Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики

В.Н. Баранов, О.В. Баранова

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ.
Задачи перечислительной комбинаторики

Учебное пособие

Ижевск
2024

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.18я73
Б241

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ.

Рецензенты: канд. физ-мат. наук, доцент каф. «Прикладная математика и информационные технологии» ФГБОУ ВО «Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова» А.Г. Ицков,
канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. каф. информатики и математики ИМИТиФ ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» В.И. Родионов.

Баранов В.Н., Баранова О.В.

Б241 Элементы дискретной математики. Задачи перечислительной комбинаторики : учеб. пособие. – Ижевск : Удмуртский университет, 2024. – 162 с.

ISBN 978-5-4312-1150-8

Учебное пособие посвящено комбинаторным задачам в дискретной математике. Пособие включает теоретический материал курса лекций по дисциплине «Дискретная математика». Пособие содержит множество примеров. Практическая часть включает задания для самостоятельной работы студентов.

Учебное пособие предназначено для студентов уровней бакалавриата и специалитета, обучающихся по направлениям «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Прикладная информатика», «Фундаментальная и прикладная химия». Пособие будет полезно также студентам бакалавриата и магистратуры других естественно-научных направлений.

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.18я73

ISBN 978-5-4312-1150-8

Оглавление

Предисловие

Числа не управляют миром,
но показывают, как управляется мир.
И.-В. Гете

Учебное пособие посвящено перечислительным задачам в дискретной математике, которые традиционно излагаются в курсе комбинаторного анализа. Комбинаторные методы применяются в теории вероятностей, статистике, физике, химии, экономике и других науках.

В 2021 году вышла первая часть этого издания, посвященная принципу Дирихле.

Вопросы, изучаемые перечислительной комбинаторикой, очень многообразны. Многие из них имеют давнюю историю, другие —- достаточно молоды: им всего несколько десятилетий. Развиваясь, комбинаторика стала инструментом современной науки.

Основной упор в пособии сделан на систематизацию методов решения комбинаторных задач. Эти задачи крайне важны для развития логического мышления у будущих специалистов.

Такие задачи возникают в различных областях математики, в компьютерных науках, в электронике, в других дисциплинах (в том числе в экономике, химии, физике). При этом практически отсутствует систематизированное изложение изучаемых вопросов.

Задачи о количестве элементов в множестве и структуре этого множества появились очень давно. Но как научное знание комбинаторика начала складываться сравнительно недавно, во второй половине XVII века. Исследования в этом направлении встречаются в работах Лейбница, Паскаля, Ферма, Бернулли, Коши, Бернсайда, Пойа и других математиков. В данной работе рассматриваются задачи о перечислении различных конфигураций, образованных элементами изучаемых множеств при различных ограничениях (различимость, неразличимость, повторяемость, упорядоченность и др.).

Учебное пособие состоит из восьми глав. В первых трех главах изучаются способы подсчета числа элементов в различных множествах. В четвертой, пятой и шестых главах рассматриваются свойства изучаемых объектов. Седьмая и восьмая главы пособия посвящены аналитическим методам комбинаторного анализа.

В пособии содержится большое количество задач. Многие из них приведены с подробными решениями. Задачи систематизированы по методам их решений. Кроме того, предложено большое количество упражнений для самостоятельной работы, решение которых позволяет читателю правильно оценить приобретенные знания и способствует повышению его математической культуры.

Материал пособия может быть использован студентами старших курсов и магистрами естественно-научных направлений при работе над курсовыми работами и выпускными квалификационными проектами.

Глава 1

Перебор вариантов

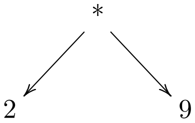
Конечные множества можно описывать, перечисляя их элементы. Для того, чтобы правильно подсчитать количество элементов в множестве, необходимо указать правило (порядок), по которому мы сможем перечислить все элементы.

Один из способов перечисления — это *метод построения дерева возможных вариантов*. Он заключается в том, что элементы множества описываются при помощи последовательного выполнения цепочки действий, а затем, процесс выполнения цепочки действий, или процесс составления комбинаций, изображается в виде «дерева». Сначала, из одной точки («корня дерева») проводят столько отрезков, сколько существует различных способов выполнить первое действие (каждый отрезок соответствует выбору конкретного способа выполнить действие). Из конца каждого отрезка проводят столько отрезков, сколько существует способов выполнить второе действие, после выбора способа выполнить первое действие, соответствующего этому отрезку, и т. д. В результате такого построения получается «дерево», в n-ом ярусе которого, количество вершин соответствует количеству способов выполнить цепочку действий до n-го шага включительно. Количество вершин в последнем ярусе дает ответ в нашей задачи.

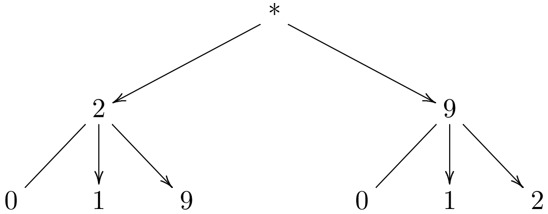
Пример 1.1. Назовем год «интересным», если его номер записывается при помощи цифр 2, 0, 1, 9. Каждая из четырех цифр встречается ровно по одному разу. Сколько «интересных» лет встретится в будущем?

Ответ: 11.

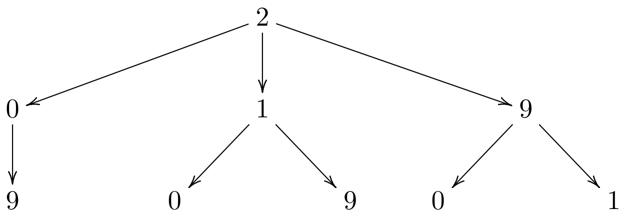
Решение. Номер года (и вообще любое число) можно представить, как процесс написания цифр: выбор количества тысяч, сотен, десятков и единиц номера года. В данном случае мы выбираем из набора цифр $\{0, 1, 2, 9\}$. Так как нас интересуют только те года, номер которых, больше 2021, то первая цифра — 2 или 9:

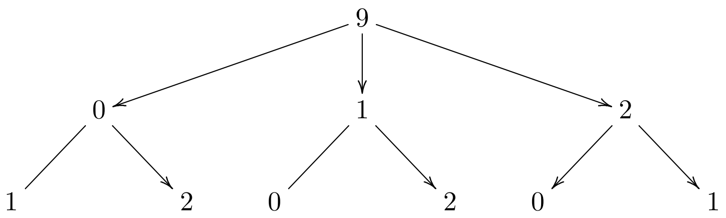


Как после 2, так и после 9 мы можем написать любую из трех оставшихся цифр:

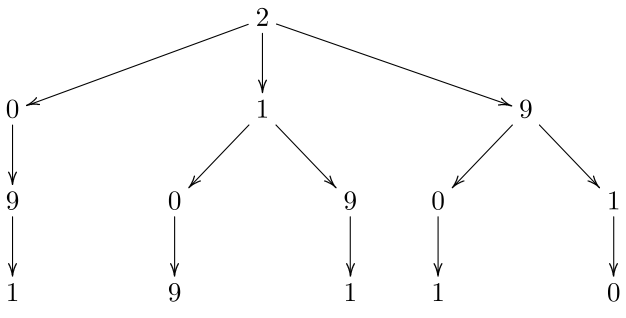


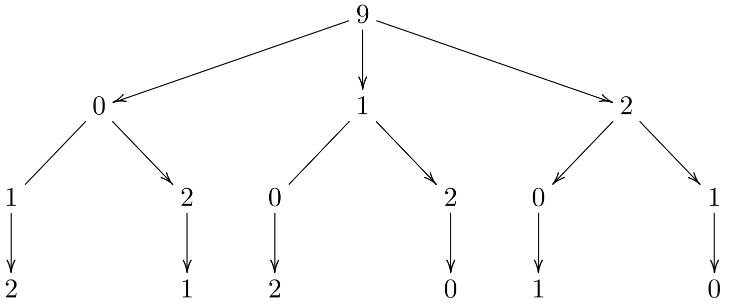
После выбора первых двух цифр 2 и 0, мы можем выбрать только 9, после остальных наборов из двух цифр — любую из двух оставшихся.





После выбора первых трех цифр остается единственный вариант для выбора четвертой:





Всего получилось 11 вариантов: 2091, 2109, 2190, 2901, 2910, 9012, 9021, 9102, 9120, 9201, 9210. □

Другой наглядный способ — выписывание вариантов при помощи таблицы.

Пример 1.2. На прямой даны 4 точки. Сколько существует отрезков с концами в этих точках?

Ответ: 6.

Решение. Назовем точки A, B, C, D. Составим «таблицу-лесенку» возможных отрезков. В первом столбце выпишем все отрезки, у которых одним из концов является точка A, во втором — все отрезки, у которых одним из концов является точка B, без отрезков с концом A (так как все отрезки с концом A выписаны в первом столбце), в третьем — все отрезки, у которых одним из концов является точка C, а точки A и B не являются:

AB	BC	CD
AC	BD	
AD		

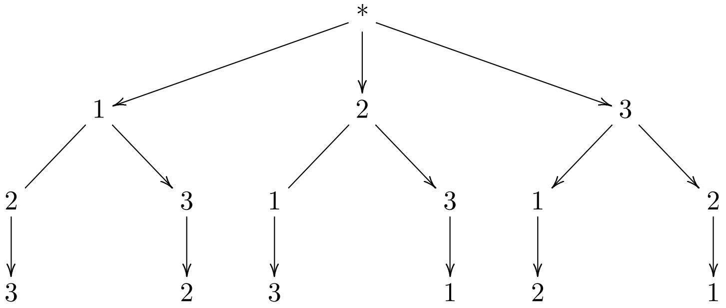
Всего получилось 6 отрезков. □

Пример 1.3. Сколько всего существует перестановок чисел 1, 2, 3?

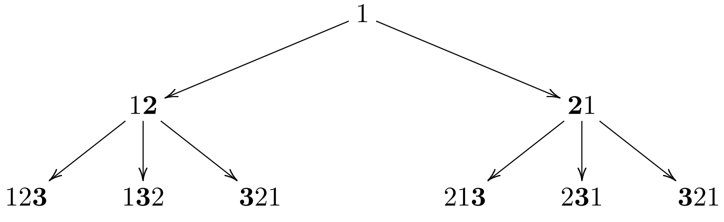
Ответ: 6.

Р е ш е н и е. Первый способ. Выпишем все перестановки, расположив трехзначные числа, соответствующие перестановке, в порядке возрастания: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Второй способ. Опишем перестановку трех чисел как цепочку выполнения трех действий: выбор числа, стоящего на первом месте, затем выбор числа, стоящего на втором месте, и, наконец, поставим третье число на последнее место. Построим дерево возможных вариантов:



Третий способ. Будем получать перестановку 3-х элементов из перестановки 2-х элементов, добавлением числа 3 на каждое из трех возможных мест:



Этот способ в дальнейшем используется при рассуждениях по индукции, когда мы будем получать перестановку $n + 1$ элемента, используя перестановки n первых элементов, и добавление $(n+1)$-го элемента на все возможные места в полученные раннее перестановки. □

Пример 1.4. Сколько существует перестановок чисел 1, 2, 3, 4 таких, что ни одно число не стоит на своем месте?

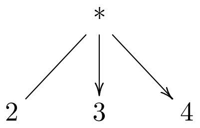
Ответ: 9.

Решение. Первый способ. Выпишем все перестановки в виде таблицы, расположив четырехзначные числа, соответствующие перестановке, в порядке возрастания. Выделим те из них, в которых хотя бы одно число оказалось на своем месте:

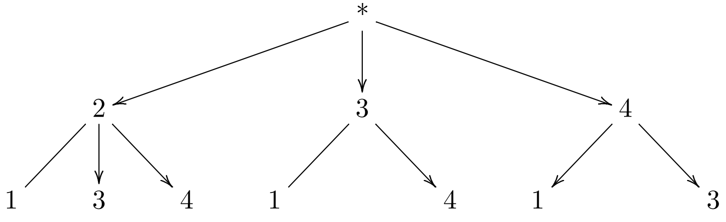
$\mathbf{\underline{1}\underline{2}\underline{3}\underline{4}}$	$\mathbf{21\underline{3}\underline{4}}$	$\mathbf{312\underline{4}}$	4123
$\mathbf{\underline{1}\underline{2}43}$	2143	3142	$\mathbf{41\underline{3}2}$
$\mathbf{\underline{1}32\underline{4}}$	$\mathbf{231\underline{4}}$	$\mathbf{3\underline{2}1\underline{4}}$	$\mathbf{4\underline{2}13}$
$\mathbf{\underline{1}342}$	2341	$\mathbf{3\underline{2}41}$	$\mathbf{4\underline{2}\underline{3}1}$
$\mathbf{\underline{1}423}$	2413	3412	4312
$\mathbf{\underline{1}4\underline{3}2}$	$\mathbf{24\underline{3}1}$	3421	4321

Получаем, что неотмеченных перестановок всего 9.

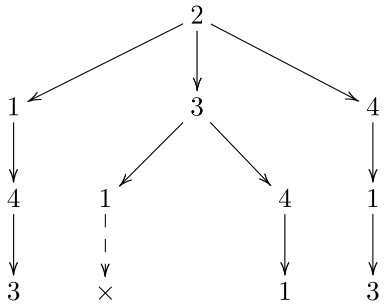
Второй способ. Опишем искомые перестановки, как цепочку выполнения четырех действий последовательного выбора чисел из набора $\{1, 2, 3, 4\}$, с учетом условия. На первом месте не может стоять 1:

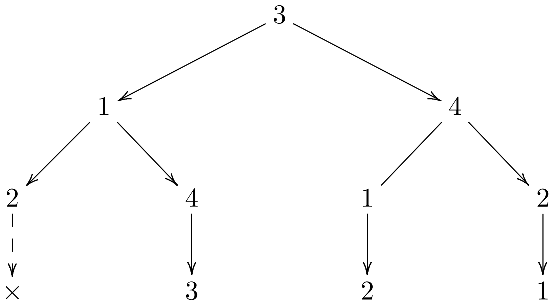


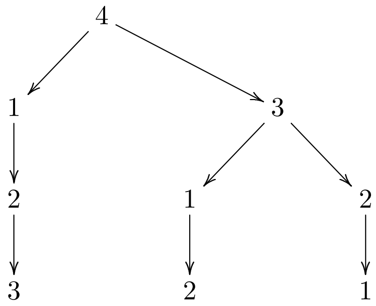
После 3 и 4 нельзя ставить 2.



Выберем оставшиеся числа, учитывая условие.







Получим 9 перестановок. □

ЗАДАЧИ

В следующих задачах возможны различные решения, однако, полезно научиться их решать при помощи метода полного перебора вариантов, т.е. при помощи построения алгоритма, позволяющего перечислить все искомые объекты.

Задача 1.1. Слово, полученное из данного слова перестановкой букв (возможно, без смысла), называют его анаграммой: например, «нос» и «сно» - анаграммы слова сон. Сколько анаграмм у следующих слов: «нос»; «дед»; «мама»; «дама»?

Ответ: а) 6; б) 3; в) 6; г) 12.

Задача 1.2. Для нумерации страниц книги (начиная с первой страницы) потребовалось 999 цифр. Сколько страниц в книге?

Ответ: 369.

Задача 1.3. Для нумерации страниц в книге потребовалось 2322 цифры. Сколько страниц в этой книге?

Ответ: 810.

Задача 1.4. По порядку без пропусков записывают все подряд идущие натуральные числа: 12345678910111213 . . . . На каком по счету месте слева в этом ряду окажется десятый ноль?

Ответ: 191.

Задача 1.5. Сколько существует двузначных чисел, в десятичной записи которых цифра десятков меньше цифры единиц?

Ответ: 36.

Задача 1.6. Сколько существует двузначных чисел (они не начинаются с 0), у которых одна цифра на 4 больше другой?

Ответ: 11.

Задача 1.7. Найдите все трехзначные числа, у которых последняя цифра равна произведению двух первых цифр, при этом все цифры числа различные.

Ответ: 236, 326, 248, 428.

Задача 1.8. Найдите все пятизначные числа, у которых каждая цифра числа строго больше суммы цифр, стоящих правее нее (в частности, четвертая цифра больше пятой).

Ответ: 84210, 94210, 95210.

Задача 1.9. Каких пятизначных чисел больше и на сколько: тех, у которых произведение цифр равно 25, или тех, у которых произведение цифр равно 15?

Ответ: Больше тех, у которых произведение цифр равно 15, на 10.

Задача 1.10. У скольких двузначных чисел сумма цифр больше произведения цифр?

Ответ: 26.

Задача 1.11. Сколькими способами можно набрать сумму в 50 рублей, имея: а) 1 и 2; б) 1, 2 и 5; в) 1, 5, 10 и 50 рублевые монеты?

Ответ: в) 37.

Задача 1.12. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $2x + 3y = 50$?

Ответ: 9.

Задача 1.13. Сколькими способами из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить число, кратное 6? При составлении числа каждую цифру можно использовать не более одного раза.

Ответ: 9.

Задача 1.14. Используя цифры 3, 4, 5 (каждую только один раз), составьте всевозможные трехзначные числа, делящиеся: а) на 2; б) на 5; в) на 3; г) на 6.

Задача 1.15. Яблоко, апельсин, груша и банан лежат на столе в ряд. Апельсин не в начале и не в конце этого ряда. Банан — слева от апельсина (но не обязательно рядом с ним). Сколько разных вариантов расположения фруктов может быть?

Ответ: 6.

Задача 1.16. Сколько различных решений имеет ребус: а) И×Ж×(Е+В+С+К)=33; б) К×А×(З+А+Н+Ь)=33; в) DOOM=D×ZOOB ? Разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым — одинаковые.

Ответ: а) 48; б) 18; в) 4.

Задача 1.17. У скольких трёхзначных чисел средней цифрой является 0?

Ответ: 90.

Задача 1.18. Сколько существует трехзначных чисел, у которых ровно две одинаковые цифры?

Ответ: 243.

Задача 1.19. Сколько существует трехзначных чисел, у которых средняя цифра: а) больше крайних (числа-«горки»); б) меньше крайних (числа-«ямы») ?

Ответ: а) 240; б) 285.

Задача 1.20. Сколькими способами можно выбрать из чисел от 1 до 50 (включительно) два числа, разность которых равна 9, а произведение делится на 5?

Ответ: 17.

Задача 1.21. Число 6 представленно в виде суммы двух нечетных натуральных чисел. Подсчитайте, сколькими способами можно выполнить это действие. Сколько способов представить число 6 в виде суммы двух целых неотрицательных слагаемых? Способы, отличающиеся порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

Ответ: а) 2; б) 4.

Задача 1.22. Две волейбольные команды «Луч» и «Заря» играют матч до трех побед. Сколько может быть вариантов окончания встречи, если в волейболе ничьих не бывает? Нас интересует не только, кто победил, но и с каким счетом.

Ответ: 6.

Задача 1.23. Две волейбольные команды «Луч» и «Заря» играют матч до трех побед. Сколько может быть вариантов протекания встречи, если она закончилась со счетом: а) 3:2; б) 1:3; в) 0:3?

Ответ: а) 6; б) 3; в) 1.

Задача 1.24. Две волейбольные команды «Луч» и «Заря» играют матч до трех побед. Сколько может быть вариантов протекания встречи?

Ответ: 20.

Задача 1.25. Петя и Вася играют в пинг-понг до четырех побед. а) Сколько существует вариантов протекания матча, если Вася выиграл две первые встречи? б) В скольких случаях в пункте а) выиграет Вася?

Ответ: а) 15; б) 10.

Задача 1.26. На окружности отметили четыре точки: A, B, C и D. Сколько при этом получилось дуг?

Ответ: 12.

Задача 1.27. Внутри острого угла провели три луча. Сколько получилось острых углов?

Ответ: 10.

Задача 1.28. а) Сколько костей в комплекте игры «Домино»? б) А если на половинке домино можно будет изображать числа от 0 до 10? в) от 3 до 15?

а) 28; б) 55; в) 91.

Задача 1.29. Окрашенный кубик с ребром 6 см. распилили на кубики с ребром 1 см. Сколько будет кубиков с двумя окрашенными гранями?

Ответ: 48.

Задача 1.30. Из кубика $6 \times 6 \times 6$ выпилили угловой кубик $3 \times 3 \times 3$. Полученную фигуру окрасили, а потом распилили на единичные кубики. Сколько при этом получилось кубиков, у которых ровно две окрашенные грани?

Ответ: 51.

Задача 1.31. Сколькими способами цифры от 1 до 9 можно разбить на несколько (больше одной) групп так, чтобы суммы цифр во всех группах были равны друг другу? (Разбиения, отличающиеся только перестановкой групп, считаются одинаковыми.)

Ответ: 10.

Указание. Сначала определите, какие могут быть группы. В случае, когда три группы с суммами по 15, рассмотрите, какие группы с цифрой 9 (9+6, 9+1+5, 9+2+4, 9+1+2+3), и какие группы с цифрой 8 (8+7, 8+1+6, 8+2+5, 8+3+4, 8+1+2+4).

Задача 1.32. Сколькими способами цифры от 0 до 8 можно разбить на две группы по 3 и 6 цифр так, так чтобы сумма цифр в одной группе была: а) в три раза больше; б) в четыре раза больше, чем в другой?

Ответ: а) 7; б) 0.

Задача 1.33. В стране четыре города: А, Б, В и Г. Их хотят связать тремя авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (возможно, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?

Ответ: 16.

Задача 1.34. Шеренга солдат называется неправильной, если никакие три подряд стоящих солдата не стоят по росту (ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания). Сколько неправильных шеренг можно построить а) из четырёх; б) из пяти солдат разного роста?

Ответ: а) 10; б) 32.

Задача 1.35. Задача Леонарда Эйлера. Трое господ при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Сколько существует вариантов, при которых каждый из них получит чужую шляпу? А если господ 4?

Ответ: а) 2; б) 9.

Задача 1.36. Сколькими способами можно покрасить каждую грань кубика в один из двух цветов? Кубики, получающиеся друг из друга вращением в пространстве, считаются одинаковыми.

Ответ: 12.

Указание. Рассмотрите отдельно варианты по количеству граней первого и вторго цвета.

Задача 1.37. Сколькими способами можно пронумеровать грани кубика цифрами 1—6? Кубики, получающиеся друг из друга вращением в пространстве, считаются одинаковыми.

Ответ: 30.

Указание. Рассмотрите отдельно два варианта: а) грани с номерами 1 и 2 находятся на противоположных гранях кубика; б) грани с номерами 1 и 2 имеют общее ребро.

Задача 1.38. Сколькими способами можно купить три пирожных, если в продаже имеются эклеры, наполеоны и корзиночки?

Ответ: 10.

Задача 1.39. Сколько существут трехзначных чисел с суммой цифр: а) 3? б) 11?

Ответ: а) 6; б) 61.

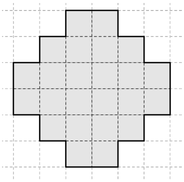
Указание. Рассмотрите отдельно варианты для первой цифры.

Задача 1.40. На доске написаны три различных натуральных числа. Первое число — трехзначное. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго. Третье равно 5. Сколько существует таких троек?

Ответ: 85.

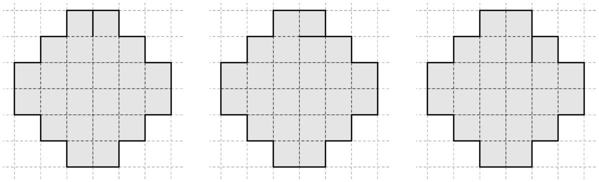
Рассмотрим геометрические задачи перечислительной комбинаторики, которые решаются при помощи метода перебора.

Пример 1.5. Сколькими различными способами можно разрезать фигуру, изображенную на рисунке на две равные части? Способы считаются различными, если части, получающиеся в них, нельзя совместить. При совмещении фигуры можно поворачивать и переворачивать.

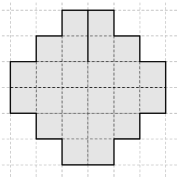


Ответ: 9.

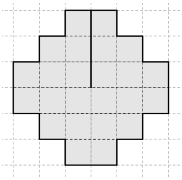
Решение. В первую очередь надо определиться с начальной точкой разреза. Разрез должен начинаться на границе. Он может начинаться или на стороне, или с угла. Все углы одинаковые, поэтому выберем для определенности один из них. Из угла разрез может идти по двум направлениям: вдоль длинной и вдоль короткой стороны границы. Значит, есть три существенно различных варианта для выбора первого отрезка:

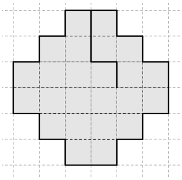


Разберем первый случай. Этот разрез мы можем продолжить только вниз.

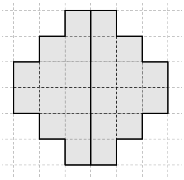


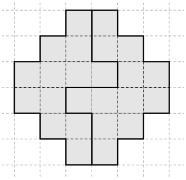
Далее есть два варианта:





Их мы уже однозначно можем закончить из соображений симметрии:

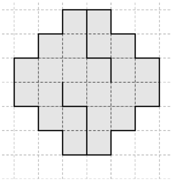




Поясним это соображение, например, на втором из этих двух примеров. В дальнейшем мы его будем опускать.

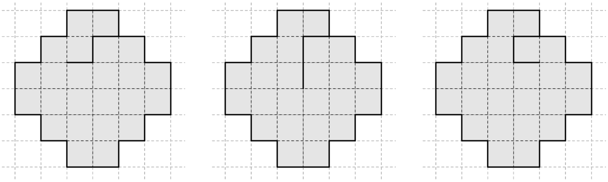
Рассмотрим разрез, идущий с верхней границы. Выходить этот разрез может через симметричную относительно центра точку. Иначе, граница внешнего контура фигуры будет разбита на две неравные части. Пусть большая из этих частей внешней границе принадлежит первой фигуре разбиения. Совместить эту часть границы с границей второй фигуры разбиения не получится.

Получаем, что начав разрез с верхней стороны, мы должны начать такой же разрез только с нижней границы, симметрично относительно центра:

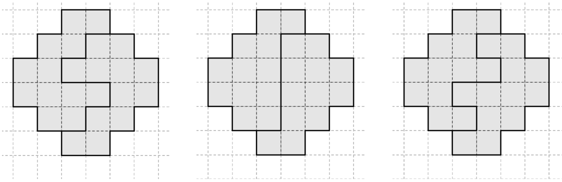


Далее, верхний разрез мы не можем продолжить ни вниз, ни вправо, так как каждый следующий выбор линии приводит к получению неравных частей. Поэтому, продолжив верхний разрез влево, а нижний симметричный вправо, мы получаем окончательный результат.

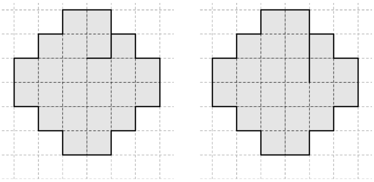
Рассмотрим второй вариант. Он однозначно продолжается вниз, а затем три варианта:



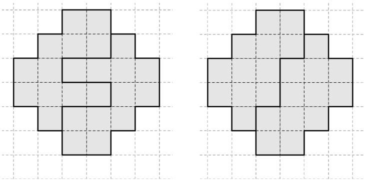
Каждый из этих вариантов однозначно завершается из соображений симметрии:



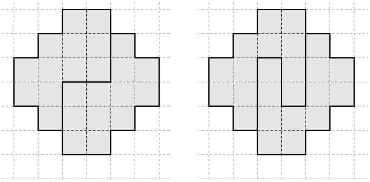
Рассмотрим третий вариант. Для него есть два продолжения:



Для первого рисунка есть еще два продолжения, которые заканчиваются однозначно:



Для второго тоже два:



Итак, мы получили всего 2+3+4=9 вариантов. □

Задача 1.41. Сколькими способами можно разрезать квадрат 4×4 по линиям сетки на две равные части? Два способа считаются различными, если части, полученные при одном способе не равны частям, полученным при другом способе.

Ответ: 6.

Задача 1.42. Сколькими способами можно разрезать прямоугольник 3×4 по линиям сетки на две равные части? Два способа считаются различными, если части, полученные при одном способе не равны частям, полученным при другом способе.

Ответ: 5.

Задача 1.43. Сколькими способами можно разрезать прямоугольник 3×5 с удаленной центральной клеткой по линиям сетки на две равные части? Два способа считаются различными, если части, полученные при одном способе не равны частям, полученным при другом способе.

Ответ: 5.

Задача 1.44. Сколькими способами можно разрезать квадрат 4×4 по линиям сетки на четыре равные части? Способы считаются различными, если нельзя совместить квадраты и их линии разреза.

Ответ: 5.

Задача 1.45. Сколько существует различных фигур тетриса? Пентамино? При совмещениии фигуры можно поворачивать и переворачивать.

Ответ: 5; 12.

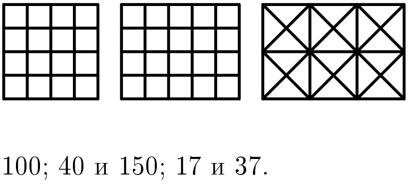
Задача 1.46. Сколько фигур пентамино содержат квадрат 2×2?

Ответ: 1.

Задача 1.47. Сколько фигур пентамино содержат прямоугольник 1×4?

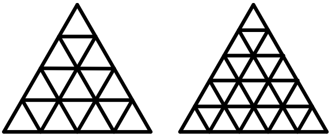
Ответ: 3.

Задача 1.48. Сколько квадратов изображено на каждом рисунке? Сколько прямоугольников?



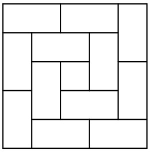
Ответ: 30 и 100; 40 и 150; 17 и 37.

Задача 1.49. Сколько треугольников изображено на каждом рисунке? Сколько параллелограммов?



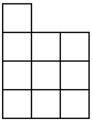
Ответ: 27 и 42; 48 и 75.

Задача 1.50. Сколько прямоугольников изображено на рисунке?



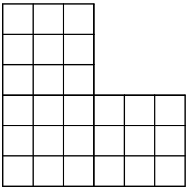
Ответ: 19.

Задача 1.51. Сколькими способами можно разрезать фигуру, изображенную на рисунке, по линиям сетки на две части по пять клеток в каждой? Способы считаются различными, если нельзя совместить линии разреза.



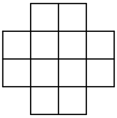
Ответ: 7.

Задача 1.52. Сколько существует способов разрезать фигуру, изображенную на рисунке, по линиям сетки на трехклеточные уголки? Способы считаются различными, если нельзя совместить линии разреза.



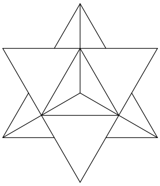
Ответ: 4.

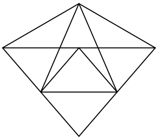
Задача 1.53. Сколько трехклеточных уголков можно найти на рисунке?

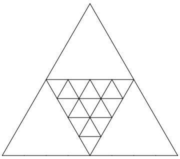


Ответ: 24.

Задача 1.54. Сколько треугольников изображено на рисунке?

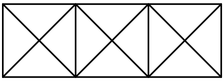


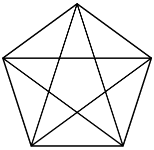




Ответ: а) 17; б) 18; в) 31.

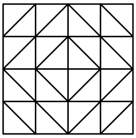
Задача 1.55. Сколько треугольников изображено на рисунке?





Ответ: а) 28; б) 35.

Задача 1.56. Сколько квадратов изображено на рисунке?



Ответ: 32.

Глава 2

Правило произведения. Перестановки. Размещения

Начнем с примера.

Пример 2.1. В магазине имеется 3 различные ручки и 2 различных карандаша. Сколькими способами можно купить набор из двух предметов: одной ручки и одного карандаша?

Ответ: $3 \cdot 2 = 6$ способов.

Решение. Эту задачу можно решить полным перебором, используя таблицу или дерево возможных вариантов. Разберем их еще раз.

Сделать выбор пары — это выполнить цепочку из двух действий: 1-е действие — это выбор ручки, второе — выбор карандаша.

Первый способ. Опишем наш выбор как пару чисел (i, j), $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$: на первом стоит номер выбранной ручки, на втором — номер выбранного карандаша. Все эти пары мы можем записать в виде таблицы:

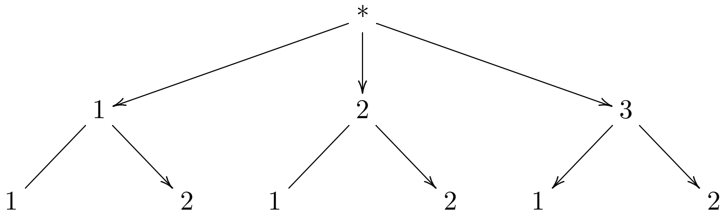
$$\begin{array}{cc} (1,1) & (1,2) \\ (2,1) & (2,2) \\ (3,1) & (3,2) \end{array}$$

в которой 3 строки, по количеству ручек, и 2 столбца, по количеству карандашей. Всего получаем, что в таблице $3 \cdot 2 = 6$ элементов.

Замечание. В этой задаче мы использовали элементы кодирования. Способ выбора карандаша и ручки мы записали при помощи набора чисел, в котором каждое число означает номер выбранного действия. Значит, найти количество способов выбрать ручку и карандаш — это то же самое, что найти количество упорядоченных наборов из двух чисел, где на первом месте могут стоять числа 1, 2 или 3, а на втором — 1 или 2. Количество элементов в таблице — это произведение количества строк на количество столбцов.

Второй способ. Построение дерева возможных вариантов.

Сначала из одной точки мы проведем столько отрезков, сколько различных способов выбрать ручку, то есть 3. Из конца каждого отрезка проведем столько отрезков, сколько различных способов выбрать карандаш, то есть из каждой вершины первого яруса проводим по 2 отрезка. В результате такого построения получается «дерево», у которого во втором ярусе 6 вершин. Это и есть количество способов выбрать пару из ручки и карандаша.



Замечание. Это дерево возможных вариантов имеет следующее свойство: из всех трех вершин первого яруса выходит ровно по две ветки. Поэтому, мы можем не перебирать ветки второго яруса, а подсчитать их количество, умножив количество вершин из первого яруса на количество веток, выходящих из них. □

Теорема 2.1. Правило произведения. Пусть подсчитывается количество объектов, каждый из которых строится в результате последовательного выполнения N действий. Первое действие может быть выполнено n_1 способами, второе — n_2 способами, $\ldots$, последнее — n_N способами, при этом количество способов выполнить каждое действие не зависит от того, какими были предыдущие действия. Тогда общее количество объектов равно $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_N$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

При $N = 1$ доказываемое утверждение очевидно: одно действие мы можем выполнить n_1 способами.

Пусть $N = 2$. Доказательство практически полностью повторяет рассуждения в примере 1. Воспользуемся, например, идеей из первого способа. Опишем наш выбор как пару чисел (i, j), $i = 1, 2, \ldots, n_1$ $j = 1, 2, \ldots, n_2$: i — номер способа выполнить первое действие, j — второе. Все эти пары мы можем записать в виде прямоугольной таблицы:

$$\begin{array}{cccc}
(1,1) & (1,2) & \ldots & (1,n_2) \\
(2,1) & (2,2) & \ldots & (2,n_2) \\
\vdots & & & \\
(n_1,1) & (n_1,2) & \ldots & (n_1,n_2)
\end{array}$$

В таблице n_1 строк и n_2 столбцов, значит, $n_1 \cdot n_2$ элементов. Утверждение для случая двух действий доказано.

Индукционный шаг. Предположим, что правило произведения справедливо при $N = k \geqslant 2$. Последовательность выполнения $k + 1$ действия будем кодировать упорядоченным наборам чисел $(i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1})$, где $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$ — номер способа выполнить j-е действие. Выбор такого набора мы можем описать, как цепочку выполнения двух действий:

1) выбор набора $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$;

2) выбор i_{k+1}.

По предположению индукции, первое действие мы можем выполнить $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами. Второе, по условию теоремы, n_{k+1} способом. По второму пункту, цепочку из этих двух действий мы можем выполнить

$$(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k) \cdot (n_{k+1}) = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k \cdot n_{k+1}$$

способами. Значит, формула верна для $N = k + 1$, что и требовалось доказать. □

Замечание. Еще раз подчеркнем: при применении правила произведения, мы должны установить, что: **количество способов сделать каждое следующее действие не зависит от способа, которым мы сделали предыдущий выбор**.

Пример 2.2. Есть 5 книг. Сколькими способами их можно расположить на книжной полке?

Ответ: 120.

Решение. Расположить 5 книг на книжной полке — это выполнить цепочку из пяти действий: выбрать первую книгу, затем вторую и так далее. Первую книгу мы можем выбрать 5 способами. Тогда для выбора второй книги у нас останется 4 возможности. После выбора первых двух книг, для третьей останется 3 возможности. Для выбора 4-ой книги — 2 способа, для выбора 5-ой книги — 1 способ. По правилу произведения получаем, что количество способов выполнить эту цепочку равно $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
□

Пример 2.3. Сколько существует трехзначных чисел с нечетной суммой цифр?

Ответ: 450.

Решение. Записать трехзначное число — это выполнить цепочку из трех действий. Первую цифру мы можем записать 9 способами, вторую — 10. Четность последней цифры должна отличаться от четности суммы двух первых записанных цифр. Значит, третью цифру мы можем записать одним из 5 способов. Получаем, что количество способов выполнить эту цепочку равно $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$. □

Пример 2.4. Сколькими способами можно разложить 5 различных монет по трем карманам?

Ответ: 243.

Решение. Разложить монеты по карманам — это выполнить цепочку из 5 действий: для первой монеты определить, в какой карман мы ее положим, для второй, и так далее, для всех пяти монет. Определить карман для монеты — это действие, которое можно сделать тремя способами. Значит, по правилу произведения, количество способов выполнить эту цепочку действий равно $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$ способа. □

Замечание. Иначе эту задачу можно описать так: разложить 5 различных монет по трем карманам — это записать цепочку $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ из 5 чисел, каждое из которых равно 1, 2 или 3. Получим такой же ответ. □

Пример 2.5. У Коли имеется 5 различных книг. Он решил подарить Диме набор из одной или нескольких книг. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 31.

Решение. Выбрать подарок — это сделать выбор для каждой из 5 книг: войдет она в подарок или не войдет. Так как для каждой книги два способа сделать выбор, то для 5 книг способов сделать выбор — $2^5 = 32$. Однако, мы должны вычесть случай, когда для каждой книги мы сделали выбор — «не войдет». Получаем, что всего способов выбрать набор $2^5 - 1 = 31$. □

Замечание. Иначе эту задачу можно описать так: сделать для каждой из пяти книг выбор — это записать цепочку $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ из 5 чисел, каждое из которых равно 0 или 1. При этом нас не устраивает набор $(0, 0, 0, 0, 0)$. Получим такой же ответ. □

Пример 2.6. На складе имеется 5 одинаковых тетрадей, 4 одинаковых альбома и 3 одинаковых блокнота. Скольким способами можно сделать выбор для создания заказа из этого ассортимента? В заказ может войти любое доступное на складе количество каждого вида товара, включая вариант «ничего не выбрать».

Ответ: 120.

Решение. Создать заказ — это сделать для каждого вида товаров выбор числа — количества предметов этого вида, включая выбор 0 предметов, когда товар данного вида не входит в заказ. Таким образом, мы можем выбрать количество тетрадей в заказе 5+1=6 способами, выбрать количество альбомов в заказе 4+1=5 способами, выбрать количество блокнотов в заказе 3+1=4 способами. Получаем, что всего способов выбрать набор $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. □

Замечание. По-другому эту задачу можно описать так: создать заказ — это записать цепочку (a, b, c) из 3 чисел, где $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $c \in \{0, 1, 2, 3\}$. При этом набор $(0, 0, 0)$ будет означать, что ничего не выбрали. Получим такой же ответ. □

Пример 2.7. Сколько делителей у числа 1 440?

Ответ: 36.

Решение. Разложим 1 440 на простые множители: $1\,440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$. Любой делитель числа 1 440 может содержать только степени 2, 3 или 5. При этом 2 не может войти в степени, большей 5, 3 — в степени, больше 2, 5 — в степени, не больше 1. Значит, выбрать делитель числа 1 440 — это выполнить три действия: выбрать степень для 2, выбрать степень для 3, выбрать степень для 5. Первое действие мы можем выполнить 6 способами, второе — 3, третье — 2. Всего $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ способов. Значит, всего 36 делителей, включая 1 и само число 1 440. □

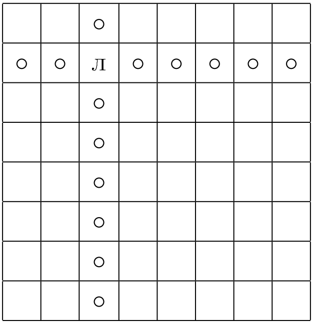
Замечание. Можно описать задачу немного по-другому. Делитель числа 1 440 имеет вид $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, где $0 \leq a \leq 5$, $0 \leq b \leq 2$, $0 \leq c \leq 1$. Значит, выбрать делитель 1 440 — это записать цепочку (a, b, c) из 3 чисел, где $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$, $c \in \{0, 1\}$. □

Замечание. Обратите внимание на то, что в каждой задаче мы описывали цепочку действий составления комбинаций при помощи набора чисел. В данных задачах это удобнее построения дерева возможных вариантов. Такое описание строками — очень удобный способ для хранения и передачи информации. □

Пример 2.8. а) Сколькими способами можно поставить на шахматную доску черную и белую ладью так, чтобы они не били друг друга? б) Сколькими способами можно поставить на шахматную доску черного и белого короля так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: а) 3 136; б) 3 612.

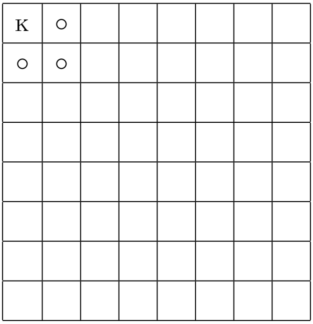
Решение. а) Нам нужно выполнить цепочку из двух действий: поставить черную ладью, а затем поставить белую так, чтобы ладьи не били друг друга. Сделать первое действие мы можем 64 способами. После этого, независимо от того, куда поставили черную ладью, появится 15 клеток, куда мы не можем поставить белую ладью.

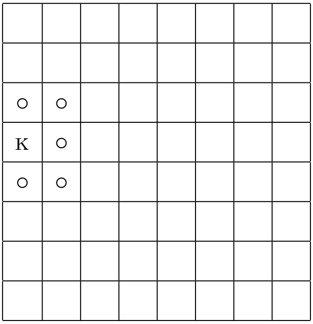


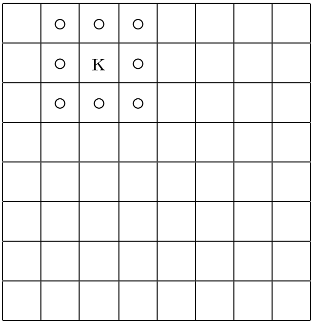
Значит, для второго действия всегда 49 возможных вариантов. По правилу произведения, количество расстановок равно $64 \cdot 49 = 3\,136$.

б) В отличие от предыдущего пункта, количество клеток, куда мы можем поставить второго короля, зависит от того, куда мы поставили первого. То есть, количество способов сделать второе действие **зависит** от способа, которым мы сделали первое. Значит, мы не можем сразу применить правило произведения.

Всего возможны три варианта для того, сколько клеток может бить король. Если король стоит в угловой клетке, то он бьет три клетки; если в граничной неугловой клетке, то пять; если во внутренних клетках, т.е. не примыкающих к границе доски, то восемь.







Разобьем все допустимые расстановки на три группы: 1) черный король стоит в угловой клетке; 2) черный король стоит в граничной неугловой клетке; 3) черный король стоит во внутренней клетке доски.

В каждом из трех случаев применимо правило произведения.

1) Независимо от того, в какую из четырех угловых клеток поставили черного короля, остается 60 вариантов выбрать клетку для белого короля. Значит, в этой группе $4 \cdot 60$ расстановок.

2) Независимо от того, в какую из 24 граничных неугловых клеток поставили черного короля, остается 58 вариантов выбрать клетку для белого короля. Значит, в этой группе $24 \cdot 58$ расстановок.

3) Независимо от того, в какую из 36 внутренних клеток поставили черного короля, остается 55 вариантов выбрать клетку для белого короля. Значит, в этой группе $36 \cdot 55$ расстановок.

Получаем, что во всех трех группах $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3\,612.$ расстановок. □

Замечание. Этот же результат мы получим, если будем строить дерево всех возможных вариантов. Первое действие — ставим черную ладью в любую из 64 клеток, второе — ставим белую ладью согласно условию задачи. 64 вершины первого яруса (возможные варианты сделать первое действие) мы разбиваем на три группы: 4 вершины, из которых выходит по 60 отрезков для выбора второго действия, 24 вершины — из которых выходит по 58 отрезков, и 36 вершины — из которых выходит по 55 отрезков.

Пример 2.9. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых найдутся одинаковые цифры?

Ответ: 62 784.

Решение. Все пятизначные числа делятся на две группы: числа, в записи которых есть одинаковые цифры, и числа, в записи которых все цифры различны. Проще посчитать числа во второй группе, их — $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$. Всего пятизначных чисел — 90 000. Получаем, что пятизначных чисел, в записи которых найдутся одинаковые цифры — $90\,000 - 27\,216 = 62\,784$.

□

Далее рассмотрим примеры важных комбинаторных конструкций.

Определение 2.1. Пусть имеется n различных элементов. *Перестановкой* n элементов называют их расположение на n различных местах. $P(n)$ — число перестановок n-элементного множества.

Утверждение 2.1. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $P(n) = n!$.

Доказательство. Рассмотрим выбор перестановки, как цепочку выполнения n действий: выбор элемента, расположенного на первом месте; выбор элемента, расположенного на втором месте, после того, как мы выбрали первый элемент и т.д. до выбора элемента, расположенного на последнем месте, после того, как выбраны элементы на всех предыдущих местах.

Для выбора первого элемента имеется n способов, для выбора второго элемента, после того, как выбран первый элемент, имеется $n-1$ способ, независимо от того, каким был выбран первый элемент. Для выбора третьего элемента имеется $n-2$ способа и т. д. Для выбора последнего, n-го элемента цепочки, имеется 1 способ. Следовательно

$$P(n) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}_{n} = n!.$$

□

Замечание. $0! = 1$. Количество способов размесить 0 предметов на 0 мест равно 1, т.е. ничего не размещать.

Определение 2.2. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный упорядоченный набор, составленный из k различных элементов данного множества, называется *размещением* из n элементов по k элементов (или просто размещением из n по k). Число размещений из n элементов по k элементов обозначается через A_n^k.

Утверждение 2.2. Пусть $n, k \in \mathbb{Z}_+$, $n \geqslant k$. Тогда

$$A_n^k = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Доказательство аналогично предыдущему.

Замечание. Если $n < k$, то $A_n^k = 0$. Количество способов составить набор из большего количества различных элементов, чем их имеется — 0, так как это невозможно сделать. При этом $A_0^0 = \dfrac{0!}{0!} = 1$, количество способов составить набор из 0 различных элементов равно 1.

Определение 2.3. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный упорядоченный набор, составленный из k элементов данного множества, когда каждый элемент может участвовать несколько раз, называется *размещением с повторениями* из n элементов по k. Число размещений с повторениями из n элементов по k элементов обозначается $\overline{A}_n^k$.

Утверждение 2.3. Пусть $n, k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\overline{A}_n^k = n^k$.

Доказательство. Рассмотрим выбор размещения с повторениями, как цепочку выполнения k действий: выбор элемента, расположенного на первом месте; выбор элемента, расположенного на втором месте, после того, как мы выбрали первый элемент и т.д. до выбора элемента, расположенного на k-м месте, после того, как выбраны элементы на всех предыдущих местах.

В отличие от предыдущих рассуждений, количество способов выполнить каждое из k действий равно n, так как мы можем выбирать один и тот же элемент любое число раз, независимо от того, какие элементы были выбраны ранее. Поэтому, по правилу произведения:

$$\overline{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k.$$

□

Замечание. Исходя из этих рассуждений считаем, что $\overline{A}_0^0 = 1$, так как количество способов составить набор из 0 элементов равно 1. При этом мы будем избегать записи 0^0, в отличие от 0!.

Существуют различные интерпретации числа размещений (неполного факториала) из n по k. Перечислим основные модели, где встречаются числа размещений.

В дальнейшем $|M|$ обозначает число элементов конечного множества $|M|$.

Утверждение 2.4. Число A_n^k равно:

1. количеству упорядоченных выборок размера k без повторений элементов — «выбор без возвращения», составленных из элементов множества M с числом элементов $|M| = n$;

2. количеству слов длины k, составленных из различных букв, выбранных из алфавита, содержащего n букв;

3. количеству размещений k различных шаров по n различным ящикам таких, что в каждом ящике находится не более одного шара;

4. количеству различных функций $y = f(x)$, определенных на множестве X с $|X| = k$, принимающих значения в множестве Y с $|Y| = n$, таких, что если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$ (т. е. $f : X \to Y$ является инъекцией).

Различные интерпретации числа размещений с повторениями из n по k.

Утверждение 2.5. Число $\overline{A}_n^k$ равно:

1. количеству упорядоченных выборок размера k с повторениями элементов — «выбор с возвращением», составленных из элементов множества M с числом элементов $|M| = n$;
2. количеству слов длины k, выбранных из алфавита, содержащего n букв;
3. количеству размещений k различных шаров по n различным ящикам, без ограничений на количество шаров в ящиках;
4. количеству различных функций $y = f(x)$, определенных на множестве X с $|X| = k$, принимающих значения в множестве Y с $|Y| = n$.

Задача 2.1. Сколькими способами можно выбрать одну гласную и одну согласную буквы из слова МАТЕМАТИКА?

Ответ: 9.

Задача 2.2. На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

Ответ: 432.

Задача 2.3. На почте продаются 8 видов конвертов, 25 различных открыток и 30 видов марок. Сколькими способами можно купить конверт с открыткой и марку?

Ответ: 6000.

Задача 2.4. Монетку бросают десять раз. Сколько различных последовательностей из орлов и решек может при этом получиться?

Ответ: 1024.

Задача 2.5. В классе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать старосту класса и его помощника?

Ответ: 600.

Задача 2.6. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает чашку, блюдце и ложку)?

Ответ: 172 800.

Задача 2.7. а) В заборе 20 досок, каждую надо покрасить в синий, зеленый или желтый цвет, причем соседние доски красятся в разные цвета. Сколькими способами это можно сделать? б) А если требуется еще, чтобы хотя бы одна из досок обязательно была синей?

Ответ: а) 1 572 864; б) 1 572 862.

Задача 2.8. Сколькими способами можно распределить 8 вновь пришедших учеников по трем классам?

Ответ: 6 561.

Задача 2.9. Сколько делителей у числа 720?

Ответ: 30.

Задача 2.10. Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых третья цифра меньше четвёртой на 2.

Ответ: 720.

Задача 2.11. Назовём число зеркальным, если слева направо оно «читается» так же, как справа налево. Например, число 12321 — зеркальное. Сколько существует пятизначных зеркальных чисел, которые делятся на 5?

Ответ: 100.

Задача 2.12. Сколькими способами можно прочитать слово ВЕКТОР, двигаясь вправо или вниз по каждой из следующих таблиц?

В	Е	К	Т	О	Р
Е	К	Т	О	Р	
К	Т	О	Р		
Т	О	Р			
О	Р				
Р					

					В
				В	Е
			В	Е	К
		В	Е	К	Т
	В	Е	К	Т	О
В	Е	К	Т	О	Р

Ответ: В обоих случаях 32.

Задача 2.13. Автобусные билеты имеют шестизначные номера, от 000000 до 999999. Сколько существует номеров а) все цифры которых четны? б) в которых любые две соседние цифры различны? в) все цифры которых различны? г) в которых есть не менее двух одинаковых цифр? д) содержащих цифру 7? е) в которых есть хотя бы одна четная цифра? ж) в которых ровно две одинаковые цифры? з) в которых цифры 1 и 2 встречаются ровно по одному разу?

Ответ: а) 15 625; б) 590 490; в) 151 200; г) 848 800; д) 468 559; е) 984 375; ж) 453 600; з) 122 880.

Задача 2.14. Сколько существует семизначных чисел: а) все цифры которых нечётны; б) все цифры которых чётны; в) все цифры которых различны; г) у которых нет рядом стоящих одинаковых цифр; д) в записи которых ровно одна цифра 0; е) в записи которых ровно одна цифра 1; ж) в записи которых нет цифры 1; з) в записи которых нет цифры 0; и) в записи которых ровно две цифры 0; к) в записи которых ровно две цифры 1; л) есть и четные и нечетные цифры; м) каких семизначных чисел больше: содержащих цифру 7, или остальных?

Ответ: а) 78 125; б) 62 500; в) 544 320; г) 4 782 969; д) 3 188 646; е) 3 365 793; ж) 4 782 969; з) 4 251 528; и) 885 735; к) 1 141 614; л) 9 859 375; м) $5\,217\,031 > 4\,782\,969$.

Задача 2.15. В ряд нужно поставить пять человек: А, Б, В, Г и Д. а) Сколькими способами это можно сделать? б) Сколькими способами это можно сделать при условии, что А должен стоять непосредственно перед Б? в) А должен стоять рядом с Б? г) А должен стоять перед Б, не обязательно рядом? д) А и Б не стоят рядом? е) А и Б стояли рядом и В и Г стояли рядом?

Ответ: а) 120; б) 24; в) 48; г) 60; д) 72; е) 24.

Задача 2.16. Сколько существует перестановок цифр 0, 1, $2, \ldots, 9$, в которых: а) цифра 3 занимает третье место, а цифра 5 — пятое? б) цифра 1 следует непосредственно за цифрой 0? в) цифра 0 занимает одно из первых трёх мест, а цифра 1 — одно из последних четырёх мест? г) цифра 0 занимает одно из первых пяти мест, а цифра 1 — одно из первых трёх мест? д) между цифрами 0 и 1 стоят ровно три цифры? е) цифра 0 расположена левее цифры 1? ж) цифра 1 расположена между цифрами 0 и 2 (все три цифры стоят рядом)? з) цифра 0 расположена левее 1, а 1 левее 2 (не обязательно рядом)? и) хотя бы одна из первых трёх цифр делится на 3?

Ответ: а) 40 320; б) 362 880; в) 483 840; г) 483 840; д) 483 840; е) 1 814 400; ж) 80 640; з) 604 800; и) 3 024 000.

Задача 2.17. В словаре племени Мумбо-юмбо сначала идут однобуквенные слова, затем двухбуквенные, затем трехбуквенные и т.д. Какой номер в этом словаре будет иметь слово cbcad? (Племя использует английский алфавит, в котором 26 букв).

Ответ: 1 408 138.

Задача 2.18. Сколькими способами можно поставить в клетки доски 1×20 чёрную и белую фишки так, чтобы они не стояли рядом?

Ответ: 342.

Задача 2.19. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску черного и белого слона так, чтобы они не били друг друга? Черного и белого ферзя? Черного и белого коня?

Задача 2.20. Сколько существует способов расставить на шахматной доске 8×8 белую ладью и чёрного короля так, чтобы ладья била короля, но король не бил ладью? Способы расстановки, получающиеся друг из друга поворотом доски, считаются разными.

Ответ: 672.

Задача 2.21. Сколько существует способов расставить на шахматной доске 8×8 белого слона и чёрного короля так, чтобы слон бил короля, но король не бил слона?

Ответ: 364.

Задача 2.22. В магазине «Все для чая» продаются 5 разных чашек, 3 разных блюдца и 4 вида чайных ложек. Сколькими способами можно купить комплект «чашка + блюдце + ложка»? Сколькими способами в магазине можно купить комплект из двух предметов различных наименований? Сколькими способами можно купить комплект из одного предмета? Каков комбинаторный смысл равенства $1 + 12 + 47 + 60 = 6 \times 4 \times 5$?

Задача 2.23. В магазине «Все для чая» продаются 5 разных чашек, 3 разных блюдца и 4 вида чайных ложек. Известно, что одна из чашек, одно из блюдец и одна из ложек — золотые. Сколькими способами можно купить набор из 3-х различных предметов, в котором а) нет золотых предметов? б) 1 золотой предмет? в) 2 золотых предмета? г) 3 золотых предмета?

Задача 2.24. Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятёрка?

Ответ: Поровну.

Задача 2.25. В пятизначном числе *5*3* некоторые цифры заменены звёздочками. Известно, что это число делится на 15. Найдите количество таких пятизначных чисел.

Ответ: 60.

Задача 2.26. В числе 2*0*1*6*0* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1458.

Задача 2.27. В числе 2016****02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1728.

Задача 2.28. Пусть 4 танкиста, 4 летчика и 2 артиллериста хотят сфотографироваться, стоя в один ряд, но так, чтобы представители одного рода войск стояли рядом. Сколькими способами они могут это сделать?

Ответ: 6 912.

Задача 2.29. У отца есть 5 различных апельсинов, которые он дает своим 8 сыновьям. а) Сколькими способами это можно сделать, если каждый получает или один апельсин, или ничего?

б) Сколькими способами это можно сделать, если число апельсинов, получаемых каждым сыном, не ограничено?

Ответ: а) 6 720 б) 32 768.

Задача 2.30. Сколько существует пятизначных чисел вида $ab16c$, кратных 16? (a, b, c — произвольные цифры, не обязательно разные.)

Ответ: 90.

Задача 2.31. Три семьи, в каждой из которых три человека, пришли в кинотеатр. Сколькими способами они могут расположиться в ряду с девятью креслами так, чтобы члены каждой семьи сидели подряд?

Ответ: 1 296.

Задача 2.32. Матвей, Федот и пятеро их одногруппников захотели встать в шеренгу так, чтобы между Матвеем и Федотом стоял ровно один человек. Сколькими способами они могут это сделать?

Ответ: 1 200.

Задача 2.33. В некоторой стране алфавит состоит из трёх букв: У, Д и Г. Словом называется любая состоящая из этих букв конечная последовательность, в которой две согласные не могут стоять рядом и две гласные не могут стоять рядом. Сколько в этой стране слов,состоящих из 200 букв, которые содержат каждую из трёх букв хотя бы по разу?

Ответ: $2^{101} - 4$.

Задача 2.34. По кругу расставлено 5 красных и 6 синих точек. а) Сколько существует отрезков с концами в этих точках? б) Сколько из них соединяют точки разных цветов? в) Сколько из них соединяют точки одинаковых цветов?

Ответ: а) 55; б) 30; в) 25.

Задача 2.35. По кругу расставлено 5 красных, 6 синих и 4 зеленые точки. а) Сколько существует отрезков с концами в этих точках? б) Сколько из них соединяют точки разных цветов?

в) Сколько из них соединяют точки одинаковых цветов?

Ответ: а) 105; б) 74; в) 31.

Задача 2.36. В группе учатся 3 Ивана, 4 Ольги и 6 Дмитриев. Сколькими способами можно выбрать двух человек с разными именами?

Ответ: 54.

Задача 2.37. В одной группе учатся 10 юношей и 7 девушек, а в другой 8 юношей и 11 девушек. Сколькими способами можно выбрать пару из юноши и девушки, чтобы при этом они были из разных групп?

Ответ: 166.

Задача 2.38. В двух группах учится по 20 студентов. В каждой группе есть ровно два Петра. Сколькими способами можно выбрать двоих дежурных, по одному из каждой группы, так, чтобы оба дежурных одновременно не оказались Петрами?

Ответ: 396.

Задача 2.39. В группе учатся 12 юношей и 10 девушек. Из них нужно выбрать юношу и девушку — одного из них сделать старостой, а другого заместителем старосты. Сколько существует способов это сделать?

Ответ: 240.

Задача 2.40. В гардеробе у Сергея четверо брюк, шесть рубашек, пять пиджаков и четыре галстука. Сколькими способами можно составить костюм? (Галстук можно надевать, а можно не надевать, а остальные предметы обязательны.)

Ответ: 600.

Задача 2.41. У Сергея есть 40 яблок разного размера. При этом среди них 10 красных яблок, 10 жёлтых, 10 зелёных, 10 пёстрых. Утром он хочет съесть яблоко одного цвета, днём — яблоко другого цвета, вечером — яблоко третьего цвета. Сколькими способами она может это сделать?

Ответ: 24 000.

Задача 2.42. Сколько существует способов выбрать четыре карты из колоды (36 карт) так, чтобы они все были различных мастей и достоинств?

Ответ: 3 024.

Задача 2.43. а) Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт, содержащей 52 карты, по одной карте каждой масти так, чтобы карты красных мастей и карты черных мастей образовывали пары (например, девятки пик и треф и валеты бубен и червей)? б) А так, чтобы из выбранных карт можно было составить две пары, состоящие из черной и красной карт одного и того же названия (например, валеты пик и червей и дамы треф и бубен)?

Ответ: а) 169; б) 325.

Задача 2.44. а) Сколькими способами можно перетасовать колоду из 36 карт? б) так, чтобы красные и черные карты чередовались? в) так, чтобы любые 4 подряд идущие карты были всех 4 мастей?

Ответ: а) $36!$; б) $2 \cdot (18)!$; в) $4! \cdot (9!)^4$.

Задача 2.45. Найдите количество последовательностей из «0» и «1» длины 8, содержащих четное число «0».

Ответ: 128.

Задача 2.46. Найдите количество семизначных чисел с четной суммой цифр.

Ответ: 4 500 000.

Задача 2.47. В таблицу размера 50×30 записывают числа 1 и -1 так, чтобы произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равнялось 1. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: $2^{49 \cdot 29}$.

Указание. Докажите, что заполнив левый верхний прямоугольник 49×29 произвольным образом, остальные клетки таблицы заполняются однозначно.

Задача 2.48. От А до Б 999 км. Вдоль дороги стоят столбы, на которых написаны расстояния до А и Б: 0|999, 1|998,999|0. Сколько среди этих километровых столбов таких, в надписи на которых есть только две различные цифры?

Ответ: 40.

Задача 2.49. На балу собрались 10 дам и 10 кавалеров. Сколькими способами они могут разбиться на пары для танца, в котором кавалер танцует с одной дамой?

Ответ: 3 628 800.

Задача 2.50. Сколькими способами можно разбить 20 студентов на пары для выполнения лабораторной работы? Все выполняют одну работу.

Ответ: 654 729 075.

Задача 2.51. Имеется множество из 10 элементов. Сколькими способами можно выбрать непустое его подмножество?

Ответ: 1023.

Задача 2.52. Имеется множество из 10 элементов. Сколькими способами можно разбить его на два непустых подмножества?

Ответ: 511.

Задача 2.53. Имеется множество из 10 элементов. Сколькими способами можно выбрать в нем два подмножества A и B так, чтобы множества A и B не пересекались? Подмножества могут быть пустыми.

Ответ: 59 049.

Задача 2.54. Имеется множество из 10 элементов. Сколькими способами можно выбрать в нем два подмножества A и B так, чтобы множество A содержалось бы в множестве B? Подмножества могут быть пустыми.

Ответ: 59 049.

Задача 2.55. Имеется множество из 10 элементов. Сколькими способами можно выбрать в нем два подмножества: A и B? Подмножества могут быть пустыми и могут пересекаться.

Ответ: 1 048 576.

Задача 2.56. Дана полоска 1×10. В её клетки последовательно записываются числа $1, 2, \ldots, 10$ по следующему правилу: сначала в какую-нибудь клетку пишут число 1, затем числ 2 записывают в соседнюю клетку, затем число 3 — в одну из соседних с уже занятыми, и так далее. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 512.

Задача 2.57. Сколькими способами можно поставить крестики и нолики в клетки таблицы 8×8 так, чтобы в каждом квадратике 2×2 было чётное число крестиков?

Ответ: 32 768.

Задача 2.58. Сколькими способами можно покрасить квадрат 2×2, составленный из 4 квадратиков, если каждый квадратик надо покрасить в один из n цветов, и соседние (имеющие общую сторону) квадратики должны быть покрашены по-разному? Раскраски, совпадающие при повороте доски на 90 и 180 градусов, считаются разными.

Ответ: $n(n-1)(n^2-3n+3)$.

Задача 2.59. Клетки шахматной доски раскрашиваются в три цвета — белый, серый и чёрный — таким образом, чтобы соседние клетки, имеющие общую сторону, отличались цветом, однако резкая смена цвета (то есть соседство белой и чёрной клеток) запрещена. Найдите число таких раскрасок шахматной доски (раскраски, совпадающие при повороте доски на 90 и 180 градусов, считаются разными).

Ответ: 2^{33}.

Задача 2.60. Ключом шифра, называемого «поворотная решетка», является трафарет, изготовленный из квадратного листа клетчатой бумаги размера 10×10. Некоторые из клеток вырезаются. Одна из сторон трафарета помечена. При наложении этого трафарета на чистый лист бумаги четырьмя возможными способами (помеченной стороной вверх, вправо, вниз, влево) его вырезы полностью покрывают всю площадь квадрата, причем каждая клетка оказывается под вырезом ровно один раз. Буквы сообщения, имеющего длину 100 знаков, последовательно вписываются в вырезы трафарета, сначала наложенного на чистый лист бумаги помеченной стороной вверх. После заполнения всех вырезов трафарета буквами сообщения трафарет располагается в следующем положении и т. д. После снятия трафарета на листе бумаги оказывается зашифрованное сообщение. Найдите число различных ключей.

Ответ: 4^{25}.

Дополнительные задачи

Задача 2.61. В магазине имеются 3 красных, 5 зеленых и 4 голубых шапки, а также шарфы трех цветов: 7 красных, 7 зеленых и 5 голубых. Все шапки одного цвета разных фасонов. а) Сколькими способами Маша может выбрать себе шапку и шарф? б) А сколькими способами можно выбрать шапку и шарф одного цвета? в) Разных цветов?

Задача 2.62. На полке находятся $m+n$ различных книг, из которых m в черных переплетах, а n в красных. Сколько существует перестановок этих книг, при которых книги в черных переплетах занимают первые m мест? Во скольких случаях все книги в черных переплетах стоят рядом (не обязательно первыми)?

Задача 2.63. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт, содержащей 52 карты, по одной карте каждой масти? А если среди вынутых карт нет ни одной пары одинаковых, т. е. двух королей, двух десяток и т. д.?

Задача 2.64. Сколько существнует 9-значных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания (то есть, каждая следующая меньше предыдущей)?

Задача 2.65. Сколько существует 6-значных чисел таких, что: а) первая цифра которых 7? 6) делящихся на 5? в) в десятичной записи которых цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 встречаются ровно по одному разу? г) в десятичной записи которых цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 встречаются ровно по одному разу и цифры 2 и 4 не стоят рядом? д) в десятичной записи которых встречаются только пифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7? е) в десятичной записи которых встречаются только пифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, причем каждая не более одного раза? ж) сумма цифр которых четна? 3) все цифры которых четны? и) все цифры которых имеют одинаковую четность? к) в записи которых есть хотя бы одна четная цифра? л) в которых все цифры различны? м) четных чисел, в которых все цифры различны? н) которые одинаково читаются слева направо и справа налево (например, таких как 543345, 170071)? о) десятичной записи которых некоторая цифра встречается ровно 5 раз? п) составленных из цифр 1 и 2? р) не содержат цифры 2? с) в запись которых входит цифра 5? т) в запись которых входит ровно одна цифра 5? у) делящихся на 4 и состоящих из цифр 1, 2, 3, 4? ф) делящихся на 4 и состоящих из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, причем каждая цифра может встречаться только один раз?

Задача 2.66. Автомобильные номера в одном регионе РФ состоят либо из 3 букв и 3 цифр, либо из 2 букв и 4 цифр, при этом порядок следования букв и цифр в номере фиксирован. Из букв используются не все, а только а, в, е, к, м, н, о, р, с, т, у, х. Какое максимальное число автомобилей может быть в одном регионе?

Задача 2.67. Сколько существует четырёхзначных чисел, делящихся на 4, в десятичной записи которых нет цифр 4, 5, 6, 8?

Задача 2.68. В правильном 7-угольнике ABCDEFG провели диагонали AC, AF, BD, BG, CF, DF и DG. а) Раскрасьте вершины 7-угольника в красный, синий и зелёный цвета так, чтобы любые две вершины, соединённые отрезком, были раскрашены в разные цвета. б) Найдите количество вариантов такой раскраски.

Задача 2.69. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 2.70. В соревновании по гимнастике участвуют 10 человек. Трое судей должны независимо друг от друга пронумеровать их в порядке, отражающем их выступление в соревновании. Победителем считается тот, кого назовут первым хотя бы двое судей. В какой доле случаев победитель соревнований будет определен?

Задача 2.71. Сколько существует трехзначных чисел, у которых: а) средняя цифра больше крайних? б) Меньше? в) Не больше? г) Не меньше?

Задача 2.72. Имеются чашечные весы и 10 гирь: 1г, 2г, 4г,..., 512г. Сколько различных весов можно уравновесить этими гирями, если гири можно класть только на правую чашку весов?

Глава 3

Учет кратности

Пример 3.1. В секции занимается 17 человек. а) Сколькими способами можно выбрать из них трех человек для участия в забегах на 100, 200 и 400 м, если в каждом виде должен участвовать ровно один спортсмен и забеги проходят одновременно? б) Сколькими способами можно выбрать трех спортсменов для участия в масс-старте?

Ответ: а) $17 \cdot 16 \cdot 15$; б) $\dfrac{17 \cdot 16 \cdot 15}{6}$.

Решение. Первую задачу мы уже решали – это количество размещений из 17 по 3, то есть, $17 \cdot 16 \cdot 15$.

Разберемся, чем отличается пункт б) от пункта а). Пусть мы решили отправить на соревнование Иванова, Петрова и Сидорова. Тогда в пункте б) выбор сделан, а в пункте а) еще непонятно, кто в каком забеге участвует. То есть, в пункте а) нужно не только выбрать трех человек, но после этого еще указать, кто участвует в забеге на 100 м, кто — на 200, а кто на 400. Выпишем эти варианты:

100-Иванов	100-Иванов	100-Петров	100-Петров
200-Петров	200-Сидоров	200-Иванов	200-Сидоров
400-Сидоров	400-Петров	400-Сидоров	400-Иванов

100-Сидоров	100-Сидоров
200-Иванов	200-Петров
400-Петров	400-Иванов

Это значит, что каждому выбору тройки спортсменов будет соответствовать $3! = 6$ способов их распределения по забегам.

Следовательно, $17 \cdot 16 \cdot 15$ размещений 17 спортсменов по трем забегам, разобьются на группы из 6 списков, соответствующих одной выбранной тройке спортсменов. Получаем, что ответ в пункте б) в шесть раз меньше, чем в пункте а). $\square$

Определение 3.1. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный неупорядоченный набор, состоящий из k различных элементов данного множества, называется *сочетанием* из n элементов по k элементов (или просто сочетанием из n по k). Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k. Это число неупорядоченных наборов из k элементов, выбранных из n-элементного множества (то есть число k-элементных подмножеств n-элементного множества).

Утверждение 3.1. Пусть $n, k \in \mathbb{Z}_+$, $n \geqslant k$. Тогда

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказательство. Воспользуемся идеей из предыдущего примера. Сравним количество размещений и количество сочетаний из n по k. Всякое размещение из n по k. можно получить с помощью процедуры из двух действий:

1) выбор элементов, входящих в размещение, то есть подмножества из k элементов (другими словами, выбор сочетания из n по k);

2) размещение выбранных k элементов на k местах.

По правилу произведения получаем $A_n^k = C_n^k \cdot k!$, откуда получаем, что

$$C_n^k = \frac{1}{k!} A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

Замечание. Если $n < k$, то $C_n^k = 0$. Количество способов выбрать различных элементов больше, чем их имеется — 0, так как это невозможно сделать. При этом, $C_0^0 = \dfrac{0!}{0!0!} = 1$, количество способов выбрать 0 различных элементов из 0 различных элементов равно 1.

Пример 3.2. Монету подбрасывают 10 раз. При этом получается некоторая последовательность «орлов» и «решек». Сколько всего существует таких последовательностей, в которых «орёл» выпал ровно три раза?

Ответ: 120.

Решение. В результате восьми подбрасываний мы получим десятибуквенное слово, состоящее из букв О и Р. Нам нужно найти количество таких десятибуквенных слов, которые содержат три буквы О и семь букв Р. Такое слово однозначно определяется выбором позиций для трёх букв О (остальные позиции автоматически заполняются буквами Р). Поэтому число слов, составленных из трех букв О и и семи букв Р, есть число способов выбрать три позиции из десяти. То есть, $C_{10}^3 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$. □

Пример 3.3. Сколько существует четырехзначных чисел, цифры которых идут в порядке возрастания?

Ответ: 126.

Решение. Рассмотрим число $\overline{abcd}$ такое, что $a < b < c < d$. Оно однозначно определяет четыре различные цифры $\{a, b, c, d\}$. И наоборот, любые четыре различные цифры $\{a, b, c, d\}$ определяют ровно одно четырехзначное число, цифры которого идут в порядке возрастания, так как записать цифры в порядке возрастания можно единственным образом. Получаем, что искомых чисел столько же, сколько способов выбрать четыре цифры из девяти (0 мы выбирать не можем, так как число не может начинаться с 0). Количество способов выбрать четыре цифры из девяти равно $C_9^4 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{24} = 126$. □

Различные интерпретации C_n^k.

Утверждение 3.2. Пусть $n, k \in \mathbb{Z}_+$, $n \geqslant k$. Число C_n^k равно:

1. количеству различных k-элементных подмножеств D множества M, где $n = |M|$;
2. количеству неупорядоченных выборок размера k без повторений элементов — «выбор без возвращения», составленных из элементов множества M, где $n = |M|$;
3. количеству упорядоченных последовательностей длины n, состоящих из k «единиц» и $(n-k)$ «нулей»;
4. количеству способов, которыми k неразличимых шаров можно разместить по n различным ящикам, причем так, чтобы в каждой ячейке было не больше одного шара («размещение с запретом»);
5. количеству неубывающих путей на двумерной целочисленной решетке Z_+^2, начинающихся в точке $(0, 0)$ и приходящих в точку $(k, n-k)$;
6. количеству различных строго возрастающих функций $y = f(x)$, $f : [1, 2, \ldots, k] \to [1, 2, \ldots, n]$.

Перестановки с повторениями.

Определение 3.2. Анаграмма — это слово (не обязательно осмысленное), полученное из данного слова перестановкой букв. Например, ОРБ является анаграммой слова БОР.

Пример 3.4. Сколько всего анаграмм у слова: а) РАМА; б) МОЛОКО; в) МАМА?

Ответ: а)12; б) 120; в) 6.

Решение. а) Обозначим искомое количество N.

Если бы мы переставляли 4 различные буквы, то количество перестановок было бы равно $4! = 24$. Сравним перестановки букв слова РАМА с перестановками 4 различных букв: Р, А_1, М, А_2. Перестановку 4 различных букв: Р, А_1, М, А_2 можно представить как цепочку выполнения двух действий:

1) перестановка букв Р, А, М, А;

2) размещение на местах, где стоят буквы А, букв А_1 и А_2.

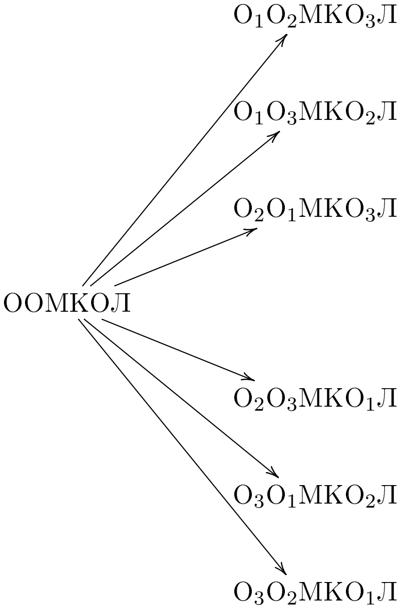
По правилу произведения получаем, что $4! = N \cdot 2!$, откуда $N = 12$.

По-другому это можно сказать так. Каждой перестановке букв Р, А, М, А соответствует ровно две перестановки букв Р, А_1, М, А_2 :

$$\begin{tikzcd}
 & \text{А}_1\text{РМА}_2 \\
\text{АРМА} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \text{А}_2\text{РМА}_1
\end{tikzcd}$$

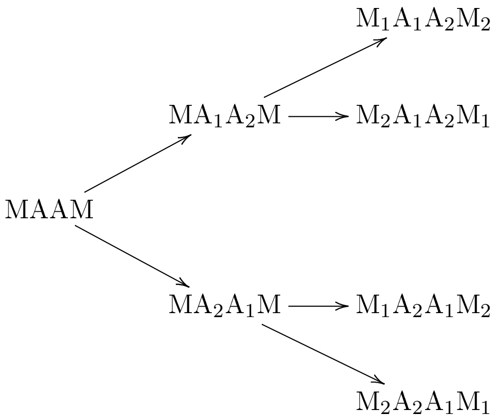
Таким образом, перестановок букв Р, А, М, А в два раза меньше, чем перестановок букв Р, А_1, М, А_2.

б) Рассуждая аналогично пункту а), получим, что каждой перестановке букв М, О, Л, О, К, О соответствует 6 перестановок букв М, О_1, Л, О_2, К, О_3 :



Следовательно, перестановок букв М, О, Л, О, К, О в 6 раза меньше, чем перестановок букв М, $О_1$, Л, $О_2$, К, $О_3$, то есть $6!/6$.

в) Сопоставим перестановки букв М,А,М,А и перестановки букв $М_1$ $А_1$, $М_2$, $А_2$. Нам придется сделать цепочку из двух действий: заменить две буквы А на $А_1$ и $А_2$, а затем, заменить две буквы М на $М_1$ и $М_2$:



Получим, что каждой перестановке букв M,A,M,A соответствует 4 перестановки букв M_1 A_1, M_2, A_2. Значит, перестановок букв M,A,M,A в 4 раза меньше, чем перестановок букв M_1 A_1, M_2, A_2, то есть $4!/4$. □

Определение 3.3. Пусть имеется множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. *Перестановками с повторениями* называют упорядоченные наборы, в которых каждый элемент множества A встречается фиксированное (своё для каждого элемента) число раз. Число перестановок с повторениями, в которых элемент a_1 встречается n_1 раз, элемент a_2 — n_2 раза,…, элемент a_k — n_k раз, обозначают $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Утверждение 3.3. Пусть k, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Доказательство. Рассмотрим $n_1+\ldots+n_k$ различных элементов: $a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^{n_1}$, $a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^{n_2}, \ldots, a_k^1, a_k^2, \ldots, a_k^{n_k}$. Их перестановку опишем как цепочку выполнения $k+1$ действия:

1) перестановка с повторениями, в которой элемент a_1 встречается n_1 раз, элемент a_2 — n_2 раза,…, элемент a_k — n_k раз;

2) размещение на n_1 месте, где оказалась расположена буквы a_1, n_1 различных букв $a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^{n_1}$;

$\vdots$

$k+1$) размещение на n_k местах, где оказалась расположена буква a_k, n_k различных букв $a_k^1, a_k^2, \ldots, a_k^{n_k}$.

По правилу произведения получаем, что

$$(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)! = P(n_1, n_2, \ldots, n_k) \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!.$$

Иными словами, каждой перестановке с повторениями, в которой элемент a_1 встречается n_1 раз, элемент a_2 — n_2 раза,…, элемент a_k — n_k раз, можно поставить в соответствие $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!$ перестановок без повторений $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ различного элемента. Значит $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ в $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!$ раз меньше, чем $P(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)$. □

Рассмотрим другой способ вывода этой формулы. А именно, как получить число перестановок с повторениями через число сочетаний.

Утверждение 3.4. Пусть k, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = C_{n_1+n_2+\ldots+n_k}^{n_1} C_{n_2+\ldots+n_k}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{n_k}^{n_k}.$$

Доказательство. Рассмотрим формирование перестановки с повторениями как процедуру из следующих k шагов:

1) из $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ мест определяем n_1 место, которые будет занимать элемент a_1;

2) из $n_2 + \ldots + n_k$ оставшихся мест определяем n_2 мест, которые будет занимать элемент a_2;

$\vdots$

k) из n_k мест определяем n_k мест, которые будет занимать элемент a_k;

1-ый шаг выполняется

$$C^{n_1}_{n_1+n_2+\ldots+n_k} = \frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!(n_1+n_2+\ldots+n_k-n_1)!} = \frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!(n_2+\ldots+n_k)!}$$

способами, 2-ой шаг выполняется

$$C^{n_2}_{n_2+\ldots+n_k} = \frac{(n_2+\ldots+n_k)!}{n_2!(n_2+n_3\ldots+n_k-n_2)!} = \frac{(n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!(n_3+\ldots+n_k)!}$$

способами, к-ый шаг выполняется $C^{n_k}_{n_k} = \dfrac{n_k!}{n_k!(n_k-n_k)!} = 1$ способами.

По правилу произведения находим общее число перестановок с повторениями:

$$P(n_1,n_2,\ldots,n_k) = C^{n_1}_{n_1+n_2+\ldots+n_k} C^{n_2}_{n_2+\ldots+n_k} \cdot \ldots \cdot C^{n_k}_{n_k} = \\ = \frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}.$$

□

Формулу сочетаний, в свою очередь, можно получить, как число перестановок с повторениями.

Утверждение 3.5. $C^k_n = P(k, n-k)$.

Доказательство. Число способов выбора k объектов из n объектов равно числу анаграмм n-буквенного слова $\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{00\ldots0}_{n-k}$, состоящего из k букв «1» и $n-k$ букв «0». Каждая анаграмма — это определённый выбор k позиций из n для букв «1», именно номеров тех элементов, которые мы включаем в множество. □

Утверждение 3.6. Имеются n различных шаров и k различных ящиков. Пусть имеется разбиение числа n на k слагаемых: $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, k, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ — количество способов разложить шары по ящикам так, чтобы n_1 шаров оказались в первом ящике, n_2 шаров — во втором,…, n_k шаров — в k-м ящике.

Доказательство. Расположить $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ различных шаров по k различным ящикам так, чтобы n_1 шаров оказались в первом ящике, n_2 шаров — во втором,…, n_k шаров — в k-м ящике — это определить для каждого шара номер ящика, в который он попадет. Значит, количество способов это сделать равно количеству анаграмм n-буквенного слова

$$\underbrace{a_1a_1\ldots a_1}_{n_1}\underbrace{a_2a_2\ldots a_2}_{n_2}\ldots\underbrace{a_ka_k\ldots a_k}_{n_k}.$$

Действительно, выбрать n_1 шаров для первого ящика то же самое, что выбрать n_1 позиций для букв a_1; затем, выбрать n_2 шаров для второго ящика есть то же самое, что выбрать n_2 позиций для букв a_2, и т. д. □

Сочетания с повторениями.

Пример 3.5. В кондитерском магазине продавались пирожные 4 видов: корзиночки, наполеоны, песочные и эклеры. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Ответ: 120.

Решение. Закодируем покупку пирожных следующим образом. Положим каждый вид пирожных в свою коробку, перегородки между коробками обозначим символом «|», само пирожное — символом «$\circ$». Например, последовательность $|\circ||\circ\circ\circ\circ\circ\circ$ будет описывать ситуацию, когда в первой коробке лежит ноль пирожных, во второй — одно, в третьей —ноль, в четвертой — 6.

Получаем, что способов купить пирожные столько же, сколько сколько перестановок с повторениями строки символов $\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ|||$. Их всего $P(7, 3) = 120$. □

Определение 3.4. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный неупорядоченный набор, состоящий из k элементов, некоторые из которых могут повторяться, называется *сочетанием с повторениями* из n элементов по k элементов.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов обозначается $\overline{C}_n^k$.

Утверждение 3.7. Пусть k, $n \in \mathbb{N}$. $\overline{C}_n^k = \dfrac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$.

Доказательство. Закодируем сочетание с повторениями следующим образом: сначала запишем столько единиц, сколько раз в сочетание входит первый элемент исходного множества, затем поставим разграничитель — 0, затем столько единиц, сколько раз сочетание входит второй элемент множества, затем 0 и т.д. Получим последовательность из k «1» и $n-1$ разграничителя «0».

И наоборот, любой перестановке набора $\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{00\ldots0}_{n-1}$ будет соответствовать сочетание с повторениями, построенное по правилу: первый элемент исходного множества входит в сочетание столько раз, сколько «1» до первого разграничителя «0», второй элемент исходного множества входит в сочетание столько раз, сколько «1» от первого разграничителя до второго и т.д. последний элемент исходного множества входит в сочетание столько раз, сколько «1» после последнего разграничителя «0». (Например, если у нас $n = 4$, $k = 5$, то последовательность 01100111 кодирует сочетание, в котором два вторых и три четвертых элемента исходного множества.)

Следовательно, число сочетаний с повторениями из n элементов по k равно числу анаграмм слова $\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{00\ldots0}_{n-1}$, то есть

$\overline{C}_n^k = P(k, n-1) = C_{k+n-1}^k$. □

Утверждение 3.8. Число способов, которыми можно разложить k одинаковых шаров по n различным ящикам равно $\overline{C}_n^k$.

Доказательство. Сопоставим раскладку k одинаковых шаров по n различным ящикам и сочетание с повторениями из n по k, в котором количество элементов с номером i такое же, сколько шаров попало в ящик с номером i. Например, для $n = 4$ и $k = 6$ сопоставим раскладку $\circ\circ \,|\, \circ \,||\, \circ\circ\circ$ и сочетание с повторением $a_1a_1a_2a_4a_4a_4$. Получим биекцию. □

Утверждение 3.9. Задача Муавра. Пусть k, $n \in \mathbb{N}$. Число решений в целых неотрицательных числах уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ равно $\overline{C}_n^k$.

Доказательство. Сопоставим решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в целых неотрицательных числах уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ и сочетание с повторениями из n по k, в котором количество элементов с номером i равно x_i. Получим биекцию. □

Перечислим основные модели, в которых встречаются числа сочетаний с повторениями.

Утверждение 3.10. Пусть k, $n \in \mathbb{N}$. Число $\overline{C}_n^k$ равно:

1. количеству неупорядоченных выборок размера k при «выборе с возвращением», составленных из элементов множества M с $|M| = n$;

2. количеству упорядоченных векторов $(x_1, \ldots, x_n)$ с неотрицательными целыми числами x_i, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяющими условию $x_1 + \ldots + x_n = k$;

3. количеству способов, которыми k неразличимых шаров можно разместить по n различным ящикам без ограничений на число шаров в каждом ящике — «размещение без запрета»;

4. количеству различных неубывающих функций $y = f(x)$, $f : [1, 2, \ldots, k] \to [1, 2, \ldots, n]$.

Перегородки.

Пример 3.6. Сколькими способами можно расставить 10 нулей и 5 единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

Ответ: C_{11}^5.

Решение. I способ. Перегородки. Сначала выписываем 10 нолей. Вторым действием расставляем единицы, согласно условию задачи. Единицы можно поставить либо в промежутках между нулями, либо до первого, либо после последнего ноля. При этом, в каждый промежуток мы можем поставить не более одной единицы.

$$\_0\_0\_0\_0\_0\_0\_0\_0\_0\_0\_$$

Получаем, что количество способов расставить 10 нулей и 5 единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом, равно количеству способов выбрать 5 мест из 11 промежутков, то есть C_{11}^5.

II способ. Сочетания с повторениями. Сначала расставим единицы. Получим 6 промежутков, в которых могут стоять ноли. При этом, во всех, кроме крайних промежутков ноли быть обязаны. Обозначим x_i — количество нолей в i промежутке.

$$\underbrace{0\ldots0}_{x_1}1\underbrace{0\ldots0}_{x_2}1\underbrace{0\ldots0}_{x_3}1\underbrace{0\ldots0}_{x_4}1\underbrace{0\ldots0}_{x_5}1\underbrace{0\ldots0}_{x_6}$$

Получаем, что количество способов расставить 10 нулей и 5 единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом, равно количеству решений уравнения $x_1 + \ldots + x_6 = 10$, x_1, $x_6 \geqslant 0$, $x_2, \ldots, x_4 \geqslant 1$. Сделаем замену: $x_1 = y_1$, $x_i = y_i + 1$, $i = 2, \ldots, 4$, $x_6 = y_6$. Получим, что искомое количество равно количеству решений уравнения $y_1 + \ldots + y_6 = 6$, $y_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, 6$. Это число равно количеству сочетаний с повторениями $\overline{C}_6^6 = C_{6+6-1}^6 = C_{11}^6$.

По другому это можно было описать следующим образом: поставим 5 перегородок и в 4 промежутка между ними положим по одному шару. Оставшиеся 6 шаров произвольным образом разложим в 6 промежутков, включая промежуток до первой и после последней перегородки. □

Пример 3.7. Сколькими способами можно переставить буквы слова «параметр» так, чтобы никакие две гласные не стояли рядом?

Ответ: 3600.

Решение. Применим идею перегородок. Сначала расставим согласные п, р, м, т, р. Это можно сделать $P(1,1,1,2) = \dfrac{5!}{2!}$ способами. Затем, выберем 3 промежутка из 6 для гласных.

$$\_п\_р\_р\_т\_м\_$$

Это можно сделать $C_6^3 = \dfrac{6!}{3!3!}$ способами. На выбранных местах расставим гласные а, а, е. Это можно сделать $P(2,1) = \dfrac{3!}{2!}$ способами. Всего способов выполнить цепочку из трех действий: $\dfrac{5!}{2!} \cdot \dfrac{6!}{3!3!} \cdot \dfrac{3!}{2!} = 3600.$ □

Сочетания.

Задача 3.1. Сколькими способами можно выбрать 4 краски из имеющихся 7 различных?

Ответ: 35.

Задача 3.2. В классе 20 человек. а) Сколькими способами можно выбрать из них трех человек для поездки на олимпиады по математике, физике и информатике, которые проводятся в один день? б) А сколькими способами можно выбрать трех человек для участия в олимпиаде по математике?

Ответ: а) 6 840; б) 1 140.

Задача 3.3. В классе 20 человек. а) Сколькими способами можно выбрать четырех человек в для участия в школьном спектакле на роли Медведя, Волка, Лисы и Зайца? б) Сколькими способами можно выбрать четырех дежурных? в) Сколькими способами можно выбрать старосту, двух дежурных и ответственного за проездные билеты, если все это должны быть разные люди? г) Сколькими способами можно выбрать четырех дежурных, если Иванов и Петров не могут дежурить одновременно?

Ответ: а) 116 280; б) 4 845; в) 58 140; г) 4 692.

Задача 3.4. Сколько строк длины девять содержат ровно 5 единиц и 4 нуля?

Ответ: 126.

Задача 3.5. Сколько четырехэлементных подмножеств у девятиэлементного множества?

Ответ: 126.

Задача 3.6. а) Сколькими способами можно покрасить 4 доски в красный цвет и 5 в синий в заборе из: а) 9 досок? б) 12 досок?

Ответ: а) 126; б) 27 720.

Задача 3.7. Сколько существует семизначных чисел, в записи которых ровно: а) три 0; б) ровно три 1?

Ответ: а) 131 220; б) 215 055.

Задача 3.8. Найдите число решений уравнения $a+b+c+d+e+f=10$, если a, b, c, d, e, f могут принимать значения только 1 или 2.

Ответ: 15.

Задача 3.9. На окружности плоскости отмечено 10 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Ответ: 120.

Задача 3.10. Сколькими способами можно выбрать комитет, включающий 6 мужчин и 8 женщин, из группы, состоящей из 12 мужчин и 20 женщин?

Ответ: 116 396 280.

Задача 3.11. Сколькими способами тренер может скомплектовать хоккейную команду, состоящую из одного вратаря, двух защитников и трёх нападающих, если в его распоряжении есть два вратаря, 5 защитников и 8 нападающих?

Ответ: 1 120.

Задача 3.12. Сколькими способами из двух взрослых и десяти школьников можно выбрать 4-х человек для приготовления обеда так, чтобы среди них был хотя бы один взрослый?

Ответ: 285.

Задача 3.13. Из трёх математиков и десяти экономистов нужно составить комиссию, в состав которой войдёт семь человек. При этом в ней должен участвовать хотя бы один математик. Сколькими способами может быть составлена комиссия?

Ответ: 1 596.

Задача 3.14. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это может быть сделано?

Ответ: 371.

Задача 3.15. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. а) Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых? б) А если в отряд должны войти командир роты и старший по возрасту из сержантов?

Ответ: а) $C_3^1 \cdot C_6^2 \cdot C_{60}^{20}$; б) $5 \cdot C_{60}^{20}$;

Задача 3.16. У Пети 7 различных открыток, а у Васи — 5. Сколькими способами они могут обменять три открытки одного на три открытки другого?

Ответ: 350.

Задача 3.17. а) Сколькими способами можно выбрать 4 карты одинаковой масти из колоды в 52 карты? б) А 9 карт одинаковой масти? в) Объясните совпадение результатов.

Ответ: 2 860.

Задача 3.18. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 6 карт так, чтобы среди них а) был ровно один туз? б) был хотя бы один туз? в) были представители всех четырех мастей?

Ответ: а) 6 849 216; б) 8 087 008; в) 8 682 544.

Задача 3.19. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой половине было по 2 туза?

Ответ: $C_4^2 \cdot C_{32}^{16}/2$.

Задача 3.20. Сколькими способами колоду из 36 карт можно перетасовать так, чтобы карты каждой масти шли в порядке старшинства?

Ответ: $P(9, 9, 9, 9)$.

Задача 3.21. а) В секции занимается 10 спортсменов. Сколькими способами можно: а) выбрать 5 из них для участия в соревнованиях? б) Разделить их на две команды по 5 человек для игры в футбол?

Ответ: а) 252; а) 126.

Задача 3.22. На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 11 точек. Сколько существует: а) треугольников; б) четырехугольников с вершинами в этих точках?

Ответ: а) 1 045; б) 2 475.

Задача 3.23. По кругу расставлено 5 красных и 6 синих точек. а) Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках? б) Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках, у которых не все вершины одного цвета?

Ответ: а) 165; б) 135.

Задача 3.24. По кругу расставлено 5 красных, 6 синих точек и 4 зеленые точки. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках, у которых: а) все вершины одного цвета? б) все вершины разных цветов? в) вершины окрашены в два цвета?

Ответ: а) 120; б) 34; в) 301.

Задача 3.25. Каждая сторона квадрата разбита на n частей. Сколько можно построить треугольников, вершинами которых являются точки деления?

Ответ: $2(n-1)^2(5n-8)$.

Задача 3.26. Сколькими способами можно выбрать из чисел от 1 до 100 три числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ: 53 922.

Задача 3.27. Сколькими способами можно выбрать из $3n$ последовательных целых чисел три числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ: $\dfrac{n(3n^2-3n+2)}{2}$.

Задача 3.28. Автобусные билеты имеют шестизначные номера, от 000000 до 999999. Сколько существует номеров, у которых все цифры различны и идут в возрастающем порядке?

Ответ: 210.

Задача 3.29. а) Сколькими способами можно расселить: а) 9 приезжих в двухместный, трехместный и четырехместный номера гостиницы? б) 10 человек по пяти двухместным номерам?

Ответ: а) 1 260; б) 113 400.

Задача 3.30. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить переставляя буквы в словах а) ТОРГ;

б) НАПИТОК; в) ВОСТОРГ; г) БАРАБАН; д) АААААББББББББ; е) МЕТАМАТЕМАТИКА?

Ответ: а) 24; б) 5 040; в) 2 520; г) 840; д) 792; е) 277 200.

Задача 3.31. Сколькими способами можно разбить $2n$ человек на пары?

Ответ: $(2n-1)!!$ или $\dfrac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$.

Указание. Получите оба ответа различными комбинаторными рассуждениями.

Задача 3.32. Для встречи группы детей из 10 человек прислали три автомобиля. В первый можно посадить 2-х детей, во второй — 3-х, в третий — 5-х. Сколькими способами можно рассадить детей в эти автомобили? А если автомобили двух, четырех и пятиместный?

Ответ: а) 2 520; б) 6 930.

Задача 3.33. У мамы 2 одинаковых яблока, 3 одинаковых мандарина и 4 одинаковых апельсина. Каждый день в течение 9 дней подряд она выдает сыну по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

Ответ: 1 260.

Задача 3.34. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (короля, ферзя, две ладьи, двух слонов и двух коней) на первой линии шахматной доски (не соблюдая шахматные правила)?

Ответ: 5 040.

Задача 3.35. На первые две линии шахматной доски произвольным образом ставятся белые и черные фигуры (по два коня, два слона, две ладьи, ферзь и король каждого цвета). Сколькими способами можно это сделать? Сколькими способами можно расставить те же фигуры по всей доске? А если расставляются и все пешки (по 8 пешек каждого цвета)?

Ответ: а) $P(2,2,2,2,2,2,1,1,1,1)$; б) $P(48,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1)$; в) $P(32,8,8,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1)$.

Задача 3.36. На собрании должны выступить 5 человек: А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что Б не должен выступать до того, как выступит А? А если А должен выступить непосредственно перед Б?

Ответ: а) 60; б) 48.

Задача 3.37. Сколькими способами можно переставить буквы слова «перешеек» так, чтобы четыре буквы «е» не шли подряд?

Ответ: 1 560.

Задача 3.38. Сколькими способами можно переставить буквы слова «Юпитер» так, чтобы гласные шли в алфавитном порядке?

Ответ: 120.

Задача 3.39. Сколькими способами можно переставить буквы слова «опоссум» так, чтобы буква «п» шла непосредственно после буквы «о»?

Ответ: 360.

Задача 3.40. Сколькими способами можно переставлять буквы в слове «фацетия» так, чтобы не менялся порядок гласных букв? А в слове «параллелизм»?

Ответ: а) 210; б) 277 200.

Задача 3.41. Сколькими способами можно переставить буквы слова «пастух» так, чтобы между двумя гласными были ровно две согласные буквы?

Ответ: 144.

Задача 3.42. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «логарифм» так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными буквами?

Ответ: 7 200.

Задача 3.43. У мамы есть 10 разных конфет. Сколькими способами она может раздать некоторые из них двум детям? (Она может раздать все конфеты, а может не дать и ни одной.) А если надо раздать конфеты поровну?

Ответ: а) 3^{10}; б) C_{10}^{5}.

Задача 3.44. На окружности отмечено 10 точек. Сколько существует выпуклых многоугольников с вершинами в этих точках?

Ответ: $2^{10} - C_{10}^{0} - C_{10}^{1} - C_{10}^{2}$.

Задача 3.45. В волейбольной секции 24 спортсмена. Сколькими способами их можно разделить на 4 команды по 6 спортсменов в каждой для проведения тренировочного турнира?

Ответ: $P(6,6,6,6)/4!$

Задача 3.46. а) Сколькими способами можно разбить 7 юношей и 7 девушек на пары для танцев? б) 14 школьников на пары? в) 14 человек на две команды по 7 человек? г) 15 человек на три одинаковые команды?

Ответ: а) 5 040; б) 135 135; в) 1 716; г) 126 126.

Задача 3.47. В классе 12 юношей и 15 девушек. Сколько способов составить 12 пар для танцев?

Ответ: A_{15}^{12}.

Задача 3.48. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

Ответ: 16 216 200.

Задача 3.49. Компания из 7 юношей и 10 девушек танцует парами. Сколько имеется вариантов участия девушек в этом танце если: а) в танце участвуют все юноши; б) относительно двух девушек можно с уверенностью утверждать, что они будут приглашены на танец?

Ответ: а) 604 800; б) 282 240.

Задача 3.50. Для награждения за успехи в учебе выбраны 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены книги, если в классе учится 25 человек и никому не дают две книги сразу? Если никому не дают двух экземпляров одной и той же книги, но могут быть вручены две или три различные книги?

Ответ: а) $C_{25}^{6}P(3,2,1)$; б) $C_{25}^{3}C_{25}^{2}C_{25}^{1}$.

Задача 3.51. Несколько человек садятся за круглый стол. Будем считать, что два способа рассадки совпадают, если каждый человек имеет одних и тех же соседей в обоих случаях. а) Сколькими различными способами можно посадить четырех человек? б) семь человек? в) Во скольких случаях два данных человека из семи оказываются соседями? г) Во скольких случаях данный человек (из семи) имеет двух данных соседей?

Ответ: а) 3; б) 360; в) 120; г) 24.

Задача 3.52. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом? А если они садятся не за круглый стол, а за карусель и способы, переходящие друг в друга при вращении карусели, считаются совпадающими?

Ответ: а) 28 800; б) 2 880.

Задача 3.53. Сколько можно составить хороводов из 6 человек? Бус из 6 разных бусин? Сколькими способами можно покрасить грани кубика в 6 разных цветов, если считать различными два кубика, которые нельзя спутать, как ни переворачивай?

Ответ: а) 120; б) 60; в) 30.

Задача 3.54. Сколькими способами можно раздать 18 различных предметов 5 участникам похода так, чтобы: а) четверо из них несли по 4 предмета, а пятый — два предмета; б) трое несли по 4 предмета, а двое — по 3 предмета?

Ответ: а) $\dfrac{C_5^1 18!}{(4!)^4 2!}$; б) $\dfrac{C_5^3 18!}{(4!)^3 (3!)^2}$.

Задача 3.55. Сколькими способами можно раздать 36 различных книг трем школьникам: Пете, Васе и Коле так, чтобы Петя и Вася вместе получили вдвое больше книг, чем Коля при условии: а) Петя и Вася получают поровну книг; б) Петя и Вася могут получить любое количество книг?

Ответ: а) $P(12,12,12)$; б) $C_{36}^{12}2^{24}$.

Задача 3.56. У Пети имеется набор из 24 кубиков, окрашенных в 4 цвета: красный, синий, желтый и зеленый, при этом кубиков каждого цвета поровну. Сколько различных стенок 4×6 он может из них построить, если а) известно, какая сторона стенки является передней; б) не известно, какая сторона стенки передняя, а какая задняя?

Ответ: а) $P(6,6,6,6)$; б) $(P(6,6,6,6)+P(3,3,3,3))/2$.

Задача 3.57. На каждом борту лодки должно сидеть по 4 человека. Сколькими способами можно выбрать команду для этой лодки, если есть 31 кандидат, причем десять человек хотят сидеть на левом борту лодки, двенадцать на правом, а девяти безразлично где сидеть?

Ответ: $C_{10}^{0} \cdot C_{9}^{4} \cdot C_{17}^{4} + C_{10}^{1} \cdot C_{9}^{3} \cdot C_{18}^{4} + C_{10}^{2} \cdot C_{9}^{2} \cdot C_{19}^{4} + C_{10}^{3} \cdot C_{9}^{1} \cdot C_{20}^{4} + C_{10}^{4} \cdot C_{9}^{0} \cdot C_{21}^{4}$.

Перегородки.

Задача 3.58. На книжной полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?

Ответ: C_{8}^{5}.

Задача 3.59. Сколькими способами можно выбрать 10 чисел от 1 до 35, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?

Ответ: C_{26}^{10}.

Задача 3.60. Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с 5 полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

Ответ: $24!/4!$.

Задача 3.61. Сколькими способами можно надеть 5 различных колец на пальцы одной руки, исключая большой палец?

Ответ: 6 720.

Задача 3.62. Имеется m белых и n черных шаров, причем $m \geqslant n-1$. Сколькими способами можно все шары разложить в ряд так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?

Ответ: C_{m+1}^{n}.

Задача 3.63. Укротитель хищных зверей хочет вывести на арену цирка 5 львов и 4 тигров; при этом нельзя, чтобы два тигра шли друг за другом. Сколькими способами он может расположить зверей? Решите задачу в двух случаях. а) Для зрителя все львы одинаковые и все тигры одинаковые. б) Все звери для дрессировщика различные.

Ответ: а) C_6^4; б) $C_6^4 \cdot 5! \cdot 4!$.

Задача 3.64. На полке стоит 10 различных книг. Сколькими способами их можно переставить так, чтобы из 1, 2 и 3 томов никакие два тома не стояли рядом?

Ответ: $C_8^3 \cdot 7! \cdot 3!$.

Задача 3.65. а) Сколькими способами можно переставить буквы слова «огород» так, чтобы: а) никакие две буквы «о» не стояли рядом? б) три буквы «о» не шли подряд?

Ответ: а) $3! \cdot C_4^3 = 24$; б) $P(3,1,1,1) - 4! = 96$.

Задача 3.66. Сколькими способами можно переставить буквы слова «перемет» так, чтобы: а) никакие две буквы «е» не стояли рядом? б) три буквы «е» не шли подряд?

Ответ: а) $3! \cdot C_4^3 = 24$; б) $P(3,1,1,1) - 4! = 96$.

Задача 3.67. Сколькими способами можно переставить буквы слова «обороноспособность» так, чтобы никакие две буквы «о» не шли подряд?

Ответ: $P(3,2,2,1,1,1,1) \cdot C_{12}^{7} = 166\,320$.

Задача 3.68. Сколькими способами можно переставить буквы слова «каракули» так, чтобы никакие две гласные не стояли рядом?

Ответ: а) $P(2,1,1)\cdot C_5^4\cdot P(2,1,1)=720$.

Задача 3.69. Дан прямоугольный треугольник ABC, с катетами AC=4,5 м, CB=1,5м. Катет CB расположен вертикально. Из плит сечением 50×30 см строится лестница, ведущая из точки A в точку B. Высота каждой ступеньки равна 30 см, а ее ширина — целое число, кратное 50. Сколькими способами можно построить лестницу, если никакая ступенька не может быть выше 30 см?

Ответ: 252.

Задача 3.70. Сколькими способами можно выложить в ряд 5 красных, 5 синих и 6 белых шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

Ответ: а) $C_{11}^5\cdot C_{12}^5$.

Задача 3.71. За круглым столом короля Артура сидят 12 рыцарей. Из них каждый враждует со своими соседями (и только с ними). Надо выбрать 5 рыцарей, чтобы освободить заколдованную принцессу, но среди выбранных рыцарей не должно быть врагов. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: $C_6^4+C_7^5=36$.

Задача 3.72. Сколько существует треугольников, вершины которых совпадают с вершинами данного выпуклого n-угольника, но стороны не совпадают со сторонами этого n-угольника?

Ответ: $\frac{1}{3}nC_{n-4}^2=C_{n-4}^2+C_{n-3}^3=\frac{n(n-4)(n-5)}{6}$.

Сочетания с повторениями. Задача Муавра.

Задача 3.73. Сколькими способами можно разложить пять одинаковых шаров по трём различным ящикам? На число шаров в ящике ограничений нет.

Ответ: C_7^2.

Задача 3.74. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x+y+z=5$?

Ответ: C_7^2.

Задача 3.75. В магазине продаётся апельсиновый, виноградный, персиковый и яблочный сок. Нужно купить семь пакетов сока. Сколько различных наборов можно составить?

Ответ: C_{10}^3.

Задача 3.76. Сколькими способами можно разложить пять одинаковых шаров по трём различным ящикам так, чтобы ни один ящик не пустовал?

Ответ: C_4^2.

Задача 3.77. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x+y+z=5$?

Ответ: C_4^2.

Задача 3.78. 19 депутатов Городского Собрания выбирают Председателя из 5 кандидатов. Каждый голосует ровно за одного из них. После голосования составляется протокол заседания, в котором указывается лишь количество голосов за каждого кандидата (без указания, кто за кого проголосовал). Сколько различных протоколов может получиться?

Ответ: $C_{23}^4 = 8855$.

Задача 3.79. Три пирата Джо, Билл и Том нашли клад, содержащий 80 одинаковых золотых монет, и хотят разделить их так, чтобы каждому из них досталось не менее 15 монет. Сколько существует способов это сделать?

Ответ: 666.

Задача 3.80. Найдите количество семизначных чисел, в десятичной записи которых могут встречаться только цифры 4, 5, 6, 7 и таких, что каждая цифра не меньше предыдущей.

Ответ: 120.

Задача 3.81. Сколько существует 5-значных чисел у которых: а) цифры идут в порядке строгого возрастания; б) строгого убывания; в) неубывания (например, 12227); г) невозрастния (например, 86600)?

Ответ: а) C_9^5; б) C_{10}^5; в) C_{13}^5; г) C_{14}^5.

Задача 3.82. Сколько существует 23-значных чисел, сумма цифр которых равна четырём?

Ответ: 2300.

Задача 3.83. Сколько существует четырехзначных чисел с суммой 9?

Ответ: C_{11}^3.

Задача 3.84. Сколько решений в: а) целых неотрицательных числах; б) натуральных числах; имеет уравнение $x+y+z+t=9$?

Ответ: а) C_{12}^3; б) C_8^3.

Задача 3.85. Сколько решений в: а) натуральных; б) целых неотрицательных числах; имеет уравнение $x_1+x_2+\ldots+x_n=k$, где $k,\, n \in \mathbb{N}$?

Ответ: а) C_{k-1}^{n-1}; б) C_{k+n-1}^{n-1}.

Задача 3.86. Бросают 10 игральных костей. Результат — 10 чисел от 1 до 6 (на каждой кости нанесены 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков). Сколько может получиться различных результатов, если результаты, отличающиеся друг от друга лишь порядком очков, считаются одинаковыми?

Ответ: C_{15}^5.

Задача 3.87. Сколькими способами можно разделить 15 одинаковых монет между 7 нумизматами так, чтобы каждому досталось хотя бы по монете?

Ответ: C_{14}^6.

Задача 3.88. В магазине имеются в продаже рубашки семи фасонов и двенадцать видов галстуков. а) Сколькими способами можно купить три рубашки трех разных фасонов и два разных галстука? б) А пять рубашек трех разных фасонов?

Ответ: а) $C_7^3 \cdot C_{12}^2$; б) $C_7^3 \cdot C_4^2$.

Задача 3.89. Нужно купить 9 ручек, в продаже имеются ручки 4 видов. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: C_{12}^3.

Задача 3.90. Сколькими способами можно разделить 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между 4 ребятами (грибы одного вида считаются одинаковыми)?

Ответ: $C_{13}^3 \cdot C_{18}^3 \cdot C_{11}^3$.

Задача 3.91. Сколькими способами можно составить букет из 17 цветков, если в продаже имеются гвоздики, розы, гладиолусы, ирисы, тюльпаны и васильки?

Ответ: C_{22}^5.

Задача 3.92. Сколькими способами можно разделить 10 одинаковых пирожных между Анной, Борисом и Валентиной, если Анна должна получить не менее одного пирожного, Борис не менее двух, а Валентина не менее трех?

Ответ: C_6^2.

Задача 3.93. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ при дополнительных ограничениях $x_1 \geqslant 2$, $x_2 \geqslant -3$, $x_3 \geqslant -5$, $x_4 \geqslant 4$?

Ответ: C_{30}^3.

Задача 3.94. Найдите число членов после приведения подобных в разложении $(x + y + z)^{10}$. Какой коэффициент будет при $x^2y^5z^3$?

Ответ: а) C_{12}^2; б) $P(2, 5, 3)$.

Задача 3.95. Переплетчик должен переплести 12 одинаковых книг в красный, синий или зелёный переплёты. Сколькими способами он может это сделать? (Не обязательно использовать все цвета.) А сколькими способами он может это сделать, если книги различные?

Ответ: а) C_{14}^{2}; б) 3^{12}.

Задача 3.96. Сколькими способами можно разложить: а) 10 различных шаров по 4 цветным коробкам? б) 10 одинаковых шаров по 4 цветным коробкам?

Ответ: а) 4^{10}; б) C_{13}^{3}.

Задача 3.97. Поезду, в котором находится m пассажиров, предстоит сделать n остановок. а) Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках? б) Решите ту же задачу, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.

Ответ: а) n^m; б) C_{m+n-1}^{n-1}.

Задача 3.98. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. а) Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым? б) Если некоторые ящики могут оказаться пустыми?

Ответ: а) C_{19}^{5}; б) C_{25}^{5}.

Задача 3.99. Сколькими способами можно разделить 100 одинаковых акций между 5-ю людьми так, чтобы каждому досталось не менее одной акции?

Ответ: C_{99}^{4}.

Задача 3.100. Сколькими способами можно расположить в 9 лузах 7 белых и 2 черных шара? Часть луз может быть пустой, лузы считаются различными.

Ответ: $C_{15}^{8} \cdot C_{10}^{8}$.

Задача 3.101. Сколькими способами можно представить 1 000 000 в виде произведения трех множителей, если произведения, отличающиеся порядком множителей, считаются различными?

Ответ: $C_{6}^{2} \cdot C_{6}^{2}$.

Задача 3.102. Есть 5 карточек с цифрой «3», 3 карточки с цифрой «4» и 3 карточки с цифрой «5». Сколькими способами можно выложить ряд из 8 карточек так, чтобы цифры, написанные на выложенных карточках, не убывали?

Указание. Посчитайте количество способов «не взять» 3 из 11 карточек.

Ответ: C_5^2.

Задача 3.103. Сколькими способами 4 человека могут разделить а) 10 яблок; б) 6 яблок, один апельсин, одну сливу и один мандарин; в) 4 яблока, 2 апельсина и одну сливу; г) 8 яблок и 4 апельсина? Фрукты одного вида считаем одинаковыми.

Ответ: а) C_{13}^3; б) $C_9^3 \cdot C_4^3 \cdot C_4^3 \cdot C_4^3$; в) $C_7^3 \cdot C_5^3 \cdot C_4^3$; г) $C_{11}^3 \cdot C_7$.

Задача 3.104. Сколько существует треугольников, у которых длина каждой стороны принимает одно из значений 4, 5, 6, 7?

Ответ: C_6^3.

Задача 3.105. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, у которых длина каждого ребра является целым числом от 1 до 10?

Ответ: C_{12}^3.

Задача 3.106. На книжной полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 3 книги так, чтобы между любыми двумя выбранными книгами было не менее 2 книг?

Ответ: C_{10}^2.

Задача 3.107. С понедельника по пятницу доктор должен принять 6 человек. Ежедневно он может принимать любое количество пациентов. Сколькими способами он может составить расписание приема? (Порядок приема пациентов в течение дня существенен.)

Ответ: $C_{10}^4 \cdot 6!$.

Задача 3.108. В восточной игре «нарды» 15 белых и 15 черных шашек стоят на 24 полях так, что каждое поле или пустое, или занято несколькими белыми шашками, или занято несколькими черными шашками. Сколькими способами можно так поставить шашки?

Ответ: $\sum\limits_{i=1}^{15} C_{24}^{i} \cdot C_{14}^{i-1} \cdot C_{38-i}^{23-i}$.

Задача 3.109. Найдите число всех выпуклых k-угольников, вершинами которых служат k вершин выпуклого n-угольника, причем каждые две соседние вершины k-угольника должны быть разделены по меньшей мере s вершинами n-угольника.

Ответ: $sC_{n-ks-1}^{k-1} + C_{n-ks}^{k}$.

Глава 4

Свойства сочетаний

Бином Ньютона.

Сначала разберем возведение в куб. Раскроем скобки в выражении $(x+y)^3$.

$$(x+y)^3 = (x+y)(x(x+y)+y(x+y)) =$$
$$= (x+y)(xx+xy+yx+yy) =$$
$$= xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy.$$

Получим $\overline{A}_2^3 = 2^3$ слагаемых — количество способов разместить буквы x и y на трех местах с повторениями.

Сгруппируем слагаемые в группы по количеству x и y в строке:

$$xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy =$$
$$= (xxx)+(xxy+xyx+yxx)+(xyy+yxy+yyx)+(yyy).$$

В первой группе все слагаемые равны x^3, во второй x^2y, в третьей — xy^2, в четвертой — y^3.

В итоге получаем:

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$$

Каждое слагаемое имеет вид $x^\alpha y^\beta$, где α и β удовлетворяют уравнению $\alpha+\beta = 3$, $\alpha, \beta \geqslant 0$. У этого уравнения $\overline{C}_2^3 = C_{3+2-1}^3 = 4$ решения. Поэтому, после приведения подобных, мы получим 4 слагаемых. Коэффициент при слагаемом $x^\alpha y^\beta$ будет равен количеству строк длины 3, в которых α букв x и $\beta = 3 - \alpha$ букв y, то есть, $P(\alpha, \beta) = C_3^\beta$.

Рассмотрим теперь общий случай. После раскрытия скобок в выражении $(x+y)^n$, получим $\overline{A}_2^n = 2^n$ слагаемых — строк длины n, составленных из букв x и y. Все слагаемые разбиваются на группы, по количеству вхождений x и y. В каждой группе слагаемое имеет вид $x^\alpha y^\beta$, где α и β удовлетворяют уравнению $\alpha + \beta = n$, α, $\beta \geqslant 0$. У этого уравнения $\overline{C}_2^n = C_{n+2-1}^n = n+1$ решение. Поэтому, после приведения подобных, мы получим $n+1$ слагаемое. Коэффициент при слагаемом $x^\alpha y^\beta$ будет равен количеству строк длины n, в которых $\alpha = n - \beta$ букв x и β букв y, то есть, $P(\alpha, \beta) = C_n^\beta$. Получаем, что

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^n y^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k.$$

Поэтому, C_n^k называют еще *биномиальными коэффициентами*, а саму формулу *Бином Ньютона*.

Пусть теперь нам требуется возвести сумму m слагаемых в степень n. После раскрытия скобок в выражении $(x_1 + \ldots + x_m)^n$, получим $\overline{A}_m^n = m^n$ слагаемых — строк длины n, составленных из букв x_1, $x_2 \ldots, x_m$. Все слагаемые разбиваются на группы, по количеству вхождений x_1, $x_2 \ldots, x_m$.

В каждой группе слагаемое имеет вид $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$, где α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ удовлетворяют уравнению $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$. У этого уравнения $\overline{C}_m^n = C_{n+m-1}^n$ решение. Поэтому, после приведения подобных, мы получим C_{n+m-1}^n слагаемое.

Коэффициент при слагаемом $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$ будет равен количеству строк длины n, в которых α_1 буква x_1, α_2 букв

x_2, т.д., α_m буква x_m. Таких перестановок $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \dfrac{n!}{\alpha_1!\alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_m!}$. Получаем, что

$$(x_1 + \ldots + x_m)^n =$$
$$= \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n \\ \alpha_i \geqslant 0}} P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}.$$

Поэтому, $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ называют еще *мультиномиальные (полиномиальные) коэффициент.*

Например, после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении $(x + y + z)^{100}$ будет $\overline{C}_3^{100} = \dfrac{102!}{100! \cdot 2!}$ слагаемых, а коэффициент при $x^2 y^{48} z^{50}$ будет равен $\dfrac{100!}{2! \cdot 48! \cdot 50!}$.

Свойства чисел сочетаний.

Утверждение 4.1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Доказательство. I способ. Воспользуемся формулой для вычисления C_n^k :

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

II способ. Воспользуемся комбинаторным смыслом числа C_n^k — количество k-элементных подмножеств n-элементного множества. Каждому k-элементному подмножеству n-элементного множества можно поставить в соответствие его дополнение до всего множества. При этом задается взаимно однозначное соответствие между k-элементными и $(n-k)$-элементными подмножествами n-элементного множества. Следовательно, множество k-элементных подмножеств и множество $(n-k)$-элементных подмножеств n-элементного множества содержат одинаковое количество элементов. Таким образом, число сочетаний из n по k совпадает с числом сочетаний из n по $n-k$.

На конкретном примере это можно проиллюстрировать так: назвать 3 человек из группы из 22 человек, которые идут на олимпиаду, то же самое, что назвать 19 человек из группы из 22 человек, которые не идут на олимпиаду. □

Утверждение 4.2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Доказательство. I способ. Воспользуемся формулой для вычисления C_n^k :

$$\begin{gathered}
C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \\
= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \\
= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k))!} = \\
= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k))!} = \\
= \frac{(n-k)(n-1)!+k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.
\end{gathered}$$

II способ. Воспользуемся комбинаторным смыслом числа C_n^k — количество k-элементных подмножеств n-элементного множества. Зафиксируем первый элемент n-элементного множества a_1. Все k- элементные подмножества n-элементного множества разобьются на два семейства: в первое входят подмножества, не содержащие a_1, а во второе — содержащие a_1.

Для того, чтобы сформировать подмножество из из первого семейства нужно выбрать из $n-1$ элемента (a_1 выбирать нельзя) k элементов. Значит, в первом семействе C_{n-1}^k подмножеств.

Для того, чтобы сформировать подмножество из второго семейства, нужно из $n-1$ элемента выбрать $k-1$ элемент, поскольку a_1 уже входит в это подмножество. Поэтому число подмножеств во втором семействе равно C_{n-1}^{k-1}.

Так как всякое k-элементное подмножество входит ровно в одно из двух семейств, общее число k-элементных подмножеств равно $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

На конкретном примере это можно проиллюстрировать так: если мы выбираем команду из 6 человек для участия в олимпиаде из группы из 22 человек, то мы либо берем в команду Иванова, либо не берем.

III способ. Бином Ньютона. C_n^k — коэффициент при $x^{n-k}y^k$

в разложении $(x+y)^n$. Вычислим его другим способом. Так как

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1} = x(x+y)^{n-1} + y(x+y)^{n-1},$$

то коэффицинт при $x^{n-k}y^k$ складывается из двух: коэффициента при $x^{n-k-1}y^k$ в первом слагаемом правой части, и коэффициента при $x^{n-k}y^{k-1}$ во втором слагаемом правой части, которые равны $C_{n-k-1+k}^k$ и $C_{n-k+k-1}^{k-1}$ соотвественно. В обозначених сумм это записывается так:

$$\begin{aligned}
(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k = (x+y)(x+y)^{n-1} = \\
= x\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^{n-1-k} y^k + y\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^{n-1-k} y^k = \\
= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^{n-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^{n-1-k} y^{k+1} = \\
= C_{n-1}^0 x^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k x^{n-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^{n-k} y^k = \\
= C_{n-1}^0 x^n + \sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) x^{n-k} y^k + C_{n-1}^{n-1} y^n.
\end{aligned}$$

□

Формула $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ дает способ последовательного вычисления значений C_n^k. Заметим, что из комбинаторного опреденния числа сочетаний имеем равенства $C_n^0 = C_n^n = 1$ (существует один способ ничего не выбирать, и один способ выбрать все элементы).

Сначала записываем значение $C_0^0 = 1$. Эту строку назовем «нулевой». В следующей строке запишем значения $C_1^0 = 1$ и $C_1^1 = 1$ так, чтобы значение C_0^0 оказалось над промежутком между этими двумя числами.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

В следующей (второй) строке нам известны значения $C_2^0 = C_2^2 = 1$. Их запишем по краям. Между ними надо записать число C_2^1. По выведенной формуле $C_2^1 = C_{2-1}^{1-1} + C_{2-1}^1$, то есть равно сумме чисел предыдущей строки, стоящих слева и справа от него, $C_2^1 = 1 + 1 = 2$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & \\
1 & & \boxed{2} & & 1
\end{array}$$

Также продолжим заполнять следующие строки остальные: сначала пишем по бокам значения $C_n^0 = C_n^n = 1$, затем промежуточные значения вычисляем как суммы чисел предыдущей строки, стоящих слева и справа от вычисляемого значения:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & 1 & \\
1 & & \boxed{3} & & & & 1
\end{array}$$

В результате получаем такой числовой треугольник:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Этот треугольник часто называют *треугольник Паскаля* или *арифметический треугольник.*

В дальнейшем, для доказательства свойств сочетаний мы будем пользоваться также арифметическим треугольником.

Утверждение 4.3. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

I способ. Комбинаторный. а) Рассмотрим строки длины n из «0» и «1». Их всего $\overline{A}_2^n = 2^n$. Теперь вычислим их количество другим способом. Все строки длины n из «0» и «1» разбиваются на группы, по количеству «1»: их может быть 0, 1, 2, и т.д., n. Количество строк длины n, содержащих k «1» и $n-k$ «0», равно $P(k, n-k) = C_n^k$. Так как всякая строка длины n из «0» и «1» входит ровно в одну из $n+1$ групп, то общее число строк длины n из «0» и «1» равно $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$.

б) Рассмотрим всевозможные подмножества n-элементного множества. Их количество равно 2^n. Все подмножества n-элементного множества разбиваются на группы, по количеству элементов, которое они содержат, это быть 0, 1, 2, и т.д., n элементов. Количество k-элементных подмножеств n-элементного множества равно C_n^k. Так как всякое подмножество n-элементного множества входит ровно в одну из $n+1$ групп, то общее число подмножеств n-элементного множества равно $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$.

II способ. Бином Ньютона. Рассмотрим бином Ньютона

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k.$$

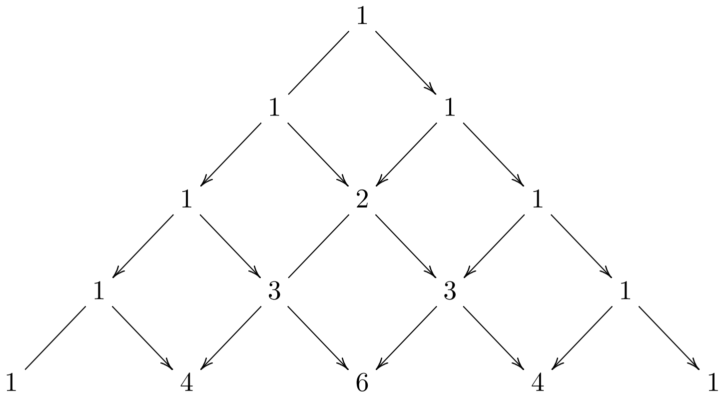
и подставим в тождество $x = y = 1$. Получим, что

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k \Rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

III способ. Треугольник Паскаля. Нам нужно доказать, что в каждой строке треугольника Паскалая сумма чисел равна 2^n, где n — номер строки.

1								2^0
1	1							2^1
1	2	1						2^2
1	3	3	1					2^3
1	4	6	4	1				2^4
1	5	10	10	5	1			2^5
1	6	15	20	15	6	1		2^6
1	7	21	35	35	21	7	1	2^7

Докажем это по индукции. Для первых строк утверждение проверяется непосредственным вычислением. Пусть утверждение верно для строки с номером n. По построению треугольника Паскаля, каждое число будет входить как слагаемое в два числа следующей строки: справа снизу и слева снизу от него.



Получаем, что в каждой следующей строке каждое число из предыдущей будет посчитано два раза. Поэтому, сумма чисел в следующей строке в два раза больше суммы чисел предыдущей. Если в n строке сумма равна 2^n, то в $n+1$ строке сумма будет равна 2^{n+1}, что и требовалось доказать. □

Утверждение 4.4. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$,

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots =$$
$$= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Заметим, что эти неравенства эквивалентны в силу предыдущего утверждения.

I способ. Комбинаторный. а) Рассмотрим строки длины n из «0» и «1». Рассмотрим два семейства строк: в первое входят строки с четным числом «1», во второе — с нечетным. Всего строк в каждом семействе 2^{n-1}, так как первые $n-1$ элемент строки мы выбираем любыми, а последний так, чтобы получилась нужня четность количества «1», то есть, единственным образом. С другой стороны, все строки первого и второго семейства разбиваются на группы с определенным количеством «1». В первом семействе подсчет количества строк в каждой группе дает результат $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$, во второй — $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$.

б) Рассмотрев семейства подмножеств с четным и нечетным количеством элементов, получим такой же результат, как в пункте а).

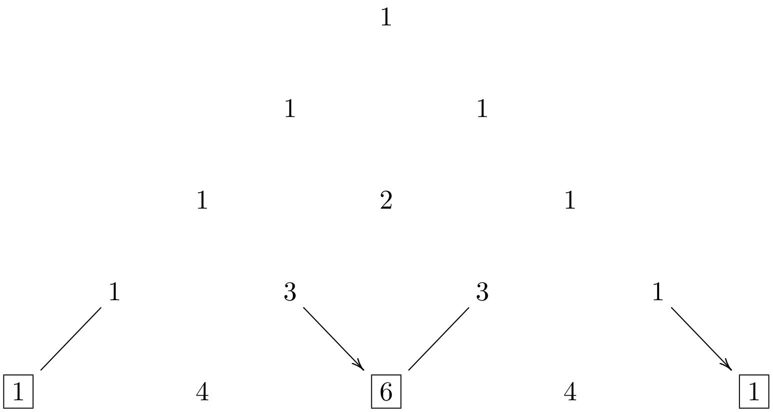
II способ. Бином Ньютона. Рассмотрим бином Ньютона

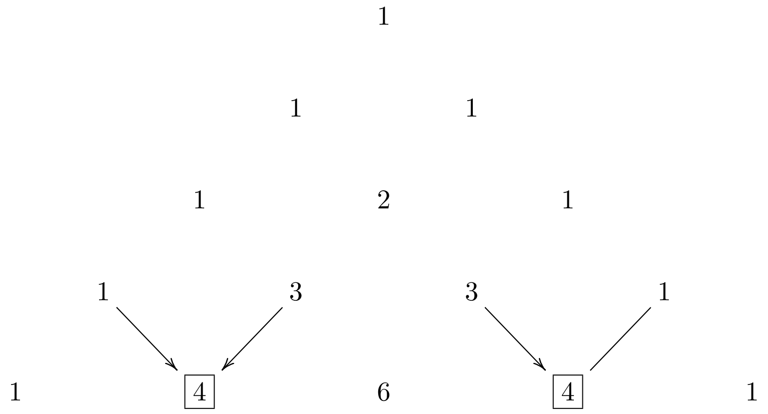
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k.$$

и подставим в тождество $x = 1$, $y = -1$. Получим, что

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k}(-1)^k \Rightarrow 0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k.$$

III способ. Треугольник Паскаля. При составлении арифметического треугольника каждое число $(n-1)$-ой строки участвует в образовании двух чисел следующей, n-ой строки: стоящего слева снизу и стоящего справа снизу от него. Поэтому если сложить числа n-ой строки через одно, то в полученную сумму войдут по одному разу все числа $n-1$-й строки. Складывать числа через одно можно двумя способами: начав с первого числа строки или, начав со второго числа.





В обоих случаях получится одна и та же сумма, равная сумме чисел в $n-1$ строке.

IV способ. Разобьем все подмножества n-элементного множества на два семейства: $\mathcal{A}$ — подмножества с четным числом элементов, $\mathcal{B}$ — подмножества с нечетным числом элементов. Зафиксируем элемент a_1. Семейство $\mathcal{A}$ разбивается на два: $\mathcal{A}_1$ — подмножества, содержащие a_1, $\mathcal{A}_2$ — подмножества, не содержащие a_1. Аналогично разобьем $\mathcal{B}$ на $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$. Построим биекцию между $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{B}_2$. Для всякого $A \in \mathcal{A}_1$ поставим в соответствие множество $B \in \mathcal{B}_2$ по правилу:

$$(A \leftrightarrow B) \Longleftrightarrow (A = B \cup \{a_1\}).$$

Аналогично строится биекция между $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{B}_1$. Получаем, что между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ существует взаимно однозначное соответствие, откуда следует, что эти смейства содержат одинаковое число элементов, т.е. по 2^{n-1}.

На конкретном примере это выглядит так. Пусть $n = 4$. Рассмотрим множество $\{1,2,3,4\}$ и все его подмножества. Тогда $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$, $\mathcal{B} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$. Они разбиваются на пары биективных подмножеств:

$$\begin{array}{rcccc}
\mathcal{A}_1: & \{1,2\} & \{1,3\} & \{1,4\} & \{1,2,3,4\} \\
\mathcal{B}_2: & \{2\} & \{3\} & \{4\} & \{2,3,4\} \\
 & & & & \\
\mathcal{A}_2: & \varnothing & \{2,3\} & \{2,4\} & \{3,4\} \\
\mathcal{B}_1: & \{1\} & \{1,2,3\} & \{1,2,4\} & \{1,3,4\}
\end{array}$$

□

Утверждение 4.5. а) $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, б) $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m}$.

а) К комбинаторному доказательству приводит следующая задача: из группы 22 студентов нужно выбрать команду из 6 человек и ее капитана. Мы можем описать этот выбор двумя способами.

Выберем команду из 6 человек, а затем выберем из них капитана. Первое действие мы можем сделать C_{22}^6 способами, второе — 6. По правилу произведения, выбрать команду и капитана — $6C_{22}^6$ способов.

Второй способ заключается в том, что сначала мы выбираем капитана из 22 человек, а потом набираем ему в команду 5 рядовых членов. Тогда способов это сделать $22C_{21}^5$. Откуда получаем, что $6C_{22}^6 = 22C_{21}^5$.

б) В этом пункте рассмотрим такую задачу. Нам надо выбрать из 100 делегатов съезда правление из 10 человек и назначить из них президиум из 3 человек.

Этот выбор можно описать, как выбор 100 членов правления, а затем выбор из них 3 членов президиума, всего $C_{100}^{10}C_{10}^3$ способа.

Другим способом сделать выбор является выбор президиума из 3 человек, а затем выбор 7 рядовых членов правления. Всего $C_{100}^3C_{97}^7$.

Получаем равенство $C_{100}^{10}C_{10}^3 = C_{100}^3C_{97}^7$.

Эти рассуждения обобщаются следующим образом.

а) Нам нужно выбрать k-элементное подмножество n - элементного множества и выделить в нем один элемент. Описать выбор мы можем двумя цепочками действий. Сначала выбираем k-элементное подмножество, а затем выбираем в нем элемент, всего $C_n^k \cdot k$ способов. Другой вариант заключается в том, что сначала выделяем один элемент n-элементного множества, а затем выбираем $k-1$ элемент из оставшихся $n-1$, всего nC_{n-1}^{k-1} способ.

б) Нужно выбрать k-элементное подмножество n-элементного множества и выделить в нем m элементов. Рассуждения, аналогичные пункту а), приводят к формуле $C_n^kC_k^m = C_n^mC_{n-m}^{k-m}$. □

Утверждение 4.6. (Свертка Вандермонда). Имеет место равенство:

$$C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^iC_m^{k-i}.$$

Доказательство. К комбинаторному доказательству приводит следующая задача. Пусть нам надо выбрать команду из 6 человек из группы из 22 студентов, в которой обучается 15 юношей и 7 девушек.

Выбор 6 человек из 22 мы можем сделать C_{22}^6 способами. Все команды разбиваются на семейства по количеству девушек. Их в команде может быть 0, 1, … 6. Выбрать команду, в которой i девушек и $6-i$ юношей мы можем $C_7^i C_{15}^{6-i}$ способами.

Так как всякая команда из 6 человек входит ровно в одно из этих семейств, общее число команд, численностью 6, равно

$$C_7^0 C_{15}^6 + C_7^1 C_{15}^5 + C_7^2 C_{15}^4 + C_7^3 C_{15}^3 + C_7^4 C_{15}^2 + C_7^5 C_{15}^1 + C_7^6 C_{15}^0.$$

Эти рассуждения несложно обобщаются. Пусть имеется множество, состоящее из m различных элементов первой категории и n различных элементов второй категории. Нам нужно выбрать k-элементное подмножество. Их всего C_{m+n}^k. Они разбиваются на семейства по количеству элементов первой категории. Количество k-элементнэх подмножеств, содержащих i элементов первой категории и $k-i$ элементов второй категории, равно $C_n^i C_m^{k-i}$. Так как всякое k-элементное подмножество входит ровно в одно из этих семейств, общее число k-элементных подмножеств равно

$$\sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}.$$

□

Утверждение 4.7. $C_{2n}^n = \sum\limits_{i=0}^{n} (C_n^i)^2$.

Доказательство. I способ. Следует из формулы свертки Вандермонда при $n = m$.

II способ. а) Рассмотрим строки длины $2n$, в записи которых поровну «0» и «1». Их всего $P(n,n) = C_{2n}^n$. Все строки разбиваются на семейства по количеству «0» на первых n позициях, от 0 до n. Если на первых n позициях стоит i «0», то во второй половине строки стоит i «1». Способов расставить i «0» на первых n позициях и i «1» во второй половине строки, равно $C_n^i C_n^i$. Так как всякая строка длины $2n$, в записи которой поровну «0» и «1» входит ровно в одно из этих семейств, то общее число строк длины $2n$, в записи которых поровну «0» и «1» равно $\sum\limits_{i=0}^{k}(C_n^i)^2$.

б) Еще одна комбинаторная задача, которая приводит к этой формуле: имеется n юношей и n девушек. Сколько существует способов составить компанию, в которой было бы одинаковое число юношей и девушек? Решение практически такое же, как и про строки с равным числом «0» и «1». □

Утверждение 4.8.

$$2^k C_n^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_{n-i}^{k-i}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу: каким числом способов можно выбрать k-элементное подмножество n-элементного множества и выделить в нем несколько (возможно ни одного) элементов?

k-элементное подмножество n-элементного множества можно выбрать C_n^k способами, а выделить в нем несколько элементов можно 2^k способами, и, значит, ответ в задаче: $C_n^k \cdot 2^k$.

Все k-элементные подмножества n-элементного множества с выделенными элементами разбиваются на семейства по количеству выделенных элементов, их можт быть $0,\ 1, \ldots k$. Если выделено i элементов, то этот выбор можно описать так: выделенные элементы можно выбрать C_n^i способами, после этого остальные элементы k-элементного подмножества n-элементного множества выбираются C_{n-i}^{k-i} способами. Так как всякое k-элементное подмножество с выделенными элементами входит ровно в одно из этих семейств, общее число k-элементных подмножеств с несколькими выделенными элементами равно $\sum\limits_{i=0}^{k} C_n^i C_{n-i}^{k-i}$. □

Утверждение 4.9. $C_{n+k}^k = C_{n+k}^n = \sum\limits_{i=0}^{k} C_{n+k-1-i}^{n-1} =$
$= C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1} + C_{n+1}^{n-1} + \ldots + C_{n+k-1}^{n-1}.$

Доказательство. а) Рассмотрим задачу Муавра. Найти количество решений уравнения $x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} = k$ в целых неотрицательных числах. Из метода перегородок получаем, что необходимо расставить k шаров и n перегородок. Всего, C_{n+k}^{n} способов. Все решения разбиваются на семейства по значению $x_{n+1} = 0, 1, \ldots, k$.

Пусть $x_{n+1} = i$. Тогда $x_1 + \ldots + x_n = k - i$. Здесь нужно расставить $k - i$ шаров и $n - 1$ перегородку. Всего $C_{n+k-1-i}^{n-1}$ способов. Так как всякое решение входит ровно в одно из этих семейств, общее число решений равно $\sum\limits_{i=0}^{k} C_{n+k-1-i}^{n-1}$.

б) Этот результат можно получить, решая следующую задачу: сколько n–элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n+k\}$?

С одной стороны, их C_{n+k}^{n}. С другой, они разбиваются на семейства по максимальному элементу. Он может быть равен n, $n+1, \ldots, n+k$. Если наибольший элемент равен $n+i$, то остальные $n-1$ элемент можно выбрать из $n+i-1$-элементного множества, т.е. C_{n+i-1}^{n-1} способами. □

Утверждение 4.10. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$.

Доказательство. I способ. Треугольник Паскаля. Рассмотрим конкретный пример, чтобы понять геометрию тождества. Пусть $n = 7$, $k = 3$. Тождество примет вид: $C_7^3 = C_6^2 + C_5^2 + C_4^2 + C_3^2 + C_2^2$. Выделим эти числа в треугольнике Паскаля:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&2&&\mathbf{1}&&&&& \\
&&&&1&&3&&\mathbf{3}&&1&&&& \\
&&&1&&4&&\mathbf{6}&&4&&1&&& \\
&&1&&5&&\mathbf{10}&&10&&5&&1&& \\
&1&&6&&\mathbf{15}&&20&&15&&6&&1& \\
1&&7&&21&&\boxed{35}&&35&&21&&7&&1
\end{array}
$$

Число равно сумме чисел в «наддиагонали», которая начинается с числа стоящего слева сверху от него и идет вправо-вверх.

При помощи треугольника Паскаля, докажем это по индукции. Для первых строк утверждение проверяется непосредственным вычислением. Пусть утверждение верно для всех чисел строк с номерами, меньшими n. По построению треугольника Паскаля, каждое число в n строке равно сумме двух чисел предыдущей строки, справа сверху и слева сверху от него.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&2&&1&&&&& \\
&&&&1&&3&&3&&1&&&& \\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&& \\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \\
&1&&\mathbf{6}&&\boxed{15}&&20&&15&&6&&1& \\
1&&7&&\boxed{21}&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}$$

По предположению индукции, число справа сверху равно сумме своей «наддиагонали». Объединив ее с числом слева сверху, получим индукционный шаг.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&\mathbf{1}&&&&&& \\
&&&&&1&&\mathbf{2}&&1&&&&& \\
&&&&1&&\mathbf{3}&&3&&1&&&& \\
&&&1&&\mathbf{4}&&6&&4&&1&&& \\
&&1&&\mathbf{5}&&10&&10&&5&&1&& \\
&1&&\mathbf{6}&&15&&20&&15&&6&&1& \\
1&&7&&\boxed{21}&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}$$

II способ. Комбинаторный способ. C_n^k — количество строк из «0» и «1» длины n, в которых ровно k «1». Эти строки разбиваются на группы, по количеству «0», стоящих в конце строки:

$$\begin{aligned}
(\ldots,1)\\
(\ldots,1,0)\\
(\ldots,1,0,0)\\
(\ldots,1,0,0,0)\\
\vdots\\
(\ldots,1,\underbrace{0,\ldots 0}_{n-k})
\end{aligned}$$

Всего $(n-k+1)$ группа. В первой группе, нам необходимо расставить $(k-1)$ оставшуюся «1» на $(n-1)$ месте, всего C_{n-1}^{k-1} способ. Во второй — расставить $(k-1)$ оставшуюся «1» на $(n-2)$ местах, всего C_{n-2}^{k-1} способ и т.д. В группе, где на конце строки стоит ровно i «0», получаем, что на $(i+1)$ месте с конца стоит 1, и на оставшихся $(n-i-1)$ местах необходимо расставить $(k-1)$ «1» и $(n-k-i)$ «0», всего C_{n-i-1}^{k-1} способ. Так как каждая строка принадлежит ровно одной группе, то общее число строк из «0» и «1» длины n, в которых ровно k «1» равно $\sum\limits_{i=0}^{n-k} C_{n-i-1}^{k-1}$. □

Утверждение 4.11. Каждое число в треугольнике Паскаля, уменьшенное на единицу, равно сумме всех чисел, заполняющих парллелограмм, ограниченный диагоналями, на пересечении которых находится этот элемент. Например:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \mathbf{1} & & & & & & \\
 & & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & 1 & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & \mathbf{4} & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & \boxed{15} & & 6 & & 1
\end{array}$$

Доказательство. а) Докажем геометрически по индукции. Каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме двух чисел предыдущей строки, справа сверху и слева сверху от него.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & \boxed{20} & & \boxed{15} & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & \boxed{35} & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Для числа справа сверху применим предыдущее утверждение о сумме в «наддиагонали»:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & \mathbf{4} & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & \mathbf{10} & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & \boxed{15} & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

а для числа слева сверху — индукционное предположение о параллелограмме:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \mathbf{1} & & & & & & & \\
 & & & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & & & \\
 & & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & 1 & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & \mathbf{6} & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & \boxed{20} & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Объединив результаты двух предыдущих рассуждений, получим требуемое:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \mathbf{1} & & & & & & & \\
 & & & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & & & \\
 & & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & 1 & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & \mathbf{10} & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & \boxed{35} & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

□

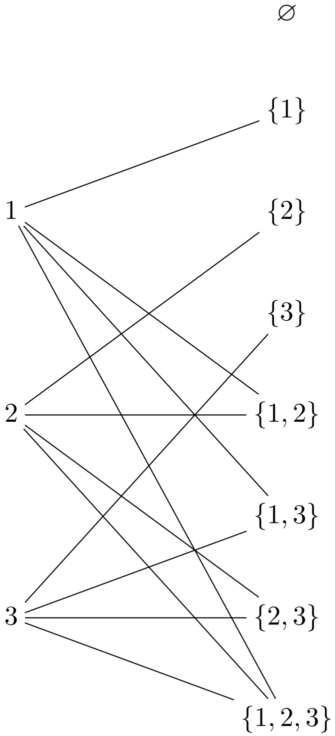
Утверждение 4.12. Для $k, n \in \mathbb{Z}_+$, $k \leqslant n$ имеет место равенство

$$2^{n-1}n = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k.$$

Доказательство. Рассмотрим n-элементное множество. Определим двудольный граф следующим образом. В первую долю входят все n элементов, во вторую 2^n подмножеств n-элементного множества. Ребра соединяют элементы с теми подмножествами, в которые они входят.

Проиллюстрируем это рассуждение на примере для конкретного n, а именно: $n = 3$.

Рассмотрим трехэлементное множество $\{1,2,3\}$ и восемь его подмножеств:



Из каждого элемента выходит по 4 ребра. Из трех одноэлементных подмножеств выходит по одному ребру, из трех двухэлементных по два, из трехэлементного — три ребра. Всего в графе 12 ребер: $3 \cdot 4 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1$.

Перейдем к общему случаю. Посчитаем количество ребер в графе двумя способами. В первой доле из каждого элемента выходит 2^{n-1} ребро, так как количество подмножеств n-элементного множества, содержащих фиксированный элемент, равно количеству подмножеств остальных $n-1$ элементов, т.е. 2^{n-1}. Значит, количство ребер в графе $2^{n-1}n$.

Во второй доле из каждого k-элементного подмножества выходит ровно k ребер. Значит, всего выходит $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k$ ребер. Получили требуемое равенство.

б) Еще один комбинаторный смысл этого утверждения заключается в следующей задаче: каким числом способов можно выбрать один элемент из n-элементного множества и выделить среди оставшихся произвольное (возможно пустое) подмножество?

$\square$

Задача 4.1. В разложении $(x+y)^n$ по формуле бинома Ньютона второй член оказался равен 240, третий — 720, четвертый — 1080. Найдите x, y, n.

Задача 4.2. Какое слагаемое в разложении $(1+1)^{100}$ по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?

Задача 4.3. Какое слагаемое в разложении $(1+2)^{100}$ по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?

Задача 4.4. Определите коэффициенты, которые будут стоять при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1+x^5+x^7)^{20}$.

Задача 4.5. Найдите свободный член в разложении выражения $(x^3+1/x^2)^{10}$ по степеням x.

Задача 4.6. Найдите коэффициент при x^{29} и x^{30} в выражении $(1+x+x^2+\ldots+x^{10})^3$.

Задача 4.7. Найдите коэффициент при x^3y^7 в выражении $(2x-y)^{10}$.

Задача 4.8. Найдите коэффициент при $x_1^3x_2x_3^5x_5$ в выражении $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{10}$.

Задача 4.9. Сколько всего слагаемых будет после раскрытия скобок в выражении $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^{20}$? Сколько слагаемых останется после приведения подобных? Найдите коэффициент при: а) $x_1^2x_2^3x_3^4x_5^5x_6^6$; б) $x_1x_2^2x_3^3x_4^4x_5^5x_6^6$.

Задача 4.10. Докажите тождество $C_{n+k+1}^{n+1}=\sum\limits_{i=0}^{k}C_{n+i}^{n}$.

Задача 4.11. Докажите тождество $\sum\limits_{i=k}^{n}C_n^iC_i^k=2^{n-k}C_n^k$.

Задача 4.12. Докажите тождество $\sum\limits_{i=n}^{m}\frac{1}{i}C_i^n=\frac{1}{n}C_m^n$.

Задача 4.13. Докажите тождество $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}C_n^i=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$.

Задача 4.14. Докажите тождество $\sum\limits_{\substack{A\subset S\\ B\subset S}}|A\cup B|=3\cdot4^{|S|-1}|S|$.

Глава 5

Формула включений-исключений

Мощностью конечного множества называется число его элементов. Мощность множества A будем обозначать через $|A|$.

Утверждение 5.1. Пусть A и B — непересекающиеся подмножества множества S. Тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Доказательство. Перечислить все элементы множества $A \cup B$ можно следующим образом: сначала перечислим $|A|$ элементов множества A, а затем $|B|$ элементов множества B. Получим список из $|A| + |B|$ элементов. □

Замечание. По индукции это утверждение доказывается для любого конечного числа непересекающихся подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|. \tag{5.1}$$

Утверждение 5.2. Пусть A и B — произвольные подмножества множества S. Тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{5.2}$$

Доказательство. Рассмотрим непересекающиеся множества A и $B \backslash A$. Так как всякое множество B можно представить в виде $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$, то в силу утверждения 5.1 имеем, что

$$|A \cup B| = |A| + |B \backslash A|.$$

Далее рассмотрим непересекающиеся множества $B \backslash A$ и $B \cap A$. Так как $B = (B \backslash A) \cup (B \cap A)$, то в силу утверждения 5.1 имеем, что

$$|B| = |B \backslash A| + |B \cap A|.$$

Из этих двух равенств следует формула (5.2). □

Утверждение 5.3. Пусть A, B и C — произвольные подмножества множества S. Тогда

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \tag{5.3}$$

Доказательство. Множество $A \cup B \cup C$ можно представить как объединение двух множеств $A \cup C$ и $B \cup C$. Применим к ним утверждение 5.2:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup C| + |B \cup C| - |(A \cup C) \cap (B \cup C)|. \tag{5.4}$$

Из равенства $(A \cup C) \cap (B \cup C) = C \cup (A \cap B)$ и формулы (5.2) следует, что

$$|(A \cup C) \cap (B \cup C)| = |C \cup (A \cap B)| = |C| + |A \cap B| - |A \cap B \cap C|.$$

Формула (5.3) следует из подстановки в (5.4) равенств:

$$|A \cup C| = |A| + |C| - |A \cap C|;$$

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|.$$

Теорема 5.1. Пусть $A_1,\ A_2,\ldots,A_n$ — произвольные подмножества множества S. Тогда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}| + \\ + \sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| - \ldots + (-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|. \tag{5.5}$$

Доказательство. I способ. По индукции. Для $n=2,3$ утверждение доказано. Пусть формула (5.5) справедлива для $n=k$. Докажем ее для $n=k+1$.

Рассмотрим множества $A_1,\ A_2,\ldots,A_{k+1}$. Определим k множеств по правилу: $A'_i = A_i\cap A_{k+1}$, $i=1,\ldots,k$.

Рассмотрим $\bigcup\limits_{i=1}^{k+1} A_i$ как объединение двух множеств: $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ и A_{k+1}. Из (5.2) следует, что

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\cap A_{k+1}\right| = \\ = \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{k}(A_i\cap A_{k+1})\right| = \\ = \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{k} A'_i\right| = \sum_{1\leqslant i\leqslant k} |A_i| + |A_{k+1}| - \\ - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k} |A_{i_1}\cap A_{i_2}| + \sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant k} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| - \\ - \ldots + (-1)^{k+1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k| - \left|\bigcup_{i=1}^{k} A'_i\right|. \tag{5.6}$$

По предположению индукции имеем равенство

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A'_i\right| = \sum_{1\leqslant i\leqslant k} |A'_i| - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k} |A'_{i_1}\cap A'_{i_2}| +$$

$$+\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant k} |A'_{i_1}\cap A'_{i_2}\cap A'_{i_3}| - \ldots + (-1)^{k+1}|A'_1\cap A'_2\cap\ldots\cap A'_k| =$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant k} |A_i\cap A_{k+1}| - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{k+1}| +$$

$$+\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant k} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\cap A_{k+1}| - \ldots +$$

$$+(-1)^{k+1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k\cap A_{k+1}| = \sum_{1\leqslant i_1<i_2=k+1} |A_{i_1}\cap A_{i_2}| -$$

$$-\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3=k+1} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| +$$

$$+\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3<i_4=k+1} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\cap A_{i_4}| -$$

$$-\ldots + (-1)^{k+1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k\cap A_{k+1}|. \qquad (5.7)$$

Подставив (5.7) в (5.6), получаем (5.5), так как

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_s\leqslant k} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_s}| +$$

$$+\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_s=k+1} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_s}| =$$

$$= \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_s\leqslant k+1} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_s}|.$$

II способ. Рассмотрим $\chi_A : S \to \{0,1\}$ — *характеристическую фукцию* множества A :

$$\chi_A(x) \doteq \begin{cases} 1, & x\in A; \\ 0, & x\notin A \end{cases}$$

Напомним основные свойства характеристических функций:

1) $(A = B) \Longleftrightarrow (\chi_A = \chi_B)$;

2) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$;

3) $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$;

4) $|A| = \sum\limits_{x\in S} \chi_A(x)$.

В силу формулы $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \overline{\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)}$ имеем равенство:

$$\chi_{A_1\cup\ldots\cup A_n} = 1 - \chi_{\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_n} = 1 - \chi_{\overline{A}_1}\cdot\ldots\cdot\chi_{\overline{A}_n} =$$
$$= 1 - (1-\chi_{A_1})\cdot\ldots\cdot(1-\chi_{A_n}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\chi_{A_i} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\chi_{A_i}\cdot\chi_{A_j} + \sum_{1\leqslant i<j<l\leqslant n}\chi_{A_i}\cdot\chi_{A_j}\cdot\chi_{A_l} -$$
$$-\ldots + (-1)^{n+1}\chi_{A_1}\cdot\chi_{A_2}\cdot\ldots\cdot\chi_{A_n} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\chi_{A_i} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\chi_{A_i\cap A_j} + \sum_{1\leqslant i<j<l\leqslant n}\chi_{A_i\cap A_j\cap A_l} - \ldots +$$
$$+(-1)^{n+1}\chi_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n}.$$

Используя 4 свойство характерестических функций, получим требуемое равенство.

III способ. Подсчет числа вхождений. Возьмем произвольный элемент $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ и подсчитаем количество его вхождений в правую часть (5.5). Пусть x принадлежит ровно k множествам из $A_1,\ A_2,\ldots,A_n$. Тогда в сумме $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i|$ он учитывается k раз, в сумме $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|$ столько, сколько существует способов выбрать пару множеств из k его содержащих, то есть C_k^2 раз, в сумме $\sum\limits_{1\leqslant i<j<l\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_l|$ столько, сколько способов выбрать три множества из k его содержащих, то есть C_k^3 раз и т.д. Общее число вхождений x в правую часть равно $C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 - \ldots + (-1)^{k+1}C_k^k$, а оно равно 1. Таким образом, правая часть (5.5) равна общему числу элементов из $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. □

Следствие 5.1. Пусть $A_1,\ A_2,\dots,A_n$ — произвольные подмножества множества S. Тогда

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right| = |S| - \sum_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i| + \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}| -$$
$$- \sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| - \ldots + (-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|. \tag{5.8}$$

Доказательство. В силу формулы $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \overline{\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right)}$ имеет место равенство

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |S| - \left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right|.$$

Равенство (5.8) следует из равенства (5.5). □

Рассмотрим конечное множество X. Для любого множества $A\subset X$ положим

$$A^1 \doteq A,\ \ A^0 \doteq X\backslash A.$$

Пусть $A_1,\dots,A_n\subset X$, $n\in\mathbb{N}$ — подмножества X. Рассмотрим последовательность $I=(i_1,\dots,i_n)$, в которой каждый элемент i_k равен либо 1, либо 0, и образуем множество

$$A_I \doteq \bigcap_{k=1}^{n} A_k^{i_k}.$$

Тогда

$$A_k = \bigcup_{I:i_k=1} A_I,\ \ X\backslash A_k = \bigcup_{I:i_k=0} A_I$$

Если $I'\neq I''$ то найдется $i'_k\neq i''_k$, пусть $i'_k=1$, $i''_k=0$. Тогда $A_{I'}\subset A_k$, $A_{I''}\subset X\backslash A_k$, следовательно, $A_{I'}\cap A_{I''}=\varnothing$. Мы получаем описание каждого элемента $x\in X$ при помощи двоичной строки длины $n:$ для всех $x\in A_I$ выполнено $\chi_{A_k}(x)=i_k$.

Пример 5.1. На кафедре лингвистики работают 13 человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский язык, семеро — немецкий, шестеро — французский. Пятеро знают английский и немецкий, четверо — английский и французский, трое — немецкий и французский. Сколько человек знают: 1) все три языка; 2) ровно два языка; 3) только английский язык?

Решение. Пронумеруем людей на кафедре при помощи чисел $1, 2, \ldots, 13$. Пусть A_1 — множество членов кафедры, владеющих английским языком, A_2 — немецким, A_3 — французским. По условию, $|A_1| = 10$, $|A_2| = 7$, $|A_3| = 6$. Рассмотрим двоичные последовательности $i_1 i_2 i_3$ длины 3. Всего их 8. Индекс i_1 означает: знает человек английский язык $(i_1 = 1)$ или нет $(i_1 = 0)$; i_2 — французский, i_3 — немецкий.

Так как каждый знает хотя бы один иностранный язык, то $A_{000} = \varnothing$. Так как пятеро знают английский и немецкий, то

$$|A_{110}| + |A_{111}| = 5.$$

Аналогично,

$$|A_{101}| + |A_{111}| = 4;$$

$$|A_{011}| + |A_{111}| = 3.$$

Обозначим $|A_{111}| = x$. Тогда $|A_{110}| = 5 - x$, $|A_{101}| = 4 - x$, $|A_{011}| = 3 - x$. Из условия $|A_1| = |A_{100}| + |A_{101}| + |A_{110}| + |A_{111}|$, следует, что

$$10 = |A_{100}| + (4 - x) + (5 - x) + x,$$

откуда $|A_{100}| = x + 1$. Аналогично, $|A_2| = |A_{010}| + |A_{011}| + |A_{110}| + |A_{111}|$, $|A_{010}| = x - 1$; $|A_{001}| = x - 1$.

Так как на кафедре лингвистики работают 13 человек то

$$13 = |A_1| + |X \backslash A_1| = |A_1| + |A_{000}| + |A_{001}| + |A_{010}| + |A_{011}|,$$

откуда получаем, что $13 = 10 + 0 + (x - 1) + (x - 1) + (3 - x)$, $x = 2$.

Значит, все три языка знают $|A_{111}| = 2$ человека; ровно два языка знают $|A_{110}| + |A_{101}| + |A_{011}| = 3 + 1 + 1$ человека; только английский язык знают $|A_{100}| = 3$ человека. □

Функция Эйлера.

Функция Эйлера $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n. Вычислим ее значения при помощи формулы (5.8).

Пусть каноническое разложение на простые множители натурального числа n имеет вид: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$.

Рассмотрим множество $S \doteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $\varphi(n)$ — количество чисел из S, которые не делятся ни на одно из чисел p_i, $i = 1, \ldots, m$. Положим $A_i \doteq \{j | \, j \in S, j \vdots p_i\}$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда $\varphi(n) = \left| \bigcap\limits_{i=1}^{m} \overline{A}_i \right|$.

Заметим, что $A_i = \{1 \cdot p_i, 2 \cdot p_i, \ldots, (n/p_i) \cdot p_i\}$, откуда получаем, что $|A_i| = \dfrac{n}{p_i}$. Множество $A_{i_1} \cap A_{i_2}$ состоит из чисел, кратных $p_{i_1} p_{i_2}$, т.е. $A_{i_1} \cap A_{i_2} = \{1 \cdot p_{i_1} p_{i_2}, 2 \cdot p_{i_1} p_{i_2}, \ldots, (n/p_{i_1} p_{i_2}) \cdot p_{i_1} p_{i_2}\}$, следовательно $|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \dfrac{n}{p_{i_1} p_{i_2}}$. Для $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ имеем равенство $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \dfrac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}}$.

По формуле (5.8) имеем, что

$$\varphi(n) = n - \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant m} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} - \ldots +$$
$$+ (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} \frac{n}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}} + \ldots + (-1)^m \frac{n}{p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_m} =$$
$$= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

Рассмотрим конкретный пример. Пусть $n = 12 = 2^2 \cdot 3$. Непосредственно вычисляется $\varphi(12) = |\{1, 5, 7, 11\}| = 4$.

В наших обозначениях получаем следующие равенства:

$$\begin{array}{rcl c l} A_1 & = & \{1 \leqslant j \leqslant 12 | j\vdots 2\} & = & \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, \\ A_2 & = & \{1 \leqslant j \leqslant 12 | j\vdots 3\} & = & \{3, 6, 9, 12\}, \\ A_1 \cap A_2 & = & \{1 \leqslant j \leqslant 12 | j\vdots (2 \cdot 3)\} & = & \{6, 12\}. \end{array}$$

Тогда $|A_1| = \dfrac{12}{2} = 6$, $|A_2| = \dfrac{12}{3} = 4$, $|A_1 \cap A_2| = \dfrac{12}{6} = 2$. Откуда получаем, что $\varphi(12) = |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = 12 - 6 - 4 + 2 = 4$.

□

Частный случай формулы включений-исключений.

Утверждение 5.4. Пусть A_1, $A_2, \ldots, A_n$ — подмножества множества S, для которых выполнены равенства $|A_i| = N_1$, для всех $i = 1, \ldots, n$, $|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = N_2$ для всех $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n$, $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = N_3$ для всех $1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n$, и т.д. $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}| = N_m$ для всех $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$, где $m \in [1, \ldots, n]$. То есть, количество элементов в пересечении нескольких подмножеств не зависит от самих подмножеств, а только от их количества. Тогда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = nN_1 - C_n^2 N_2 + C_n^3 N_3 - \ldots + (-1)^{n+1} N_n = \\ = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} C_n^i N_i. \qquad (5.9)$$

Доказательство. Так как количество слагаемых в сумме $\sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_m}|$ равно количеству способов выбрать m подмножеств из n, т.е. C_n^m, то имеем равенства

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_m}| = C_n^m N_m, \quad m = 1, \ldots, n.$$

Подставим их в равенство (5.5) и получим (5.9). □

Следствие 5.2.

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right| = |S| - nN_1 + C_n^2N_2 - C_n^3N_3 + \ldots + (-1)^nN_n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^iN_i, \qquad (5.10)$$

где $N_0 = |S|$.

Доказательство. Формула (5.10) следует из равенства (5.8). □

Задача о беспорядках.

В популярной литературе по теории вероятностей часто встречаются две задачи:

Задача о рассеянной секретарше. Секретарше нужно отправить n различных писем по n различным адресам. Она подписывает конверты и случайным образом вкладывает письма в конверты. Какова вероятность того, что ни одно письмо не дойдет да своего адресата?

Задача Леонарда Эйлера. Войдя в ресторан, n гостей оставили швейцару свои шляпы, а на выходе получили их обратно. Швейцар раздал шляпы случайным образом. Какова вероятность того, что каждый гость получит чужую шляпу?

Мы решим эти задачи в общем виде.

Напомним, что *перестановкой* называется биекция $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. *Беспорядок* — перестановка без неподвижных точек, т.е. $\pi(x) \neq x$ для всех $x = 1, \ldots, n$. Через D_n, обозначим число всех беспорядков из n элементов.

Утверждение 5.5. Число всех беспорядков из n элементов равно $D_n = \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{n!}{n!} = n! \cdot \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Доказательство. Пусть S — множество всех перестановк. Введем множества $A_i \doteq \{\pi \in S| \quad \pi(i) = i\}$. Нам нужно найти $D_n = \left|\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right|$.

Каждое множество A_i содержит $(n-1)!$ перестановку, так как все числа, за исключением i, мы можем переставить произвольным образом.

Для любых $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n$ множество $A_{i_1} \cap A_{i_2}$ содержит $(n-2)!$ перестановок, так как все числа, кроме i_1 и i_2, мы можем переставить произвольным образом.

Аналогично получаем, что для любых $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$, $m = 1, \ldots, n$ множество $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_m}|$ содержит ровно $(n-m)!$ перестановок.

По формуле (5.10) имеем, что

$$D_n = n! - n \cdot (n-1)! + C_n^2(n-2)! - C_n^3(n-3)! + \ldots =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i (n-i)! = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!}(n-i)! =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{n!}{k!} = \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}.$$

□

Число сюръекций. Числа Стирлинга II рода.

Обозначим количество способов разложить k различных шаров по n различным ящикам так, чтобы ни один из ящиков не оказался пустым через $D(n, k)$. Заметим, что это возможно только при $k \geqslant n$.

Утверждение 5.6. Число сюръекций из k-элементного множества в n-элементное равно $D(k, n)$.

Доказательство. Существует биекция между множеством сюръекций $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$ и раскладками

k различных шаров по n различным ящикам так, чтобы ни один из ящиков не оказался пустым. А именно: каждой сюръекции f поставим в соответствие раскладку шаров таким образом, что шар с номером i попадает в ящик с номером $f(i)$. То, что f является сюръекцией, гарантирует, что ни один ящик не окажется пустым. □

Утверждение 5.7. $D(k,n) = \sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i (n-i)^k$.

Доказательство. Пусть S — множество всех раскладок n различных шаров по k различным ящикам. Имеет место равенство $|S| = \overline{A}_n^k = n^k$.

Введем множества A_i — множество раскладок k различных шаров по n различным ящикам таких, что ящик с номером i оказался пустым. Нам нужно найти $D(k,n) = \left|\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right|$.

Каждое множество A_i содержит $(n-1)^k$ раскладок, так как мы можем раскладывать шары произвольным образом во все ящики, кроме i-го.

Для любых $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant k$ множество $A_{i_1} \cap A_{i_2}$ содержит $(n-2)^k$ раскладок, так мы можем раскладывать шары произвольным образом во все ящики, кроме i_1-го и i_2-го.

Вообще, для любых $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$, $m = 1, \ldots, n$ множество $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_m}|$ содержит $(n-m)^k$ раскладок.

По формуле (5.10) имеем, что

$$D(k,n) = n^k - n \cdot (n-1)^k + C_n^2 \cdot (n-2)^k - C_n^3 \cdot (n-3)^k + \ldots =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i (n-i)^k.$$

□

Определение 5.1. *Числом Стирлинга II рода* $S(n,k)$, $n \geqslant k$ *называют число неупорядоченных разбиений* n*-элементного множества на* k *непустых подмножеств.*

Утверждение 5.8. $S(n,k) = \dfrac{D(n,k)}{k!}$.

Доказательство. Представим раскладку n различных шаров по k различным ящикам так, чтобы ни один из ящиков не оказался пустым как цепочку из двух действий: 1) разбиение n-элементного множества на k непустых подмножеств; 2) присваивание каждому из этих множеств номера от 1 до k. Тогда по правилу произведения $D(n,k) = S(n,k) \cdot k!$. □

Задача о счастливых билетах.

Сколько существует счастливых билетов, номера которых состоят из шести цифр, и счастливыми считаются те, у которых сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр?

Ответ: 55 252.

Решение. Пусть $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ — номер счастливого билета, т.е. $a_1+a_2+a_3 = a_4+a_5+a_6$. Дополним последние три цифры до 9, т.е. проведем замену: $x_i = a_i$, $i = 1,2,3$, $x_i = 9-a_i$, $i = 4,5,6$. Тогда $x_1+\ldots+x_6 = a_1+a_2+a_3+(9-a_4)+(9-a_5)+(9-a_6) = 27$. Мы построили биекцию между номерами счастливых билетов и шестизначными номерами с суммой цифр 27.

Нам нужно найти количество решений в целых неотрицательных числах уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 27. \tag{5.11}$$

с условиями $x_i \leqslant 9$, $i = 1,\ldots,6$.

Пусть S — множество всех решений в целых неотрицательных числах уравнения (5.11). Это задача Муавра. Число решений этого уравнения совпадает с количеством способов разложить 27 одинаковых шаров по 6 различным ящикам. Для этого нам нужно поставить 5 перегородок между шарами. Количество способов это сделать равно C_{32}^5.

Введем множества A_i — множество решений в целых неотрицательных числах уравнения (5.11) таких, что $x_i \geqslant 10$. Нам нужно найти $\left|\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right|$.

Рассмотрим A_i Нам нужно найти количество решений в целых неотрицательных числах уравнения $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 27$, при условии $x_i \geqslant 10$. Сделаем замену $x_j = y_j$, $j \neq i$ и $x_i = 10+y_i$. Мы построили биекцию между решениями в целых неотрицательных числах уравнения $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 27$, при условии $x_i \geqslant 10$, и решениями в целых неотрицательных числах уравнения $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 17$. На языке раскладок 27 одинаковых шаров по 6 ящикам мы сделали следующее: так как нам нужно, чтобы в i-м ящике оказалось не менее 10 шаров, поэтому, мы положили 10 шаров в i-й ящик, а оставшиеся 17 разложили произвольным образом. Это эквивалентно расстановке 5 перегородок между 17 шарами. Способов это сделать — C_{22}^5.

Рассмотрим $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 6$. Множества $A_{i_1} \cap A_{i_2}$ содержат решения в целых неотрицательных числах уравнения (5.11) при условиях $x_{i_1}, x_{i_2} \geqslant 10$. Рассуждая аналогично предыдущему пункту, получаем, что задача сводится к раскладке 7 одинаковых шаров по 6 ящикам, таким образом, $|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = C_{12}^5$.

Для $k \geqslant 3$, $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}| = 0$, так как шаров меньше 30, и не найдется способов разложить их так, чтобы более, чем в двух ящиках оказалось не менее 10 шаров.

По формуле (5.10) имеем, что

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right| = C_{32}^5 - C_6^1 C_{22}^5 + C_6^2 C_{12}^5 =$$

$$= 201\,376 - 6 \cdot 26\,334 + 15 \cdot 792 = 55\,252.$$

□

Задача 5.1. Сколько существует четырёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

Ответ: 8 375.

Задача 5.2. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы две одинаковых цифры?

Ответ: 763 720.

Задача 5.3. Найдите количество 10-значных чисел, сумма цифр которых не превосходит 87.

Ответ: 8 999 999 944.

Задача 5.4. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если данные двое человек из этих 17 не могут быть выбраны вместе?

Ответ: 3 185.

Задача 5.5. В саду у Маши и Вити росло 200 розовых кустов. Маша полила половину всех кустов, и Витя полил половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста, самые красивые, были политы и Машей, и Витей. Сколько розовых кустов остались неполитыми?

Ответ: 3.

Задача 5.6. Из 100 кубиков 80 имеют красную грань, 85 имеют синюю грань и 75 имеют зеленую грань. Каково наименьшее возможное число кубиков, имеющих грани всех трех цветов?

Ответ: 40.

Задача 5.7. Из 100 человек 85 знают английский язык, 70 знают испанский, 75 знают немецкий. Сколько человек заведомо знают все три языка?

Ответ: 30.

Задача 5.8. На дискотеке 30% времени был выключен свет, 90% времени играла музыка и 50% времени шел дождь. Какую наименьшую долю времени все это обязано было происходить одновременно?

Ответ: 0.

Задача 5.9. Сколько существует способов разместить цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы первая цифра была больше единицы, а последняя — меньше семи?

Ответ: 2 056 320.

Задача 5.10. Из 100 опрошенных студентов 50 изучают химию, 53 — математику, 42 — физику, 15 — химию и физику, 20 занимаются физикой и математикой, 25 — математикой и химией и 5 студентов изучают все три предмета. а) Сколько студентов изучают хотя бы один из трех перечисленных предметов? б) Сколько студентов не изучают ни один из трех перечисленных предметов? в) Сколько студентов изучают только математику? г) Сколько студентов изучают физику или химию, но не изучают математику? д) Сколько студентов не изучают ни математику, ни химию?

Ответ: а) 90; б) 10; в) 13; г) 37; д) 25.

Задача 5.11. Сколько различных элементов в объединении четырех множеств, имеющих по 13 элементов, если каждая пара множеств имеет по 8 общих элементов, каждая тройка множеств имеет по 5 общих элементов и 3 элемента принадлежат всем четырем множествам.

Ответ: 21.

Задача 5.12. а) Сколько есть чисел, не превосходящих 10 000 и не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 7? б) Сколько есть четырёхзначных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 7? в) Сколько есть чисел, не превосходящих 10 000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10 и 15?

Указание. Сначала докажите, что количество натуральных чисел, делящихся на n и не превосходящих положительного числа x, равно $[x/n]$.

Ответ: 4 571; 4 115; 7 334.

Задача 5.13. Сколько неотрицательных целых чисел, меньших 100 000, содержат каждую из цифр 3, 6 и 9?

Ответ: 4 350.

Задача 5.14. Сколько существует положительных целых чисел, содержащих не более пяти цифр, в которых а) первой цифрой является 3? б) последней цифрой является 5? в) первой цифрой является 3 или последней цифрой является 5? г) ни первая цифра не равна 3, ни последняя цифра не равна 5?

Ответ: а) 11 111; б) 10 000; в) 20 000; г) 79 999.

Задача 5.15. На столе рубашкой вверх была разложена колода из 36 игральных карт. Лёша перевернул 30 карт, затем Макс перевернул 19 карт, а после этого Боря — 21 карту. В результате вся колода оказалась рубашкой вниз. Сколько карт было перевёрнуто трижды?

Ответ: 17.

Задача 5.16. Сколькими способами можно поставить 8 одинаковых ладей на шахматную доску так, чтобы они били все поля? Считается, что ладья бьет клетку, на которой стоит.

Ответ: $2 \cdot 8^8 - 8!$.

Задача 5.17. Уходя на работу, мама поручила Мише, Пете и Васе: а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество; д) вынести мусор; е) пропылесосить ковёр в гостиной. Сколькими различными способами они могут распределить задания так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят и при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

Ответ: $3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3$.

Задача 5.18. Сколько существует слов длины 50 из букв К, О, М, Б, в которых встречается каждая из этих букв?

Ответ: $4^{50} - 4 \cdot 3^{50} + 6 \cdot 2^{50} - 4$.

Задача 5.19. Сколько решений у уравнения $x_1+x_2+x_3+x_4 = 10$ в целых неотрицательных числах при условии, что: а) $x_1 \leqslant 3$; б) $x_1 \leqslant 3$, $x_2 \leqslant 3$; в) $x_1 \leqslant 3$, $x_2 \leqslant 3$, $x_3 \leqslant 3$; г) $x_1 \leqslant 3$, $x_2 \leqslant 3$, $x_3 \leqslant 3$, $x_4 \leqslant 3$?

Ответ: а) 202; б) 128; в) 64; г) 10.

Дополнительные задачи.

Задача 5.20. В группе каждый студент знает хотя бы один из четырех языков. Каждый из 4 языков знают 15 человек; каждые 2 языка — 6; каждые 3 языка — двое; все языки — один. Сколько человек в группе?

Задача 5.21. В группе A_1 студентов имеет не менее одной двойки, A_2 — не менее двух двоек, A_3 — не менее трех двоек и т.д. Как, зная числа A_1, $A_2, \ldots$, определить общее число двоек в группе?

Задача 5.22. а) Сколько целых чисел от 0 до 999 не делятся ни на 5, ни на 7? б) Сколько чисел от 0 до 999 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Ответ: а) 686; б) 228.

Задача 5.23. Сколько существует 6-значных номеров (первые цифры могут быть и нулями) с суммой цифр 27?

Ответ: 55 252.

Задача 5.24. В кошельке лежит по 20 монет достоинством в 1, 2 и 5 рублей. Сколькими способами можно из этих 60 монет выбрать k монет, где: а) $k = 18$; б) $k = 25$; в) $k = 45$? Монеты одного достоинтсва неразличимы.

Ответ: а) C_{20}^2; б) $C_{27}^2 - 3C_7^2$; в) $C_{47}^2 - 3C_{27}^2 + 3C_7^2$.

Задача 5.25. Сколько существует счастливых билетов, номера которых состоят из пяти цифр, и счастливыми считаются те, у которых сумма первых трех цифр на 5 больше суммы последних двух цифр?

Ответ: $C_{27}^4 - 5C_{17}^4 + 10C_7^4$.

Задача 5.26. Пин-код телефона состоит из 4 цифр (и может начинаться с нуля, например, 0951). Петя называет «счастливыми» такие пин-коды, у которых сумма крайних цифр равна сумме средних, например 1357: $1 + 7 = 3 + 5$. Сколько существует всего «счастливых» пин-кодов?

Ответ: $C_{21}^3 - 4C_{11}^3$.

Задача 5.27. Найдите количество перестановок символов алфавита {А,Б,В,Г,…,Я}, содержащих по крайней мере одну из последовательностей АБВГД, КЛМНО, ЪЫЬЭЮЯ.

Ответ: $33! - 2 \cdot 29! - 28! + 2 \cdot 24! + 25! - 20!$.

Задача 5.28. Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневый переплеты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

Ответ: $D(12, 3) = 3^{12} - 3 \cdot 2^{12} + 3$.

Задача 5.29. Сколькими способами можно разложить 12 различных шаров по 5 одинаковым ящикам так, чтобы ни один из ящиков не оказался пустым?

Ответ: $S(12, 5) = (5^{12} - 5 \cdot 4^{12} + 10 \cdot 3^{12} - 10 \cdot 2^{12} + 5)/5!$.

Задача 5.30. Имеется 40 одинаковых конфет и 10 различных шоколадок. Сколько способов разделить эти сладости между 5 детьми так, чтобы каждый получил не менее 5 конфет и по крайней мере 1 шоколадку?

Ответ: $C_{19}^4 D(10, 5) = C_{19}^4(5^{10} - 5 \cdot 4^{10} + 10 \cdot 3^{10} - 10 \cdot 2^{10} + 5)$.

Задача 5.31. При изготовлении колечки трех сортов: шоколадные, с корицей и с орехами — упаковываются в стандартные коробки по 18 колечек в каждой. Каждая коробка может содержать колечки всех видов. Порядок колечек в коробке не существенен. а) Сколько можно составить различных наборов колечек в коробке? б) Сколько можно составить различных наборов колечек при условии, что в коробке шоколадных колечек не более 9, колечек с корицей не более 3, а ореховых не более 9? в) Сколько можно составить различных наборов колечек при условии, что в коробке шоколадных колечек не менее 3 и не более 9, колечек с корицей не менее 3 и не более 9, а ореховых не менее 2 и не более 4?

Задача 5.32. Четыре супружеские пары занимаю места, за вращающимся круглым столом (8 мест). Сколько способов разместить их, чтобы никакая пара не сидела на диаметрально противоположных местах?

Задача 5.33. Нужно разгрузить 11 составов с зерном на три склада. На первый склад может поместиться 6 составов. На второй — 5 составов. На третий — 4 состава. Сколькими способами можно разгрузить составы? (Порядок разгрузки составов во внимание не принимать.)

Задача 5.34. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру нужно правильно набрать пятизначный номер. Каково наименьшее количество номеров нужно перебрать, чтобы наверняка открыть камеру? (Числа 23 и 37 можно увидеть и в числе 237.)

Задача 5.35. Сколько перестановок 10 цифр либо начинаются с трех цифр 012, либо содержат последовательность цифр 23 на третьем и четвертом местах, либо оканчиваются комбинацией цифр 730?

Задача 5.36. Сколькими способами можно расставить 7 человек в очередь так, чтобы либо АБВ стояли на первых трех местах, либо БВГ стояли на втором-четвертом месте, либо ЕЖ стояли на последнем?

Задача 5.37. На 8 карточках написаны буквы У, К, О, Р, И, З, Н, А. Сколькими способами можно выбрать 5 из них так, чтобы в наборе оказалось не меньше 2 согласных и не больше 2 гласных?

Задача 5.38. На каждой стороне треугольника ABC отмечено по n точек, разбивающих её на $n+1$ равных частей. Рассмотрим всевозможные треугольники с вершинами в отмеченных точках (по одной на каждой стороне). Сколько среди этих треугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна стороне треугольника ABC?

Задача 5.39. Дан выпуклый n-угольник ($n \geqslant 5$). Сколькими способами можно выбрать в нём две не имеющие общих точек диагонали?

Задача 5.40. В стране пять городов: А, Б, В, Г и Д. Их хотят связать четырьмя авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (возможно, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?

Глава 6

Перестановки

Напомним определение перестановки.

Определение 6.1. *Перестановкой* конечного множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ называется взаимно однозначное отображение этого множества на себя (т. е. биекция). Перестановка множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, переводящая a_k в $\pi(a_k)$, записывается в виде

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \pi(a_1) & \pi(a_2) & \ldots & \pi(a_n) \end{pmatrix}.$$

Обычно $a_k = k$, $k = 1, \ldots, n$.

Композицией перестановок π_1 и π_2 называется перестановка $\pi_1 \circ \pi_2$, определённая формулой $(\pi_1 \circ \pi_2)(x) \doteq \pi_1(\pi_2(x))$. В дальнейшем мы будем называть $\pi_1 \circ \pi_2$ *произведением* перестановок π_1 и π_2 и обозначать просто $\pi_1\pi_2$.

Перестановкой, *обратной* к π, называется перестановка π^{-1}, такая, что $(\pi \circ \pi^{-1})(x) = (\pi^{-1} \circ \pi)(x) = x$, для всех x.

Нетрудно показать, что перестановкой, обратной к π, является перестановка π^{-1}, записывающаяся в виде

$$\begin{pmatrix} \pi(a_1) & \pi(a_2) & \ldots & \pi(a_n) \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Замечание. В дальнейшем будем отождествлять элемент a_i с его номером i и говорить о перестановках множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Определение 6.2. *Циклом* (длины k) называется перестановка вида

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_{k-1} & i_k \\ i_2 & i_3 & \ldots & i_k & i_1 \end{pmatrix}.$$

Эта перестановка коротко обозначается через $(i_1 i_2 \ldots i_k)$. Циклы, перемещающие разные элементы, называются *независимыми*.

Циклы вида (i, j), переставляющие только два элемента, называются *транспозициями*.

Произведение независимых циклов не зависит от порядка их следования.

Утверждение 6.1. Любая перестановка единственным образом (с точностью до порядка сомножителей) разлагается в произведение нескольких независимых циклов.

Пример 6.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1625) \circ (37).$$

Замечание. В дальнейшем будем опускать знак $\circ$ и писать $(1625)(37)$ вместо $(1625) \circ (37)$.

Утверждение 6.2. Произвольный цикл можно разложить в произведение транспозиций (не обязательно независимых).

Доказательство. Рассмотрим цикл $(i_1 \ldots i_n)$:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_{n-3} & i_{n-2} & i_{n-1} & i_n \\ i_2 & i_3 & \ldots & i_{n-2} & i_{n-1} & i_n & i_1 \end{pmatrix}.$$

Это пребразование можно выполнить при помощи цепочки действий, переставляя по два элемента:

$$(i_{n-1}i_n) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccccc} i_1 & i_2 & \ldots & i_{n-3} & i_{n-2} & i_{n-1} & i_n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_{n-3} & i_{n-2} & i_n & i_{n-1} \end{array}\right)$$

$$(i_{n-2}i_{n-1})(i_{n-1}i_n) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccccc} i_1 & i_2 & \ldots & i_{n-3} & i_{n-2} & i_{n-1} & i_n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_{n-3} & i_{n-1} & i_n & i_{n-2} \end{array}\right) = (i_{n-2}i_{n-1}i_n)$$

$$(i_{n-3}i_{n-2})(i_{n-2}i_{n-1})(i_{n-1}i_n) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccccc} i_1 & i_2 & \ldots & i_{n-3} & i_{n-2} & i_{n-1} & i_n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_{n-2} & i_{n-1} & i_n & i_{n-3} \end{array}\right) = (i_{n-3}i_{n-2}i_{n-1}i_n)$$

и т.д.

Докажем по индукции, что

$$(i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n) = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{n-1} i_n).$$

База. $n = 3$. Рассмотрим цикл длины 3: $(i_1 i_2 i_3)$, тогда $(i_1 i_2 i_3) = \pi_1 \pi_2$, где $\pi_1 = (i_1 i_2)$, $\pi_2 = (i_2 i_3)$. Действительно, рассмотрим $\pi = \pi_1 \pi_2$. Тогда $\pi(i_1) = \pi_1(\pi_2(i_1)) = \pi_1(i_1) = i_2$, $\pi(i_2) = \pi_1(\pi_2(i_2)) = \pi_1(i_3) = i_3$, $\pi(i_3) = \pi_1(\pi_2(i_3)) = \pi_1(i_2) = i_1$, то есть, $\pi = (i_1 i_2 i_3)$.

Пусть мы доказали утверждение для $n = k : (i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k) = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{k-1} i_k)$. Рассмотрим цикл длины $n = k + 1$. Тогда

$$(i_1 i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{k-1} i_k)(i_k i_{k+1}) = \big((i_1 i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{k-1} i_k)\big)(i_k i_{k+1}) = \\ = (i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k)(i_k i_{k+1}).$$

Пусть $\pi_1 = (i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k)$, $\pi_2 = (i_k i_{k+1})$. Тогда для $l = 1, \ldots, k-1$ имеем равенства:

$$(\pi_1 \pi_2)(i_l) = \pi_1(\pi_2(i_l)) = \pi_1(i_l) = i_{l+1}.$$

Далее,

$$(\pi_1\pi_2)(i_k) = \pi_1(\pi_2(i_k)) = \pi_1(i_{k+1}) = i_{k+1},$$
$$(\pi_1\pi_2)(i_{k+1}) = \pi_1(\pi_2(i_{k+1})) = \pi_1(i_k) = i_1,$$

Следовательно,

$$\pi_1\pi_2 = (i_1 i_2 \dots i_{k1} i_{k+1}),$$

откуда получаем, что

$$(i_1 i_2 \dots i_{k1} i_{k+1}) = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \dots (i_{k-1} i_k)(i_k i_{k+1}).$$

□

Пример 6.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1625)(37) = (16)(62)(25)(37).$$

Определение 6.3. Транспозиции $(1, 2)$, $(2, 3), \dots, (n-1, n)$ называются *элементарными* транспозициями.

Утверждение 6.3. Произвольная транспозиция представляется в виде произведения элементарных транспозиций.

Доказательство. Рассмотрим транспозицию $(i_1 i_2)$, $i_1 < i_2$. Ее можно представить как два циклических сдвига. Сначала весь отрезок $[i_1, i_1+1, \dots, i_2-1, i_2]$ циклически сдвигаем на 1 влево:

$$(i_1, i_1+1, \dots, i_2-1, i_2) =$$
$$= \begin{pmatrix} \dots & i_1 & i_1+1 & i_1+2 & \dots & i_2-2 & i_2-1 & i_2 & \dots \\ \dots & i_1+1 & i_1+2 & i_1+3 & \dots & i_2-1 & i_2 & i_1 & \dots \end{pmatrix},$$

а затем отрезок $[i_1+1, i_1+2, \dots, i_2-1, i_2]$ циклически сдвигаем на 1 вправо:

$$(i_2, i_2-1, \dots i_1+1) =$$
$$= \begin{pmatrix} \dots & i_1 & i_1+1 & i_1+2 & \dots & i_2-2 & i_2-1 & i_2 & \dots \\ \dots & i_1 & i_2 & i_1+1 & \dots & i_2-3 & i_2-2 & i_2-1 & \dots \end{pmatrix},$$

Докажем это строго, т.е. покажем, что $(i_1 i_2) = \pi_1\pi_2$, где $\pi_1 = (i_2, i_2 - 1, \ldots i_1 + 1)$, $\pi_2 = (i_1, i_1 + 1, \ldots, i_2 - 1, i_2)$. Обозначим $\pi = \pi_1\pi_2$. Тогда

$$\begin{gathered}
(\pi_1\pi_2)(i_1) = \pi_1(\pi_2(i_1)) = \pi_1(i_1 + 1) = i_2,\\
(\pi_1\pi_2)(i_1 + 1) = \pi_1(\pi_2(i_1 + 1)) = \pi_1(i_1 + 2) = i_1 + 1,\\
(\pi_1\pi_2)(i_1 + k) = \pi_1(\pi_2(i_1 + k)) = \pi_1(i_1 + k + 1) = i_1 + k,\\
k = 1, \ldots, i_2 - i_1 - 1,\\
(\pi_1\pi_2)(i_2) = \pi_1(\pi_2(i_2)) = \pi_1(i_1) = i_1
\end{gathered}$$

Следовательно,

$$(i_1 i_2) = (i_2, i_2 - 1, \ldots i_1 + 1)(i_1, i_1 + 1, \ldots, i_2 - 1, i_2),$$

откуда получаем, что

$$\begin{gathered}
(i_1 i_2) = (i_2, i_2 - 1)(i_2 - 1, i_2 - 2)\ldots(i_1 + 2, i_1 + 1)\circ\\
\circ(i_1, i_1 + 1)(i_1 + 1, i_1 + 2)\ldots(i_2 - 1, i_2).
\end{gathered}$$

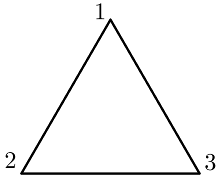
□

Определение 6.4. Порядком перестановки π называется наименьшее $k > 0$, для которого π^k является тождественной, т.е. $\pi^k(i) = i$ для любого i.

Перестановки и совмещения.

Одним из наиболее употребляемых примеров перестановок являются перестановки, которыми описываются самосовмещения геометрических фигур.

Пример 6.3. Группа симметрий правильного треугольника. Занумеруем вершины правильного треугольника числами 1, 2, 3:



Будем характеризовать каждое его самосовмещение перестановкой π на множестве вершин треугольника

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) \end{pmatrix},$$

где $\pi(k)$ — номер места, которое после выполнения преобразования π заняла вершина k, $k = 1, 2, 3$.

Повороты на 120° и 240° вокруг центра правильного треугольника являются преобразованиями, переводящими данный треугольник в себя. Обозначим π_1 перестановку, соотвествующую самосовмещению треугольника поворотом против часовой стрелки на 120°, π_2 — на 240°. Тогда

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 3); \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 3, 2).$$

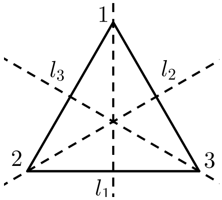
Имеется еще одно вращение, переводящее треугольник в себя — это поворот на 0°. Обозначим это преобразование через e, тогда

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составим таблицу умножения преобразований $\{e, \pi_1, \pi_2\}$, где каждая строка, а также каждый столбец соответствует некоторому вращению, переводящему треугольник в себя. На пересечении строки, соответствующей преобразованию g_1, и столбца, соответствующего преобразованию g_2, мы будем ставить преобразование, равное $g_1 g_2$:

	e	π_1	π_2
e	e	π_1	π_2
π_1	π_1	π_2	e
π_2	π_2	e	π_1

Кроме вращений, у равностороннего треугольника имеется еще 3 симметрии, а именно, отражения относительно осей l_1, l_2 и l_3 :



Эти преобразования мы обозначим соответственно π_3, π_4, π_5. Тогда

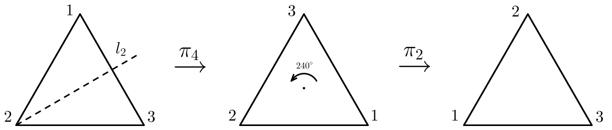
$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2,3); \quad \pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3);$$

$$\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2).$$

Составим таблицу умножения преобразований $\{e, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\}$.

Рассмотрим композицию поворота и осевой симметрии π_2 и π_4. Здесь важен порядок умножения перестановок.

Сначала найдем $\pi_2\pi_4$. **I способ.** Геометрический.



Результат — осевая симметрия относительно прямой l_3, которой соответствует перестановка π_5.

II способ. Перемножение перестановок. Имеем, что

$$\pi_2\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \pi_5.$$

В таблице умножения этот результат мы запишем на пересечении строки, соответствующей преобразованию π_2, и столбца, соответствующего преобразованию π_4.

	e	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
e	e	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
π_1	π_1	π_2	e			
π_2	π_2	e	π_1		$\boxed{\pi_5}$	
π_3	π_3					
π_4	π_4					
π_5	π_5					

Далее будем просто перемножать перестановки, но в качестве упражнения полезно сделать выкладки геометрически.

Найдем $\pi_4\pi_2$. Имеем, что

$$\pi_4\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \pi_3.$$

Это симметрия относительно прямой l_1.

В таблице умножения этот результат мы запишем на пересечении строки, соответствующей преобразованию π_2, и столбца, соответствующего преобразованию π_4.

	e	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
e	e	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
π_1	π_1	π_2	e			
π_2	π_2	e	π_1		π_5	
π_3	π_3					
π_4	π_4		$\boxed{\pi_3}$			
π_5	π_5					

Найдем композицию двух симметрий π_3 и π_5.

$$\pi_5\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \pi_1.$$

Это поворот против часовой стрелки на 120°.

$$\pi_3\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \pi_2.$$

Результат произведения $\pi_3\pi_5$ — поворот против часовой стрелки на 240°.

Результаты поставим в таблицу умножения:

	e	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
e	e	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
π_1	π_1	π_2	e			
π_2	π_2	e	π_1		π_5	
π_3	π_3					$\boxed{\pi_2}$
π_4	π_4		π_3			
π_5	π_5			$\boxed{\pi_1}$		

Заполним таблицу до конца:

	e	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
e	e	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
π_1	π_1	π_2	e	π_5	π_3	π_4
π_2	π_2	e	π_1	π_4	π_5	π_3
π_3	π_3	π_4	π_5	e	π_1	π_2
π_4	π_4	π_5	π_3	π_2	e	π_1
π_5	π_5	π_3	π_4	π_1	π_2	e

□

Задача 6.1. Шестнадцать спортсменов построились в шеренгу. Каждую минуту тренер перестраивает их по правилу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 9 & 6 & 7 & 11 & 1 & 16 & 2 & 15 & 5 & 8 & 13 & 14 & 3 & 10 & 12 & 4 \end{pmatrix},$$

т.е. спортсмен, стоявший на i-м месте, занимает $\pi(i)$ место. Через сколько минут все спортсмены впервые окажутся на своих первоначальных местах?

Ответ: 120.

Задача 6.2. Существуют ли перестановки 9-элементного множества порядков 2; 6; 7; 10; 12; 11? **Ответ:** Для 11 нет.

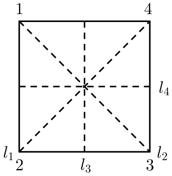
Задача 6.3. Чему равен порядок композиции непересекающихся циклов из $n_1, \ldots, n_k$ элементов, соответственно?

Ответ: НОК$(n_1, \ldots, n_k)$.

Задача 6.4. Найдите композиции перестановок на множестве цифр а) (12)(13); б) (12)(23); в) (23)(12); г) (123)(132); д) (12)(13)(12); е) (12345)(12); ж) (12345)(56789). Ответ дайте в виде композиции непересекающихся циклов. Например, (123)(234)=(12)(34).

Задача 6.5. Пусть e, π_1, π_2, и π_3 обозначают соответственно вращения квадрата на 0°, на 180°, на 90° и на 270° против часовой стрелки вокруг центра квадрата. Составьте таблицу умножения для вращений квадрата.

Задача 6.6. Пусть π_4, π_5, π_6, и π_7 обозначают соответственно отражения квадрата относительно осей l_1, l_2, l_3, и l_4. Составьте таблицу умножения преобразований $\{e, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7\}$.



Задача 6.7. Найдите все симметрии ромба, не являющегося квадратом, и составьте для них таблицу умножения.

Задача 6.8. Найдите все симметрии прямоугольника, не являющегося квадратом, и составьте для них таблицу умножения.

Задача 6.9. Найдите все симметрии тетраэдра и составьте для них таблицу умножения.

Задача 6.10. Найдите все симметрии куба и составьте для них таблицу умножения.

Глава 7

Числа Фибоначчи. Рекуррентные соотношения

Числа Фибоначчи

Определение 7.1. *Последовательность чисел Фибоначчи* — это последовательность $\{F_n\}$, которая определяется следующим образом:

$$F_0 \doteq 0, \quad F_1 \doteq 1, \quad F_i \doteq F_{i-1} + F_{i-2}, \quad i \geqslant 2.$$

Утверждение 7.1. На первой клетке полоски $1 \times n$ стоит фишка. За один ход ее можно передвинуть на одну или две клетки вправо. Количество различных способов сдвинуть фишку в клетку с номером n равно F_n.

Доказательство. Пусть количество спсобов попасть в клетку с номером i равно x_i. Непосредственной проверкой получаем, что $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Все способы сдвинуть фишку в клетку с номером i разбиваются на два семейства по последнему действию: фишку сдвинули либо на одну, либо на две клетки вправо. В первое семейство входят цепочки, при которых фишка сдвигается в клетку с номером $i-1$, а потом на одну клетку вправо, их всего x_{i-1}. Во второе — цепочки, при которых фишка сдвигается в клетку с номером $i-2$, а потом на две клетки, их всего x_{i-2}. Так как каждый способ сдвинуть фишку в клетку с номером i входит ровно в одно из этих двух семейств, мы получаем соотношение $x_i = x_{i-1}+x_{i-2}$.

По определению чисел Фибоначчи получаем, что $x_i \equiv F_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. □

Утверждение 7.2. Количество способов разрезать клетчатый прямоугольник $2 \times n$ на прямоугольники 1×2 равно F_{n+1}.

Утверждение 7.3. Количество двоичных строк длины n таких, что две «1» не стоят рядом, равно F_{n+2}.

Утверждение 7.4. Количество способов представить число n в виде суммы чисел 1 и 2 равно F_{n+1}. Способы, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.

Утверждение 7.5. Для всех $n \in \mathbb{N}$ выполненно равенство $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.

Доказательство. I способ. Индукция. Для $n = 1, 2, 3$ утверждение проверяется непосредственно.

Пусть утверждение верно при $n = k$. Рассмотрим $n = k + 1$. По предположению индукции и определению чисел Фибоначчи получаем цепочку равенств:

$$\begin{gathered}F_1 + F_2 + \ldots + F_k + F_{k+1} = (F_1 + F_2 + \ldots + F_k) + F_{k+1} = \\ = (F_{k+2} - 1) + F_{k+1} = F_{k+2} + F_{k+1} - 1 = F_{k+3} - 1,\end{gathered}$$

то есть, утверждение верно для $n = k + 1$.

II способ. Комбинаторные рассуждения. Пусть фишка стоит в первой клетке полоски $1\times n$. Рассмотрим количество различных способов сдвинуть фишку в клетку с номером n, если за один ход ее можно передвинуть на одну или две клетки вправо. По утверждению 7.1, это можно сделать F_n различными способами. Все способы разбиваются на семейства по номеру клетки, из которой фишку первый раз переместили сразу на две клетки и еще один способ, когда вообще не было перемещения сразу на две клетки.

Первый раз переместить фишку на две клетки возможно в каждой из $k = 1, \ldots, n-2$ клеток. Рассмотрим семейство, когда первое перемещение на две клетки было из k-ой клетки. До первого перемещения на две клетки, все перемещения были на одну клетку, поэтому фишка единственным образом попадает в клетку с номером $k+2$, и количество способов после этого попасть в клетку с номером n равно F_{n-k-1}. Так как каждый способ сдвинуть фишку в клетку с номером n может входить ровно в одно из этих семейств (учитывая единственный способ, когда не было перемещения сразу на две клетки), мы получаем соотношение

$$F_n - 1 = \sum_{k=1}^{n-2} F_{n-k-1} = F_{n-2} + F_{n-3} + \ldots + F_1.$$

□

Утверждение 7.6. Для всех $n \in \mathbb{N}$ выполненно равенство

$$F_{n+1} = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots = \sum_{k=1}^{[n/2]} C_{n-k}^k.$$

Доказательство. I способ. Треугольник Паскаля. Опишем геометрически это равенство:

$$\begin{array}{r|ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & \mathbf{6} & & 4 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & \mathbf{5} & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & & \mathbf{1} & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
F_7 = 13 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

F_{n+1} число Фибоначчи равно сумме чисел в восходящей диагонали треугольника Паскаля, начиная с n-ой строки. Для доказательства достаточно заметить, что сумма чисел в восходящей диагонали треугольника Паскаля равно сумме чисел в двух предыдущих восходящих диагоналях треугольника Паскаля. Это следует из свойств чисел сочетаний: $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_n^k$.

$$
\begin{array}{r|cccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & \boxed{1} & & & & \\
 & & & & & 1 & & \boxed{3} & & \boxed{3} & & \mathbf{1} & & & \\
 & & & & \boxed{1} & & \boxed{4} & & \mathbf{6} & & 4 & & 1 & & \\
F_5 = 5 & & & \boxed{1} & & \mathbf{5} & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
F_6 = 8 & & \mathbf{1} & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
F_7 = 13 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 &
\end{array}
$$

II способ. Комбинаторные рассуждения. Из утверждения 7.4 следует, что F_{n+1} — количество способов представить число n в виде суммы 1 и 2, если способы, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.

Все способы представить число n в виде суммы 1 и 2 разбиваются на семейства по количеству 2, входящих в сумму. Всего двоек может быть от 0 до $[n/2]$. Если в сумму входит ровно k двоек, то единиц будет $n - 2k$. Так как порядок слагаемых важен, то количество сумм, равных n, в которые входит k двоек, совпадает с количеством перестановок $n - 2k$ единиц и k двоек, т.е. равно $C_{(n-2k)+k}^k = C_{n-k}^k$.

Так как каждый способ представить число n в виде суммы 1 и 2 входит ровно в одно семейство, то имеем равенство

$$F_{n+1} = \sum_{k=1}^{[n/2]} C_{n-k}^k.$$

Проиллюстрируем на конкретном примере. Пусть $n = 5$. Тогда в сумму может входить 0, 1 или 2 двойки. Если двоек — 0, то количество сумм равно 1: $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Если двоек — 1, то количество сумм равно 4: $5 = 1+1+1+2$; $5 = 1+1+2+1$; $5 = 1+2+1+1$; $5 = 2+1+1+1$. Если двоек — 2, то количество сумм равно 3: $5 = 1 + 2 + 2$; $5 = 2 + 1 + 2$; $5 = 2 + 2 + 1$. Всего $1+4+3 = 8 = F_6$ способов. □

Утверждение 7.7. Для всех n, $m \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}.$$

Доказательство. Пусть фишка стоит в первой клетке полоски $1\times n+m$. Рассмотрим количество различных способов сдвинуть фишку в клетку с номером $n+m$, если за один ход ее можно передвинуть на одну или две клетки вправо. По утверждению 7.1 это можно сделать F_{n+m} различными способами. Все способы разбиваются на два семейства: фишка перепрыгнула клетку с номером n или побывала в ней.

В первом случае каждый способ можно описать при помощи цепочки из трех действий. Сначала мы попадаем в клетку с номером $n-1$, затем сдвигаем фишку на две клетки, и из клетки с номером $n+1$ перемещаем фишку в клетку с номером $n+m$. Эту цепочку действий мы можем выполнить $F_{n-1}\cdot 1\cdot F_{n+m-(n+1)+1} = F_{n-1}F_m$ способами.

Во втором случае каждый способ можно описать при помощи цепочки из двух действий. Сначала мы попадаем в клетку с номером n, затем из клетки с номером n перемещаем фишку в клетку с номером $n+m$. Эту цепочку действий мы можем выполнить $F_n \cdot F_{n+m-n+1} = F_nF_{m+1}$ способами.

Так как каждый способ сдвинуть фишку в клетку с номером n входит в одно из этих семейств, мы получаем соотношение $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$. □

Задача 7.1. Сколько существует строк длины 10, состоящих из нулей и единиц, таких, что никакие два нуля не стоят рядом?

Задача 7.2. Фермер купил овцу, которая тут же родила овечку. С тех пор каждый следующий год эта овца приносила по одной овечке. Каждая родившаяся овца через два года также начинает приносить по одной овечке в год. Допустим, что овцы бессмертны, а фермер их не продает и не режет. Сколько овец будет в его отаре через 20 лет после покупки?

Задача 7.3. Некоторый алфавит состоит из 6 букв, которые для передачи по телеграфу кодированы так: ·; –; ··; ·–; –·; – – . При передаче одного слова не сделали промежутков, отделяющих букву от буквы, так что получилась сплошная цепочка из точек и тире, содержащая 20 знаков. Сколькими способами можно прочитать переданное слово?

Задача 7.4. Докажите утверждение 7.2.

Задача 7.5. Докажите утверждение 7.3.

Задача 7.6. Докажите утверждение 7.4.

Задача 7.7. Докажите утверждение 7.5. по индукции.

Задача 7.8. Докажите утверждение 7.6. по индукции.

Задача 7.9. Докажите тождество $F_1 - F_2 + F_3 - \ldots + (-1)^{n+1}F_n = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1$.

Задача 7.10. Докажите тождество

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

Числа Стирлинга II-го рода.

Напомним, что *число Стирлинга второго рода* $S(n,k)$ — это число неупорядоченных разбиений n-элементного множества на k непустых подмножеств. Следуя Йовану Карамата, числа Стирлинга второго рода часто обозначают через $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$. При помощи формулы включений-исключений мы вывели, что

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i (k-i)^n. \tag{7.1}$$

Пример 7.1. $S(3,2) = 3$.

Решение. Можно вычислить по формуле (7.1):

$$S(3,2) = \frac{1}{2!}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i C_2^i (2-i)^3 = \frac{1}{2!}(2^3 - 2\cdot 1^3 + 1\cdot 0^3) = 3.$$

Можно проверить непосредственно. Существует три способа разбиения трехэлементного множества на две части: $\{1,2\}\{3\}$; $\{2,3\}\{1\}$; $\{1,3\}\{2\}$. Следовательно, $S(3,2) = 3$. □

Пример 7.2. $S(4,2) = 7$.

Решение. Можно вычислить по формуле (7.1):

$$S(4,2) = \frac{1}{2!}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i C_2^i (4-i)^3 = \frac{1}{2!}(2^4 - 2\cdot 1^4 + 1\cdot 0^4) = 7.$$

Можно проверить непосредственно. Существует семь способов разбиения четырехэлементного множества на две части:

$$\begin{array}{ll} \{1,2,3\}\{4\} & \{1,2\}\{3,4\} \\ \{1,2,4\}\{3\} & \{1,3\}\{2,4\} \\ \{1,3,4\}\{2\} & \{1,4\}\{2,3\} \\ \{2,3,4\}\{1\} & \end{array}$$

Следовательно, $S(4,2) = 7$. □

Утверждение 7.8. $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$.

Доказательство. I способ. Можно вычислить по формуле (7.1):

$$S(n,2) = \frac{1}{2!}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i C_2^i (2-i)^n = \frac{1}{2!}(2^n - 2\cdot 1^n + 1\cdot 0^n) = 2^{n-1} - 1.$$

II способ. Количество способов разложить n элементов в два ящика равно количеству строк длины n из «1» и «2». Нам нужны только строки, в которых есть обе цифры, их всего $2^n - 2$. Так как мы рассматриваем неупорядоченные разбиения n-элементного множества на 2 непустых подмножества, то окончательный результат: $S(n,2) = \dfrac{2^n - 2}{2!}$. □

Пользоваться формулой (7.1) не очень удобно при больших n и k. Выведем рекуррентное соотношение для $S(n,k)$.

Утверждение 7.9. $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$.

Доказательство. Множество $\mathcal{S}$ всех неупорядоченных разбиений n-элементного множества $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ на k непустых подмножеств разбивается на два семейства: $\mathcal{S}_1$ — разбиения, в которых элемент a_n входит в отдельное подмножество $\{a_n\}$, $\mathcal{S}_2$ — разбиения, в которых элемент a_n входит в подмножество, содержащие больше одного элемента.

Удалим элемент $\{a_n\}$. Тогда $\mathcal{S}_1$ можно описать, как множество разбиений оставшихся $n-1$ элемента на $k-1$ подмножество, их всего $S(n-1,k-1)$.

Опишем $\mathcal{S}_2$ как цепочку выполения двух операций: разбиение $(n-1)$-элементного множества на k непустых подмножеств и добавление элемента a_n к одному из полученных k подмножеств. Получим, что $|\mathcal{S}_2| = S(n-1,k)\cdot k$. □

Осталось задать начальные условия.

Как обычно, рассмотрим отдельно случай $n = k = 0$. Будем считать, что что существует только один способ разбиения пустого множества на нулевое число непустых частей, т.е. $S(0,0) = 1$.

Утверждение 7.10. $S(n,0)=0$, $n>0$.

Доказательство. Так как для разбиения непустого множества нужна по крайней мере одна часть, то $S(n,0)=0$ при $n>0$. □

Утверждение 7.11. $S(n,n)=1$, $n>0$.

Доказательство. Существует только один способ разбиения n элементов на n непустых подмножеств, следовательно $S(n,n)=1$ при любом $n>0$. □

Теперь мы можем построить треугольник Стирлинга для числа подмножеств. Номер строки соответствует числу элементов множества, номер столбца — количеству подмножеств. Сначала заполняем 0-ой столбец и числа по диагонали из условий $S(n,n)=1$ для всех n, $S(n,0)=0$, $n>0$.

В каждой следующей строчке мы берем число из предыдущей, стоящее сверху, умножаем его на номер столбца и прибавляем число, стоящее сверху-слева:

$$\begin{tikzcd}
1 \\
0 \arrow[dr] & 1 \arrow[d, "1"] \\
0 \arrow[dr] & 1 \arrow[d, "1"] \arrow[dr] & 1 \arrow[d, "2"] \\
0 \arrow[dr] & 1 \arrow[d, "1"] \arrow[dr] & 3 \arrow[d, "2"] \arrow[dr] & 1 \arrow[d, "3"] \\
0 \arrow[dr] & 1 \arrow[d, "1"] \arrow[dr] & 7 \arrow[d, "2"] \arrow[dr] & 6 \arrow[d, "3"] \arrow[dr] & 1 \arrow[d, "4"] \\
0 \arrow[dr] & 1 \arrow[d, "1"] \arrow[dr] & 15 \arrow[d, "2"] \arrow[dr] & 25 \arrow[d, "3"] \arrow[dr] & 10 \arrow[d, "4"] \arrow[dr] & 1 \arrow[d, "5"] \\
0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1
\end{tikzcd}$$

Получим треугольник Стирлинга для числа подмножеств:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Числа Стирлинга I-го рода.

Определение 7.2. *Числа Стирлинга первого рода* — это число количество перестановок порядка n с k циклами. Числа Стирлинга I рода обозначаются как $s(n,k)$ или $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Пример 7.3. $s(4,2)=11$.

Решение. Существует семь способов разбиения четырехэлементного множества на две части. Каждое разбиение на подмножества порождает перестановки с циклами, при этом каждое подмножество из 3 элементов порождает 2 способа расположить элементы в цикл.

$$\begin{matrix} (1)(234) & (1)(243) \\ (2)(134) & (2)(143) \\ (3)(124) & (3)(142) \\ (4)(123) & (4)(132) \\ (12)(34) & \\ (13)(24) & \\ (14)(23) & \end{matrix}$$

Получаем, что $s(4,2)=11$. □

Утверждение 7.12. $s(n,k)=s(n-1,k-1)+(n-1)s(n-1,k)$.

Доказательство. Множество $\mathcal{S}$ всех перестановок порядка n с k циклами разбивается на два семейства: $\mathcal{S}_1$ — перестановки, в которых элемент n составляет отдельный цикл (n), $\mathcal{S}_2$ — перестановки, в которых элемент n входит в цикл, содержащий больше одного элемента.

Удалим элемент n. Тогда $\mathcal{S}_1$ можно описать, как множество перестановок оставшихся $n-1$ с $k-1$ циклом, их всего $s(n-1,k-1)$.

Опишем $\mathcal{S}_2$ как цепочку выполения двух операций: разбиение перстановки $(n-1)$-элементного множества на k циклов и вставка элемента n в один из полученных k циклов. Вставить элемент n можно $n-1$ способом. Получим, что $|\mathcal{S}_2| = S(n-1,k)\cdot(n-1)$. □

Аналогично рассуждениям для чисел Стирлинга первого рода, получаем, что:

Утверждение 7.13. $s(0,0)=1$; $s(n,0)=0$, $n>0$; $s(n,n)=1$, для натуральных n.

Теперь мы можем построить треугольник Стирлинга для числа циклов. Номер строки соответствует числу элементов перестановки, номер столбца — количеству циклов. Сначала заполняем 0-ой столбец и числа по диагогнали из условий $S(n,n)=1$ для всех n, $S(n,0)=0$, $n>0$.

В каждой следующей строчке мы берем число из предыдущей, стоящее сверху, умножаем его на номер строки и прибавляем число, стоящее сверху-слева:

$$\begin{tikzcd}
1 & & & & & & \\
0 \arrow[dr] & 1 \arrow[d, "1"] & & & & & \\
0 \arrow[dr] & 1 \arrow[d, "2"] \arrow[dr] & 1 \arrow[d, "2"] & & & & \\
0 \arrow[dr] & 2 \arrow[d, "3"] \arrow[dr] & 3 \arrow[d, "3"] \arrow[dr] & 1 \arrow[d, "3"] & & & \\
0 \arrow[dr] & 6 \arrow[d, "4"] \arrow[dr] & 11 \arrow[d, "4"] \arrow[dr] & 6 \arrow[d, "4"] \arrow[dr] & 1 \arrow[d, "4"] & & \\
0 \arrow[dr] & 24 \arrow[d, "5"] \arrow[dr] & 50 \arrow[d, "5"] \arrow[dr] & 35 \arrow[d, "5"] \arrow[dr] & 10 \arrow[d, "5"] \arrow[dr] & 1 \arrow[d, "5"] & \\
0 & 120 & 274 & 225 & 85 & 15 & 1
\end{tikzcd}$$

Получим треугольник Стирлинга для числа подмножеств:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

Задача 7.11. Без рекуррентного соотношения получите равенство $S(n,1) = 1$, $n > 0$.

Задача 7.12. Без рекуррентного соотношения получите равенство $S(n, n-1) = C_n^2$, $n > 0$.

Задача 7.13. Без рекуррентного соотношения получите равенство $s(n,1) = (n-1)!$, $n > 0$.

Задача 7.14. Без рекуррентного соотношения получите равенство $s(n, n-1) = C_n^2$, $n > 0$.

Задача 7.15. Для числа беспорядков и числа встреч $D(n,k,)$ $D(n) = D(n,0)$, докажите рекуррентное соотношение $D(n) = D(n-1,1) + (n-1)D(n-1)$.

Задача 7.16. Сколькими способами из чисел $1, 2, 3, \ldots, 11$ можно выбрать несколько чисел так, чтобы среди выбранных не было трёх идущих подряд?

Задача 7.17. Мария Ивановна — строгая учительница по алгебре. Она ставит в журнал только двойки, тройки и четвёрки, причём никогда не ставит одному ученику две двойки подряд. Известно, что она поставила Вовочке 6 оценок за четверть. Сколькими различными способами она могла это сделать?

Задача 7.18. Первоклассница Маша, заходя в школу, каждый раз поднимается на школьное крыльцо по лестнице, имеющей 9 ступенек. Находясь внизу лестницы или на очередной её ступеньке, она может либо подняться на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вверх (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно зайти в школу, чтобы подняться на крыльцо всеми возможными способами? А если у Маши не хватает сил два раза подряд перепрыгнуть ступеньку?

Задача 7.19. Сколько имеется разбиений отрезка длины 8 на отрезки длины 1, 2 и 3? (Разбиения, отличающиеся порядком следования отрезков, считаются различными.)

Задача 7.20. Сколько слов длины 9 можно составить из букв a, b и c так, чтобы буквы a и b не стояли рядом?

Задача 7.21. Обозначим через a_n количество способов покрасить клетки прямоугольника $1 \times n$ так, чтобы не было закрашено трех подряд идущих клеток. Найдите a_7.

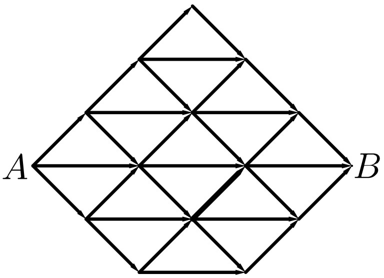
Задача 7.22. Сколько существует 2023-значных чисел, в записи которых используются только цифры 1, 2, 3, 4, 5 (не обязательно все цифры присутствуют) таких, что любые две соседние цифры в записи отличаются ровно на 1?

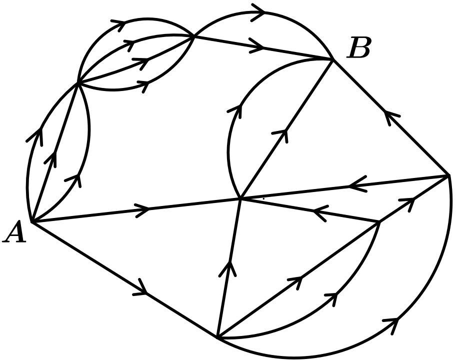
Задача 7.23. Выведите рекуррентную формулу для числа способов разрезать на прямоугольники 1×2 доску размером: а) $2 \times n$; б) $3 \times n$? Доску нельзя поворачивать и переворачивать.

Задача 7.24. а) Кузнечик прыгает по вершинам правильного треугольника ABC, прыгая каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами он может попасть из вершины A обратно в вершину A за 9 прыжков? б) Лягушка прыгает по вершинам правильного шестиугольника $ABCDEF$, прыгая каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из вершины A в вершину C за n прыжков? Выведите рекуррентную формулу. в) А если ей нельзя прыгать в вершину D?

Выведите рекуррентную формулу. г) Выведите общую формулу в б) и в).

Задача 7.25. Найдите количество способов пройти по дорогам с односторонним движением из города A в город B.





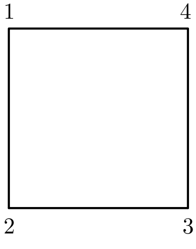
Глава 8

Лемма Бернсайда

Начнем с примера о количестве раскрасок вершин квадрата.

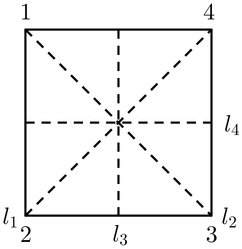
Пример 8.1. Сколько существует способов раскрасить вершины квадрата в 2 цвета, белый и черный? Раскраски, которые можно совместить поворотом или симметрией считаются одинаковыми.

Пронумеруем вершины квадрата.



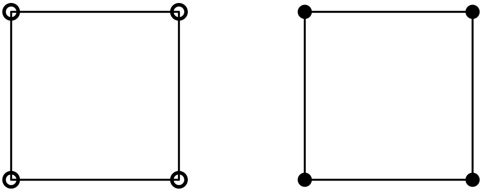
Раскрасить вершины квадрата — это присвоить каждой вершине номер краски, в кторый она окрашена. Пусть 1 — это черный, а 0 — белый цвет. Таким образом, раскраска вершин фиксированнного квадрата в два цвета — это двоичная строка длины 4. Их всего 16.

Группа самосовмещений квадрата G состоит из 8 элементов. Пусть e, g_1, g_2, и g_3 обозначают соответственно вращения квадрата на $0°$, на $180°$, на $90°$ и на $270°$ против часовой стрелки вокруг центра квадрата, а g_4, g_5, g_6, и g_7 обозначают соответственно отражения квадрата относительно осей l_1, l_2, l_3, и l_4.



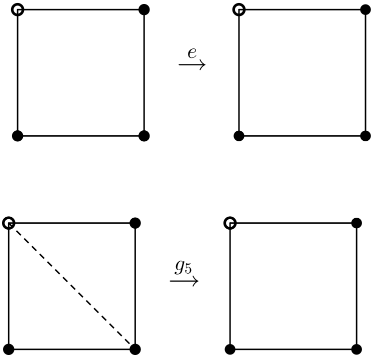
Разбереммся, какие раскраски будут эквивалентными, если разрешить квадрат поворачивать и переворачивать.

Имеются две раскраски в один цвет. Под действием любого элемента группы G они переходят сами в себя.



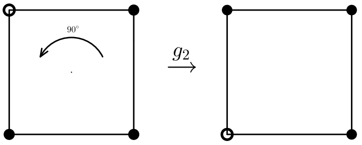
Это можно описать как действие элемента группы G на раскраску квадрата: $g_i : (0,0,0,0) \to (0,0,0,0)$, $g_i : (1,1,1,1) \to (1,1,1,1)$, $i = 1, \ldots, 7$.

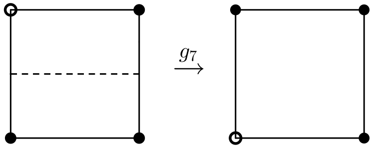
Имеется 4 раскраски, когда одна вершина — белая, а три — черные: $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,0,1)$, $(1,1,1,0)$. Заметим, что два элемента группы G оставляют раскраску $(1,0,0,0)$ на месте, это e и g_5. $e : (0,1,1,1) \to (0,1,1,1)$, $g_5 : (0,1,1,1) \to (0,1,1,1)$.



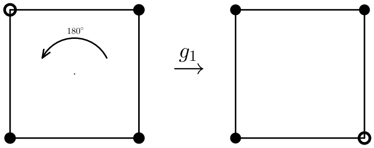
При этом раскраску $(0,1,1,1)$ в каждую из трех остальных раскрасок переводит также ровно по два элемента группы G.

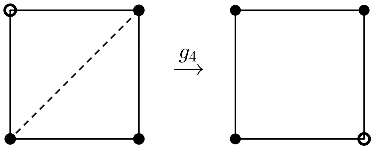
$g_2 : (0,1,1,1) \to (1,0,1,1)$, $g_7 : (0,1,1,1) \to (1,0,1,1)$.



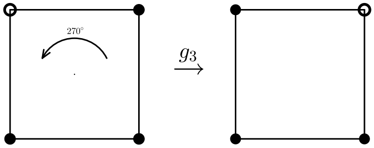


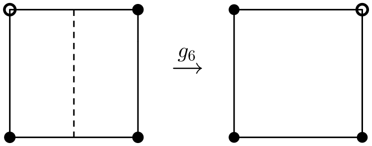
$g_1 : (0,1,1,1) \to (1,1,0,1)$, $g_4 : (0,1,1,1) \to (1,1,0,1)$.





$g_3 : (0,1,1,1) \to (1,1,1,0)$, $g_6 : (0,1,1,1) \to (1,1,1,0)$.





Аналогично рассматривается случай раскрасок, эквивалентных раскраске $(0,0,0,1)$.

Имеется 6 раскрасок фиксированного квадрата, когда две вершины белые, а две — черные.

Раскраски $(1,0,1,0)$ и $(0,1,0,1)$ эквивалентны с точки зрения самосовмещений квадрата. Ровно 4 элемента группы G оставляют раскраску $(1,0,1,0)$ на месте и ровно 4 элемента группы G переводят раскраску $(1,0,1,0)$ в раскраску $(0,1,0,1)$. e, g_1, g_4, $g_5 : (1,0,1,0) \to (1,0,1,0)$; g_2, g_3, g_6, $g_7 : (1,0,1,0) \to (0,1,0,1)$.

Раскраски $(1,1,0,0)$, $(0,1,1,0)$, $(0,0,1,1)$ и $(1,0,0,1)$ эквивалентны с точки зрения самосовмещений квадрата. Ровно 2 элемента группы G оставляют раскраску $(1,1,0,0)$ на месте, это e и g_7.

Раскраску $(1,1,0,0)$ в каждую из трех остальных эквивалентных раскрасок переводит также ровно по два элемента группы G.

$$\begin{aligned}
&g_2(1,1,0,0) \to (0,1,1,0), \quad g_4 : (1,1,0,0) \to (0,1,1,0);\\
&g_1(1,1,0,0) \to (0,0,1,1), \quad g_6 : (1,1,0,0) \to (0,0,1,1);\\
&g_3(1,1,0,0) \to (1,0,0,1), \quad g_5 : (1,1,0,0) \to (1,0,0,1).
\end{aligned}$$

Получаем, что существует всего 6 существенно различных раскрасок вершин квадрата в два цвета: $(0,0,0,0)$, $(1,1,1,1)$, $(0,1,1,1)$, $(0,0,0,1)$, $(1,0,1,0)$, $(1,1,0,0)$. Разбив все раскраски на классы эквивалентности, получим 6 классов, в которых по 1, 1, 4, 4, 2, 4 раскраски.

Заметим, что для каждого класса выполнено сотношение: количество раскрасок в классе, умноженное на количество элементов группы G, оставляющее раскраску на месте, всегда равно 8 — количеству элементов группы G. Другими словами, для каждой раскраски группа G разбивается на классы, по значениям на этой раскраске, и во всех этих классах столько элементов, сколько элементов оставляет эту раскраску на месте. Это и будет ключевое рассуждение при доказательстве леммы Бернсайда. □

Перейдем к общим формулировкам.

Определение 8.1. Пусть G — группа с нейтральным элементом e, X — множество. Будем говорить, что G *действует на* X, если задана операция $G \times X \to X$ (образ пары (g, x) обозначается обычно просто gx), обладающая для любого $x \in X$ и $g, h \in G$ следующими свойствами:

(1) $ex = x$;

(2) $g(hx) = (gh)x$.

Множество всех биективных функций $X \to X$ с операцией композиции называется *симметрической группой* на множестве X и обозначается через S_X.

Будем называть два элемента x и $y \in X$ *эквивалентными* $(x \sim y)$ если $x = gy$ для некоторого $g \in G$.

Утверждение 8.1. Отношение «$\sim$» задает отношение эквивалетности на X.

Доказательство. 1) Докажем рефлексивность. Так как $e \in G$, то $x = ex$, следовательно $x \sim x$.

2) Докажем симметричность. Пусть $x \sim y$. По определению найдется $g \in G$ такой, что $x = gy$. Так как G — группа, то $g^{-1} \in G$, откуда получаем, что $y = g^{-1}x$ и $y \sim x$.

3) Транзитивность. Пусть $x \sim y$, $y \sim z$. По определению найдутся $g, h \in G$ такие, что $x = gy$, $y = hz$. Тогда $x = g(hz) = (gh)z$. Так как G — группа, то $gh \in G$, откуда получаем, что $x \sim z$. □

Определение 8.2. Классы эквивалентности данного отношения называются *орбитами*, множество орбит обозначается как X/G. *Орбитой элемента* $x \in X$ под действием G называется его класс эквивалентности, т.е. множество элементов $y \in X$ таких, что $x \sim y$. Орбиту элемента x обозначим $\mathrm{Orb}(x)$.

Утверждение 8.2. Для любого $x \in X$ $\mathrm{Orb}(x) = Gx$, где $Gx \doteq \{gx \mid g \in G\}$.

Доказательство. Непосредственно из определения следует, что $(x \sim y) \Leftrightarrow (y = gx)$ для некоторого $g \in G$. Отсюда получаем, что $(y \in \mathrm{Orb}(x)) \Leftrightarrow (y \in Gx)$ □

Определение 8.3. *Неподвижными точками элемента* $g \in G$ называются те $x \in X$, для которых $gx = x$. Множество неподвижных точек элемента g обозначается через $I(g)$.

Множество элементов группы G, оставляющих на месте данный элемент $x \in X$называется *стабилизатором элемента* x и обозначается через $\mathrm{St}(x)$. Другими словами,

$$\mathrm{St}(x) \doteq \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Утверждение 8.3. $\sum\limits_{g \in G} |I(g)| = \sum\limits_{x \in X} |\mathrm{St}(x)|$.

Доказательство. Следует из того, что левая и правая часть равны количеству элементов в множестве

$$\{(g, x) \in G \times X \mid gx = x\}.$$

□

Утверждение 8.4. $\mathrm{St}(x)$ — подгруппа G.

Доказательство. 1) Докажем замкнутость $\mathrm{St}(x)$. Пусть $g, h \in \mathrm{St}(x)$. Тогда $(gh)x = g(hx) = gx = x$. Отсюда получаем, что $gh \in \mathrm{St}(x)$.

2) Докажем существование нейтрального элемента в $\mathrm{St}(x)$. Так как $ex = x$ для любого $x \in X$, то $e \in \mathrm{St}(x)$.

3) Докажем существование обратного элемента в $\mathrm{St}(x)$. Пусть $g \in \mathrm{St}(x)$. Тогда $g^{-1}x = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = x$. Отсюда получаем, что $g^{-1} \in \mathrm{St}(x)$. □

Утверждение 8.5. Для любого $x \in X$ выполено равество $|\mathrm{Orb}(x)| \cdot |\mathrm{St}(x)| = |G|$.

Доказательство. Докажем, что все элементы группы G разбиваются на непересекающиеся эквивалентные классы по значениям на x.

Пусть $y \in \mathrm{Orb}(x)$. По определению, $y = g_y x$ для некоторого $g_y \in G$. Рассмотрим множество $G_y \doteq \{g \in G \,|\, gx = y\}$. Так как $(g \in G_y) \Leftrightarrow (g_y^{-1} g \in \mathrm{St}(x))$, то $G_y = g_y \mathrm{St}(x) \doteq \{g_y h \,|\, h \in \mathrm{St}(x)\}$, откуда получаем, что $|G_y| = |\mathrm{St}(x)|$, для любого $y \in \mathrm{Orb}(x)$. При этом, если $y_1 \neq y_2$, то $G_{y_1} \cap G_{y_2} = \varnothing$ (иначе, если $h \in G_{y_1} \cap G_{y_2}$, то $hx = y_1 = y_2$).

Пусть $g \in G$. Построим соотвествие $G \to \mathrm{Orb}(x)$ по правилу $g \to gx$. Получаем, что каждому $y \in \mathrm{Orb}(x)$ поставлено в соотвествие $|\mathrm{St}(x)|$ элементов группы G, при этом, каждому $g \in G$ соответствует ровно один элемент $\mathrm{Orb}(x)$. Отсюда следует, что элементов $\mathrm{Orb}(x)$ в $|\mathrm{St}(x)|$ меньше, чем элементов нруппы G. □

Замечание. На самом деле, мы построили биекцию между группой левых смежных классов $G/\mathrm{St}(x)$ и $\mathrm{Orb}(x)$ при помощи правила $f : G/\mathrm{St}(x) \to \mathrm{Orb}(x)$, $f(g\mathrm{St}(x)) = g(x)$.

Утверждение 8.6. Лемма Бернсайда. Пусть группа G действует на X. Число орбит равно средней мощности стабилизатора элементов группы G :

$$\cdot|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\mathrm{St}(x)|.$$

Доказательство. Докажем, что

$$\sum_{x\in X} |\mathrm{St}(x)| = |G|\cdot|X/G|.$$

Из предыдущего утверждения

$$\sum_{x\in X} |\mathrm{St}(x)| = \sum_{x\in X} \frac{|G|}{|\mathrm{Orb}(x)|} = |G| \sum_{x\in X} \frac{1}{|\mathrm{Orb}(x)|}.$$

Так как для всякого $y \in \mathrm{Orb}(x)$ имеет место равенство $|\mathrm{Orb}(y)| = |\mathrm{Orb}(x)|$, то для всякой траектории $\mathrm{Orb}(x)$ имеем равенство $\sum\limits_{y\in \mathrm{Orb}(x)} \frac{1}{|\mathrm{Orb}(y)|} = \frac{1}{|\mathrm{Orb}(x)|} \sum\limits_{y\in \mathrm{Orb}(x)} 1 = 1$. Следовательно, $\sum\limits_{x\in X} \frac{1}{|\mathrm{Orb}(x)|}$ равно количеству орбит, то есть $|X/G|$. □

Во многих задачах удобнее считать $|I(g)|$, $g \in G$, интерпретируя g как подстановку. При этом мы пользуемся формулой из леммы Бернсайда в виде:

$$\cdot|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |I(g)|.$$

Пример 8.2. Подсчитаем число различных раскрасок вершин квадрата в k цветов. Раскраски, которые можно совместить поворотом или симметрией квадрата, считаются одинаковыми.

Сохраним обозначения для квадрата и группы G из примера 1. В качестве X возьмем множество раскрасок вершин фиксированного квадрата, то есть множество строк $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ длины 4, где $x_i = 1, 2, \ldots, k$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Каждому элементу $g \in G$ соотвествует подстановка π_g на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$. Выпишем их.

$$e = \pi_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4);$$

$$\pi_1 = \pi_{g_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (13)(24);$$

$$\pi_2 = \pi_{g_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1234);$$

$$\pi_3 = \pi_{g_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1432);$$

$$\pi_4 = \pi_{g_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (13)(2)(4);$$

$$\pi_5 = \pi_{g_5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(24)(3);$$

$$\pi_6 = \pi_{g_6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (14)(23);$$

$$\pi_7 = \pi_{g_7} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(34).$$

Действие G на X происходит по правилу:

$$gx = (x_{\pi_g^{-1}(1)}, x_{\pi_g^{-1}(2)}, x_{\pi_g^{-1}(3)}, x_{\pi_g^{-1}(4)}).$$

Каждая вершина принимает цвет той вершины, которая в нее перешла. Из равенства $gx = x$, получаем, что $x_i = x_{\pi^{-1}(i)}$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$, то есть все вершины одного цикла должны быть окрашены в один цвет. Таким образом, $|I(g)| = k^{c(\pi_g)}$, где $c(\pi_g)$ — количество независимых циклов в перестановке, соответствующей элементу g (при этом учитываются циклы длины 1). Получаем, что $|I(e)| = k^4$, $|I(g_1)| = |I(g_6)| = |I(g_7)| = k^2$, $|I(g_2)| = |I(g_3)| = k$, $|I(g_4)| = |I(g_5)| = k^3$. Тогда количество существенно различных раскрасок вершин квадрата в k цветов равно $\frac{1}{8}(k^4 + 2k + 3k^2 + 2k^3)$. □

Пример 8.3. Подсчитаем число различных раскрасок вершин тетраэдра в k цветов. Группа самосовмещений тетраэдра G состоит из 12 элементов. $I(g)$ в данном случае означает число раскрасок, которые ие меняются при преобразовании g. Для нейтрального элемента группы имеем: $|I(e)| = |X| = k^4$. При повороте тетраэдра на $120°$ или на $240°$ вокруг его высоты раскраска не изменится в том и только в том случае, когда все вершины основания покрашены в один цвет (вершина, через которую проходит высота может быть любого цвета). Каждая такая раскраска (при фиксированной высоте) задается цветом основания и цветом вершины; поэтому количество таких раскрасок равно k^2. При повороте тетраэдра на $180°$ вокруг прямой, проходящей через середины скрещивающихся ребер, раскраска не изменится тогда и только тогда, когда концы каждого из этих ребер покрашены в один цвет. И в этом случае $|I(g)| = k^2$. Таким образом, применив лемму Бернсайда, получим, что число различных раскрасок вершин тетраэдра в k цветов равно $\frac{1}{12}(k^4 + 11k^2)$. □

Задача 8.1. Фабрика игрушек выпускает пирамидки, все грани которых — правильные равносторонние треугольники. Далее каждая из граней раскрашивается в один из нескольких цветов, причем разные грани окрашиваются в разные цвета. а) Сколько различных видов пирамидок одинакового размера может выпустить фабрика, если для окрашивания пирамидок имеется 4 различных краски? б) А если красок 10?

Литература

[1] Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. — М.: Просвещение, 2010.

[2] Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. — М.: Просвещение, 2009.

[3] Андерсон Дж.А. Дискретная математика и комбинаторика. — М.: Вильямс, 2003.

[4] Баранов В.Н., Баранова О.В. Экстремальные задачи в дискретной математике. Метод раскраски. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2015.

[5] Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2010.

[6] Кузнецов Д.Ю. О методе раскраски на примере одной задачи. Квант 2015, 3.

[7] Медников Л.Э., Шаповалов А.В. Турнир городов: мир математики в задачах. — М.: МЦНМО, 2017.

[8] Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2001.

[9] Квант. Научно-популярный физико-математический журнал. Задачник кванта.

[10] www.problems.ru — База задач по математике.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

Баранов Виктор Николаевич
Баранова Ольга Викторовна

Элементы дискретной математики
Задачи перечислительной комбинаторики

Учебное пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 11.01.2024. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 9,4. Уч. изд. л. 8,2.
Тираж 54 экз. Заказ № 35.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел. : + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18