Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра алгебры и топологии

Т.М. Банникова, Н.А. Баранова

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2023

УДК 511(075)
ББК 22.13я7
Б232

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник ОФХН ФТИ УдмФИЦ УрО РАН О.М. Немцова.

Банникова Т.М., Баранова Н.А.

Б232 Линейная алгебра. Задания для организации самостоятельной работы : учеб.-метод. пособие. – Ижевск : Удмуртский университет, 2023. – 77 с.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров 1-2 курсов направлений подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки, 01.03.01 Математика, 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 44.03.01 Педагогическое образование, 44.03.05 Педагогическое образование с двумя профилями подготовки, изучающих дисциплины «Алгебра», «Фундаментальная и компьютерная алгебра», «Алгебра и аналитическая геометрия». В пособии представлены задачи по следующим темам линейной алгебры: матрицы и определители, системы линейных уравнений, линейные пространства и подпространства, линейные операторы, квадратичные формы, кривые и поверхности второго порядка и др. В пособии представлено подробное решение варианта работы из 16 заданий по разделам линейной алгебры и подборка 10 вариантов по 16 заданий для самостоятельного решения.

УДК 511(075)
ББК 22.13я7

Содержание

Введение

О степени овладения студентом вуза определенным разделом математики чаще всего судят на основе его умений решать задачи по данному разделу. Научиться же решать задачи можно только при самостоятельном их решении. Одной из эффективных форм организации самостоятельной работы студентов по овладению навыками решения задач являются индивидуальные семестровые домашние задания по отдельным дисциплинам или разделам высшей математики. Выполнение индивидуальных семестровых домашних заданий рекомендовано научно-методическим советом по математике Министерства образования Российской Федерации.

Настоящий сборник заданий по линейной алгебре содержит задачи по следующим разделам: векторная алгебра, определители, матрицы, системы линейных уравнений, линейные пространства, линейные операторы, квадратичные формы. Весь материал представлен в виде подборки задач для самостоятельного решения на 10 вариантов и один вариант с подробным решением. Каждый студент решает один вариант заданий. Номер варианта определяется преподавателем, ведущим практические занятия. Задачи решаются студентом самостоятельно по мере прохождения соответствующих тем, и их решения сдаются на проверку преподавателю. Неверно решенные задачи возвращаются на доработку. Выполнение большей части заданий требует от студентов знаний определений, алгоритмов решения задач, основных формул, излагаемых на лекциях и в учебниках по линейной алгебре. В сборник заданий эти сведения не помещены.

Вместе с тем, предложенное решение 0 варианта, безусловно, должно помочь студенту в ходе решения собственного варианта задач.

Опыт преподавания показывает, что студенты трудно усваивают такие понятия линейной алгебры, как линейное пространство, линейное преобразование. Поэтому в пособие включены задачи теоретического характера, решение которых позволяет овладеть этими понятиями.

Данное учебно-методическое пособие содержит систематизированную подборку задач по основным разделам линейной алгебры, изучаемой в направлениях института Математики, информационных технологий и физики.

Из пособия могут формироваться индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов, варианты контрольных и самостоятельных работ. Кроме задач алгоритмического характера, в пособие включено много задач, направленных на проверку усвоения студентами понятий линейной алгебры.

Решение варианта № 0

Задание № 1

Проверить, является ли следующее множество векторов линейными подпространством: Множество натуральных чисел, для которых сумма чисел m и n определена как их произведение m·n, а произведение элемента n на вещественное число a – как степень n^a.

Решение: Для того чтобы убедиться, что подмножество L векторного пространства V является подпространством, необходимо проверить следующие свойства:

1. Для любых x и $y \in L$: $x+y \in L$
2. Для любых $x \in L$ и скаляра t : $tx \in L$

Пусть m и n ϵ N. m+n=m·n, по свойству умножения натуральных чисел получаем, что m+n тоже натуральное число. a·n = n^a. Так как, а любое вещественное число, то рассмотрим контрпример. Пусть n=3, a=$1/2$ тогда n^a =$\sqrt{3}$ не является целым числом, следовательно, подмножество натуральных чисел, удовлетворяющее данным условиям, не является векторным подпространством.

Задание № 2

Вычислить определитель матрицы $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -5 & 7 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение: Сначала получим 1 или –1 в левом верхнем углу.

Прибавим к 1-му столбцу 3-й:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 7 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

Умножим 1-ю строку на (–7) и прибавим ко 2-й, умножим 1-ю строку на 2 и прибавим к 3-й:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 7 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -11 & 19 \\ 0 & 11 & -1 \end{vmatrix}.$$

Прибавим 2-ю строку к 3-й:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -11 & 19 \\ 0 & 11 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -11 & 19 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = -198.$$

Ответ получаем умножением диагональных элементов.

Ответ: – 198.

Задание № 3

Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение: Пусть A – невырожденная квадратная матрица n-го порядка. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*,$$

где A* – союзная к матрице A.

Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Получаем:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ A^* = (\tilde{A})^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$
$$= 0 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) = -5.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & -4/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Задание № 4

Найти базисный минор и ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение: Приводим матрицу к ступенчатому виду.

Умножим первую строку на 2 и прибавим ко второй строке:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

прибавим к третьей строке первую, умноженную на (–3):

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -8 & 2 \end{pmatrix};$$

прибавим ко второй строке 3-ю, умноженную на (–1):

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 2 \end{pmatrix};$$

умножаем вторую строку на (–3) и прибавляем к третьей строке:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & -41 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы равен 3, так как в первых трех столбцах стоит ненулевой минор 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -41 \end{vmatrix} = -41 \neq 0,$$

а миноров 4-го порядка не существует.

Из проведенных элементарных преобразований строк матрицы A следует, что

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -41 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что базисным минором матрицы A является минор третьего порядка, расположенный в первых трех столбцах матрицы A.

Ответ: $\operatorname{rang} A = 3$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ – базисный минор матрицы A.

Задание № 5

Решить матричное уравнение: AX=B, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Умножая это равенство слева на A^{-1}, найденную в задании № 3, получаем:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -15 & 0 \\ -5 & 5 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Задание № 6

Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 3 \\ 4x + 2y + 5z = 5 \\ 3x + 4y + 7z = 2 \end{cases}.$$

Решение: Вычисляем определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Прибавим ко 2-й строке первую, умноженную на (–2) и разложим полученный определитель по элементам 2-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5.$$

Вычисляем определители

$\Delta_i,\ i=1,2,3$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3&1&3\\5&2&5\\2&4&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&3\\0&2&5\\-5&4&7\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}1&3\\2&5\end{vmatrix}=5.$$

Здесь, мы из 1-го столбца вычли 3-й и затем разложили определитель по элементам 1-го столбца.

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&3&3\\4&5&5\\3&2&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&0\\4&5&0\\3&2&5\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}=-10,$$

где мы из 3-го столбца вычли 2-й. Следующий определитель вычисляется также как определитель системы:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&3\\4&2&5\\3&4&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&3\\0&0&-1\\3&4&2\end{vmatrix}=5.$$

Находим неизвестные по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{5}{5}=1,\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-10}{5}=-2,\ z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{5}{5}=1.$$

Проверка: подставим найденные значения в исходную систему

$$\begin{cases}2x+y+3z=3\\4x+2y+5z=5\\3x+4y+7z=2\end{cases}$$

Получим: 2+(-2)+3=3; 4+(-4)+5=5; 3+(-8)+7=2 – верные равенства.

Ответ: (x,y,z)=(1,-2,1).

Задание № 7

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса. Сделать проверку:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

Решение: Приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Минор $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ является базисным минором матрицы системы и расширенной матрицы системы, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A \mid B) = 2$, $\dim \operatorname{Ker} A = n - r = 2 - 2 = 0$, т. е. система является определенной, пространство решений соответствующей однородной системы является нулевым $\operatorname{Ker} A = 0$. Найдем единственное решение системы.

По полученной, в результате элементарных преобразований, матрице

$$(A \mid B) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

записываем, соответствующую этой расширенной матрице, систему, равносильную первоначальной:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_2 = 2 \end{cases},$$

решая которую, находим неизвестные: $x_1 = 0, x_2 = -2$.

Проверка: подставим найденные значения в заданную систему

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

Получим: 0=0; 0+2=2; 0+2=2 – верные равенства.

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Задание № 8

Найти фундаментальную систему решений и, используя ее, записать общее решение.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение: Выписываем матрицу системы и приводим ее к ступенчатому виду. Переставляем 1-ю и 2-ю строки, затем прибавляем ко 2-й и 3-й строке 1-ю, умноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -9 & 15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Базисный минор матрицы системы: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, ранг матрицы системы равен 2, число неизвестных системы равно 4, следовательно размерность пространства решений данной однородной системы равна 2 и в базисе будет два вектора (столбца высоты 4):

$\dim \operatorname{Ker} A = n - r = 4 - 2 = 2$, $\operatorname{Ker} A = < X_1, X_2 >$.

Переменные x_1 и x_2 будут зависимыми, x_3 и x_4 – свободными. Положим $x_3=c_1$, $x_4=c_2$. Тогда из системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ \qquad x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

находим:

$$\begin{cases} x_1 = 3c_1 - 5c_2 - 2c_1 + 2c_2 = c_1 - 3c_2 \\ x_2 = 3c_1 - 5c_2 \end{cases}$$

и записываем общее решение системы:

$$X = \begin{pmatrix} c_1 - 3c_2 \\ 3c_1 - 5c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in R .$$

Ответ:

$\dim \operatorname{Ker} A = 2$ – размерность пространства решений,

$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ – фундаментальная система решений,

$$\operatorname{Ker} A = < \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$ – пространство решений данной однородной системы линейных уравнений.

Задание № 9

Исследовать совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли. Если система совместна, найти ее общее решение и представить его в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной системы представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

Решение: Приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Находим базисные миноры матрицы системы и расширенной матрицы системы:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ – базисный минор матрицы системы и он же базисный минор расширенной матрицы системы, т. е.

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A \mid B) = 2.$$

Следовательно, система является совместной.

Найдем размерность пространства решений соответствующей однородной системы:

$$\dim \operatorname{Ker} A = n - r = 3 - 2 = 1.$$

Отсюда следует, что фундаментальная система решений состоит из одного столбца и $\operatorname{Ker} A = \langle X_1 \rangle$, а общее решение системы будет иметь вид:

$$X = \alpha X_1 + X^*.$$

Используя полученную расширенную матрицу

$$(A \mid B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

выписываем систему, равносильную первоначальной:

$$\begin{cases} \phantom{-x_2 + {}} x_1 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

В базисный минор входят коэффициенты при неизвестных x_1 и x_2, поэтому их объявляем зависимыми переменными, а неизвестную x_3 – свободной переменной, которую обозначаем буквой α и переносим в правую часть:

$$x_3 = \alpha, \ \begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_2 = 2 - \alpha \end{cases}, \ \alpha \in R.$$

Находим остальные неизвестные: $x_1 = 0, x_2 = \alpha - 2$ и выписываем столбец неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha - 2 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Раскладываем этот столбец на сумму двух столбцов:

$X=\begin{pmatrix}0\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 0\end{pmatrix}, \alpha\in R$ – общее решение данной неоднородной системы,

$\tilde{X}=\alpha\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \alpha\in R$ – общее решение соответствующей однородной системы,

$\{X_1\}=\{\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\}$ – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы,

$\operatorname{Ker} A=<\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}>$ – пространство решений соответствующей однородной системы,

$X^*=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$ – частное решение данной неоднородной системы.

Ответ: общее решение системы $X=\alpha\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 0\end{pmatrix}, \ \alpha\in R$.

Задание № 10

Найти размерность и базис линейных оболочек $M = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle, L = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$, их суммы $M + L$ и пересечения $M \cap L$, если

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Решение: Составляем матрицу $(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$ и элементарными преобразованиями строк приводим ее к ступенчатому виду:

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Последовательно выполним следующие преобразования. Ко 2-й строке прибавим 1-ю, умноженную на 2, к 3-й строке прибавим 1-ю, из 4-й строки вычтем 1-ю и разделим все элементы 3-й строки на 2. Короче это можно описать так:

$$S_2 := S_2 + 2S_1,\ S_3 := S_3 + S_1,\ S_4 := S_4 - S_1,\ S_3 := \frac{1}{2} S_3 .$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right),$$

$$S_4 := S_4 + 5S_3,\ S_3 := S_3 - S_2,\ S_3 \leftrightarrow S_4:$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

Из полученных результатов делаем вывод:

$$\operatorname{rang}(A_1, A_2, A_3) = 3,\ \operatorname{rang}(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3) = 4,$$

т. е. $\{A_1, A_2, A_3\}$ – базис подпространства M, $\{A_1, A_2, A_3, B_1\}$ – базис подпространства $M + L$, $\dim M = 3$, $\dim(M + L) = 4$.

Отдельно вычисляем ранг матрицы $B = (B_1, B_2, B_3)$:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Здесь выполнены преобразования:

$$S_1 \leftrightarrow S_2,\ S_2 := S_2 + 2S_1,\ S_4 := S_4 + 4S_1.$$

Далее, последовательно выполняем преобразования

$$S_2 := -\frac{1}{3}S_2,\ S_3 := S_3 - S_2,\ S_4 := S_4 + S_2:$$

$$B \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вывод: $\operatorname{rang}(B_1, B_2, B_3) = \dim L = 3$, $\{B_1, B_2, B_3\}$ – базис L,

$$\dim M \cap L = \dim M + \dim L - \dim(M + L) = 3 + 3 - 4 = 2.$$

Возвращаемся к ступенчатой форме матрицы $(A\,|\,B)$ и находим соответствующую систему уравнений, перенося свободные переменные x_5 и x_6 в правые части уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 2x_4 = 3x_5 + x_6 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 6x_5 + 3x_6 \\ 4x_3 + 7x_4 = 3x_5 - 3x_6 \\ -2x_4 = -5x_5 - 3x_6 \end{cases}.$$

Обозначим $x_5 = 8\alpha, x_6 = 8\beta$ и находим оставшиеся неизвестные:

$$x_4 = \frac{5}{2}x_5 + \frac{3}{2}x_6 = 20\alpha + 12\beta,$$

$$x_3 = -\frac{7}{4}x_4 + \frac{3}{4}x_5 - \frac{3}{4}x_6 = -\frac{7}{4}(20\alpha + 12\beta) + 6\alpha - 6\beta =$$

$$= -29\alpha - 27\beta$$

$$x_2=-x_3-3x_4+6x_5+3x_6=$$
$$=29\alpha+27\beta-60\alpha-36\beta+48\alpha+24\beta=17\alpha+15\beta$$
$$x_1=-x_3-2x_4+3x_5+x_6=29\alpha+27\beta-40\alpha-24\beta+$$
$$+24\alpha+8\beta=13\alpha+11\beta.$$
Выписываем общее решение:

$$X=\begin{pmatrix}13\alpha+11\beta\\17\alpha+15\beta\\-29\alpha-27\beta\\20\alpha+12\beta\\8\alpha\\8\beta\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}13\\17\\-29\\20\\8\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}11\\15\\-27\\12\\0\\8\end{pmatrix}.$$

Составляем матрицу F, столбцами которой являются столбцы фундаментальной системы решений:

$$F=(X_1,X_2)=\begin{pmatrix}13&11\\17&15\\-29&-27\\20&12\\8&0\\0&8\end{pmatrix}.$$

Составляем матрицу $\overline{F}$, полученную из матрицы F отбрасыванием последних 3-х строк:

$$\overline{F}=\begin{pmatrix}13&11\\17&15\\-29&-27\end{pmatrix}.$$

Составляем матрицу $\bar{\bar{F}}$, полученную из матрицы F отбрасыванием первых 3-х строк:

$$\bar{\bar{F}} = \begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу, столбцами которой будет базис пересечения:

$$(C_1, C_2) = (B_1, B_2, B_3)\bar{\bar{F}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ -20 & -20 \\ 8 & 8 \\ 72 & 64 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -5 & -5 \\ 2 & 2 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в качестве базиса пересечения можно взять систему из двух столбцов:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Можно выполнить проверку, вычислив эти столбцы по другой формуле:

$$(C_1, C_2) = (A_1, A_2, A_3)\overline{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 17 & 15 \\ -29 & -27 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -16 & -16 \\ 20 & 20 \\ -8 & -8 \\ -72 & -64 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -5 & -5 \\ 2 & 2 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\{A_1, A_2, A_3\}$ – базис M, $\dim M = 3$, $\{B_1, B_2, B_3\}$ – базис L, $\dim L = 3$, $\{A_1, A_2, A_3, B_1\}$ – базис $M + L$, $\dim(M + L) = 4$,

$\{C_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}\}$ – базис $M \cap L$, $\dim M \cap L = 2$.

Задание № 11

Разложить столбец $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ по базису $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Решение: Пишем разложение вектора B по данному базису:

$$\begin{pmatrix}-4\\6\\9\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Если расписать это равенство по координатно, то получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_2 + x_3 = 9 \end{cases}.$$

Решим эту систему методом Гаусса. Выписываем расширенную матрицу системы и приводим ее к ступенчатому виду. Прибавим 1-ю строку ко 2-й, а затем, полученную 2-ю строку прибавим к 3-й:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right).$$

Прибавим 3-ю строку к 1-й:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right).$$

По полученной матрице пишем соответствующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 11 \end{cases}.$$

Возвращаемся к разложению столбца B по базису и подставляем найденные значения коэффициентов разложения x_1, x_2, x_3.

$$\textbf{Ответ:}\ \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задание № 12

Найти матрицу проектирования вектора на координатную плоскость.

Решение: Отождествим пространство векторов V_3 с пространством столбцов R^3, и пространство векторов, лежащих на координатной плоскости Oxy, с пространством столбцов R^2. Отображение проектирования на координатную плоскость Oxy есть линейное отображение

$$\overline{\text{пр}}_{xy} : R^3 \to R^2,$$

определенное по правилу:

$$\forall \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},\ \overline{\text{пр}}_{xy}\,\bar{a} = \overline{\text{пр}}_{xy}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что это отображение задается умножением матрицы $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на столбец $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$:

$$P \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица P и есть искомая матрица отображения проектирования на плоскость Oxy относительно базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ пространства векторов и базиса $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ пространства векторов координатной плоскости Oxy.

Ответ: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица проектирования на координатную плоскость Oxy.

Замечание. Отображение проектирования вектора на плоскость можно рассматривать как линейный оператор

$$\overline{\text{пр}}_\sigma : V_3 \to V_3.$$

В частности, проекция вектора координатного пространства на координатную плоскость Oxy $\overline{\text{пр}}_{xy} : R^3 \to R^3$ можно задать правилом: $\overline{\text{пр}}_{xy}(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

В этом случае матрица оператора проектирования относительно базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание № 13

Проверить, является ли данное преобразование линейным оператором.

Отображение $f: R^3 \to R^2$ задается правилом: $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3$:

$f(X) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$.

Решение: Отображение f не является линейным. Докажем это. Пусть $X \in R^3$, $\lambda \in R$. Тогда равенство

$$f(\lambda X) = \lambda f(X)$$

должно выполняться для любых столбцов $X \in R^3$ и для любых действительных чисел λ. В частности, при $\lambda = -1$ должно выполняться равенство

$$f(-X) = -f(X).$$

Однако это не так. Пусть, например,

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, -X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(-X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq -f(X).$$

Задание № 14

Найти собственные числа матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$.

Для каждого собственного числа найти размерность и базис собственного подпространства.

Решение: Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3 & 4\\ 4 & -7-\lambda & 8\\ 6 & -7 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Ко 2-й строке прибавим 1-ю, умноженную на (–2):

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -3 & 4\\ 2+2\lambda & -1-\lambda & 0\\ 6 & -7 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Из 2-й строки вынесем общий множитель $(1+\lambda)$:

$$(1+\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & -3 & 4\\ 2 & -1 & 0\\ 6 & -7 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

К 1-му столбцу прибавим 2-й, умноженный на 2:

$$(1+\lambda)\begin{vmatrix}-5-\lambda & -3 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ -8 & -7 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Разложим определитель по элементам 2-й строки:

$$(1+\lambda)\begin{vmatrix} -5-\lambda & 4 \\ -8 & 7-\lambda \end{vmatrix}=0\,,\ (\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda-3)=0\,,$$

$$(\lambda+1)^2(\lambda-3)=0\,.$$

Собственные числа: $\lambda_{1,2}=-1,\ \lambda_3=3$.

Для каждого собственного числа λ решаем однородную систему линейных уравнений $(A-\lambda E)X=0$ с матрицей системы

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{pmatrix}.$$

$\lambda_{1,2}=-1,$

$$A+E=\begin{pmatrix} 1+1 & -3 & 4 \\ 4 & -7+1 & 8 \\ 6 & -7 & 7+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Приводим матрицу системы $A+E$ к ступенчатому виду. Ко 2-й строке прибавим 1-ю, умноженную на (–2), к 3-й строке прибавим 1-ю, умноженную на (–3):

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Находим базисный минор, вычисляем ранг матрицы $A+E$ и размерность собственного подпространства

$$V_{(\lambda=-1)}=\mathrm{Ker}(A+E):$$

Базисный минор: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\operatorname{rang}(A+E)=2$,

$$\dim V_{(\lambda=-1)} = n - \operatorname{rang}(A+E) = 3-2=1.$$

Следовательно, фундаментальная система решений данной однородной системы линейных уравнений (базис пространства ее решений) состоит из одного ненулевого решения.

Найдем произвольное ненулевое решение данной системы уравнений. Составляем равносильную данной систему уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4x_3 \\ \qquad\quad x_2 = 2x_3 \end{cases}.$$

Придаем свободной переменной x_3 какое-нибудь ненулевое значение. Пусть, например, $x_3 = 1$. Тогда $x_2 = 2, x_1 = 1$ и получаем ненулевой столбец решения:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $V_{(\lambda=-1)} = \left< \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right>$.

$\lambda_3 = 3$. Решаем систему $(A-3E)X=0$, с матрицей системы:

$$A-3E = \begin{pmatrix} 1-3 & -3 & 4 \\ 4 & -7-3 & 8 \\ 6 & -7 & 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приводим матрицу системы к ступенчатому виду. Ко 2-й строке прибавим 1-ю, умноженную на 2, к 3-й строке прибавим 1-ю, умноженную на 3:

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & -16 & 16 \\ 0 & -16 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Базисный минор: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\operatorname{rang}(A-3E)=2$,

$$\dim V_{(\lambda=3)} = n - \operatorname{rang}(A-3E) = 3-2=1.$$

Следовательно, фундаментальная система решений данной однородной системы линейных уравнений (базис пространства ее решений) состоит из одного ненулевого решения.

Найдем произвольное ненулевое решение данной системы уравнений. Составляем равносильную данной систему уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}.$$

Пусть, $x_3 = 2$, тогда $x_2 = 2, x_1 = 1$ и получаем ненулевой столбец решения и базис собственного подпространства:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ V_{(\lambda=3)} = < \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} >.$$

Ответ: собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 3;$$

собственные подпространства:

$$V_{(\lambda=-1)} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} >, \ V_{(\lambda=3)} = < \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} >;$$

размерности собственных подпространств:

$$\dim V_{(\lambda=-1)} = 1, \dim V_{(\lambda=3)} = 1.$$

Задание № 15

Найти канонический вид квадратичной формы методом Лагранжа: $x_1x_2 + x_1x_3$.

Решение: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 =$
так как квадратичная форма содержит квадраты переменных с нулевыми коэффициентами, то сделаем универсальную замену переменных: $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

получаем $= {y_1}^2 - {y_2}^2 + y_1y_3 + y_2y_3 =$
далее выделяем полный квадрат по переменной y_1:

$$= \left(y_1 + \frac{1}{2}y_3\right)^2 - {y_2}^2 + y_2y_3 - \frac{1}{4}{y_3}^2 =$$

делаем новую замену: $\begin{cases} y_1 + \frac{1}{2}y_3 = z_1 \\ y_2 = z_2, \ \ y_3 = z_3 \end{cases},$

получаем выражение:

$$= {z_1}^2 - {z_2}^2 + z_2z_3 - \frac{1}{4}{z_3}^2 =$$

выделяем полный квадрат по переменной z_2:

$$= {z_1}^2 - \left(z_2 - \frac{1}{2}z_3\right)^2 =$$

и снова делаем замену переменной:

$$\begin{cases} z_1 = t_1 \\ z_2 - \frac{1}{2} z_3 = t_2 \\ z_3 = t_3 \end{cases}$$, получаем ответ: $= {t_1}^2 - {t_2}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & {}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 \\ {}^1\!/_2 & 0 & 0 \\ {}^1\!/_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– первоначальная матрица квадратичной формы,

$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ –матрица канонического вида квадратичной формы.

Ответ: $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица канонического вида квадратичной формы.

Задание № 16

Привести уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду. Определить тип кривой.

$a)\ x^2 - 2xy + 5y^2 - 16 = 0$
б) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 4x - 12y - 4 = 0$

Решение: $a)\ x^2 - 2xy + 5y^2 - 16 = 0$
Выделяем полный квадрат по переменной x:

$$(\ x^2 - 2xy + y^2) + 4y^2 - 16 = 0$$

$$(x - y)^2 + 4y^2 - 16 = 0$$

Делаем замену переменной:

$$x_1^{\ 2} + 4y_1^{\ 2} - 16 = 0$$

Преобразуем выражение:

$$x_1^{\ 2} + 4y_1^{\ 2} = 16$$

$$\frac{x_1^{\ 2}}{16} + \frac{y_1^{\ 2}}{4} = 1$$

Получили канонический вид кривой. Это эллипс.

$$\text{б) } x^2 - 2xy - 3y^2 + 4x - 12y - 4 = 0$$

Выделяем полный квадрат по переменной x:

$$(x - y + 2)^2 - 4y^2 + 4y - 12y - 4 - 4 = 0$$

$$(x - y + 2)^2 - 4y^2 - 8y - 8 = 0$$

Выделяем полный квадрат по переменной y:

$$(x - y + 2)^2 - 4(y^2 + 2y + 1) - 4 = 0$$

$$(x - y + 2)^2 - 4(y + 1)^2 - 4 = 0$$

Делаем замену переменной:

$$x_1^{\ 2} - 4y_1^{\ 2} - 4 = 0$$

Преобразуем выражение:

$$x_1^{\ 2} - 4y_1^{\ 2} = 4$$

$$\frac{x_1^{\ 2}}{4} - \frac{y_1^{\ 2}}{1} = 1$$

Получили канонический вид кривой. Это гипербола.

Ответ: *а*) $\frac{x_1^{\ 2}}{16} + \frac{y_1^{\ 2}}{4} = 1$ – эллипс.

б) $\frac{x_1^{\ 2}}{4} - \frac{y_1^{\ 2}}{1} = 1$ – гипербола.

Варианты для самостоятельной работы

Вариант № 1

Задание № 1

Проверить, является ли следующее множество векторов линейным подпространством: множество векторов, концы которых лежат в первой четверти системы координат (начала векторов совпадают с началом системы координат).

Задание № 2

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Задание № 3

Найти обратную матрицу к матрице A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Задание № 4

Найти базисный минор и ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 9 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Задание № 5

Решить матричное уравнение AX=B:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Задание № 6

Решить системы линейных уравнений по правилу Крамера. Сделать проверку:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$$

Задание № 7

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса. Сделать проверку:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

Задание № 8

Найти фундаментальную систему решений и, используя ее, записать общее решение:

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Задание № 9

Исследовать совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли. Если система совместна, найти ее общее решение и представить его в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной системы представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 6 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 6. \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 13x_4 = 2 \end{cases}$$

Задание № 10

Найти размерность и базис линейных оболочек их суммы $\mathrm{M}+\mathrm{L}$ и пересечения $\mathrm{M}\cap\mathrm{L}$, если:

$$\mathrm{M} = \langle a_1, a_2 \rangle,\ a_1 = (-2,1,1,0),\ a_2 = (2,0,2,1);$$
$$L = \langle b_1, b_2 \rangle,\ b_1 = (2,0,1,2),\ b_2 = (8,0,6,6).$$

Задание № 11

Разложить вектор x по базису {a, b, c}: x = (2;4;7), a = (3;1; 2), b = (1; 3;1), c = (1; 2; 4).

Задание № 12

Составить в базисе i, j, k матрицу оператора проектирования векторов пространства на плоскость, заданную уравнением: $2x + y + z = 0$.

Задание № 13

Проверить, является ли данное преобразование линейным оператором: оператор поворота плоскости на угол φ вокруг начала координат.

Задание № 14

Найти собственные числа матрицы. Для каждого собственного числа найти размерность и базис собственного подпространства:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задание № 15

Найти канонический вид квадратичной формы методом Лагранжа:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

Задание № 16

Привести уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду:

а) $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 20 = 0$;

б) $9x^2 + y^2 + 6xy - 12x - 4y + 3 = 0$.

Вариант № 2

Задание № 1

Проверить, является ли следующее множество векторов линейным подпространством: множество натуральных чисел, для которых сумма чисел m и n определена как произведение 2·m·n , а произведение элемента n на вещественное число a – как степень n^a.

Задание № 2

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Задание № 3

Найти обратную матрицу к матрице А= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Задание № 4

Найти базисный минор и ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 9 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Задание № 5

Решить матричное уравнение AX=B:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание № 6

Решить системы линейных уравнений по правилу Крамера. Сделать проверку:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$$

Задание № 7

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса. Сделать проверку:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -4 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Задание № 8

Найти фундаментальную систему решений и, используя ее, записать общее решение:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Задание № 9

Исследовать совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли. Если система совместна, найти ее общее решение и представить его в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной системы представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 16x_4 = 23 \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}.$$

Задание № 10

Найти размерность и базис линейных оболочек их суммы $\mathrm{M}+\mathrm{L}$ и пересечения $\mathrm{M}\cap\mathrm{L}$, если:

$\mathrm{M} = \langle a_1, a_2\rangle$, a_1 = (0,1,2,2), a_2= (2,–1,0,2);

$L = \langle b_1, b_2\rangle$, b_1 = (0,1,1,1) , b_2= (1,0,2,3).

Задание № 11

Разложить вектор x по базису {a, b, c}: x = (6;12;–1) , a = (1; 3; 0) , b = (2; –1; 1) ,c = (1;–1; 2).

Задание № 12

Составить в базисе i, j, k матрицу оператора проектирования векторов пространства на плоскость, заданную уравнением: $2x + y - 3z = 0$.

Задание № 13

Проверить, является ли данное преобразование линейным оператором: оператор проектирования векторов плоскости на прямую, лежащую в плоскости.

Задание № 14

Найти собственные числа матрицы. Для каждого собственного числа найти размерность и базис собственного подпространства:

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание № 15

Найти канонический вид квадратичной формы методом Лагранжа:

$$x_1^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

Задание № 16

Привести уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду:

а) $35x^2 - 30xy - 5y^2 + 4 = 0;$

б) $4x^2 - 4xy + y^2 + 8x - 4y + 3 = 0.$

Вариант № 3

Задание № 1

Проверить, является ли следующее множество векторов линейным подпространством: множество рациональных чисел.

Задание № 2

Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

Задание № 3

Найти обратную матрицу к матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание № 4

Найти базисный минор и ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & -4 & -2 \\ 1 & 9 & 8 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Задание № 5

Решить матричное уравнение XA=B:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Задание № 6

Решить системы линейных уравнений по правилу Крамера. Сделать проверку:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Задание № 7

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса. Сделать проверку:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Задание № 8

Найти фундаментальную систему решений и, используя ее, записать общее решение:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Задание № 9

Исследовать совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли. Если система совместна, найти ее общее решение и представить его в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной системы представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}.$$

Задание № 10

Найти размерность и базис линейных оболочек их суммы $M+L$ и пересечения $M \cap L$, если:

$$M = \langle a_1, a_2 \rangle,\ a_1 = (-2,1,2,1),\ a_2 = (2,2,-1,2);$$
$$L = \langle b_1, b_2 \rangle,\ b_1 = (1,1,2,4),\ b_2 = (-3,1,2,0)$$

Задание № 11

Разложить вектор x базису {a, b, c}: $x = (1;-4;\ 4)$, $a = (2;1;-1)$, $b = (4;\ 3;\ 2)$, $c = (1;-1;1)$

Задание № 12

Составить в базисе i, j, k матрицу оператора проектирования векторов пространства на плоскость, заданную уравнением: $x + 2y - 2z = 0$.

Задание № 13

Проверить, является ли данное преобразование линейным оператором: оператор, ставящий в соответствие элементу линейного пространства нулевой элемент этого же пространства.

Задание № 14

Найти собственные числа матрицы. Для каждого собственного числа найти размерность и базис собственного подпространства:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание № 15

Найти канонический вид квадратичной формы методом Лагранжа: $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$

Задание № 16

Привести уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду:

а) $4x^2 + y^2 - 4xy + 4x + 8y = 0$;

б) $9x^2 + 4y^2 - 12xy + 6x - 4y + 1 = 0$.

Вариант № 4

Задание № 1

Проверить, является ли следующее множество векторов линейным подпространством: множество векторов, образующих с данным ненулевым вектором а угол φ.

Задание № 2

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Задание № 3

Найти обратную матрицу к матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание № 4

Найти базисный минор и ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 10 \\ 3 & 5 & 11 & 3 & 16 \\ 4 & 7 & 13 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

Задание № 5

Решить матричное уравнение AX=B:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Задание № 6

Решить системы линейных уравнений по правилу Крамера. Сделать проверку:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Задание № 7

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса. Сделать проверку:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -5 \end{cases}.$$

Задание № 8

Найти фундаментальную систему решений и, используя ее, записать общее решение.

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ 8x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Задание № 9

Исследовать совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли. Если система совместна, найти ее общее решение и представить его в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной системы представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Задание № 10

Найти размерность и базис линейных оболочек их суммы $M+L$ и пересечения $M \cap L$, если:

$$M = \langle a_1, a_2 \rangle, \; a_1 = (-3,2,1,0), \; a_2 = (1,2,1,4);$$
$$L = \langle b_1, b_2 \rangle, \; b_1 = (-2,2,1,1), \; b_2 = (-1,-1,2,2)$$

Задание № 11

Разложить вектор x базису {a, b, c}: x = (–9; 5; 5), a = (4;1;1), b = (2;–1;–3) , c = (–1; 2;1).

Задание № 12

Составить в базисе i, j, k матрицу оператора проектирования векторов пространства на плоскость, заданную уравнением: $3x + y - z = 0$.

Задание № 13

Проверить, является ли данное преобразование линейным оператором: оператор, переводящий элементы линейного пространства в себя.

Задание № 14

Найти собственные числа матрицы. Для каждого собственного числа найти размерность и базис собственного подпространства:

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание № 15

Найти канонический вид квадратичной формы методом Лагранжа:

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Задание № 16

Привести уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду:

а) $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 52 = 0;$

б) $5x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0.$

Вариант № 5

Задание № 1

Проверить, является ли следующее множество векторов линейным подпространством: множество векторов, параллельных какой-либо плоскости.

Задание № 2

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 9 & 8 & 13 & 12 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Задание № 3

Найти обратную матрицу к матрице $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание № 4

Найти базисный минор и ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Задание № 5

Решить матричное уравнение AX=B:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Задание № 6

Решить системы линейных уравнений по правилу Крамера. Сделать проверку:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5,\\ 2x_1+3x_2+x_3=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3=11.\end{cases}$$

Задание № 7

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса. Сделать проверку:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+5x_3+4x_4=-3\\ 5x_1+7x_2+9x_3+6x_4=-4\\ x_1+x_2+2x_3+x_4=-1\\ 2x_1+3x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}.$$

Задание № 8

Найти фундаментальную систему решений и, используя ее, записать общее решение:

$$\begin{cases}-2x_1-x_2+7x_3-x_4=0\\ 3x_1+2x_2+2x_3-4x_4=0\\ 5x_1+3x_2-5x_3-3x_4=0\\ x_1+x_2+9x_3-5x_4=0\end{cases}.$$

Задание № 9

Исследовать совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли. Если система совместна, найти ее общее решение и представить его в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной системы представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Задание № 10

Найти размерность и базис линейных оболочек их суммы $M+L$ и пересечения $M \cap L$, если:

$$\mathrm{M} = \langle a_1, a_2 \rangle,\ a_1 = (1,2,0,2),\ a_2 = (1,0,2,1);$$
$$L = \langle b_1, b_2 \rangle,\ b_1 = (2,1,0,3),\ b_2 = (3,3,0,5).$$

Задание № 11

Разложить вектор x по базису {a, b, c}: x = (–5;–5; 5), a = (–2;3;1) , b = (1; 3;–1) , c = (2; 4;1).

Задание № 12

Составить в базисе i, j, k матрицу оператора проектирования векторов пространства на плоскость, заданную уравнением: $3x + y + 2z = 0$.

Задание № 13

Проверить, является ли данное преобразование линейным оператором: оператор подобия Р с коэффициентом подобия λ, ставящий в соответствие каждому элементу x линейного пространства элемент λx, т. е. $P(x) = \lambda x$.

Задание № 14

Найти собственные числа матрицы. Для каждого собственного числа найти размерность и базис собственного подпространства:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 4 & -8 & 8 \\ 6 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задание № 15

Найти канонический вид квадратичной формы методом Лагранжа:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Задание № 16

Привести уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду:

а) $16x^2 + 8xy + y^2 - 6x + 24y = 0$;

б) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y - 51 = 0$.

Вариант № 6

Задание № 1

Проверить, является ли следующее множество векторов линейным подпространством: множество всех многочленов f(x), удовлетворяющих условию f(1) + f(2) = 0, относительно обычных операций сложения многочленов и умножения на число.

Задание № 2

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & -2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Задание № 3

Найти обратную матрицу к матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задание № 4

Найти базисный минор и ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 4 & 6 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & -3 & -7 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Задание № 5

Решить матричное уравнение XA=B:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Задание № 6

Решить системы линейных уравнений по правилу Крамера. Сделать проверку:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

Задание № 7

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса. Сделать проверку:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}.$$

Задание № 8

Найти фундаментальную систему решений и, используя ее, записать общее решение:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Задание № 9

Исследовать совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли. Если система совместна, найти ее общее решение и представить его в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной системы представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \end{cases}.$$

Задание № 10

Найти размерность и базис линейных оболочек их суммы $M+L$ и пересечения $M \cap L$, если:

$$M = \langle a_1, a_2 \rangle,\ a_1 = (0,1,1,-1), a_2 = (1,0,0,1);$$

$$L = \langle b_1, b_2 \rangle,\ b_1 = (0,1,0,1),\ b_2 = (0,1,2,-3).$$

Задание № 11

Разложить вектор x по базису {a, b, c}: x = (13;2; 7), a = (5;1;1), b = (2;–1; 3), c = (1; 2;–1).

Задание № 12

Составить в базисе i, j, k матрицу оператора проектирования векторов пространства на плоскость, заданную уравнением: $x + 2y + 3z = 0$.

Задание № 13

Проверить, является ли данное преобразование линейным оператором: оператор дифференцирования D в пространстве многочленов степени не выше n.

Задание № 14

Найти собственные числа матрицы. Для каждого собственного числа найти размерность и базис собственного подпространства:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задание № 15

Найти канонический вид квадратичной формы методом Лагранжа:

$$x_3^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_2x_1.$$

Задание № 16

Привести уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду:

а) $37x^2 + 32xy + 13y^2 - 45 = 0;$

б) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 3x - 2y - 2 = 0.$

Вариант № 7

Задание № 1

Проверить, является ли следующее множество векторов линейным подпространством: множество всех многочленов f(t), удовлетворяющих условию 2f(0)–3f(1)=0, относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число.

Задание № 2

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Задание № 3

Найти обратную матрицу к матрице A=$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Задание № 4

Найти базисный минор и ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Задание № 5

Решить матричное уравнение XA=B:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 4 & 0 & -1\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

Задание № 6

Решить системы линейных уравнений по правилу Крамера. Сделать проверку:

$$\begin{cases}2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13,\\ x_1 - x_2 = -1,\\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5.\end{cases}$$

Задание № 7

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса. Сделать проверку:

$$\begin{cases}x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = -1\\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 7\\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 5\\ 7x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 3\end{cases}.$$

Задание № 8

Найти фундаментальную систему решений и, используя ее, записать общее решение:

$$\begin{cases}x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0\\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0\\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0\\ x_2 - x_3 + 8x_4 = 0\end{cases}.$$

Задание № 9

Исследовать совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли. Если система совместна, найти ее общее решение и представить его в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной системы представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}.$$

Задание № 10

Найти размерность и базис линейных оболочек их суммы $M+L$ и пересечения $M\cap L$, если:

$$M = \langle a_1, a_2 \rangle,\ a_1 = (1,0,1,0), a_2 = (0,0,1,1);$$

$$L = \langle b_1, b_2 \rangle,\ b_1 = (1,1,1,0),\ b_2 = (0,1,1,1).$$

Задание № 11

Разложить вектор x по базису {a, b, c}: x= (–9;–1; 7), a = (3; 2;1), b = (–2; 2;1), c = (3;1;–1).

Задание № 12

Составить в базисе i, j, k матрицу оператора проектирования векторов пространства на плоскость, заданную уравнением: $x - 2y + 4z = 0$.

Задание № 13

Проверить, является ли данное преобразование линейным оператором: преобразование, ставящее в соответствие векторам трехмерного пространства фиксированный вектор этого же пространства.

Задание № 14

Найти собственные числа матрицы. Для каждого собственного числа найти размерность и базис собственного подпространства:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -3 & -9 & -4 \\ 3 & 13 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задание № 15

Найти канонический вид квадратичной формы методом Лагранжа: $2x_1^2 + x_4^2 + x_3^2 + 4x_4x_1 + 4x_4x_2 + 2x_4x_3 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Задание № 16

Привести уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду:

а) $9x^2 + 6xy + y^2 - 8x + 24y = 0$;

б) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 12x - 8y + 4 = 0$.

Вариант № 8

Задание № 1

Проверить, является ли следующее множество векторов линейным подпространством: множество всех многочленов f(t), удовлетворяющих условию f(0)=0, относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число.

Задание № 2

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Задание № 3

Найти обратную матрицу к матрице A= $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание № 4

Найти базисный минор и ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание № 5

Решить матричное уравнение XA=B:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание № 6

Решить системы линейных уравнений по правилу Крамера. Сделать проверку:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

Задание № 7

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса. Сделать проверку:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -7 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}.$$

Задание № 8

Найти фундаментальную систему решений и, используя ее, записать общее решение:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Задание № 9

Исследовать совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли. Если система совместна, найти ее общее решение и представить его в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной системы представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}.$$

Задание № 10

Найти размерность и базис линейных оболочек их суммы $\mathrm{M}+\mathrm{L}$ и пересечения $\mathrm{M}\cap\mathrm{L}$, если:

$$\mathrm{M} = \langle a_1, a_2 \rangle,\ a_1 = (0,3,3,-1), a_2 = (3,2,1,2),$$
$$L = \langle b_1, b_2 \rangle,\ \ b_1 = (1,0,-1,0),\ b_2 = (0,3,0,5).$$

Задание № 11

Разложить вектор x по базису {a, b, c}: x = (3;–3; 4), a = (3;1; 2), b = (2;1;1), c = (2;–1; 4).

Задание № 12

Составить в базисе i, j, k матрицу оператора проектирования векторов пространства на плоскость, заданную уравнением: $4x - y + z = 0$.

Задание № 13

Пусть V_3 – трехмерное пространство геометрических векторов. Является ли линейным преобразованием оператор A(x) =αx , где α – фиксированное число x∈V_3?

Задание № 14

Найти собственные числа матрицы. Для каждого собственного числа найти размерность и базис собственного подпространства:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание № 15

Найти канонический вид квадратичной формы методом Лагранжа:

$$x_2^2 - 3x_1^2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_1 - 6x_1x_3.$$

Задание № 16

Привести уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду:

а) $37x^2 - 18xy + 13y^2 - 40 = 0;$

б) $5x^2 - 24xy + 10y^2 + 2x + 2y + 1 = 0.$

Вариант № 9

Задание № 1

Пусть имеем множество непрерывных функций с обычными операциями сложения функций и умножения функций на число. Из множества непрерывных функций выделено множество многочленов степени n. Является ли выделенное множество линейным подпространством?

Задание № 2

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Задание № 3

Найти обратную матрицу к матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Задание № 4

Найти базисный минор и ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 9 & -11 & 16 & 4 \\ 5 & 10 & -6 & 17 & 13 \end{pmatrix}$$

Задание № 5

Решить матричное уравнение AX=B:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание № 6

Решить системы линейных уравнений по правилу Крамера. Сделать проверку:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

Задание № 7

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса. Сделать проверку:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

Задание № 8

Найти фундаментальную систему решений и, используя ее, записать общее решение:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Задание № 9

Исследовать совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли. Если система совместна, найти ее общее решение и представить его в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной системы представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Задание № 10

Найти размерность и базис линейных оболочек их суммы $M+L$ и пересечения $M \cap L$, если:

$$M = \langle a_1, a_2 \rangle,\ a_1 = (-2,1,1,0),\ a_2 = (2,0,2,1);$$
$$L = \langle b_1, b_2 \rangle,\ b_1 = (2,0,1,2),\ b_2 = (8,0,6,6).$$

Задание № 11

Разложить вектор x по базису {a, b, c}: x=(2,4,6), a=(2, 3, -6), b=(-1,3,4), c=(1,0,3).

Задание № 12

Составить в базисе i, j, k матрицу оператора проектирования векторов пространства на плоскость, заданную уравнением: $3x - y - 3z = 0$.

Задание № 13

Пусть V_3 – трехмерное пространство геометрических векторов, а – фиксированный вектор из V_3. Является ли линейным преобразованием оператор А, если А: А(х) $=\alpha\cdot$а, где х$\in V_3$, α равно скалярному произведению векторов х и а?

Задание № 14

Найти собственные числа матрицы. Для каждого собственного числа найти размерность и базис собственного подпространства:

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание № 15

Найти канонический вид квадратичной формы методом Лагранжа:

$$x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

Задание № 16

Привести уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду:

а) $3y^2 + 4xy + 4 = 0$;

б) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$.

Вариант № 10

Задание № 1

Проверить, является ли следующее множество векторов линейным подпространством: множество всех многочленов f(t), удовлетворяющих условию f(0)=3, относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число.

Задание № 2

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & -7 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Задание № 3

Найти обратную матрицу к матрице A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание № 4

Найти базисный минор и ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 14 \\ 3 & 4 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 6 & 5 & -7 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание № 5

Решить матричное уравнение AX=B:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание № 6

Решить системы линейных уравнений по правилу Крамера. Сделать проверку:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Задание № 7

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса. Сделать проверку:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 5 \end{cases}.$$

Задание № 8

Найти фундаментальную систему решений и, используя ее, записать общее решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Задание № 9

Исследовать совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли. Если система совместна, найти ее общее решение и представить его в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Общее решение однородной системы представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18 \end{cases}.$$

Задание № 10

Найти размерность и базис линейных оболочек их суммы $\mathrm{M}+\mathrm{L}$ и пересечения $\mathrm{M}\cap\mathrm{L}$, если:

$$\mathrm{M} = \langle a_1, a_2 \rangle,\ a_1 = (1,2,0,2),\ a_2 = (1,0,2,1);$$

$$L = \langle b_1, b_2 \rangle,\ b_1 = (2,1,0,3),\ b_2 = (3,3,0,5).$$

Задание № 11

Разложить вектор x по базису {a, b, c}: x=(1,-3,7), a=(2,0,8), b=(-7,6,0), c= (0,5,-7).

Задание № 12

Составить в базисе i, j, k матрицу оператора проектирования векторов пространства на плоскость, заданную уравнением: $3x + y - 2z = 0$.

Задание № 13

Пусть V_3 – трехмерное пространство геометрических векторов, x – произвольный вектор V_3 , a, b – фиксированные вектора V_3. Является ли линейным преобразованием оператор A(x)=(x, a) b, где (a, x) – скалярное произведение векторов a и x?

Задание № 14

Найти собственные числа матрицы. Для каждого собственного числа найти размерность и базис собственного подпространства:

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

Задание № 15

Найти канонический вид квадратичной формы методом Лагранжа:

$$4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

Задание № 16

Привести уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду:

а) $13x^2 - 32xy + 37y^2 - 45 = 0;$

б) $x^2 - 10xy + 25y^2 + x - 5y - 6 = 0.$

Список литературы

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – 2-е изд., стереотипное. – СПб.: Лань, 2009. – 512 с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – 12-е изд., исправленное. – М.: Физматлит, 2008. – 304 с.
3. Беклемишева Л.А., Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – 3-е изд., исправленное. – СПб.: Лань, 2008. – 496 с.
4. Винберг Э. Б. Курс алгебры. – М.: Издательство «Факториал Пресс», 2002. – 544 с.
5. Головизин В.В. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб.-метод. пособие. Ч. 1. – Ижевск: Удмуртский университет, 2014. – 320 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – 6-е изд., стереотипное. – М.: Физматлит, 2010. – 280 с.
7. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: Физматлит, 2018. – 272 с.
8. Кремер Н.Ш., Фридман М.Н. Линейная алгебра: учеб. и практикум для акад. бакалавриата: учеб. для вузов по экон. спец. / Финансовый ун-т при Правительстве РФ; под ред. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Юрайт, 2014. – 307 с.
9. Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. М.: Просвещение, 1993. – 288 с.
10. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – 11-е изд., стереотипное. – СПб.: Лань, 2008. – 480с.

11. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – СПб.: Лань, Физматкнига, 2007. – 288 с.
12. Бурмистрова Е.Б. Линейная алгебра: учебник и практикум для академического бакалавриата / Е.Б. Бурмистрова, С.Г. Лобанов. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 421 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

Татьяна Михайловна Банникова
Наталья Анатольевна Баранова

Линейная алгебра. Задания для организации самостоятельной работы

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция
Компьютерная верстка: Т.В. Опарина

Подписано в печать 19.12.2023. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 4,5. Уч. изд. л. 3,3.
Тираж 33 экз. Заказ № 2199.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел. : + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18