
$$f(x,y) = 2\sin x + \sin y.$$

20. Найти кратчайшее расстояние между прямыми
$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{3} \ \text{ и } \ \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}.$$

21. Ограничена ли функция $u = \dfrac{\ln x - \ln y}{x - y}$ при $x \neq y$? Ответ аргументируйте.

3.14. Вариант 14

1. Дать определение на языке $\varepsilon - \delta$ предела функции $f\colon X \to Y$, где X, Y — нормированные пространства.

2. Построить линии уровня функции $z = \min(x^2, y)$.

3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{tg} y}{\arcsin x \sin 2y}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \left(\dfrac{y}{z^2}\right)^x$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = x^3y^2z$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(\sin xyz, xy - 4yz, x - 3y + z),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $\operatorname{arctg}\dfrac{z}{x} = x + y + z$.

8. Найти первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)$, если

$$x = u + \ln v,\ \ y = v - \ln u,\ \ z = 2u + v.$$

9. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x, y)$, заданной неявно, если

$$F(x^2 - y^2, y^2 + z^2, z^2 - x^2) = 0.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство

$$(y^2 + z^2 - x^2)\frac{\partial z}{\partial x} - 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + 2xz = 0,\ \text{если}\ x^2 + y^2 + z^2 = y\varphi\left(\frac{z}{y}\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ функцию

$$f(x, y) = 3 - \sin(x + y).$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$2y'' + (x + y)(1 - y')^3 = 0,\ \text{если}\ \ x - y = u,\ x + y = v,\ v = v(u).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 4x, \text{ если } u = x, \ v = x - y, \ w = x - y + z.$$

14. Найти производную функции $z = \sqrt{y^3 + 3x^2}$ в точке $A(1,1)$ по направлению нормали к кривой $xy + x^2 = 2$ в точке $B(-1,-1)$.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x = u\cos v, \ y = u\sin v, \ z = v$$

в точке $M\left(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)\right)$, где $u_0 = 1, \ v_0 = \frac{\pi}{4}$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^4 + 4xy - 2y^2 + 1.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z) = x^3yz^2(21 - 3x - y - 2z) - 4.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x,y,z) = xyz$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ a > 0$.

19. Найти в заданной области $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y,z) = x + y + z$.

20. Определить положение точки относительно вершин треугольника ABC, чтобы сумма квадратов расстояний от этой точки до вершин треугольника была наименьшей.

21. Существует ли в точке $(0,1)$ частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ функции $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$?

3.15. Вариант 15

1. Дать определение на языке $\varepsilon - \delta$ непрерывной функции $f\colon X \to Y$, где X — метрическое пространство, а Y — нормированное пространство.

2. Определить и изобразить область существования функции:
$$u = \arccos \frac{y}{x+y}.$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty, y\to\infty} \dfrac{y^2 - x^2}{x^3 + y^3}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = x^{\frac{y^2}{z}}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = xy^2z^3$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции
$$u = \varphi(x + y - z, xy - yz + zx, e^x + e^y + e^z),$$
если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

8. Найти первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)$, если
$$x = ue^{u+v},\ y = ue^{u-v},\ z = u^2 + v^2.$$

9. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x, y)$, заданной неявно, если
$$F(y - zx, x + zy, z - 2xy) = 0.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство
$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = xy, \text{ если } z^2 = xy + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0,0)$ функцию

$$f(x,y) = \sqrt[4]{x^2+y^2}.$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$xyy'' - x(y')^2 + yy' = 0, \text{ если } \ u = \ln\frac{y}{x}, \ u = u(y).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + x + y = 0, \text{ если } \ u = y + x, \ v = y - x, \ w = xy - z.$$

14. Найти производную функции $z = \ln(x^2+y^2)$ в $A\left(\frac{a}{8}, \frac{3\sqrt{3}a}{8}\right)$ по направлению внутренней нормали кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

15. В заданной точке $M\left(a, -a\sqrt{3}, \frac{2\pi a}{3}\right)$ написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой

$$x = u\cos v, \ y = u\sin v, \ z = av, \ x^2 + y^2 = 4ax.$$

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z) = \frac{16}{x} + \frac{x^2}{z} + \frac{z^2}{y} + \frac{y^2}{4} \ (x,y,z > 0).$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x,y,z) = xyz$ при условии $xy + yz + zx = a^2, \ a > 0, \ x,y,z > 0$.

19. Найти в заданной области $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y,z) = xy + yz + zx$.

20. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(p, 4p)$ до точек параболы $y^2 = 2px \ \ (p > 0)$.

21. Является ли плоскость $u = 0$ касательной в точке $O(0,0,0)$ к параболоиду вращения $u = x^2 + y^2$? Ответ аргументируйте.

3.16. Вариант 16

1. Дать определение на языке $\varepsilon - \delta$ непрерывной функции $f\colon X \to Y$, где X — нормированное пространство, а Y — метрическое пространство.

2. Определить и изобразить область существования функции:
$$u = \sqrt{\frac{2x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - x}}.$$

3. Найти $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{tg} xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \cos(2x + y^2 - 3zx)$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = \operatorname{arcctg} \dfrac{xy}{z - x}$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции
$$u = \varphi(x^3 + y^3, y^3 - z^2, z^3 - 2x^2),$$
если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, заданной неявно: $z^2(1 - x^2) = y^3(1 - z^4)$.

8. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $\begin{cases} x^4 = z^3 - 2y^2, \\ 3x + 2y - z = 5. \end{cases}$

9. Проверить, что функция $z(x, y)$, определяемая соотношением
$$F\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z}, \frac{1}{x-y} + \frac{1}{z}\right) = 0$$
является решением уравнения
$$(x^2 + y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0.$$

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = b^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} \right), \text{ если } z = \frac{\varphi(\rho - bt) + \psi(\rho + bt)}{\rho}.$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $\left(\frac{\pi}{2}, 0 \right)$ функцию

$$f(x, y) = \cos(x - y).$$

12. Приняв y за новое независимое переменное, а x — за функцию от y, преобразовать уравнение: $y'y''' - 3(y'')^2 = 0$.

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 4\frac{\partial z}{\partial x} + 4\frac{\partial z}{\partial y} + z = 0,$$

если $u = 2y - x,\ \ v = x,\ \ z = we^{-x-y}$.

14. Найти производную функции $f(x, y) = x^3 - x^2 y + y^3 - 1$ в точке $A(2, 1)$ по направлению, образующему угол $\frac{\pi}{6}$ с осью OX.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $5x = t^5,\ 3y = t^3,\ 2z = t^2$ в заданной точке $M\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{1 + x^4 + y^4 - 2x^2 y^2}.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 9z^2 - 6x + 4y + 6z - 2.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции

$$f(x, y, z) = 3x - 2y + z + 1 \text{ при условии } x^2 + y^2 + 2z^2 = 22.$$

19. Найти в заданной области $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{6} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{6}$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = 2\sin x - 2\sin y$.

20. Представить положительное число d в виде суммы k положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

21. Является ли плоскость $u = 0$ касательной в точке $O(0, 0, 0)$ к конусу $u = \sqrt{x^2 + y^2}$? Ответ аргументируйте.

3.17. Вариант 17

1. Дать определение на языке $\varepsilon - \delta$ непрерывной функции $f\colon X \to Y$, где X, Y — нормированные пространства.

2. Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

3. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{\sqrt[3]{x^3 + y^3}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \sin(3x + y^2 - 4z^5)$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = \dfrac{\ln(xz)}{2\ln y}$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(x^2 + e^z, y + e^z, z - 2e^{x-y}),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, заданной неявно: $z\cos x + y\sin z + x\operatorname{tg} y = 3$.

8. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $\begin{cases} x^4 - 3z^2 + y^3 + 2 = 0, \\ z^5 - 2y^2 - 5x + 1 = 0. \end{cases}$

9. Проверить, что функция $z(x, y)$, определяемая соотношением

$$F\left(z^2 - y^2, x^2 + (y - z)^2\right) = 0,$$

является решением уравнения $(z - y)^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + xz \dfrac{\partial z}{\partial y} = xy.$

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если } z = \frac{\varphi(x - y) + \varphi(x + y)}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt.$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = 2 \sin(y - x).$$

12. Приняв y за новое независимое переменное, а x — за функцию от y, преобразовать уравнение: $y'' + (e^y - x)(y')^3 = 0.$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если } \ u = x + y, \ v = \frac{y}{x}, \ w = \frac{z}{x}.$$

14. Найти производную функции $f(x, y) = 2x - x^2 y + y^4$ в точке $A(2, -1)$ по направлению вектора $\overline{AB}$, где $B(1, -2)$.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 y^3 - xy^2 = z + \frac{5}{8}$$

в заданной точке $M\left(2, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{8}\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3}.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z) = y + \frac{x^2}{4y} + \frac{z^2}{x} + \frac{2}{z} \quad (x,y,z > 0).$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x,y) = x - y$ при условии $\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg} y = 0,\ |x| < \frac{\pi}{4},\ |y| < \frac{\pi}{2}$.

19. Найти в заданной области $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$.

20. Представить положительное число b в виде суммы m положительных слагаемых $x_1, x_2, ..., x_m$ так, чтобы произведение

$$z = x_1^{\beta_1} \cdots x_m^{\beta_m}$$

(β_i —заданные положительные числа) было наибольшим.

21. Является ли плоскость $u = 0$ касательной в точке $O(0,0,0)$ к гиперболическому параболоиду $u = xy$? Ответ аргументируйте.

3.18. Вариант 18

1. Дать определение на языке $\varepsilon - \delta$ непрерывной функции $f\colon X \to Y$, где X, Y — метрические пространства.

2. Определить и изобразить область существования функции:

$$u = \sqrt[4]{\sin(x^2 + y^2)}.$$

3. Найти $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\ln^2(x+y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1}}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \dfrac{x - z}{x + y}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные)

$$u = z^{x-y} + x^{y-z} + y^{z-x}.$$

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(\sin xz, \sin yz, \sin xy),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, заданной неявно: $z \operatorname{tg} x + y \operatorname{ctg} z = x \cos y$.

8. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $\begin{cases} x^5 + z^5 + y^5 - 5xyz = 0, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$

9. Проверить, что функция $z(x, y)$, определяемая соотношением

$$F\left(\frac{z}{x}, 2x - 4z - y^2\right) = 0,$$

является решением уравнения $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz$.

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

если $z = \varphi(x + \sqrt{\tau}, y + \sqrt{\tau}) + \psi(x - \sqrt{\tau}, y - \sqrt{\tau})$.

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\dfrac{|x^3 y|}{x^2 + xy + y^2}\right)^{\frac{1}{2}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

12. Приняв y за новое независимое переменное, а x — за функцию от y, преобразовать уравнение:

$$(y''' + yy')(y')^2 - (y'')^2(3y' + x^2) = 0.$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}, \text{ если } u = \frac{y}{x},\ v = y,\ w = yz - x.$$

14. Найти производную функции $f(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 + 2z^4 - 1$ в точке $A(1, 2, 3)$ по направлению вектора $\overline{a}(1, 2, 1)$.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x = -\sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 2\sin\dfrac{t}{2}$ в заданной точке $M\left(-1, 1, \sqrt{2}\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x, y) = x^3 + 12xy^2 - 15x - 24y + 7.$$

17. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x, y, z) = z\ln z - z - z\ln(xy) + xy + x^2 + 2y^2 - 4x - 2y.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x, y) = xy$ при условии $x^3 + y^3 - 6xy = 0$.

19. Найти в заданной области $x^3 + y^3 + z^3 \leqslant 27$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y, z) = xy + yz + zx$.

20. Определить наибольшее значение корня m–й степени из произведения положительных чисел $x_1, x_2, ..., x_m$ при условии, что их сумма равна заданному числу c. Используя эту задачу, доказать, что среднее геометрическое нескольких положительных чисел не больше их среднего арифметического.

21. Что представляет собой граница m-мерного шара?

3.19. Вариант 19

1. Дать определение на языке $\varepsilon - \delta$ предела функции $f\colon X \to Y$, где X, Y — метрические пространства.

2. Построить линии уровня функции $z = \sqrt{1 - xy}$.

3. Исследовать на непрерывность функцию
$$f(x, y, z) = \begin{cases} cx^2 + \dfrac{xyz}{z^2 + y^2}, & z^2 + y^2 \neq 0; \\ cx^2, & z^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \sin\frac{x}{y} + \cos\frac{z}{xy}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные)

$$u = \frac{x - y^2}{z} + \frac{y - z^2}{x} + \frac{z - x^2}{y}.$$

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(x^3 - z^2, y^4 - x^2, z^5 - y^2),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, заданной неявно:

$$\frac{xyz}{x^2 + y^2} = \ln(x + z + y).$$

8. Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, если $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \cos z + \sin y = a, \\ x^3 + y^3 + z^3 = b. \end{cases}$

9. Проверить, что функция $z(x, y)$, определяемая соотношением

$$F\left(x^2 + y^2, \frac{z}{x}\right) = 0,$$

является решением уравнения $xy\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz$.

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial z}{\partial y} + xyz = 0, \text{ если } z = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\big(\varphi(x) + \psi(y)\big).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x^3 y|^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + xy + y^2)^{\frac{1}{4}}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

12. Приняв y за новое независимое переменное, а x — за функцию от y, преобразовать уравнение: $y'' - y' - (y')^3 x^3 = 0$.

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y},$$

если $x = \cos u,\ \ y = \cos v,\ \ z = e^w$.

14. Найти производную функции $f(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 + 2zy - z^5$ в точке $A(1,2,-3)$ по направлению вектора $\overline{a}(2,1,2)$.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^8 + y^{13} + 5z = 7$ в заданной точке $M\,(1,1,1)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y) = x + y + 8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2},\ \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z) = xz(35 - 2x - y - 3z).$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x,y,z) = xyz$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

19. Найти в заданной области $0 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2$ наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

20. Через точку F, лежащую внутри данного угла, провести прямую так, чтобы она отсекала от угла треугольник наименьшей площади.

21. Является ли связным m-мерный шар?

3.20. Вариант 20

1. Дать расшифровку на языке $\varepsilon{-}N$ определения предела последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, где x_n, $b \in X$ — метрическое пространство.

2. Определить и изобразить область существования функции:
$$u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty, y\to 4} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = z^2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{y}}$;

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные)
$$u = \frac{2x-3y}{z^2} + \frac{y-2z}{x^3} + \frac{3z-x}{y^4}.$$

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции
$$u = \varphi(x^3 - y^5 + z^4, x^2 + y^2 - 2z^2),$$
если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, заданной неявно: $xyz = x^2 + y^2 + z^2$.

8. Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, если $\begin{cases} \sin^2 y - \operatorname{tg} z \cos x = 0, \\ 2x - y \operatorname{ctg} z = 0. \end{cases}$

9. Проверить, что функция $z(x, y)$, определяемая соотношением
$$F\big((x-y)(z+1), (x+y)(z-1)\big) = 0,$$
является решением уравнения
$$(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x+yz)\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - z^2.$$

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

если $z=\varphi(xy)\ln y+\psi(xy)$.

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(y^2-xy)^2}{(x^8+y^8-\frac{4}{3}x^4y^4)^{\frac{1}{3}}}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$y^2+(x^2-xy)y'=0,\ \text{если}\ \ y=tx,\ y=y(t).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=4,$$

если $u=x+y,\ \ v=x-y,\ \ w=xz$.

14. Найти производную функции $z=x^3-y^4$ в точке $A(2,1)$ по направлению касательной к кривой $2x^2+3y^2=5$ в точке $(1,-1)$.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой

$$x=\frac{3t^2}{1+t^3},\ y=\frac{(1+t^3)^2-9t^4}{(1+t^3)^2},\ z=\frac{3t}{1+t^3}$$

в заданной точке $M\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2}\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y)=(2ax-x^2)(6by-9y^2).$$

17. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x, y, z) = yz(2 - y - 2z - 3x).$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x, y, z) = xyz$ при условии $xy + yz + zx = a^2,\ a > 0,\ x, y, z > 0$.

19. Найти в заданной области $0 \leqslant x \leqslant 4,\ 1 \leqslant y \leqslant 6$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

20. Внутри данного угла B поместить отрезок DE длины a, концы которого — точки D и E — находятся на сторонах угла, так, чтобы площадь треугольника DBE была наибольшей.

21. Является ли связной m-мерная сфера?

3.21. Вариант 21

1. Дать расшифровку на языке $\varepsilon - N$ определения предела последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, где $x_n,\ b \in X$ — нормированное пространство.

2. Построить линии уровня функции $z = (2x + y)^2$.

3. Исследовать на непрерывность функцию
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = y^z + y^2 - 3 \operatorname{arcctg} x$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = \dfrac{\ln(x - z)}{\ln y}$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции
$$u = \varphi(xe^y, ye^z, ze^{x-2y}),$$
если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, заданной неявно: $z \sin x^2 + y^3 \sin z + x \sin y = 3$.

8. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $\begin{cases} x^3 - 3z + y^2 + c = 0, \\ z^2 - 2y^2 - x + 1 = 0. \end{cases}$

9. Проверить, что функция $z(x, y)$, определяемая соотношением

$$F\left(z^2 - y^2, x^2 + (y - z)^2\right) = 0,$$

является решением уравнения $(z - y)^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + xz \dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$.

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если } z = \frac{\varphi(x - y) + \varphi(x + y)}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{x-y}^{x+y} \psi(t)dt.$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, \pi)$ функцию

$$f(x, y) = 1 - \operatorname{tg}(x - y).$$

12. Приняв y за новое независимое переменное, а x — за функцию от y, преобразовать уравнение: $y'' + (e^y - x)(y')^3 = 0$.

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если } \ u = x + y, \ v = \frac{y}{x}, \ w = \frac{z}{x}.$$

14. Найти производную функции $f(x, y) = x - x^2 y + y^4$ в точке $A(1, 1)$ по направлению вектора $\overline{BA}$, где $B(4, -2)$.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 y^3 - xy^2 = z + \frac{3}{8}$$

в заданной точке $M\left(2, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{8}\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3}.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2 - 2.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x, y) = x - 2y$ при условии $\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg} y = 0,\ |x| < \dfrac{\pi}{2},\ |y| < \dfrac{\pi}{4}$.

19. Найти в заданной области $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y, z) = x + y + z$.

20. Представить положительное число a в виде суммы n положительных слагаемых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы произведение

$$z = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

(α_i — заданные положительные числа) было наибольшим.

21. Является ли связной прямая в пространстве $\mathbb{R}^m$?

3.22. Вариант 22

1. Дать определение на языке $\varepsilon - \delta$ предела функции $f\colon X \to Y$, где X, Y — метрические пространства.

2. Определить и изобразить область существования функции:

$$u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}.$$

3. Найти $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln^2(x + 3y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = z^{x^2 - 2y}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные)

$$u = z^{x+y} + x^{y+z} + y^{z+x}.$$

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(\sin xz, \sin yz, \sin xy),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, заданной неявно: $z^2 \cos x + y \sin z + x \cos y = 1$.

8. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $\begin{cases} x^3 + z^3 + y^3 - 3xyz = 0, \\ x + y + z = c. \end{cases}$

9. Проверить, что функция $z(x, y)$, определяемая соотношением

$$F\left(\frac{z}{x}, 2x - 4z - y^2\right) = 0,$$

является решением уравнения $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz$.

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

если $z = \varphi(x + \sqrt{t}, y + \sqrt{t}) + \psi(x - \sqrt{t}, y - \sqrt{t})$.

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 1)$ функцию

$$f(x, y) = 1 + \ln(y - x).$$

12. Приняв y за новое независимое переменное, а x — за функцию от y, преобразовать уравнение:

$$(y''' + yy')(y')^2 - (y'')^2(3y' + x^2) = 0.$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$\frac{x}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y},\ \text{если}\ \ u=\frac{y}{x},\ v=y,\ w=yz-x.$$

14. Найти производную функции $f(x,y,z)=x^2-xy+y^2+2z$ в точке $A(1,2,-2)$ по направлению вектора $\overline{c}(1,2,-1)$.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой

$$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ z=4\sin\frac{t}{2},$$

в заданной точке $M\left(\frac{\pi}{,}2,4\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y)=x^3+y^3-9xy+3.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z)=z\ln z-z-z\ln(xy)+xy+x^2+2y^2-4x-2y.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x,y)=xy$ при условии $x^3+y^3-axy=0,\ a>0$.

19. Найти в заданной области $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y,z)=2xy+yz+zx$.

20. Определить наибольшее значение корня n–й степени из произведения положительных чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$ при условии, что их сумма равна заданному числу a. Используя эту задачу, доказать, что среднее геометрическое нескольких положительных чисел не больше их среднего арифметического.

21. Как связаны непрерывность функции в точке по совокупности аргументов и непрерывность в этой точке по отдельным переменным?

3.23. Вариант 23

1. Дать определение на языке $\varepsilon - \delta$ предела функции $f\colon X \to Y$, где X, Y — нормированные пространства.

2. Построить линии уровня функции $z = \sqrt{x - y}$.

3. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y,z) = \begin{cases} ax^2 + \dfrac{xyz}{z^2+y^2}, & z^2+y^2 \neq 0; \\ ax^2, & z^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \ln(x^3 + 3xzy^2 - z^4x)$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные)

$$u = \frac{x+y}{z} + \frac{y-2z}{x} + \frac{z-x}{y}.$$

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(x+z^2, y-x^2, 2z+y^2),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x,y)$, заданной неявно: $\dfrac{z}{x^2+y^2} = \ln(x - z + 3y)$.

8. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $\begin{cases} \cos x + \cos z - \cos y = a, \\ x^3 + y^3 - z^3 = b. \end{cases}$

9. Проверить, что функция $z(x,y)$, определяемая соотношением

$$F\left(x^2+y^2, \frac{z}{x}\right) = 0,$$

является решением уравнения $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} - x^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz$.

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial z}{\partial y} + xyz = 0, \text{ если } z = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(\varphi(x) + \psi(y)).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(1, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \ln(x - 3y).$$

12. Приняв y за новое независимое переменное, а x — за функцию от y, преобразовать уравнение: $y'' - y' - (y')^3 x^3 = 0$.

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$(1 - x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 - y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y},$$

если $x = \cos u,\ \ y = \cos v,\ \ z = e^w$.

14. Найти производную функции $f(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - 4xz + z^3 + 2$ в точке $A(1, -2, 3)$ по направлению вектора $\overline{a}(-1, 3, 1)$.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^4 + y^3 + 3z = 5$ в заданной точке $M\,(-1, 1, 1)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = x + y + 8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2},\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = \frac{9}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{3} - 2\ (x, y, z > 0).$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x, y, z) = xyz$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ a > 0$.

19. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

в заданной области $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a,\ a > 1$.

20. Через точку M, лежащую внутри данного угла, провести прямую так, чтобы она отсекала от угла треугольник наименьшей площади.

21. Имеет ли функция $u = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ точные грани на всей плоскости? Ответ аргументируйте.

3.24. Вариант 24

1. Дать определение на языке $\varepsilon - \delta$ непрерывной функции $f\colon X \to Y$, где X, Y — метрические пространства.

2. Определить и изобразить область существования функции:

$$u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

3. Найти

$$\lim_{z \to \infty, y \to 3} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\frac{z^3+1}{z^2+y}}.$$

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = (2x - z) \ln(x^3 + y^3 - 3z^2)$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные)

$$u = \frac{x + y}{z} + \frac{y + 2z}{x} + \frac{z - x}{y^2}.$$

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(xy + z, x^3 + y^2 - 6z^2),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, заданной неявно: $xyz = x^2 - 2y^2 + z^2$.

8. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, если $\begin{cases} \sin^2 y + 2\sin z\cos x = 0, \\ 2x - y\,\mathrm{tg}\, z = 0. \end{cases}$

9. Проверить, что функция $z(x,y)$, определяемая соотношением
$$F\big((x-y)(z+1),(x+y)(z-1)\big) = 0,$$
является решением уравнения
$$(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x+yz)\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - z^2.$$

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$
если $z = \varphi(xy)\ln y + \psi(xy)$.

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ функцию
$$f(x,y) = 3\cos(x+y).$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:
$$y^2 + (x^2 - xy)y' = 0, \text{ если } \ y = tx,\ y = y(t).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение
$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 4,$$
если $\ u = x+y,\ \ v = x-y,\ \ w = xz.$

14. Найти производную функции $z = x^3 - 3y^2$ в точке $A(0,-1)$ по направлению касательной к кривой $2xy - x^2 = 1$ в точке $(1,1)$.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой

$$x = \frac{3t^2}{1+t^3},\ y = \frac{-(1+t^3)^2 + 9t^4}{(1+t^3)^2},\ z = -\frac{3t}{1+t^3}$$

в заданной точке $M\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{3}{2}\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y) = e^{-2y}(x^2 + 2x - y) - 29.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z) = yxz(2 - y - 2z - 3x) + 1.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x,y,z) = xyz$ при условии $xy + yz + zx = a^2,\ a > 0,\ x,y,z > 0$.

19. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$$

в заданной области $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a,\ 3 < a < 9$.

20. Внутри данного угла B поместить отрезок DE длины b, концы которого — точки D и E — находятся на сторонах угла, так чтобы площадь треугольника DBE была наибольшей.

21. Является ли функция $u = \begin{cases} \sin(x+y), & x+y \neq 0, \\ 0, & x+y = 0 \end{cases}$ ограниченной в круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$? Ответ аргументируйте.

3.25. Вариант 25

1. Дать определение на языке $\varepsilon - \delta$ непрерывной функции $f\colon X \to Y$, где X, Y — нормированные пространства.

2. Построить линии уровня функции $z = 2|x| + y$.

3. Исследовать на непрерывность функцию
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \operatorname{arctg}(xy^2z^3)$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = \arcsin \dfrac{2y}{xz}$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции
$$u = \varphi(2x+y^2, 3y, 4z-x^2),$$
если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x,y)$, заданной неявно: $z^4 + zx^3 + zy^3 = c^4$.

8. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, $\dfrac{du}{dx}$, если $\begin{cases} u^2+x^2+z^2+y^2 = a^2, \\ \ln xy + \dfrac{y}{x} = b^2, \\ \ln \dfrac{z}{x} + zx = c^2. \end{cases}$

9. Показать, что функция $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{z}{y}}$ удовлетворяет данному уравнению:
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если } z = \sqrt{\frac{x}{y}}\varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ функцию
$$f(x,y) = \operatorname{tg}(x+y).$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$y' + 2xy = 2x^3y^3, \text{ если } u = \frac{1}{y^2}, \; u = u(x).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

если $u = x + y, \;\; v = y - x, \;\; w = xy - z.$

14. Найти производную функции $z = 3x^4 - \sqrt{y}$ в точке $A(1,1)$ по направлению нормали к кривой $2y - 3x^2 = 1$ в точке $(1,2)$.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + z^3 - 3xz = 3$ в заданной точке $M\,(1,4,2)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z) = z + \frac{y^2}{4z} + \frac{x^2}{y} + \frac{2}{x} \; (x, \; y, \; z > 0).$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x,y,z) = xyz$ при условии $x + y + z = 5, \; xy + yz + zx = 8.$

19. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x,y) = (x - y^2)\sqrt[3]{(1-x)^2} \text{ в заданной области } y^2 \leqslant x \leqslant 2.$$

20. В данный круг вписать треугольник так, чтобы сумма квадратов длин его сторон была наибольшей.

21. Является ли функция $u = \begin{cases} \sin(x+y), & x + y \neq 0, \\ 0, & x + y = 0 \end{cases}$ ограниченной на оси Ox? Ответ аргументируйте.

3.26. Вариант 26

1. Дать определение на языке $\varepsilon - \delta$ предела функции $f\colon X \to Y$, где X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство.

2. Определить и изобразить область существования функции:
$$u = \ln(x - y + z).$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{\ln(3y + e^x)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = 3^{2^x y^2 z^3}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = \operatorname{arctg} \dfrac{xy}{z}$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции
$$u = \varphi(x^{yz}, xy^z),$$
если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x = e^u \sin v, y = e^u \cos v, z = uv$.

8. Найти частные производные первого порядка функций $z(x, y)$ и $u(x, y)$, если
$$\begin{cases} x - y + z - u = 2a, \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 3b. \end{cases}$$

9. Показать, что функция $u = \ln(x^2 + y^2)$ удовлетворяет данному уравнению: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

10. Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить равенство
$$(x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ если } z = \frac{\varphi(x - y) + \psi(x + y)}{x}.$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функцию

$$f(x, y) = 1 + 2\sin(x - y).$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$(xy + x^2y^3)^{-1}y' = 1, \text{ если } \ u = \frac{1}{y^2}, \ u = u(x).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если } \ u = xy, \ v = y, \ w = z - y.$$

14. Найти производную функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в заданной точке $A\left(\frac{b}{8}, \frac{3\sqrt{3}b}{8}\right)$ по направлению внутренней нормали кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = b^{2/3}$.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{z}{c} = \operatorname{arctg}\frac{bx}{ay},$$

в заданной точке $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{c\pi}{4}\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 18y - 30x + 5.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = \ln(xy) - z(x - y) - x^2 - y^2 + 2xy - y.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции

$$f(x, y, z) = xy + yz \text{ при условиях } x^2 + y^2 = 2, \ y + z = 2, \ x, y, z > 0.$$

19. Найти в заданной области $0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = \cos x - \cos y$.

20. Определить положение точки относительно вершин остроугольного треугольника ABC, чтобы сумма расстояний от этой точки до вершин треугольника была наименьшей.

21. Как связаны между собой непрерывность и равномерная непрерывность функции на данном множестве?

3.27. Вариант 27

1. Дать определение на языке $\varepsilon - \delta$ непрерывной функции $f\colon X \to Y$, где X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство.

2. Построить линии уровня функции $z = 2|x| + 3|y|$.

3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x, y) = \sin \dfrac{\pi}{2 - x^2 - y^2}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = x^y z^x$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = \operatorname{arctg} \dfrac{x + 2y}{z}$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции
$$u = \varphi(x + y, x - y, xy),$$
если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x = \operatorname{arctg} \dfrac{u}{v},\ y = \ln(u^2 + v^2)$ и $z = u - v$.

8. Найти частные производные первого порядка функций $z(x, y)$ и $u(x, y)$, если
$$\begin{cases} xy + z + u = a, \\ (x + y)zu = b. \end{cases}$$

9. Показать, что функция $u = e^{-x}(x-y)^2$ удовлетворяет данному уравнению
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если } z = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функцию
$$f(x,y) = \cos(x-y).$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:
$$xy'' - y' + xy = 0, \text{ если } \; t = \frac{x^2}{4}, \; y = y(t).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$
где $u = x, \;\; v = x - y, \;\; w = x - y + z.$

14. Найти производную функции $u = zy + \dfrac{y}{x}$ в точке $A\,(1,-1,2)$ по направлению градиента функции $G = 2xyz$ в этой точке.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $xy + xz + yz = x^3 + y^3 + z^3$ в заданной точке $M\,(-1,2,1)$.

16. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x,y) = x^4 + 16y^4 - 2x^2 + 8xy - 8y^2 + 4.$$

17. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x,y,z) = x^2 - 2xy + 4y^2 + 6z^2 + 6yz - 6z.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x, y, z) = xy^2z^3$ при условии $x + my^2 + nz^3 = 1,\ m, n > 0,\ x, y, z > 0$.

19. Найти в заданной области $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 2$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^6 + y^6 - 3x^2 + 6xy - 3y^2$.

20. На плоскости XOY даны две точки $P_1(5, 1)$ и $P_2(2, 7)$. Найти точку Q_1 на оси OX и точку Q_2 на оси OY, чтобы длина ломаной $P_1Q_1Q_2P_2$ была наименьшей.

21. Известно, что функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет все частные производные n-го порядка в точке M. Что можно сказать о существовании частных производных меньшего порядка этой функции в точке M и в окрестности точки M?

3.28. Вариант 28

1. Дать определение предела функции по направлению.

2. Определить и изобразить область существования функции:

$$u = \ln(4 + x^2 - y^2 - z^2).$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty, y\to\infty} \dfrac{y^2 - x^2}{x^3 + y^3}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \ln \dfrac{2z - y^2}{z^2 + x}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные)

$$u = \ln(x^3y^2z),\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi\left(-\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{z}, \frac{z^2}{x}\right),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x = u^2 - v^2, y = uv, z = u + 2v$.

8. Найти первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)$, если
$$x^2 - 3zxy + z^2 = 0.$$

9. Показать, что функция $u = e^{x+y}(x + y)$ удовлетворяет данному уравнению:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\varphi'', \text{ если } z = \varphi(y - x) - x\varphi'(y - x).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 1.$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:
$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0, \text{ если } \ x = e^t, \ y = y(t).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение
$$(xy + z)\frac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2)\frac{\partial z}{\partial y} = x + yz,$$
если $u = yz - x, \ \ v = xz - y, \ \ w = xy - z$.

14. Найти производную функции $f(x, y) = x^2 - y^2 x + y^3 - xy$ в точке $A(1, -1)$ по направлению, образующему угол $\dfrac{\pi}{4}$ с осью OX.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \ 2x^2 + y^2 - z^2 = 0$ в заданной точке $M\left(\dfrac{r}{2}, \dfrac{r}{2\sqrt{2}}, \dfrac{r\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y + 100.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z) \ (0 \leqslant x, y, z \leqslant \pi).$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m$ при условии $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a, \ m > 1$.

19. Найти в заданной области $x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} \leqslant 1$ наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y) = \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - 3\frac{xy^2}{8}.$$

20. Из всех конусов с данной боковой поверхностью найти конус с наибольшим объемом.

21. Приведите пример функции $u = f(x, y)$, удовлетворяющей в некоторой точке M_0 условиям $\dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 0$, но не имеющей в точке M_0 локального экстремума.

3.29. Вариант 29

1. Дать определение непрерывной функции по Коши.

2. Построить линии уровня функции $z = \min(x, 2y)$.

3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x, y) = \dfrac{1}{\cos x \cos y}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = z^2 \dfrac{2x}{y^3}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные)

$$u = \ln(xyz),\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi\left(\frac{x}{y^2}, -\frac{y}{z^2}, \frac{z}{x^2}\right),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x^y + y^z = 3$.

8. Найти первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)$, если

$$x^3 + y^3 - 3xyz - z^3 = 11.$$

9. Показать, что функция $u = x\cos\dfrac{y}{x}$ удовлетворяет данному уравнению:

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z,\ \text{если}\ z = e^{-x}\varphi\left(x - y\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(\pi, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \cos(x + y) - 1.$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 0,\ \text{если}\ \ t = \ln x,\ y = y(t).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} = e^z,$$

если $u = x^2 + y^2$, $v = \operatorname{arctg} xy$ и $w = (x^2 + y^2)e^{-z}$.

14. Найти производную функции $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + y^4 + 1$ в точке $A(1,-2)$ по направлению вектора $\overline{CA}$, где $C(2,2)$.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 = -xyz$ в заданной точке $M\,(1,-1,1)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y) = x^2 + 3xy - 8\ln|x| - 6\ln|y|.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z) = xy(14 - x - 3y - 2z) - 2.$$

18. При условии $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = k^2$ найти точки условных экстремумов функции $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, где α_i — произвольные постоянные.

19. Найти в заданной области $0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant x \leqslant 4$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y) = x^3 + 3y^2 - 3xy - 1$.

20. Среди всех четырехугольников с заданными сторонами найти такой, площадь которого наибольшая.

21. Приведите пример функции $u = f(x,y)$, имеющей в некоторой точке M_0 локальный экстремум и такой, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 0$, а $\dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0)$ не существует.

3.30. Вариант 30

1. Дать определение непрерывной функции по Гейне.

2. Определить и изобразить область существования функции:

$$u = \ln(-9 - x^2 + y^2 - z^2).$$

3. Найти $\lim\limits_{y\to\infty,x\to3} \left(1 - \dfrac{1}{y}\right)^{\frac{y^2}{x+y}}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \dfrac{2x - y^2}{z}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = x^y - y^z + z^x$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции
$$u = \varphi\left(\frac{xz}{y}, \frac{yx}{z}, -\frac{zy}{x}\right),$$
если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x + y + z = 3xyz$.

8. Найти первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)$, если
$$2\ln(xyz) = x^2 + 3y^2 - z^2 - 1.$$

9. Показать, что функция $u = \dfrac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{x}$ удовлетворяет данному уравнению:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ если } z = \varphi\left(x + y\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(\pi, 0)$ функцию
$$f(x, y) = \mathrm{tg}(x + y) + 2.$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:
$$xy'' + 2y' - xy = e^x, \text{ если } \; y = \frac{u}{x}, \; u = u(x).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x}\sin^2 x+\operatorname{ctg} x\frac{\partial z}{\partial y}=\cos^2 z,$$

если $u=2y+\operatorname{tg} z\operatorname{ctg} x,\ \ v=\operatorname{ctg} x(\operatorname{tg} z+\operatorname{ctg} x),\ \ w=\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} z.$

14. Найти производную функции $f(x,y,z)=2x^2-xy+y^3+2z^3$ в точке $A(1,2,1)$ по направлению вектора $\overline{c}(1,-1,1)$.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $2x^2+3y^2+z^2=47,\ x^2+2y^2-z=0$ в заданной точке $M\left(-2,1,6\right).$

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y).$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2-4x+2y+4z-39.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции

$$f(x,y,z)=2x^2-y^3-z+1 \text{ при условии } x^2+y^2+2z^2=2.$$

19. Найти в заданной области $0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant 1$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x^3+3y^2-x+18y-4.$

20. В данный круг вписать четырехугольник $ABCD$ наибольшей площади, если величина угла BAD равна α.

21. Сведите задачу об условном экстремуме $u=x^2+y^2$ при условии связи $x+y=2$ к задаче о безусловном экстремуме.

3.31. Вариант 31

1. Дать определение предела функции по множеству E по Гейне.

2. Построить линии уровня функции $z = \max(|x|, 3|y|)$.

3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{tg} 2y}{\cos x \sin y}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \dfrac{2x^3 - 4y^4}{z^2}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = \cos(e^x - y^2 z)$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции $u = \varphi\left(\dfrac{x}{y}, yz, -\dfrac{z}{x}\right)$, если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x^2 - y^2 + z^2 - 2 = \ln(xy + yz)$.

8. Найти первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)$, если
$$x^4 + y^4 + z^4 = 4xy - z.$$

9. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x, y)$, заданной неявно, если
$$F(3xyz, x + y) = 0.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z, \text{ если } z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(-\pi, 0)$ функцию
$$f(x, y) = -2\cos(y - x).$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$y'' + \frac{2}{x}y' - a^2y = 2, \text{ если } y = \frac{u}{x},\ u = u(x).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{если } u = \frac{y}{x},\ v = y,\ w = yz - x.$$

14. Найти производную функции $f(x, y, z) = x^2 - 5xy + y^2 + 2z^4 + 11$ в точке $A(1, 2, -2)$ по направлению вектора $\overline{c}(1, 0, -1)$.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x = u + v,\ y = u^2 + v^2,\ z = u^3 + v^3$ в заданной точке $M\left(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)\right)$, где $u_0 = 1,\ v_0 = -1$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 + 12yz + 2x - 5.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x, y) = x - y$ при условии $\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg} y = 0,\ |x| < \frac{\pi}{2},\ |y| < \frac{\pi}{2}$.

19. Найти в заданной области $0 \leqslant y \leqslant 2,\ -1 \leqslant x \leqslant 1$ наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y) = xy - x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + 1.$$

20. Найти длины осей эллипса, полученного в сечении цилиндра, заданного уравнением $x^2 + 3y^2 = 1$, плоскостью $x + y + z = 0$.

21. Докажите, что если функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ имеет в некоторой окрестности точки M_0 все частные производные n-го порядка и эти частные производные непрерывны в точке M_0, то функция дифференцируема в точке M_0?

3.32. Вариант 32

1. Дать определение предела функции по множеству E по Коши.

2. Определить и изобразить область существования функции:
$$u = \ln(4 - x^2 - y^2).$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty, y\to\infty} \dfrac{y^3 + x^3}{x^4 + y^4}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \left(\dfrac{z}{y}\right)^x$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = xy - 3yz + 4zx$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции
$$u = \varphi(xyz, x - yz + z, x^2 + y^2 - 2z^2),$$
если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x - y + z = \ln(xyz)$.

8. Найти первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)$, если
$$x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = uv.$$

9. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x, y)$, заданной неявно, если
$$F(xy, z, zx) = 0.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство
$$xy\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} + x(1 + x^2) = 0,\ \text{если } 4xyz = -x^4 - 2x^2 + \varphi\left(x \cdot y\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(-\pi, 0)$ функцию

$$f(x, y) = -3\sin(x - y).$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$x^4 y'' - c^2 y = 0, \text{ если } y = \frac{u}{t}, \ x = \frac{1}{t}, \ u = u(t).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + z + x + y = 0, \text{ если } u = x + y, \ v = x - y, \ w = xz.$$

14. Найти производную функции $z = x^3 - \sqrt{y}$ в точке $A(-1, 1)$ по направлению касательной к кривой $3y - 5x^3 + xy = 6$ в точке $(0, 2)$.

15. Написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $y^2 + z^2 = 25, \ x^2 + y^2 = 10$ в заданной точке $M\,(1, 3, 4)$.

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = 4x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5 - 8.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = \frac{4}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{2} + 9 \ (x, \ y, \ z > 0).$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x, y) = xy$ при условии $x^3 + y^3 - axy = 0, \ a > 0$.

19. Найти в заданной области $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y) = 2\sin x + 2\sin y + \sin(x + y).$$

20. Найти кратчайшее расстояние между прямыми

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{5} \text{ и } \frac{x + 4}{2} = \frac{y - 3}{3} = \frac{z + 1}{4}.$$

21. Докажите, что если функция дифференцируема n раз в точке M_0, то эта функция и все ее частные производные до $(n-1)$-го порядка включительно дифференцируемы в точке M_0.

3.33. Вариант 33

1. Дать определение непрерывной функции на языке окрестностей.

2. Построить линии уровня функции $z = \min(x^2, y)$.

3. Исследовать на непрерывность функцию
$$f(x, y) = \frac{\operatorname{tg} y}{\arcsin x \sin 2y}.$$

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = \left(\dfrac{z}{x^2}\right)^y$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = x^3 - 3y^2z$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции
$$u = \varphi\big(\sin(xyz), xy - yz, 2x + y + z\big),$$
если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $\operatorname{arctg} \dfrac{z}{y} = xy + z$.

8. Найти первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)$, если
$$x = u + \ln v,\ y = v - \ln u,\ z = 2u + v.$$

9. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x, y)$, заданной неявно, если
$$F(x^2 - y^2, y^2 + z^2, z^2 - x^2) = 0.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство
$$(y^2+z^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial x}-2xy\frac{\partial z}{\partial y}+2xz=0, \text{ если } x^2+y^2+z^2=y\varphi\left(\frac{z}{y}\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$ функцию
$$f(x,y)=\sin(x+y).$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:
$$2y''+(x+y)(1-y')^3=0, \text{ если } \ x-y=u,\ x+y=v,\ v=v(u).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение
$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=4x, \text{ если } \ u=x,\ v=x-y,\ w=x-y+z.$$

14. Найти производную функции $z=\sqrt{y^3+3x^2}$ в точке $A(-1,1)$ по направлению нормали к кривой $xy+x^2=2$ в точке $B(-1,-1)$.

15. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=v$$
в точке $M\left(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0),z(u_0,v_0)\right),\ u_0=1,\ v_0=-\frac{\pi}{4}.$

16. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x,y)=x^4-2x^2+y^4+4xy-2y^2+19.$$

17. Исследовать на экстремум функцию
$$f(x,y,z)=yz(21-3x-y-2z)-41.$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x,y,z)=7xyz$ при условии $x^2+y^2+z^2=a^2,\ a>0.$

19. Найти в заданной области $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y, z) = x + 3y + z$.

20. Определить положение точки относительно вершин треугольника ABC, чтобы сумма квадратов расстояний от этой точки до вершин треугольника была наименьшей.

21. Сформулируйте определение повторного предела

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to +\infty} f(x, y).$$

3.34. Вариант 34

1. Дать расшифровку на языке $\varepsilon - N$ определения предела последовательности в метрическом пространстве.

2. Определить и изобразить область существования функции:

$$u = \arccos \frac{y - x}{y}.$$

3. Найти $\lim\limits_{x \to \infty, y \to \infty} \dfrac{y^2 - 4x^2}{8x^3 + y^3}$.

4. Найти частные производные до второго порядка включительно для функции $u = x^2 \dfrac{y^2}{z}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порялнков от функции (x, y и z — независимые переменные) $u = 2xy^2 - z^3$.

6. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции

$$u = \varphi(x - z, yz + zx, e^x + e^y + e^z),$$

если φ — дважды дифференцируемая функция.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $2x^2 + 4y^2 + z^2 = a^2$.

8. Найти первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)$, если

$$x = ue^{u+v},\ y = ue^{u-v},\ z = u^2 + v^2.$$

9. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z(x, y)$, заданной неявно, если

$$F(y - zx, x - zy, z + xy) = 0.$$

10. Предполагая, что произвольная функция φ дифференцируема достаточное число раз, проверить равенство

$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = xy,\ \text{если } z^2 = xy + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

11. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2} - 2.$$

12. Вводя новые переменные, преобразовать уравнение:

$$xyy'' - x(y')^2 + yy' = 0,\ \text{если}\ \ u = \ln\frac{y}{x},\ u = u(y).$$

13. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w — за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + x + y = 0,\ \text{если}\ \ u = y + x,\ v = y - x,\ w = xy - z.$$

14. Найти производную функции $z = 2\ln(x^2 + y^2)$ в $A\left(\dfrac{a}{8}, \dfrac{3\sqrt{3}a}{8}\right)$ по направлению внутренней нормали кривой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

15. В заданной точке $M\left(a, -a\sqrt{3}, \dfrac{2\pi a}{3}\right)$ написать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к кривой

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av,\ x^2 + y^2 = 4ax.$$

16. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy - 12.$$

17. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = \frac{16}{x} + \frac{x^2}{z} + \frac{z^2}{y} + \frac{y^2}{4} \ (x, y, z > 0).$$

18. Найти точки условных экстремумов функции $f(x, y, z) = 5xyz$ при условии $xy + yz + zx = a^2,\ a > 0,\ x, y, z > 0$.

19. Найти в заданной области $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y, z) = xy + 2yz + zx$.

20. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(q, 4q)$ до точек параболы $y^2 = 2qx$ $(q > 0)$.

21. Известно, что функция $f(x, y)$ имеет в данной точке предел и повторные пределы. Могут ли какие-то два из них быть неравными?

4. Справочный материал

Производные основных элементарных функций

1. $(C)' = 0$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$;
3. $(a^x)' = a^x \ln a$;
4. $(e^x)' = e^x$;
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования

1. $(CU)' = CU'$;
2. $(U+V)' = U' + V'$;
3. $(UV)' = U'V + UV'$;
4. $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$;
5. $[V\,(U(x))]' = V'\,(U(x))\,U'(x)$,

где C — постоянная, U и V — функции.

Механический смысл производной. Производная $f'(x_0)$ для функции $y = f(x)$, меняющейся со временем x, есть скорость изменения функции в данный момент x_0.

Геометрический смысл производной. Производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\,(x_0, f\,(x_0))$, который, в свою очередь, равен тангенсу угла наклона α касательной к положительному направлению оси Ox, то есть $f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке касания
$M_0\,(x_0, f\,(x_0))$, имеет вид:

$$y - f\,(x_0) = f'\,(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

Определение. Числовая функция $\rho(x, y)$, определенная для любых двух точек x, y из некоторого множества X, называется *метрикой (расстоянием между точками x и y)*, если она удовлетворяет следующим условиям (аксиомам):

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);
3. для любых трех точек $x, y, z \in X$ $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Множество X, в котором введено расстояние между точками, называется *метрическим пространством.*

Определение. Пусть X — линейное пространство. Неотрицательная числовая функция

$$\|x\|\colon X \to \mathbb{R}$$

называется *нормой* в X, если

1) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (положительная однородность или свойство гомотетии);

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника или условие полуаддитивности).

Линейное пространство, в котором введена норма, называется *линейным нормированным пространством.*

5. Список рекомендуемой литературы

1. Архипов, Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. — М.: Дрофа, 2008. —638 с.

2. Бутузов, В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин. — М.: Высшая школа, 2013. —288 с.

3. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. — М.: Дрофа, 2001. Ч. 2. — 725 с.

4. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. — М.: Лань, 2022. — 624 с.

5. Ильин, В.А. Математический анализ. Продолжение курса / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. — М.: изд. МГУ, 1987. — 357 с.

6. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа: в 3-х т. / Л.Д. Кудрявцев. — М.: Юрайт, 2023. Т. 1. — 703 с.

7. Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменных / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, А.Д. Чехлов — М.: ФИЗМАТЛИТ , 2003. — 468 с.

8. Тучинский, Л.И. Дифференциальное исчисление функций многих переменных: Учеб. пособие / Л.И. Тучинский, И.Я. Шнейберг; под общ. ред. Е.Л.Тонкова. — Ижевск: Издательство «Удмуртский университет», 2010. —544 с.

9. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х т./ Г.М. Фихтенгольц. — М.: Лань, 2022. Т. 2. —800 с.

Учебное издание

Ким Инна Геральдовна
Латыпова Наталья Владимировна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 13.12.2023. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 8,7. Уч. изд. л. 8,3.
Тираж 43 экз. Заказ № 2173.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел. : + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18