Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Филиал ФГБОУ ВО «УдГУ» в г. Воткинске
Кафедра информационных и инженерных технологий

ПРАКТИКУМ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ 09.02.07 «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ» ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА С ЭЛЕМЕНТАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ»

Ижевск
2023

УДК 51
ББК 22.176 я7-5
П691

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом филиала ФГБОУ ВО «УдГУ» в г. Воткинске

Рецензент: канд. пед. наук, директор МБОУ СОШ №7 «Кадетская школа им. М.Т. Калашникова», учитель математики высш. кат. Р.М. Мелекесова

Составитель : Русанова А.В.

П691 Практикум по выполнению практических работ студентов специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» по дисциплине «Дискретная математика с элементами математической логики» : [Электрон. ресурс]. / сост. А.В. Русанова. – Ижевск : Удмуртский университет, 2023. – 73 с.

Объектом практикума являются задания к практическим работам, порядок их выполнения, рекомендации, перечень контрольных студента специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» дисциплины «Дискретная математика с элементами математической логики».

Цель работы – стимулирование исследовательской и творческой деятельности, развитие познавательных интересов, помощь глубже понять математику и научиться применять полученные знания на практике.

В процессе подготовки данного издания использовались: «Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование», «ГОСТ 7.32-2017 СИБИД. Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления (с Поправками)».

В практикуме определена основная краткая теоретическая часть, примеры решения заданий и порядок их выполнения, а также индивидуальные задания для самостоятельного решения.

УДК 51
ББК 22.176 я7-5

ВВЕДЕНИЕ

Практикум направлен на формирование практических учебных умений применения методов дискретной математики к решению различных задач. Включенные в практические работы задачи стимулируют исследовательскую и творческую деятельность, развивают познавательные интересы, помогают не только глубже понять математику, но и научиться применять полученные знания на практике.

Содержанием практических работ является решение различных примеров и задач по дискретной математике. Состав заданий для практического занятия спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время большинство обучающихся могли их выполнить качественно.

Выполнению практических работ предшествует проверка знаний студентов – их теоретической готовности к выполнению задания.

Во время выполнения практической работы используется индивидуальная форма организации работы обучающихся. При индивидуальной форме организации занятий каждый обучающийся самостоятельно выполняет задание согласно своему варианту.

Каждая практическая работа оформляется в тетради для практических работ. В оформление работы входит запись номера практической работы, темы, цели, задания с решением, ответов на контрольные вопросы.

Выполнение практических работ по дисциплине «Дискретная математика с элементами математической логики» направлено на формирование общих компетенций:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 5. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 9. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1.1. Способы задания множеств. Операции над множествами

Цель работы. Приобрести навыки задания множеств, выполнения операций над множествами.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает и умеет применять базовые операции над множествами.

Теоретическая часть.

Понятие множества не определяется, а лишь иллюстрируется примерами. Например, можно говорить о множестве статей ГК РФ, о множестве логических возможностей и т.д.

Множества будем обозначать прописными латинскими буквами: A, B. Если элемент x принадлежит множеству A, пишут $x \in A$ (читают: «x принадлежит множеству A»), в противном пишут $x \notin A$ («x не принадлежит множеству A»).

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют ***пустым***; его обозначают символом $\varnothing$.

Множество считается ***заданным***, если о любом данном объекте можно однозначно сказать, принадлежит он этому множеству или нет. Рассмотрим два способа задания множества:

• дается полный перечень элементов множества; например, множество результатов голосования присяжного таково: {«за», «против», «воздержался»};

• указывается правило определения принадлежности любого объекта к рассматриваемому множеству; например, запись $A = \{x : |x| < 10\}$ означает, что A состоит из таких чисел x, модуль которых меньше 10 (после двоеточия записано правило, которому должно удовлетворять число x, чтобы его можно было отнести к множеству A).

Два множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются ***равными***. Если множества A и B равны, то пишут A = B.

Если каждый элемент множества B является в то же время элементом множества A, то говорят, что B – подмножество множества A. В этом случае пишут $B \subset A$ (читают «B – подмножество множества A»).

В последующем, исходное множество будем называть ***универсальным*** и обозначать U. Собственные подмножества множества U – это те подмножества, которые содержат некоторые, но не все элементы U. Наряду с собственными подмножествами условимся само U и пустое множество $\varnothing$ также считать подмножествами множества U.

Рассмотрим процесс образования новых множеств из данных множеств A и B, при этом будем предполагать, что и A, и B, и вновь образованное множество являются подмножествами некоторого универсального множества U.

Над множествами можно совершать следующие операции:

1. **Объединение ($A \cup B$)** – включает элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

2. **Пересечение ($A \cap B$)** – включает элементы, которые одновременно принадлежат A и B.

3. **Разность ($A \setminus B$)** – включает элементы, которые принадлежат A и не принадлежат B.

4. **Дополнение ($\neg A$)** – включает элементы, которые не принадлежат множеству A (т. е. дополняют его до универсального U).

5. **Декартово произведение (AxB)** – включает упорядоченные пары (a, b), в которых первый элемент $a \in A$, второй элемент $b \in B$.

Пример 1. На множестве U букв русского алфавита заданы множества:

A = {л, о, г, и, к, а};

B = {у, р, о, к};

C = {г, р, у, п, п, а}.

Найти следующие множества:

А) $(A \cap B) \cup C$; Б) $(A \cup B) \cap C$; В) $U \setminus (A \cup B \cup C)$

Решение:

А) $(A \cap B) \cup C$

Сначала определим пересечение множеств A и B ($A \cap B$), которое включает буквы, принадлежащие одновременно множествам A и B.

$A \cap B$ = {о, к}.

Объединим получившиеся пересечение с множеством C. Объединение будет содержать элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств: $(A \cap B) \cup C$ = {о, к, г, р, у, п, п, а}.

Б) $(A \cup B) \cap C$

Объединение множеств $A \cup B$ = {л, о, г, и, к, а, у, р}.

$(A \cup B) \cap C$ = {г, а, у, р}.

В) $U \setminus (A \cup B \cup C)$.

Объединение множеств $A \cup B \cup C$ = {л, о, г, и, к, а, у, р, п}.

Универсальным множеством является множество букв русского алфавита, поэтому в разности $U \setminus (A \cup B \cup C)$ будут содержаться буквы алфавиты, не входящие в объединение ($A \cup B \cup C$).

$U \setminus (A \cup B \cup C)$ = {б, в, д, е, ё, ж, з, и, й, м, н, с, т, ф, х, ц, ч, ш, щ, ъ, ь, ы, э, ю, я}.

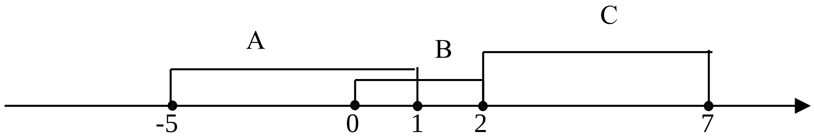
Пример 2. Даны отрезки A = [-5, 1], B = [0, 2], C = [2, 7].

Найти следующие множества:

А) $(A \cup B)$; Б) $(A \cap B) \cup C$; В) $(C \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Решение:

Нарисуем числовую ось и отметим на ней точки отрезков:



А) $(A \cup B) = [-5, 2]$.

Б) $(A \cap B) \cup C = [0, 1] \cup C = [0, 1] \cup [2, 7]$.

В) $(C \cup B) \setminus (A \cap B) = [0, 7] \setminus [0, 1] = [1, 7]$.

Контрольные вопросы и задания.

1. Какими способами можно задать множество?
2. Поставьте в соответствие операциям над множествами логические операции.

Задание 1. Укажите множество элементов множества, соответствующие записи. Выпишите один элемент, принадлежащий множеству, и один элемент, не принадлежащий этому множеству.

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
$M = \{x \mid x^2 + 2x + 2 > 0\}$	$M = \{x \mid x^2 - 5x + 6 < 0\}$	$M = \{x \mid x^2 - x - 12 \le 0\}$
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
$M = \{x \mid x^2 + x - 20 < 0\}$	$M = \{x \mid x^2 - 8x - 9 \ge 0\}$	$M = \{x \mid x^2 + 10x + 21 > 0\}$

Задание 2. На множестве U букв русского алфавита заданы множества A, B, C. Найти следующие множества и изобразить их кругами Эйлера.

А) $(A \cap B) \cup C$; Б) $(A \cup B) \cap C$; В) $U \setminus (A \cup B \cup C)$.

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
A = {д, о, с, к, а} B = {л, о, д, к, а} C = {к, н, и, г, а}	A = {г, р, у, ш, а} B = {б, у, г, о, р} C = {к, н, и, г, а}	A = {м, о, р, я, к} B = {я, к, о, р, ь} C = {к, р, о, н, а}
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
A = {б, и, л, е, т} B = {б, и, р, к, а} C = {т, а, л, о, н}	A = {з, а, в, о, д} B = {н, а, р, о, д} C = {д, о, с, к, а}	A = {п, а, л, е, ц} B = {ц, а, п, л, я} C = {п, е, т, л, я}

Задание 3. Даны отрезки А, В, С. Найти следующие множества:

А) $(A \cup B)$;   Б) $(A \cap B) \cup C$;   В) $(C \cup B) \setminus (A \cap B)$.

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
А = [-2, 7]; В = [3, 10]; С = [5, 15]	А = [-4, 2]; В = [0, 6]; С = [3, 9]	А = [0, 8]; В = [4, 12]; С = [9, 20]
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
А = [-6, 0]; В = [-3, 5]; С = [2, 8]	А = [0, 4]; В = [2, 9]; С = [5, 11]	А = [-1, 8]; В = [4, 13]; С = [6, 17]

Задание 4.

Даны множества А, В. Определить декартово произведение множеств: А) АхВ;   Б) АхА.

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
А = {8, 9, 10} В = {а, б}	А = {а, б, с} В = {3, 4}	А = {5, 6, 8} В = {л, к}
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
А = {о, п, р} В = {0, 1}	А = {1, 5, 10} В = {к, н}	А = {д, г, в} В = {20, 21}

1.2. Решение задач на формулу включений-исключений. Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера-Венна

Цель работы. Научиться решать задачи на подсчет количества элементов, доказывать теоретико-множественные соотношения аналитически и с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Для выполнения работы необходимо ***знать*** основные принципы теории множеств; необходимо ***уметь*** формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

Теоретическая часть.

Если рассмотреть некоторые конечные множества А и В, у которых имеются соответственно некоторые числа элементов n(A), n(B), то имеет место следующее соотношение:

$\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$ – формула количества элементов в объединении двух конечных множеств (формула включений-исключений для двух множеств);

$\mathbf{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(C \cap B) + n(A \cap B \cap C)}$ – формула включений-исключений для трех множеств.

Пример 1. Вступительный экзамен по физической подготовке в Московский университет МВД России сдавали 2500 абитуриентов, оценку ниже «5» получили 1800 человек, а выдержали этот экзамен 2100 абитуриентов. Сколько человек получили оценки «3» и «4»?

Решение. Предположим, что А – множество абитуриентов, выдержавших экзамен по физической подготовке, В – множество абитуриентов, получивших оценки ниже «5».

По условию задачи имеем $n(A) = 2100$, $n(B) = 1800$, $n(A \cup B) = 2500$. Абитуриенты,получившие оценки "3" и "4", образуют множество $N \cap M$. Применяя приведенную выше формулу, находим:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$,

$n(A \cap B) = 2100+1800-2500 = 1400$.

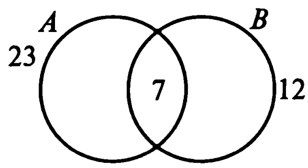
Ответ: 1400 человек получили оценки «3» и «4».

Пример 2. Каждый студент группы программистов занимается в свободное время либо в НСО, либо спортом. Сколько студентов в группе, если 23 увлекаются спортом, 12 занимаются НСО, а 7 совмещают занятия в НСО и увлечение спортом?

Дано:

А – множество студентов, увлекающихся спортом.

В – множество студентов, занимающизся в НСО.



$n(A) = 23$;

$n(B) = 12$;

$n(A \cap B) = 7$.

Найти: $n(A \cup B)$ – ?

Решение. Используем формулу включения-исключения для 2 множеств.

$n(A \cup B) = 23 + 12 - 7 = 28$.

Пример 3. Из 70 компьютеров компьютерного класса физического факультета университета Крита на 26 установлен веб-браузер Mozilla Firefox, на 36 – браузер Opera, а на 31 – Google Chrome. На восьми компьютерах имеется Firefox и Opera, а на 15 – Opera и Chrome. Firefox и Chrome мирно сосуществуют на пяти компьютерах. Все три перечисленные интернет-программы установлены на трех компьютерах.

На скольких компьютерах не установлен ни один из перечисленных браузеров?

Дано:

А – множество компьютеров, на которых установлен браузер Mozilla Firefox;

B – множество компьютеров, на которых установлен браузер Opera;

C – множество компьютеров, на которых установлен браузер Google Chrome.

$n(A) = 26$;

$n(B) = 36$;

$n(B) = 31$;

$n(A \cap B) = 8$;

$n(B \cap C) = 15$;

$n(A \cap C) = 5$;

$n(A \cap B \cap C) = 3$;

$n(A \cup B \cup C) = 70$.

Найти: D – множество компьютеров, на которых не установлен ни один из перечисленных браузеров.

Решение Используем формулу включения-исключения для 3 множеств.

$70 = 26 + 36 + 31 – 8 – 15 – 5 + 3$

$70 = 68$

$D = 70 – 68 = 2$.

Используя определения операций и свойства операций, можно доказывать различные теоретико-множественные соотношения.

Пример 4. Доказать равенство $A \backslash B = A \cap B'$ аналитически и с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Решение.

1) Для доказательства равенства двух множеств аналитически нужно показать, что каждое из множеств является подмножеством другого. Это можно осуществить, выбирая произвольный элемент одного множества и доказывая, что он принадлежит другому множеству.

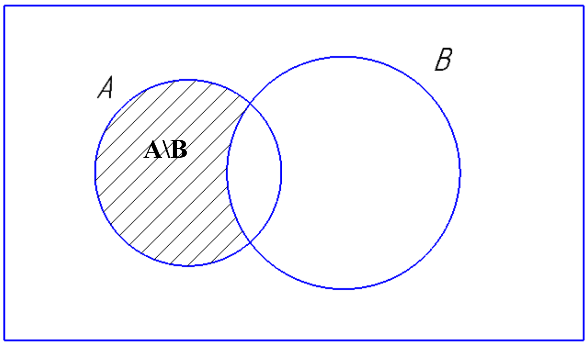
$a \in A \backslash B \leftrightarrow (a \in A)$ и $(a \notin B)$ – по определению разности $A \backslash B$,

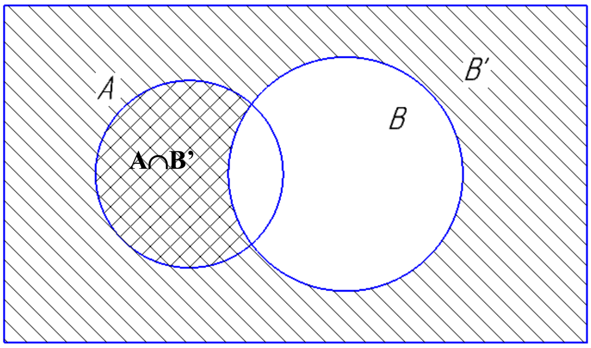
$\leftrightarrow (a \in A)$ и $(a \in B')$ – по определению дополнения,

$\leftrightarrow a \in A \cap B'$ – по определению пересечения.

Равенство $A \backslash B = A \cap B'$ доказано.

2) Чтобы доказать равенство двух множеств графически, необходимо изобразить диаграммы Эйлера-Венна для каждого множества и показать, что области данных множеств совпадают.





Контрольные вопросы и задания.

1. Как можно доказать теоретико-множественные соотношения?

2. Используя формулу включения и исключения, решить задачи. Изобразить множества, используемые в задаче, с помощью диаграмм Эйлера-Венна:

Задача 1. На первом курсе следственного факультета Московского университета МВД России 1500 курсантов, из которых 1050 курсантов изучают английский язык, 675 курсантов изучают немецкий язык и 345 курсантов изучают оба языка. Сколько курсантов следственного факультета не изучают ни английский, ни немецкий язык?

Задача 2. В магазине канцелярских принадлежностей Московского университета МВД России курсанты обычно покупают либо одну ручку, либо одну тетрадь, либо одну ручку и одну тетрадь. В один из дней было продано 57 ручек и 36 тетрадей. Сколько было покупателей, если 12 курсантов купили и ручку, и тетрадь?

Задача 3. В одном из городов Украины часть жителей говорит только по-русски, часть – только по-украински, часть говорит и по-русски, и по-украински. Известно, что 90 % жителей говорит по-русски, а 80 % – по-украински. Какой процент жителей города говорит на обоих языках?

Задача 4. Каждый из курсантов учебной группы Московского университета МВД России в зимние каникулы ровно два раза был в театре, при этом спектакли N, M и P видели соответственно 25, 12 и 23 курсанта. Сколько курсантов в учебной группе? Сколько из них видели спектакли N и M, N и P, M и P?

Задача 5. В учебной группе из 40 курсантов 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только 5 не умеют ни того ни другого. Сколько курсантов умеют плавать и играть в шахматы?

Задача 6. В течение недели в кинотеатре демонстрировались фильмы A, B и C. Из 40 школьников, каждый из которых просмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм A видели 13, фильм B – 16, фильм C – 19 школьников. Найти, сколько учеников просмотрели все три фильма.

Задача 7. В спортивном лагере 65 % ребят умеют играть в футбол, 70 % – в волейбол и 75 % – в баскетбол. Каково наименьшее число ребят, умеющих играть и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол?

Задача 8. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников класса читал книги А, В и С. Результаты опроса оказались таковы: книгу А читало 25 учащихся, книгу В – 22, книгу С – также 22. Книги А или В читали 33 ученика, А или С – 32, В или С – 31; все три книги прочли 10 учащихся. Сколько учеников прочли только по одной книге? Сколько учащихся не читали ни одной из этих трех книг?

Задача 9. Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, оценку «отлично» получили: по математике – 48 абитуриентов, по физике – 37, по русскому языку – 42, по математике или физике – 75, по математике или русскому языку – 76, по физике или русскому языку – 66, по всем трем предметам – 4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получивших только одну пятерку?

Доказать равенство аналитическим способом и с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$	$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$	$(A\cap B)' = A'\cup B'$
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
$(A\cup B)' = A'\cap B'$	$(A\setminus B)\cap C = (A\cap C)\setminus B$	$A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

1.3. Отношения. Отношения эквивалентности. Отношение порядка. Свойства отношений. Теория отображений и алгебра подстановок

Цель занятия. Приобрести навыки определения вида бинарного отношения, его свойств и способа задания.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает основные бинарные отношения и их свойства, умеет применять свойства отношений на практике.

Теоретическая часть.

Бинарным отношением называется любое непустое подмножество R декартова произведения XxY множеств X и Y.

Запись бинарного отношения: xRy, читается как «x и y находятся в отношении R.

Свойства бинарных отношений.

1. ***Рефлексивность***: xRx.

2. ***Антирефлективность***. Имеет место, когда отношение не обладает свойством рефлективности для любых x.

3. ***Симметричность.*** Если для любых x и y одновременно справедливо xRy и yRx.

4. ***Антисимметричность***. Если для несовпадающих элементов x и y верно отношение xRy, то ложно yRx.

5. ***Транзитивность.*** Если xRy и yRz, то xRz.

6. ***Антитранзитивность.*** Имеет место, когда отношение не обладает свойством транзитивности.

7. ***Полнота (или связность)***. Для любых x и y выполняется либо xRy, либо yRx, либо и то и другое.

Пример 1. Определите, является ли отношение «соседи по дому» на множестве людей рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Решение.

Пусть M – множество соседей. Проверим выполнение свойств рефлексивности, симметричности и транзитивности для отношения R(x,y) = «x сосед y».

А) Отношение «соседи» на множестве людей не рефлексивно, так как любой человек не является своим соседом.

«x сосед x» – ложно.

Б) Оно симметрично. Например, если Иванов – сосед Петрова, то справедливо, что Петров – сосед Иванова.

Если «x сосед y», то «y сосед x».

В) Отношение не транзитивно. Например, если дом Петрова расположен строго между домами Иванова и Сидорова, то Иванов с Петровым и Петров с Сидоровым – соседи, но Иванов и Сидоров соседями не являются.

Из того, что «x сосед y» и «y сосед z» не следует «x сосед z».

Ответ: отношение «соседи» на множестве людей не рефлексивно, симметрично, не транзитивно.

Пример 2. Определите, является отношение R(x, y) = «x – y есть целое число» отношением рефлексивности, симметричности и транзитивности. Является ли данное отношение отношением эквивалентности?

Решение

№	Свойство	Конкретный пример выполнения алгоритма
1	Рефлексивность	Проверим R(x, x): $x - x = 0 \in Z$ Отношение R рефлексивно.
2	Симметричность	Если разность x – y есть целое число, то и разность y – x = - (x – y) – противоположное исходному целому, и поэтому тоже целое число. Отношение R симметрично.

3	Транзитивность	Пусть $(x – y) \in Z$ и $(y – z) \in Z$ Тогда $(x – z) = (x – y) + (y – z)$ есть сумма целых чисел, т. е. $(x – z) \in Z$. Отношение R транзитивно.

Ответ: отношение «x – y есть целое число» на множестве целых числе рефлексивно, симметрично, транзитивно, следовательно, отношение эквивалентно.

Пример 3. На множестве M = {a, b, c, d, e} задано бинарное отношение R(M) = {(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, d), (d, e)}. Построить отношения: обратное к R, дополнительное к R, тождественное бинарное отношение U и универсальное бинарное отношение I.

Решение.

1) По определению **обратное бинарное отношение** должно содержать все обратные пары исходного бинарного отношения:

R^{-1} = {(a, a), (b, a), (c, b), (d, c), (d, d), (e, d)}.

2) По определению на множестве M = {a, b, c, d, e} **дополнительное** к R(M) бинарное отношение должно содержать все пары из декартова произведения, которые не принадлежат к R(M).

$\bar{R}$ = {(a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, c), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (e, e)}.

3) По определению **тождественное бинарное отношение** состоит из тождественных элементов.

U = {(a, a), (b, b),(c, c), (d, d), (e, e)}.

4) По определению универсальное бинарное отношение содержит все пары из декартова произведения.

I = {(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d), (d, e), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (e, e)}.

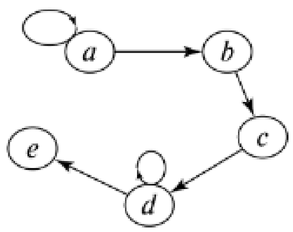
Существуют несколько основных способов задания бинарных отношений: перечисление, графическое представление, матричное представление.

При графическом представлении каждый элемент множества M представляется вершиной, а пара (x, y) представляется дугой из x в y.

Матричным способом бинарные отношения задаются с помощью матрицы смежности. Матрица смежности представляет собой квадратную матрицу m x m, где m – мощность множества M и каждый ее элемент равен единице, если пара (x, y) принадлежит R(M), и равен нулю в противном случае.

Пример 4. Записать графическое и матричное представление для R(M) = {(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, d), (d, e)}}.

Решение.



	a	b	c	d	e
a	1	1	0	0	0
b	0	0	1	0	0
c	0	0	0	1	0
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	0

Взаимно-однозначное отображение множества {1, 2 ,3, …, n} на само себя называется **подстановкой** n чисел, где n – степень подстановки.

Обычно подстановку записывают в виде двух строк, заключенных в скобки. При этом в первой строке аргументы (первые координаты), а во второй строке в соответствующие им образы (вторые координаты).

Пример 5. Дана подстановка:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Приведите подстановку σ_1 к каноническому виду.

2) Найдите обратную подстановку $\sigma_1^{-1.}$

3) Найдите квадрат подстановки $\sigma_1^{2.}$

Решение

1) В верхней строке запишем числа в порядке возрастания от 1 до 5. В нижней – соответствующие им значения $\sigma_1(1) =5$, $\sigma_1(2) = 4$, $\sigma_1(3) = 1$, $\sigma_1(4) = 2$, $\sigma_1(5) = 3$.

Получим $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ – **канонический вид подстановки**.

2) В каноническом виде подстановки σ_1 поменяем строки местами и упорядочим пары (приведем к каноническому виду) по новой первой строке.

$\sigma_1{}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ – **обратная подстановка.**

3) Определим квадрат подстановки $\sigma_{1.}{}^2$

А) поменяем в каноническом виде подстановки σ_1 порядок столбцов так, чтобы новая строка повторяла старую вторую.

$$\sigma_1{}' = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Б) подпишем подстановку $\sigma_1{}'$ под постановкой σ_1 и вычеркнем одинаковые вторую и третью строки:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{5} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1{}' = \begin{pmatrix} \cancel{5} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{2} & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Получим

$$\sigma_1{}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$ **квадрат подстановки**

Контрольные вопросы и задания

1. Отношение R: "≤" на множестве действительных чисел является ли рефлексивным?
2. Отношение R: "≤" на множестве действительных чисел является ли транзитивным?
3. Каким является отношение R: "<" ?
4. Определить, какими свойствами обладает отношение R: «принадлежность кодной студенческой группе» на множестве студентов института?
5. Транзитивно ли отношение неравенства на множестве действительных чисел?
6. Транзитивно ли отношение равенства треугольников в геометрии?
7. Определите свойства следующих отношений:
   - «прямая x пересекает прямую y» (на множестве прямых);
   - «число x больше числа y на 2» (на множестве натуральных чисел);
   - «число x делится на число y без остатка» (на множестве натуральных чисел);
   - «x – сестра y» (на множестве людей).
8. Какое бинарное отношение обладает свойством эквивалентности?
9. Что такое отображение?

Задание 1.

Объясните, будет ли выполнима рефлексивность, симметричность или транзитивность отношений на заданных множествах, и почему:

I вариант: «быть знакомым» на множестве людей;

II вариант: «быть отцом» на множестве людей;

III вариант: «играть в одном спектакле» на множестве актеров;

IV вариант: быть «одногруппником» на множестве людей.

Задание 2.

Определите является ли преложенное отношение рефлексивным, симметричным и транзитивным.

I вариант: «x/y – целое число»;

II вариант: «x/y – рациональное число»;

III вариант: «x + y – четное число»;

IV вариант: «x^y – четное число».

Задание 3. *На множестве M = {a, b, c, 1, 2} задано бинарное отношение R(M).*

А) Постройте отношения: обратное к R, дополнительное к R, тождественное бинарное отношение U и универсальное бинарное отношение I.

Б) Запишите графическое и матричное представление данных бинарных отношений.

I вариант: R(M) = {(a, 2), (b, 1), (b, 1), (c, c), (c, 2), (2, 2)};

II вариант: R(M) = {(a, b), (a, 1), (b, b), (c, 2), (1, 2), (2, 2)};

III вариант: R(M) = {(a, a), (a, c), (b, c), (b, 1), (c, c), (2, 2)};

IV вариант: R(M) = {(a, c), (b, b), (b, c), (c, 1), (1, 1), (1, 2)}.

Задание 4. Выполните операции над подстановками:

1) Приведите подстановку σ_1 к каноническому виду.

2) Найдите обратную подстановку σ_1.$^{-1}$

3) Найдите произведение подстановок $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

4) Найдите квадрат подстановки σ_1.^{2}

I вариант: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

II вариант: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

III вариант: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

IV вариант: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1.4. Размещения, перестановки, сочетания в комбинаторике

Цель занятия. Изучить основные комбинаторные объекты и области их возможного применения.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает размещения, перестановки, сочетания и умеет их применять при решении задач.

Теоретическая часть.

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. Основы комбинаторики очень важны для оценки вероятностей случайных событий, т.к. именно они позволяют подсчитать принципиально возможное количество различных вариантов развития событий.

Основная формула комбинаторики

Пусть имеется k групп элементов, причем i-я группа состоит из ni элементов. Выберем по одному элементу из каждой группы. Тогда общее число N способов, которыми можно произвести такой выбор, определяется соотношением N=n1*n2*n3*...*nk.

<u>Пример</u>. Поясним это правило на простом примере. Пусть имеется две группы элементов, причем первая группа состоит из n1 элементов, а вторая – из n2 элементов. Сколько различных пар элементов можно составить из этих двух групп, таким образом, чтобы в паре было по одному элементу от каждой группы?

Допустим, мы взяли первый элемент из первой группы и, не меняя его, перебрали все возможные пары, меняя только элементы из второй группы. Таких пар для этого элемента можно составить n2. Затем мы берем второй элемент из первой группы и также составляем для него все возможные пары. Таких пар тоже будет n2. Так как в первой группе всего n1 элемент, всего возможных вариантов будет n1*n2.

<u>Пример</u>. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?

<u>Решение</u>: n1=6 (т. к. в качестве первой цифры можно взять любую цифру из 1, 2, 3,4, 5, 6), n2=7 (т. к. в качестве второй цифры можно взять любую цифру из 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), n3=4 (т. к. в качестве третьей цифры можно взять любую цифру из 0, 2, 4, 6).

Итак, N=n1*n2*n3=6*7*4=168.

В том случае, когда все группы состоят из одинакового числа элементов, т. е. n1=n2=...nk=n можно считать, что каждый выбор производится из одной и той же группы, причем элемент после выбора снова возвращается в группу. Тогда число всех способов выбора равно n^k. Такой способ выбора носит название выборки с возвращением.

Пример. Сколько всех четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 5, 6, 7, 8?

Решение: для каждого разряда четырехзначного числа имеется пять возможностей, значит N=5*5*5*5=54=625.

Рассмотрим множество, состоящие из n элементов. Это множество будем называть генеральной совокупностью.

Размещением из n элементов по m называется любой упорядоченный набор из m различных элементов, выбранных из генеральной совокупности в n элементов.

Пример. Различными размещениями из трех элементов {1, 2, 3} по два будут наборы (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2). Размещения могут отличаться друг от друга как элементами, так и их порядком.

Число размещений обозначается A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?

Решение: т. к. нечетных цифр пять, а именно 1, 3, 5, 7, 9, то эта задача сводится к выбору и размещению на две разные позиции двух из пяти различных цифр, т. е. указанных чисел будет:

$$A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Сочетанием из n элементов по m называется любой неупорядоченный набор из m различных элементов, выбранных из генеральной совокупности в n элементов.

Пример. Для множества {1, 2, 3} сочетаниями являются {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}.

Число сочетаний обозначается вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример. Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся?

Решение: число способов равно числу сочетаний из шести книжек по две, т. е. равно:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{2!} = 15$$

Перестановкой из n элементов называется любой упорядоченный набор этихэлементов.

Пример. Всевозможными перестановками множества, состоящего из трех элементов {1, 2, 3} являются: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 1, 2).

Число различных перестановок из n элементов обозначается Pn и вычисляется поформуле Pn=n!.

Пример. Сколькими способами семь книг разных авторов можно расставить наполке в один ряд?

Решение: эта задача о числе перестановок семи разных книг. Имеется P7=7!=1*2*3*4*5*6*7=5040 способов осуществить расстановку книг.

Контрольные вопросы и задания

1. Расписание одного дня содержит 5 уроков. Определить количество такихрасписаний при выборе из 11 дисциплин.

2. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности?

3. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?

4. Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждое звукосочетание может содержать от трех до десяти звуков?

5. В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можновыбрать из вазы пять гвоздик одного цвета?

6. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?

7. Чемпионат, в котором участвуют 16 команд, проводится в два круга (т. е. каждая команда дважды встречается с любой другой). Определить, какое количество встреч следует провести.

8. Замок открывается только в том случае, если набран определенный трехзначный номер. Попытка состоит в том, что набирают наугад три цифры из заданных пяти цифр. Угадать номер удалось только на последней из всех возможных попыток. Сколько попыток предшествовало удачной?

9. Из группы в 15 человек выбирают четырех участников эстафеты 800+400+200+100. Сколькими способами можно расставить спортсменов по этапам эстафеты?

10. Команда из пяти человек выступает на соревнованиях по плаванию, в которых участвуют еще 20 спортсменов. Сколькими способами могут распределитьсяместа, занятые членами этой команды?

11. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи так, чтобы одна не могла взять другую? (Одна ладья может взять другую, если она находится с ней на одной горизонтали или на одной вертикали шахматной доски.)

12. Две ладьи различного цвета расположены на шахматной доске так, чтокаждая может взять другую. Сколько существует таких расположений?

13. Порядок выступления восьми участников конкурса определяется жребием.Сколько различных исходов жеребьевки при этом возможно*

14. Тридцать человек разбиты на три группы по десять человек в каждой. Сколько может быть различных составов групп?

15. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

16. Сколько различных светящихся колец можно сделать, расположив по окружности 10 разноцветных лампочек (кольца считаются одинаковыми при одинаковом порядке следования цветов)?

17. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можнорасставить, чтобы при этом первый и второй тома не стояли рядом?

18. Четыре стрелка должны поразить восемь мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?

19. Из группы в 12 человек ежедневно в течение 6 дней выбирают двух дежурных. Определить количество различных списков дежурных, если каждый человек дежурит один раз.

20. Сколько четырехзначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, содержат цифру 3 (цифры в числах не повторяются)?

21. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы № 1 и № 2 находились бы в соседних аудиториях?

22. В турнире участвуют 16 шахматистов. Определить количество различных расписаний первого тура (расписания считаются различными, если отличаются участниками хотя бы одной партии; цвет фигур и номер доски не учитываются).

23. Шесть ящиков различных материалов доставляются на пять этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на пятый этаж доставлен какой-либо один материал?

24. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

2.1. Операции над высказываниями. Таблицыистинности. Логические задачи

Цель занятия. Приобрести навыки выполнения логических операций над высказываниями.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает основные понятия теории высказываний и умеет выполнять операции над высказываниями, строить таблицу истинности высказывания, применять полученные знания к решению логических задач.

Теоретическая часть

Основным понятием математической логики является понятие *высказывания.* Под высказыванием обычно понимают всякое повествовательное предложение, об истинности или ложности которого имеет смысл говорить. Всякое высказывание является либо истинным, либо ложным, но не может быть одновременно истинным и ложным. Различают простые и составные высказывания. Высказывание, представляющеесвязывание простых высказываний в составные осуществляется посредством логических операций, называемых связками.

Пример 1. Записать с помощью формулы логики высказывание: неверно, что если нет дождя, то будет солнечная погода, и дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер.

Решение. Обозначим буквой А высказывание: «идет дождь», буквой В высказывание: «будет солнечная погода», буквой С высказывание: «будет ветер». Разделим составное высказывание на простые и каждое запишем с помощью формулы логики:

«нет дождя» – $\overline{\mathrm{A}}$; «если нет дождя, то будет солнечная погода» – $\overline{\mathrm{A}}\rightarrow\mathrm{B}$;

«дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер» – $A \leftrightarrow C$.

Между простыми высказываниями стоит союз «и», т. е. они соединяются с помощью конъюнкции и составное высказывание «если нет дождя, то будет солнечная погода, и дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер» запишется в виде: $(\overline{\mathrm{A}}\rightarrow\mathrm{B})\&(A \leftrightarrow C)$. Т. к. перед этим составным высказыванием стоит слово «неверно», то нужно поставить отрицание над всей формулой.

В итоге заданное высказывание формализуется следующим образом:

$$\overline{(\overline{\mathrm{A}}\rightarrow\mathrm{B})\&(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{C})}.$$

Ответ: $\overline{(\overline{\mathrm{A}}\rightarrow\mathrm{B})\&(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{C})}.$

Отрицанием высказывания X называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание X ложно, и ложным, если высказывание X истинно. Отрицание высказывания X обозначается *X* и читается «не *X*» или «неверно, что X».

Конъюнкцией двух высказываний *X, У* называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания X, У истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно. Конъюнкция высказываний обозначается символом X∧У или X&У (читается: «X и У»).

Дизъюнкцией двух высказываний X и У называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний X, У истинно, и ложным, если они оба ложны. Дизъюнкция высказываний обозначается X∨У (читается: «X или У»).

Импликацией двух высказываний X, У называется новое высказывание, которое считается ложным, если X истинно, а У – ложно, и истинным во всех остальных случаях. Импликация высказываний обозначается символом X→У (читается: «если X, то У»).

Эквиваленцией двух высказываний X, У называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания X и У либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях. Эквиваленция высказываний обозначается символом X<=>У (читается: «X тогда и только тогда, когда У»).

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения перечисленных логических операций, называется *формулой алгебры логики*. Две формулы алгебры логики А и В называются *равносильными,* если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в формулы элементарных высказываний. Равносильность формул обозначают знаком ≡, а запись $A \equiv B$ означает, что формулы A и B равносильны.

Законы логики

1. Закон тождества: $A = A$
2. Закон непротиворечия: $A\&\overline{A} = 0$
3. Закон исключенного третьего: $A\vee\overline{A} = 1$
4. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{A}} = A$
5. Законы коммутативности: $AB \equiv BA$, $A\vee B \equiv B\vee A$
6. Законы дистрибутивности: $A\vee(BC) = (A\vee B)(A\vee C)$, $A\,(B\vee C) = AB \vee AC$
7. Ассоциативные законы: $A\vee(B\vee C) = (A\vee B)\vee C$, $A(BC) = (AB)C$
8. Законы идемпотентности: $A{*}A \equiv A$, $A\vee A \equiv A$
9. Законы де Моргана: $\overline{A\vee B} = \bar{A}\&\bar{B}$, $\overline{A\&B} = \bar{A}\vee\bar{B}$
10. $A\rightarrow B=\bar{A}\vee B$ (снятие импликации)

11. $A \leftrightarrow B = AB \vee \bar{A}\bar{B}$ (снятие эквиваленции)

12. Свойства констант: $A \vee 1 = 1$, $A \& 1 = A$, $A \vee 0 = A$, $A \& 0 = 0$

Разнообразие логических задач очень велико. Способов их решения тоже немало. Но наибольшее распространение получили следующие три способа решения логических задач: ***средствами алгебры логики с помощью равносильных преобразований; табличный; с помощью рассуждений***.

Пример 1. Решить задачу с помощью преобразований.

По телевизору синоптик объявляет прогноз погоды на завтра и утверждает следующее:

1) Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя.

2) Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра.

3) Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра.

Какая же погода будет завтра?

Решение. Введем обозначение для простых логических высказываний:

A – будет ветер;

B – будет пасмурно;

C – будет дождь.

Запишем сложные высказывания, выражающие известные факты:

1) $\bar{A} \to B\bar{C}$.

2) $C \to B\bar{A}$.

3) $B \to C\bar{A}$.

Запишем произведение сложных высказываний и упростим его:

$(\bar{A} \to B\bar{C})\&(C \to B\bar{A})\&(B \to C\bar{A}) = (A \vee B\bar{C})\&(\bar{C} \vee B\bar{A})\&(\bar{B} \vee C\bar{A}) =$

$= (A\bar{C} \vee AB\bar{A} \vee B\bar{C}\bar{C} \vee B\bar{C}B\bar{A})\&(\bar{B} \vee C\bar{A}) = (A\bar{C} \vee B\bar{C} \vee B\bar{C}\bar{A})\&(\bar{B} \vee C\bar{A}) =$

$= (A\bar{C} \vee B\bar{C}(1 \vee A))\&(\bar{B} \vee C\bar{A}) = (A\bar{C} \vee B\bar{C})\&(\bar{B} \vee C\bar{A})) = A\bar{C}\bar{B} \vee A\bar{C}C\bar{A} \vee B\bar{C}\bar{B} \vee B\bar{C}C\bar{A} = A\bar{C}\bar{B}$

Ответ: будет ветер, не будет дождя и будет не пасмурно.

Пример 2. Решить задачу с помощью преобразований.

Трое друзей, болельщиков автогонок «Формула-1», спорили о результатах предстоящего этапа гонок.

1) «Вот увидишь, Шумахер не придет первым», – сказал Джон. Первым будет Хилл.

2) «Да нет же, победителем будет, как всегда, Шумахер», – воскликнул Ник. – «А об Алези и говорить нечего, ему не быть первым».

3) Питер, к которому обратился Ник, возмутился: «Хиллу не видать первого места».

По завершении этапа гонок оказалось, что каждое из предположений двоих друзей подтвердилось, а предположения третьего из друзей оказались неверны. Кто выиграл этап гонки?

Решение. Введем обозначения для логических высказываний:

А – победит Шумахер; В – победит Хилл; С – победит Алези.

Запишем сложные высказывания, выражающие известные факты:

1. $\bar{A}B$
2. $A\bar{C}$
3. $\bar{B}$

Возможные три случая:

Прав Джон и Ник, Питер не прав: $\overline{(\bar{A}}BA\bar{C})\bar{\bar{B}}$ = 0 (должно быть 1)

Прав Питер и Джон, Ник не прав: $(\bar{A}B\bar{B})\overline{A\bar{C}}$ = 0 (должно быть 1)

Прав Питер и Ник, Джон не прав:

$(A\bar{C}\bar{B})\overline{\bar{A}B} = (A\bar{C}\bar{B})(A \vee \bar{B}) = A\bar{C}\bar{B} \vee A\bar{C}\bar{B} = A\bar{C}\bar{B} = 1$

Ответ: А – победит Шумахер; Хилл и Алези не победят

Пример 3. Решить задачу табличным способом

Три дочери писательницы Дорис Кей – Джуди, Айрис и Линда, тоже очень талантливы. Они приобрели известность в разных видах искусств – пении, балете и кино. Все они живут в разных городах, поэтому Дорис часто звонит им в Париж, Рим и Чикаго.

Известно, что:

1. Джуди живет не в Париже, а Линда – не в Риме;
2. парижанка не снимается в кино;
3. та, кто живет в Риме, певица;
4. Линда равнодушна к балету.

Где живет Айрис, и какова ее профессия?

Решение. Составим таблицу и отразим в ней условия 1 и 4, заполнив клетки цифрами 0 и 1 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание:

Париж	Рим	Чикаго		Пение	Балет	Кино
0			Джуди			
			Айрис			
	0		Линда		0	

Так как Линда живет не в Риме, то, согласно условию 3, она не певица. В клетку, соответствующую строке "Линда" и столбцу "Пение", ставим 0. Из таблицы сразу видно, что Линда киноактриса, а Джуди и Айрис не снимаются в кино.

Париж	Рим	Чикаго		Пение	Балет	Кино
0			Джуди			0
			Айрис			0
	0		Линда	0	0	1

Согласно условию 2, парижанка не снимается в кино, следовательно, Линда живет не в Париже. Но она живет и не в Риме. Следовательно, Линда живет в Чикаго. Так как Линда и Джуди живут не в Париже, там живет Айрис. Джуди живет в Риме и, согласно условию 3, является певицей. А так как Линда киноактриса, то Айрис балерина.

В результате постепенного заполнения получаем следующую таблицу:

Париж	Рим	Чикаго		Пение	Балет	Кино
0	0	1	Джуди	1	0	0
1	0	0	Айрис	0	1	0
0	0	1	Линда	0	0	1

Ответ. Айрис балерина, живет в Париже.

Формула называется *тождественно истинной (тавтологией),* если она принимает значение «истина» при всех значениях входящих в нее переменных. Формула называется *тождественно ложной,* если она принимает значение «ложь» при всех значениях входящих в нее переменных.

Пример 1. Доказать, что формула $A \equiv x \to (y \to x)$ тождественно истинная.

<u>Решение:</u> Подвергнем формулу A равносильным преобразованиям:
$A \equiv x \to (y \to x) \equiv x \vee (y \vee x) \equiv x \vee (x \vee y) \equiv (x \vee x) \vee y \equiv 1 \vee y \equiv 1$.

<u>Вывод</u>: формула тождественно истинна, так как всегда имеет значение «истина» или «1». Доказать тождественную истинность формулы можно и с помощью таблицы истинности. Например, для рассмотренной формулы A таблица истинности имеет вид:

x	y	y→ x	x→(y→x)
И	И	И	<u>И</u>
И	Л	И	<u>И</u>
Л	И	Л	<u>И</u>
Л	Л	И	<u>И</u>

Пример 2. Построить таблицы истинности для формулы:

$$(\bar{X}\vee X)\leftrightarrow(X\to Y\&\bar{Z}).$$

<u>*Решение*</u>. Определим количество строк и столбцов в таблице. Т. к. в логическое выражение входят три переменные, то по формуле 2^3 получим 8 строк. Количество столбцов равно количеству логических переменных (3) + количество операций (6), получим 9 столбцов. Учитывая приоритет операций, расставляем порядок действий $(\bar{X}^1 \vee^2 X)\leftrightarrow^6(X\to^5 Y\&^4 \bar{Z}^3)$. Заполняем таблицу:

X	Y	Z	$\bar{X}$	$\bar{X}\vee X$	$\bar{Z}$	$Y\&\bar{Z}$	$X\to Y\&\bar{Z}$	$(\bar{X}\vee X)\leftrightarrow(X\to Y\&\bar{Z})$
	0	0	1	1	1	0	1	1
	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0

Для того, чтобы решить задачу с помощью алгебры логики, необходимо:

– ввести краткие обозначения для сформулированных условий и составить логическую формулу, выражающую условие задачи в символической форме;

– для полученной формулы найти с помощью равносильных преобразований возможноболее простую равносильную формулу;

– пользуясь найденной более простой формулой, перейдя к словесной ее формулировке,определить решение задачи.

Пример 3.

После обсуждения состава участников, отправляемых на конференцию, было решено, что должны выполняться два условия: а) если поедет Арбузов, то должны поехать еще Брюквин или Вишневский; б) если поедут Арбузов и Вишневский, то поедет и Брюквин. Найти более простую словесную формулировку принятого решения о составе участников конференции.

<u>Решение:</u> назначение на конференцию Арбузова, Брюквина и Вишневского обозначим буквами А, Б, В соответственно. Тогда условие а) можно записать в виде А → Б∨В, а условие б) в виде А∧В → Б. Так как оба условия должны выполняться одновременно, то их соединим логической связкой «и». Поэтому принятое решение можно записать в виде следующей символической формулы: (А → Б∨В) ∧ (А∧В → Б).

С помощью равносильных преобразований упростим составленную формулу:

(А → Б∨В) ∧ (А∧В → Б)≡(A∨$\bar{Б}$∨$\bar{В}$)∧($\bar{А}$∨$\bar{В}$∨$Б$)≡($\bar{А}$∨$Б$)∨($В$∧$\bar{В}$)≡ $\bar{А}$∨$Б$

Символическая формула означает: «Если поедет Арбузов, то поедет и Брюквин». Это и есть наиболее простая словесная формулировка принятого решения о составе группы сотрудников, отправляемых на конференцию.

Контрольные вопросы и задания:

1. Какие законы логики Вы использовали при упрощении формул логики?

2. Методом рассуждений решите задачу. Сегодня не воскресенье, а завтра не среда. Вчера была не пятница, а позавчера был не понедельник. Завтра не воскресенье, и вчера было не воскресенье. Послезавтра не суббота и не воскресенье. Вчера был не понедельник, и не среда. Позавчера была не среда, а завтра не вторник. Да, и сегодня не среда. Какой же сегодня день недели, если учесть, что одно утверждение в списке – ложно?

Задание 1.

В следующих высказываниях выделить простые, обозначив каждое из них буквой. Записать составное высказывание с помощью формулы логики.

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
А) На уроке физики ученики выполняли лабораторную работу и сообщали результаты исследований учителю. Б) Если светит солнце и не дует ветер, то не будет дождя. С) Произведение двух чисел не равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них не равно нулю.	А) Катя любит писать сочинения или решать задачи. Б) Если дует ветер, то солнце светит тогда и только тогда, когда нет дождя. С) Если в параллелограмме не все углы прямые или не все стороны равны между собой, то этот параллелограмм не прямоугольник или не ромб.	А) Если Маша сестра Саши, то Саша брат Маши Б) Погода будет солнечной тогда и только тогда, когда ни будет ни ветра, ни дождя. С) Если число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6.
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
А) Голова думает тогда и только тогда, когда язык отдыхает. Б) Неверно, что если дует ветер и солнце светит, то нет дождя. С) Если число делится на 2 и не делится на 5, то оно не делится на 10.	А) Земля движется по круговой или эллиптической орбите. Б) Если ветра нет, то дождь будет тогда и только тогда, когда будет пасмурная погода. С) Произведение трех чисел не равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них не равно нулю.	А) Ты можешь купить в магазине продукты, если у тебя есть деньги. Б) Неверно, что если погода пасмурная, то дождь идет тогда и только тогда когда нет ветра. С) Если число делится на 3 и делится на 5, то оно делится на 15.

Задание 2.

Построить таблицы истинности для формул:

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
$\overline{x \leftrightarrow y} \vee x$	$\overline{x \to y} \& x$	$(x \& y) \to \bar{x}$
$(x \& y \vee \bar{z}) \leftrightarrow (\bar{y} \to z)$	$(x \to y \& \bar{z}) \vee \overline{(x \& y)}$	$(\bar{x} \to y) \leftrightarrow (x \vee y \& \bar{z})$
$\overline{((X \vee Y)\&(Z \leftrightarrow X))}\&(Z \vee Y)$	$(X\&Y)\&\overline{(\bar{X} \vee X)}\&(Z \leftrightarrow Y)$	$\overline{((X \vee Z)\&(Z \leftrightarrow X))}\&(Z \to Y)$
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
$(\bar{x} \vee y) \leftrightarrow x$	$x \to (\overline{x \& y})$	$x \leftrightarrow (\overline{x \vee y})$
$(x \leftrightarrow \bar{y}) \& (x \to z) \vee \bar{x}$	$(\bar{x} \vee z) \to (x \vee y \& \bar{z})$	$(x \vee y \vee \bar{z}) \& (\overline{x \to y})$
$\overline{(X \vee Y)} \vee (Z \to x)\&(Z \leftrightarrow Y)$	$(X \leftrightarrow Y)\&\overline{(Z \vee D)}$	$(A \to B) \vee \bar{A} \& (C \leftrightarrow D)$

Задание 3.

С помощью таблицы истинности установить, равносильны ли следующие формулы

I вариант	**II вариант**	**III вариант**
$\overline{A \& B}$ и $A \vee B$	$\overline{B \vee A}$ и $\overline{\overline{B} \& \overline{A}}$	$A \vee \overline{B}$ и $\overline{A} \& \overline{B}$
IV вариант	**V вариант**	**VI вариант**
$\overline{A} \& B$ и $\overline{A \vee B}$	$B \vee A$ и $\overline{\overline{B} \& A}$	$A \vee B$ и $\overline{A \& \overline{B}}$

Задание 4.

Символом F обозначается одно из указанных ниже логических выражений. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F. Какое выражение соответствует F?

Варианты I, III

X	Y	Z	F
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

1) $\bar{X} \& Y \& \bar{Z}$
2) $X \vee \bar{Y} \vee Z$
3) $X \& \bar{Y} \& Z$
4) $\bar{X} \vee Y \vee \bar{Z}$

Вариант II, IV

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	1	0	1
1	1	1	1

1) $X \vee Y \vee Z$
2) $X \& Y \& \bar{Z}$
3) $\bar{X} \& Y \& \bar{Z}$
4) $X \vee \bar{Y} \vee Z$

Вариант III, V

X	Y	Z	F
0	1	1	0
1	0	0	1
0	0	1	1

1) $(X \vee \bar{Y})\&Z$
2) $(X\&\bar{Y}) \vee Z$
3) $X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}$
4) $X\&\bar{Y}\&\bar{Z}$

Задача 5. Пытаясь вспомнить победителей прошлогодних соревнований пострельбе, пять бывших зрителей заявили:

А) Антон был вторым, а Борис – пятым;

Б) Виктор был вторым, а Денис – третьим;

В) Григорий был первым, а Борис – третьим;

Г) Антон был третьим, а Евгений – шестым,

Д) Виктор был третьим, а Евгений – четвертым.

Впоследствии выяснилось, что каждый зритель ошибся в одном из двух своих высказываний. Каково было истинное распределение мест на соревнованиях?

Задача 6. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике»; Джонс сказал, что это был черный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильнолибо только марку машины, либо ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

Задача 7. Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.

– Говорит Мегрэ. Есть новости?

– Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Жуссье считает, что или Этьен убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем звонила…

– Все. Спасибо. Этого достаточно. – Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все.

Какой вывод сделал комиссар Мегрэ? Кто совершил убийство?

Задача 8. Студентам объявили, что в понедельник будет одно занятие по криминалистике и одно по математике, причем, если на первой паре математики не будет, то криминалистика будет на второй паре; если третья пара не математика, то четвертая – криминалистика; если математика будет на первой паре, то криминалистика – на пятой. Определите, на какой паре будет криминалистика, а на какой математика.

Задача 9. Четыре студентки А, Е, С, Р посещают университет по очереди и ведут общий конспект лекций. Необходимо составить график посещения на ближайшую неделю, учитывая, что:

А) Понедельник – день самостоятельной работы на курсе, и в университет не ходитникто, а в субботу необходимо быть всем.

Б) С и Р не смогут пойти на занятия во вторник в связи с большой загруженностью в понедельник.

В) Если С выйдет в среду или Р – в четверг, то Е согласится побывать на занятиях впятницу.

Г) Если А не пойдет в ВУЗ в четверг, то Е позволит себе сходить туда в среду.

Д) Если А или Р будут в институте в среду, то С сможет пойти в пятницу.

Е) Если Р в пятницу вместо института пойдет на свадьбу подруги, то А придетсясходить в институт во вторник, а С – в четверг.

Задача 10. Четырем сотрудникам уголовного розыска – Антонову, Вехову, Сомову,Дееву необходимо отправиться по служебной необходимости в четыре различных города – Москву, Одессу, Киев и Ставрополь. Определите, в какой город должен поехать каждыйиз них, если имеются следующие ограничения:

А) Если А не едет в Москву, то С не едет в Одессу.

Б) Если В не едет ни в Москву, ни в Ставрополь, то А едет вМоскву.

В) Если С не едет в Ставрополь, то В едет в Киев.

Г) Если Д не едет в Москву, то В не едет в Москву.

Д) Если Д не едет в Одессу, то В не едет в Москву.

Задача 11. Сотрудникам ГИБДД Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручено дежурство на 7-ом, 8-ом, 9-ом и 10-ом участках трассы. При проверке после дежурства оказалось, что на 10-ом участке произошло дорожно-транспортное происшествие, подробности которого известны дежурившему сотруднику ГИБДД. Не ушедшие домой сотрудники после дежурства сообщили о следующем:

Андреев: «Я дежурил на 9-ом участке, а Савельев - на 7-ом». Костин: «Я дежурил на 9-ом участке, а Андреев – на 8-ом». Савельев: «Я дежурил на 8-ом участке, а Костин – на 10-ом».

Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый милиционер в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ее скрывал. Кто из сотрудников на каком участке дежурил?

Задача 12. Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен по математике, если известно:

А) Если первый сдал, то и второй сдал.

Б) Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал.

В) Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал.

Г) Если четвертый сдал, то и первый сдал.

Задача 13. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал математическую логику?» получен верный ответ – «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто из студентов изучал математическую логику?» получен верный ответ – «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто из студентов изучал математическую логику?

Задание 14. С помощью равносильных преобразований упростить формулы логики:

I вариант	**II вариант**	**III вариант**	**IV вариант**
1) $\bar{x}\vee x\vee y\vee xy$ 2) $(\overline{x\vee y}\to x\vee y)(y\vee\overline{x})$	1) $\bar{x}\vee\overline{xy\bar{y}}$ 2) $\left((x\vee y)\to z\right)(x\vee z)z$	1) $x\vee\overline{xy}\vee\overline{\bar{x}\vee y}$ 2) $\overline{(x\vee y)\to(\overline{x}\to y}$	1) $\overline{\bar{x}}\,\overline{\bar{y}}\vee\bar{x}$ 2) $(x\to y\bar{z})(z\to xy)z$

Задание 15. Решить логические задачи с помощью преобразований.

I вариант

Задача 1. Кто играет в шахматы? Определите, кто из трёх мальчиков Александр, Борис и Сергей играет в шахматы, если известно:

1) играет Александр или Борис;

2) если играет Александр, то играет и Борис;

3) Александр и Сергей оба играют или оба не играют.

Задача 2. Три ученика, Саша, Коля и Вова, прогуляли информатику. Когда их спросили, кому пришла в голову эта идея, они ответили следующее:

1) Саша: «Я никогда не призывал к прогулу, это была идея Коли».

2) Коля: «Я никогда не предложил бы это первым, во всем виноват Вова».

3) Вова: «Эта идея пришла в голову Коле. Я просто пошел за компанию».

Внутренним чутьем учитель почувствовал, что два ученика говорят правду, а третий – лжет. Кто из учеников был инициатором прогула?

II вариант

Задача 1. Компьютер вышел из строя. Известно, что:

1) Если монитор неисправен, то исправна видеокарта, но несправна оперативная память.

2) Если видеокарта исправна, то исправна оперативная память, но неисправен монитор.

3) Если оперативная память исправна, то исправна видеокарта, но неисправен монитор.

Что неисправно в компьютере?

Задача 2. Три школьника, Миша, Коля и Сергей, остававшиеся в классе на перемене, были вызваны к директору по поводу разбитого в это время окна в кабинете. На вопрос директора о том, кто это сделал, мальчики ответили следующее:

1) Миша: «Я не бил окно, и Коля тоже…»

2) Коля: «Миша не разбивал окно, это Сергей разбил футбольным мячом!»

3) Сергей: «Я не делал этого, стекло разбил Миша».

Стало известно, что двое ребят сказали правду, а третий оба факта соврал. Зная это, директор смог докопаться до истины. Кто разбил стекло в классе?

III вариант

Задача 1. Кто из учеников идет на олимпиаду по физике, если известно следующее:

1) Если Миша идет, то идет Аня, но не идет Маша.

2) Если Маша не идет на олимпиаду, то идет Аня, но не идет Миша.

3) Если Аня идет, то идет Миша, но не идет Маша.

Задача 2. Один из 3 братьев: Алеша, Витя и Семен поставил на скатерть кляксу. Кто запачкал скатерть? – спросила бабушка.

1) Витя не ставил кляксу, – сказал Алеша, – Это сделал Семен.

2) Это Витя поставил кляксу, – сказал Семен, – А Алеша не пачкал скатерть.

3) Я знаю, что Семен не мог этого сделать. – сказал Витя.

Оказалось, что двое мальчиков сказали правду, а один сказал неправду. Кто поставил на скатерть кляксу?

IV вариант

Задача 1. Определите, кто из подозреваемых участвовал в преступлении, если известно:

1) если Иванов не участвовал или Петров участвовал, то Сидоров участвовал;

2) если Иванов не участвовал, то Сидоров не участвовал.

Задача 2. Аня, Вика и Сергей решили пойти в кино. Учитель, хорошо знавший ребят, высказал предположения:

1) Аня пойдет в кино, а Вика останется дома;

2) Сергей пойдет в кино, но Аня не пойдет;

3) Сергей не пойдет в кино, и Вика не пойдет в кино.

Когда ребята пошли в кино, оказалось, что учитель немного ошибся: из трех его утверждений истинным оказались только два. Кто из ребят пошел в кино?

Задание 16. Решить табличным способом.

I вариант

Задача 1. Воронов, Павлов, Левицкий и Сахаров – 4 талантливых молодых человека. Один из них – танцор, другой – художник, третий – певец, а четвертый – писатель. О них известно следующее:

1) Воронов и Левицкий сидели в зале консерватории в тот вечер, когда певец дебютировал в сольном концерте.

2) Павлов и писатель вместе позировали художнику.

3) Писатель написал биографическую повесть о Сахарове и собирается написать о Воронове.

4) Воронов никогда не слышал о Левицком.

Задача 2. Марина, Валерия, Анна и Дарья - подруги детства. Они умеют играть на разных инструментах (пианино, гитаре, арфе и скрипке), но каждая только на одном. Они же знают иностранные языки, но каждая только один. Известно еще вот что:

1) Анна не играет на скрипке, но знает французский язык.

2) Валерия не знает английского языка и не играет ни на арфе, ни на скрипке.

3) Девушка , которая говорит по-немецки, не играет на арфе.

4) Марина не знает ни английского, ни немецкого и не играет ни на скрипке, ни на арфе.

5) Девушка, которая играет на гитаре, говорит по-итальянски.

На каком языке говорит, и на каком инструменте играет каждая девочка?

II вариант

Задача 1. Атос, Портос, Арамис и Д’Артаньян – четыре талантливых молодых мушкетёра. Один из них лучше всех сражается на шпагах, другой не имеет равных в рукопашном бою, третий лучше всех танцует на балах, четвертый без промаха стреляет с пистолетов. О них известно следующее:

1) Атос и Арамис наблюдали на балу за их другом – прекрасным танцором.

2) Портос и лучший стрелок вчера с восхищением следили за боем рукопашника.

3) Стрелок хочет пригласить в гости Атоса.

4) Портос был очень большой комплекции, поэтому танцы были не его стихией.

Кто чем занимается?

Задача 2. Жили-были на свете три поросёнка, три брата: Ниф-Ниф, Наф-Наф, Нуф-Нуф. Построили они три домика: соломенный, деревянный и кирпичный. Все три брата выращивали возле своих домиков цветы: розы, ромашки и тюльпаны. Известно, что:

1) Ниф-Ниф живет не в соломенном домике, а Наф-Наф – не в деревянном;

2) возле соломенного домика растут не розы, а тот, у кого деревянный домик, выращивает ромашки.

3) У Наф-Наф аллергия на тюльпаны, поэтому он не выращивает их.

Узнайте, кто в каком домике живет, и какие цветы выращивает.

III вариант

Задача 1. «Город мастеров». В нашем городе живут 5 друзей: Иванов, Петров, Сидорчук, Веселов и Гришин. У них разные профессии: маляр, мельник, парикмахер, почтальон, плотник. Но я точно знаю, что:

1) Петров и Гришин никогда не держали в руках малярной кисти

2) Иванов и Гришин давно собираются посетить мельницу, где работает их товарищ.

3) Петров и Веселов живут в одном доме с почтальоном.

4) Сидорчук недавно был в загсе одним из свидетелей, когда Петров и дочка парикмахера сочетались законным браком

5) Иванов и Петров каждое воскресенье играют в городки с плотником и маляром

6) Гришин и Веселов по субботам встречаются в парикмахерской, где работает их друг.

7) Почтальон же предпочитает бриться дома.

Помогите мне установить профессию каждого из друзей.

Задача 2. Три товарища, Иван, Дмитрий и Степан преподают различные предметы в школах Москвы, Санкт-Петербурга и Киева. Известно, что:

1) Иван работает не в Москве, а Дмитрий не в Ленинграде;

2) Москвич преподает не физику;

3) Тот, кто работает в Ленинграде, преподает химию;

4) Дмитрий преподает не биологию.

Какой предмет, и в каком городе преподает каждый товарищ?

IV вариант

Задача 1. В авиационном подразделении служат Потапов, Щедрин, Семенов, Коновалов и Самойлов. Их специальности: пилот, штурман, бортмеханик, радист и синоптик. Об этих людях известно следующее:

1) Щедрин и Коновалов не умеют управлять самолетом.

2) Потапов и Коновалов пока не штурманы.

3) Щедрин и Самойлов живут в одном доме с радистом.

4) Семенов был в доме отдыха вместе со Щедриным и сыном синоптика.

5) Потапов и Щедрин в свободное время любят играть в шахматы с бортмехаником.

6) Коновалов, Семенов и синоптик увлекаются боксом.

7) Радист боксом не увлекается.

Кто какой профессии?

Задача 2. Маша, Женя, Лида и Катя умеют играть на различных инструментах (виолончели, рояле, гитаре и скрипке). Они же владеют различными иностранными языками (английским, французским, немецким, испанским), но каждая только одним. Известно, что:

1) девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански.

2) Лида не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка.

3) Маша не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка.

4) Девушка, которая говорит по-немецки, не умеет играть на виолончели,

5) Женя знает французский язык, но не умеет играть на скрипке.

Кто же из девушек, какой язык знает, и на каком инструменте играет?

2.2. Приведение формул логики к днф, кнф с помощью равносильных преобразований. Представление булевой функции в виде сднф и скнф

***Цель занятия*:** научиться представлять булевы функции в виде СДНФ и СКНФ; научиться строить логические схемы, реализующие булевы функции.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Для выполнения работы необходимо знать основные формулы алгебры высказываний, методы минимизации алгебраических преобразований; необходимо уметь применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики; формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

Теоретическая часть.

Время выполнения: 90 минут.

С помощью равносильных преобразований формулу логики можно привести к дизъюнктивной или конъюнктивной нормальной форме (ДНФ и КНФ).

Дизъюнктивной нормальной формой **называется дизъюнкция простых конъюнкций.**

Пример 1. Привести к ДНФ формулу $(X \to Y)\&(Y \to Z)$.

Решение: избавляемся от импликации в скобках; раскрываем скобки, пользуясь законом дистрибутивности; упрощаем выражение, пользуясь законом непротиворечия ($Y\,\overline{Y} = 0$) и законом константы для нуля ($X \vee 0 = X$).

$(X \to Y)\&(Y \to Z) = (\bar{X} \vee Y)\&(\bar{Y} \vee Z) = \bar{X}\bar{Y} \vee \bar{X}Z \vee Y\,\bar{Y} \vee Y\,Z = \underline{\bar{X}\bar{Y} \vee \bar{X}Z \vee Y\,Z}$

Ответ: $(X \to Y)\&(Y \to Z) = \bar{X}\bar{Y} \vee \bar{X}Z \vee YZ$.

Конъюнктивной нормальной формой **называется конъюнкция простых дизъюнкций.**

Пример 2. Привести к КНФ формулу $(X \to Y)((\bar{Y} \to Z) \to \bar{X})$

Решение: избавляемся от импликации в скобках; во второй скобке используем закон де Моргана $\overline{Y \vee Z} = \overline{Y}\&\overline{Z}$ и далее закон дистрибутивности.

$(X \to Y)((\bar{Y} \to Z) \to \bar{X}) = (\bar{X} \vee Y)(\overline{Y \vee Z} \vee \bar{X}) = (\bar{X} \vee Y)((\bar{Y}\&\bar{Z}) \vee \bar{X}) = \underline{(\bar{X} \vee Y)\&(\bar{Y} \vee \bar{X})\&(\bar{Z} \vee \bar{X})}$

Ответ: $(X \to Y)((\overline{Y} \to Z) \to \overline{X}) = (\overline{X} \vee Y)\&(\overline{Y} \vee \overline{X})\&(\overline{Z} \vee \overline{X})$.

Нормальная форма называется **совершенной**, если в каждой ее элементарной дизъюнкции (конъюнкции) представлены все переменные, входящие в данную функцию (либо сами, либо с отрицанием).

Пример 3. Найти СДНФ для булевой функции: $F(x,y,z) = (x\leftrightarrow y)\vee(y\leftrightarrow z)$ аналитическим способом и с помощью таблицы истинности.

Решение:

а) С помощью законов логики заменим эквиваленцию дизъюнкцией и отрицанием, приведем булеву функцию к ДНФ.

$F(x,y,z) = (x\leftrightarrow y)\vee(y\leftrightarrow z) = (xy\vee\bar{x}\bar{y}) \vee(yz\vee\bar{y}\bar{z}) = xy\vee\bar{x}\bar{y}\vee yz\vee\bar{y}\bar{z}$.

Т. к. в каждом слагаемом не хватает по одной переменной, умножим каждое слагаемое на 1, и затем представим 1 в виде: $1 = a\vee\bar{a}$ (вместо *a* необходимо записать недостающую переменную).

$F(x,y,z) = xy1\vee\bar{x}\bar{y}1\vee yz1\vee\bar{y}\bar{z}1=xy(z\vee\bar{z})\vee\bar{x}\bar{y}(z\vee\bar{z})\vee yz(x\vee\bar{x})\vee\bar{y}\bar{z}(x\vee\bar{x})=$
$\underline{xyz}\vee xy\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee\underline{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}\vee\underline{yzx}\vee yz\bar{x}\vee\bar{y}\bar{z}x\vee\underline{\bar{y}\bar{z}\bar{x}} = xyz\vee xy\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee yz\bar{x}\vee\bar{y}\bar{z}x\vee\bar{y}\bar{z}\bar{x}$

б) Построим таблицу истинности для функции $F(x,y,z) = (x\leftrightarrow y)\vee(y\leftrightarrow z)$.

x	y	z	$x\leftrightarrow y$	$y\leftrightarrow z$	$(x\leftrightarrow y)\vee(y\leftrightarrow z)$
0	0	0	1	1	**1**
0	0	1	1	0	**1**
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	**1**
1	0	0	0	1	**1**
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	**1**
1	1	1	1	1	**1**

В последнем столбце выделим наборы, для которых значение функции истинно и для каждого набора построим элементарные конъюнкции, причем каждой переменной $x_k=1$ будет соответствовать x_k, а каждой $x_k=0$ будет соответствовать $\bar{x}_k$. Далее составляем дизъюнкции построенных элементарных конъюнкций.

$F(x,y,z) =xyz\vee\bar{x}\bar{y}z \vee\bar{x}yz\vee x\bar{y}\bar{z}\vee xy\bar{z}\vee\bar{y}\bar{z}\bar{x}$

Ответ: СДНФ $F(x,y,z) = xyz\vee xy\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee yz\bar{x}\vee\bar{y}\bar{z}x\vee\bar{y}\bar{z}\bar{x}$

Пример 4. Найти СКНФ для булевой функции: $F(x,y,z) = (x\vee y)(z\rightarrow x)$ аналитическим способом и с помощью таблицы истинности.

Решение.

а) С помощью законов логики заменим импликацию дизъюнкцией и отрицанием и приведем булеву функцию к КНФ.

$F(x,y,z) = (x\vee y)(z\rightarrow x) = (x\vee y)(\bar{z}\vee x)$.

Т. к. в каждом слагаемом не хватает по одной переменной, прибавим к каждому слагаемое 0, и затем представим 0 в виде: 0 = $a\bar{a}$ (вместо *a* необходимо записать недостающую переменную).

$F(x,y,z) = (x \vee y \vee 0)(\bar{z} \vee x \vee 0) = (x \vee y \vee z\bar{z})(\bar{z} \vee x \vee y\bar{y}) = (x \vee y \vee z)\underline{(x \vee y \vee \bar{z})}$ $\underline{(\bar{z} \vee x \vee y)}(\bar{z} \vee x \vee \bar{y}) = (x \vee y \vee z)\ (\bar{z} \vee x \vee y)\ (\bar{z} \vee x \vee \bar{y})$.

б) Построим таблицу истинности для функции $F(x,y,z) = (x \vee y)(z \to x)$.

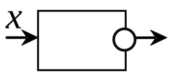
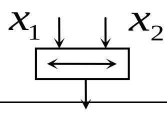
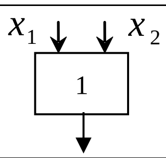
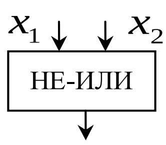
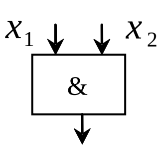
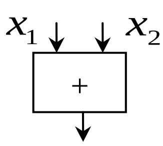
x	y	z	$x \vee y$	$z \to x$	$(x \vee y)(z \to x)$
0	0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	**0**
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

В последнем столбце выделим наборы, для которых значение функции ложно и для каждого набора построим элементарные дизъюнкции, причем каждой переменной x_k=1 будет соответствовать $\bar{x}_k$, а каждой x_k=0 будет соответствовать x_k. Далее составляем конъюкнции построенных элементарных дизъюнкций.

$F(x,y,z) = (x \vee y \vee z)\ (\bar{z} \vee x \vee y)\ (\bar{z} \vee x \vee \bar{y})$

Ответ: СКНФ: $F(x,y,z) = (x \vee y \vee z)\ (\bar{z} \vee x \vee y)\ (\bar{z} \vee x \vee \bar{y})$

Устройства, реализующие элементарные булевые функции, называются **логическими элементами**. Логические элементы изображаются в виде прямоугольников, внутри которых помещаются условные названия или символы соответствующих функций:

Функция	Графическое изображение	Функция	Графическое изображение
$\bar{x}$		$x_1 \Leftrightarrow x_2$	
$x_1 \vee x_2$		$x_1 \mid x_2$	
$x_1 x_2$		$x_1 \oplus x_2$	

Из данных логических элементов путем соединения входа одного из них с выходом другого можно строить сложные логические схемы.

Контрольные вопросы и задания

Какие законы логики применяются для ввода недостающих переменных при представлении булевой функции в виде СДНФ и СКНФ?

Приведите примеры логических схем, используемых в ЭВМ.

Задание 1.

Найти ДНФ для данной булевой функции.

Найти СДНФ для данной булевой функции аналитическим способом.

Найти СДНФ для данной булевой функции с помощью таблицы истинности.

I вариант	$F(x,y,z) = (\bar{x}y \to yz) \vee (y \leftrightarrow z)$
II вариант	$F(x,y,z) = (\overline{xy} \to xz) \vee (\bar{y} \leftrightarrow z)$
III вариант	$F(x,y,z) = (\bar{x} \leftrightarrow y) \vee (xy \to yz)$
IV вариант	$F(x,y,z) = (\bar{y}z \to \bar{x}y) \vee (x \leftrightarrow z)$

Задание 2.

Найти КНФ для данной булевой функции.

1) Найти СКНФ для данной булевой функции аналитическим способом.

2) Найти СКНФ для данной булевой функции с помощью таблицы истинности.

I вариант	$F(x,y,z) = (\bar{x} \to z\bar{y})(\bar{y} \vee x)$
II вариант	$F(x,y,z) = (\bar{x} \vee z)(y \to zx)$
III вариант	$F(x,y,z) = (\bar{y} \to x)(x \vee zy)$
IV вариант	$F(x,y,z) = (x \vee y)(x \to z\bar{y})$

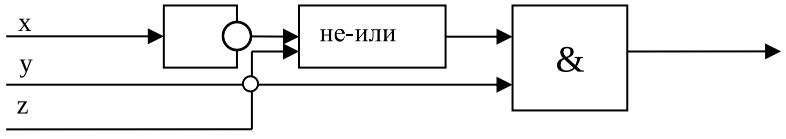
Задание 3. Для данной булевой функции построить логическую схему:

I вариант	$F(x,y,z) = (x \vee y)(\bar{x} \oplus z)$
II вариант	$F(x,y,z) = (\bar{x} \& y) \vee \overline{(x \mid z)}$
III вариант	$F(x,y,z) = (\bar{y} \vee x)(\bar{x} \oplus z)$
IV вариант	$F(x,y,z) = (x \& \bar{y}) \vee \overline{(y \mid z)}$

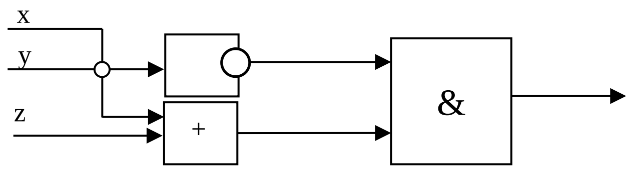
Задание 4.

По заданной логической схеме построить булеву функцию и составить ее таблицу истинности:

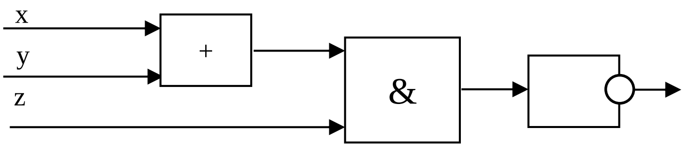
I вариант



II вариант



III вариант



IV вариант

2.3. Представление булевой функции в виде минимальной днф и кнф

Цель занятия: научиться минимизировать булевы функции с помощью равносильных преобразований и графическим методом карт Карно.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Для выполнения работы необходимо ***знать*** основные формулы алгебры высказываний, методы минимизации алгебраических преобразований; необходимо ***уметь*** применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики, формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

Теоретическая часть.

Время выполнения: 90 минут.

Нормальная форма называется ***минимальной***, если она включает минимальное число символов по сравнению со всеми другими эквивалентными ей нормальными формами.

Минимальная нормальная форма получается из СДНФ (СКНФ) удалением некоторых элементарных конъюнкций (дизъюнкций). ***Тупиковой нормальной формой*** называется ДНФ (КНФ), из которой нельзя удалить ни одной элементарной конъюнкции (дизъюнкции) так, чтобы сохранить булеву функцию неизменной.

Пример 1. Пусть булева функция задана таблицей истинности.

а) составить СДНФ для данной функции; б) минимизировать СДНФ; в) построить логическую схему, реализующую данную функцию.

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Решение.

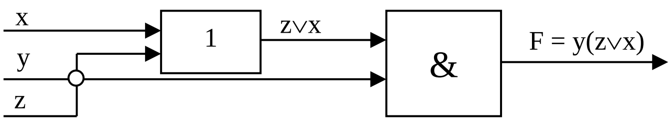
а) Найдем элементарные конъюнкции и составим СДНФ:

$F(x,y,z) = \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz$.

б) Минимизируем СДНФ с помощью равносильных преобразований:

$F(x,y,z) = \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz = (\bar{x}yz \vee xyz) \vee xy\bar{z} = yz(\bar{x} \vee x) \vee xy\bar{z} = yz \vee xy\bar{z} = y(z \vee x\bar{z}) = y(z \vee x)(z \vee \bar{z}) = y(z \vee x)$.

в) Данную функцию реализует следующая логическая схема:



Одним из наиболее удобных способов минимизации булевых функций является графический метод карт Карно. **Карты Карно** – это таблицы, состоящие из 2^n клеток (n – количество переменных). В каждой клетке находится двоичное значение (0 или 1) булевой функции из таблицы истинности или из СДНФ.

При n = 3 карты Карно имеют вид таблицы с $2^3 = 8$ клетками:

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1				
$\bar{z}$ 0				

При n = 4 карты Карно имеют вид таблицы с $2^4 = 16$ клетками.

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}$d	zd	z$\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				
xy				
$x\bar{y}$				

Пример 2. Дана функция F(x,y,z) = $\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz$. Построить минимальную нормальную форму данной функции.

Решение

1 способ: с помощью равносильных преобразований:

F(x,y,z) = $\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz = (\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz) \vee (xy\bar{z} \vee xyz) = \bar{x}y(\bar{z} \vee z) \vee xy(\bar{z} \vee z) = \bar{x}y \vee xy = y(\bar{x} \vee x) = y$

2 способ: с помощью карт Карно

1. Функция задана в виде СДНФ. Нанесем единицы на карту Карно (единицы соответствуют слагаемым в СДНФ):

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1	0	1	1	0
$\bar{z}$ 0	0	1	1	0

2. Обведем единицы попарно двумя контурами.

3. В первом контуре не меняются переменные $\bar{x}y$, во втором – переменные xy.

4. Объединим получившиеся конъюнкции дизъюнкцией: F(x,y,z) = $\bar{x}y \vee xy = y$.

В этой задаче можно рассмотреть весь квадрат из четырех единиц:

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1	0	1	1	0
$\bar{z}$ 0	0	1	1	0

В этом квадрате для всех единиц неизменной остается только переменная y, следовательно, F(x,y,z) = y.

Ответ: минимальная нормальная форма: F(x,y,z) = y.

Пример 3. Построить минимальную форму для булевой функции, заданной таблично.

x	**y**	**z**	**F**
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Решение

1. Нанесем на карту Карно единицы в соответствии со значениями последнего столбца таблицы:

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1			1	
$\bar{z}$ 0	1	1	1	1

2. Обведем единицы в два контура.

3. В первом контуре, состоящем из четырех единиц не меняется переменная z, во втором – переменные xy.

4. Объединим получившиеся результаты дизъюнкцией: **F(x,y,z) = $\boldsymbol{z}$∨xy**.

Ответ: F(x,y,z) = z∨xy.

Кроме рассмотренных методов минимизации существуют также метод Куайна, метод диаграмм Вейча. Минимальную нормальную форму удобно использовать при построении логических схем.

Контрольные вопросы и задания:

Задание 1. Привести СДНФ к минимальной двумя способами: а) с помощью равносильных преобразований; б) с помощью карт Карно.

I вариант	**II вариант**
F(x,y,z) = $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$∨$x\bar{y}\bar{z}$∨x$\bar{y}$z∨xyz	F(x,y,z) = $\bar{x}\bar{y}z$∨$x\bar{y}\bar{z}$∨x$\bar{y}$z∨xy$\bar{z}$
III вариант	**IV вариант**
F(x,y,z) = $\bar{x}\bar{y}z$∨$\bar{x}y\bar{z}$∨x$\bar{y}$z∨xy$\bar{z}$	F(x,y,z) = $\bar{x}\bar{y}z$∨$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$∨$\bar{x}y$z∨x$\bar{y}\bar{z}$

Задание 2.

Для данной булевой функции а) составить СДНФ; б) минимизировать СДНФ с помощью равносильных преобразований и карт Карно; в) построить логическую схему, реализующую функцию.

I вариант	**II вариант**	**III вариант**	**IV вариант**
F(x,y,z) = (11001000)	F(x,y,z) = (01010100)	F(x,y,z) = (11000100)	F(x,y,z) = (00110010)

Задание 3. Постройте минимальную форму для функции, выраженной картой Карно.

I вариант

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}$d	zd	z$\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$	1			1
$\bar{x}y$		1	1	1
1xy				
$x\bar{y}$	1		1	1

II вариант

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}$d	zd	z$\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$		1	1	
$\bar{x}y$		1	1	1
1xy				1
$x\bar{y}$		1	1	

III вариант

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}$d	zd	z$\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$	1	1		1
$\bar{x}y$	1	1		
1xy				
$x\bar{y}$		1	1	1

IV вариант

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}$d	zd	z$\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$	1	1		1
$\bar{x}y$			1	1
1xy	1			
$x\bar{y}$	1	1		

2.4. Исчисление предикатов. Автоматическое доказательство теорем. Метод резолюций

Цель занятия. Приобрести навыки математически анализировать суждения с помощью предикатов, применять метод резолюций для доказательства теорем.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Знает основы исчисления предикатов и умеет применять при анализе суждений.

Теоретическая часть.

Предикатом называется предложение, содержащее одну или несколько переменных, при подстановке в которые конкретных значений, предложение обращается в высказывание.

Множество М, на котором определен предикат P(x), называется областью **определения предиката**.

Множество всех элементов $x \in M$, при которых предикат принимает значение «истина», называется **множеством истинности предиката (Т).**

Пример 1. Найти множество истинности предиката P(x): $6x^2 - 24 = 0$, если его область определения множество всех действительных чисел.

Решение

Для нахождения множества истинности предиката определим корни уравнения:

$6x^2 - 24 = 0$

$x^2 = 4$

$x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Ответ: Множество истинности T(P) = {-2, 2}.

Для предикатов определены логические операции: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция и следование.

Пример 2. На множестве M = {1, 2, 3, … ,20} заданы предикаты: A (x): «x не делится на 4»; B (x): «x – нечетное число»; C (x): «x – число простое»; D (x): «x кратно 5». Определить предикаты A(x) & D(x); $A(x) \vee C(x)$; $\bar{B}(x)$; $B(x) \to D(x)$ и найти их множества истинности.

Решение

1. Найдем множества истинности для исходных предикатов:

T(A) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19}

T(B) = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}

T(C) = {1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}

T(D) = {5, 10, 15, 20}

2. A(x) & D(x): «число x не делится на 4 и кратно 5»

T(A&D) = {5, 15}

3. $A(x) \vee C$ (x): «число x не делится на 4 или простое»

$T(A \vee C)$ = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 15, 19}

4. $\bar{A}$ (x): «x делится на 4» $T(\bar{A})$ = {4, 8, 12, 16, 20}

5. $B(x) \to D$ (x): «если x нечетное число, то оно кратно 5»

$T(B \to D) = T(\bar{B} \vee D)$

$T(\bar{B})$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}

$T(\bar{B} \vee D)$ = {2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20}

Кроме логических операций над предикатами также определены две кванторные опреации: квантор общности и квантор существования.

Квантор общности (универсальный квантор) – $\forall x$.

$\forall$xP(x) – для всех (любого) x истинно P(x). Это высказывание истинно тогда и только тогда, когда предикат P(x) выполняется для каждого значения переменного x.

Квантор существования – $\exists x$.

$\exists$xP(x) – существует x, такой что истинно P(x). Это высказывание истинно тогда и только тогда, когда для некоторых значениях x выполняется предикат P(x).

Пример 3. Запишите высказывание для символичной записи $(\exists x)(\exists y)$: $(x^2 + y^2 > 25)$.

Определите истинность высказывания, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел.

Решение

Данную запись можно представить высказыванием: существует x и существует y, такие что $x^2 + y^2 > 25$. Высказывание является истинным, т. к. можно найти пару чисел x и y, для которых будет выполняться выражение $x^2 + y^2 > 25$ (например, x = 3 и y = 5).

Пример 4. Запишите высказывание «На каждой улице будет праздник» в символичной форме, введя предикаты.

Решение

1. Найдем область определения

M: x – множество всех улиц;

y – множество всех праздников.

2. Введем предикат P(x, y): x имеет свой Y.

Данное высказывание в симвоичной форме запишется в виде: $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$.

Для построения отрицания высказываний, содержащих квантор $\frac{\text{общности } (\forall)}{\text{существования } (\exists)}$, достаточно заменить его на другой квантор $\frac{\text{существования } (\exists)}{\text{общности } (\forall)}$ и взять отрицание выражения, на которое этот квантор был «навешан».

Пример 5. Для данных высказываний построить их отрицание.

1) A: «Все целые числа являются простыми».

Данное высказывание содержит квантор общности (слово «все»), заменим его на квантор существования (слово «некоторые») и добавим отрицание с помощью частицы «не».

$\overline{A}$: «Некоторые целые числа не являются простыми»

2) A: «Некоторые люди любят есть репу»

Данное высказывание содержит квантор существования (слово «некоторые»), заменим его на квантор общности («все») и добавим отрицание с помощью частицы «не».

$\overline{A}$: «Все люди не любят есть репу».

Для неформальной проверки правильности умозаключений, включающих утверждения типа «для всех» и «для некоторого», используются диаграммы Эйлера, которые состоят из кругов, изображающих множества.

Утверждению «Все p есть q» соответствует диаграмма, приведенная на рис. 1. На ней круг, изображающий множество p, содержится в круге, изображающем множество q.

Утверждение "Некоторые p есть q" представляется диаграммой на рис. 2. На этой диаграмме пересечение кругов, изображающих множества p и q, не пусто.

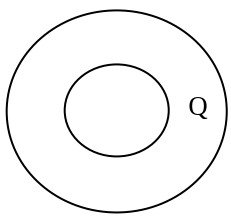


рис. 1

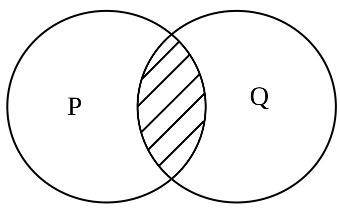


рис. 2

Контрольные вопросы и задания:

Задание 1. Найти множества истинности данных предикатов, если их область определения множество всех действительных чисел.

I вариант	**II вариант**
А) **P (x):** $x^2 - 4 = 0$; Б) **Q(x):** $3x - 2 < 17$	А) **P (x):** $2x^2 - 18 = 0$; Б) **Q(x):** $2x + 3 < 15$
III вариант	**IV вариант**
А) **P (x):** $3x^2 - 12 = 0$; Б) **Q(x):** $5x - 4 > 29$	А) **P (x):** $x^2 - 9 = 0$; Б) **Q(x):** $4x + 6 > 12$

Задание 2. На множестве M = {1,2,3, … ,20} заданы предикаты: A (x): «x не делится на 5»; B (x): «x – четное число»; C (x): «x – число простое»; D (x): «x кратно 3». Определить следующие предикаты и найти их множества истинности:

I вариант	**II вариант**
A (x) & B(x); $C\ (x) \vee$ D (x); $\bar{B}$ (x); $A\ (x) \rightarrow$ C (x);	C (x) & B (x); $B\ (x) \vee$ D (x); $\bar{C}$ (x); $C\ (x) \rightarrow$ A (x);
III вариант	**IV вариант**
C (x) & D (x); $B(x) \vee$ C (x); $\bar{A}$ (x); $D\ (x) \rightarrow C$(x);	B (x) & D (x); $A\ (x) \vee$ B (x); $\bar{D}$ (x); $A\ (x) \rightarrow$ B (x);

Задание 3. Записать высказывание и определить его истинность, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел.

I вариант	**II вариант**
$(\exists x)\ (\forall y)$: $(x + y = 10)$ $(\forall x)\ (\exists y)\ (\exists z)$: $x*y = z$	$(\forall x)\ (\exists y)$: $(x + y = 8)$ $(\forall x)\ (\forall y)$: $(x>y)$
III вариант	**IV вариант**
$(\forall x)\ (\exists y)\ (x - y = 7)$ $(\forall x)\ (\forall y)$: $(x+y>0)$	$(\exists x)\ (\forall y)\ (x - y = 5)$ $(\forall z)\ (\exists y)\ (\exists x)$: $x + y = z$

Задание 4. Записать предложенное высказывание в символичной форме, введя предикаты.

I вариант	**II вариант**
У каждого человека есть мать. Некоторые студенты – второкурсники.	Существуют города, которые больше Москвы. На каждом доме есть номер.

III вариант	IV вариант
Каждое материальное тело имеет массу. Существуют кустарники, которые больше чем деревья.	Некоторые космические тела являются астероидами. У любой группы есть классный руководитель

Задание 5. Постройте отрицание к высказываниям, содержащим кванторы.

I вариант	II вариант
Все планеты имеют атмосферу. Некоторые люди ходят в театр.	Некоторые студенты учатся на «отлично». Все птицы улетают зимой в теплые края.
III вариант	**IV вариант**
Некоторые машины красного цвета. Все компьютеры подключены к Интернету.	Все кошки любят молоко. Некоторые приборы исправны.

Задание 6. Проверьте правильность умозаключений.

I вариант	II вариант
a) Все адвокаты богаты. Все богатые едят омаров. Все адвокаты едят омаров. b) Некоторые адвокаты богаты. Некоторые врачи богаты. Некоторые врачи – адвокаты.	a) Некоторые марсиане зеленые. Все елки зеленые. Некоторые марсиане – елки. b) Все мужчины любят мясо. Некоторые учителя – мужчины. Некоторые учителя любят мясо.
III вариант	**IV вариант**
a) Все врачи любят музыку. Все поэты любят музыку. Все врачи – поэты. b) Некоторые врачи умные. Все умные люди поэты. Некоторые врачи – поэты.	a) Все машины дорогие. Велосипед не дорогой. Велосипед – не машина. b) Все мужчины смотрят телевизор. Некоторые слесари – мужчины. Некоторые слесари смотрят телевизор.

2.5. Нахождение области определения и истинности предиката. Логические операции над предикатами. Построение отрицаний к предикатам, содержащим кванторные операции

***Цель работы*:** научиться находить область определения и истинности предиката; выполнять логические операции над предикатами; формализовывать предложения, используя предикаты и кванторы; строить отрицания к высказываниям, содержащим кванторы.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Для выполнения работы необходимо ***знать*** основы языка и алгебру предикатов; необходимо ***уметь*** формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

Теоретическая часть.
Время выполнения: 90 минут.

Предикатом называется предложение, содержащее одну или несколько переменных, при подстановке в которые конкретных значений, предложение обращается в высказывание.

Множество M, на котором определен предикат P(x), называется областью **определения предиката**.

Множество всех элементов $x \in M$, при которых предикат принимает значение «истина», называется **множеством истинности предиката (T).**

Пример 1. Найти множество истинности предиката P(x): $6x^2 – 24 = 0$, если его область определения множество всех действительных чисел.

Решение

Для нахождения множества истинности предиката определим корни уравнения:

$6x^2 – 24 = 0$

$x^2 = 4$

$x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Ответ: Множество истинности T(P) = {-2, 2}.

Для предикатов определены логические операции: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция и следование.

Пример 2. На множестве M = {1, 2, 3, … ,20} заданы предикаты: A (x): «x не делится на 4»; B (x): «x – нечетное число»; C (x): «x – число простое»; D (x): «x кратно 5». Определить предикаты A(x) & D(x); $A(x) \vee$ C (x); $\bar{B}$ (x); $B(x) \to$ D (x) и найти их множества истинности.

Решение

1. Найдем множества истинности для исходных предикатов:
   T(A) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19}
   T(B) = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}
   T(C) = {1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
   T(D) = {5, 10, 15, 20}
2. A(x) & D(x): «число x не делится на 4 и кратно 5»
   T(A&D) = {5, 15}
3. $A(x) \vee$ C (x): «число x не делится на 4 или простое»
   T(A∨C) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 15, 19}
4. $\bar{A}$ (x): «x делится на 4» T($\bar{A}$) = {4, 8, 12, 16, 20}
5. $B(x) \to$ D (x): «если x нечетное число, то оно кратно 5»
   T(B→D) = T ($\bar{B}$∨D)
   T ($\bar{B}$) = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}
   T ($\bar{B}$∨D) = {2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20}

Кроме логических операций над предикатами также определены две кванторные опреации: квантор общности и квантор существования.

Квантор общности (универсальный квантор) - ∀x.

∀xP(x) – для всех (любого) x истинно P(x). Это высказывание истинно тогда и только тогда, когда предикат P(x) выполняется для каждого значения переменного x.

Квантор существования - ∃x.

∃xP(x) – существует x, такой что истинно P(x). Это высказывание истинно тогда и только тогда, когда для некоторых значениях x выполняется предикат P(x).

Пример 3. Запишите высказывание для символичной записи (∃x)(∃y): (x^2+ y^2 > 25).

Определите истинность высказывания, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел.

Решение

Данную запись можно представить высказыванием: существует x и существует y, такие что $x^2 + y^2 > 25$. Высказывание является истинным, т. к. можно найти пару чисел x и y, для которых будет выполняться выражение $x^2 + y^2 > 25$ (например, x = 3 и y = 5).

Пример 4. Запишите высказывание «На каждой улице будет праздник» в символичной форме, введя предикаты.

Решение

1. Найдем область определения

M: x – множество всех улиц

y – множество всех праздников

2. Введем предикат P(x, y): x имеет свой Y.

Данное высказывание в символичной форме запишется в виде: $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$.

Для построения отрицания высказываний, содержащих квантор $\frac{\text{общности } (\forall)}{\text{существования } (\exists)}$, достаточно заменить его на другой квантор $\frac{\text{существования } (\exists)}{\text{общности } (\forall)}$ и взять отрицание выражения, на которое этот квантор был «навешан».

Пример 5. Для данных высказываний построить их отрицание.

1) A: «Все целые числа являются простыми».

Данное высказывание содержит квантор общности (слово «все»), заменим его на квантор существования (слово «некоторые») и добавим отрицание с помощью частицы «не».

$\overline{A}$: «Некоторые целые числа не являются простыми»

2) A: «Некоторые люди любят есть репу»

Данное высказывание содержит квантор существования (слово «некоторые»), заменим его на квантор общности («все») и добавим отрицание с помощью частицы «не».

$\overline{A}$: «Все люди не любят есть репу».

Для неформальной проверки правильности умозаключений, включающих утверждения типа «для всех» и «для некоторого», используются диаграммы Эйлера, которые состоят из кругов, изображающих множества.

Утверждению "Все p есть q" соответствует диаграмма, приведенная на рис. 1. На ней круг, изображающий множество p, содержится в круге, изображающем множество q.

Утверждение "Некоторые p есть q" представляется диаграммой на рис. 2. На этой диаграмме пересечение кругов, изображающих множества p и q, не пусто.

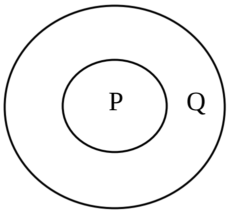


рис. 1

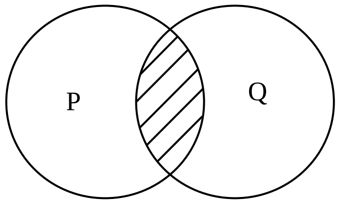


рис. 2

Контрольные вопросы и задания

1. При каких условиях высказывания $\forall xP(x)$ и $\exists xP(x)$ истинны?

2. Где используются предикаты и кванторы?

3. Как с помощью диаграмм Эйлера строятся высказывания содержащие кванторы общности и существования?

Задание 1. Найти множества истинности данных предикатов, если их область определения множество всех действительных чисел.

I вариант	**II вариант**
А) **P (x):** $x^2 - 4 = 0$; Б) **Q(x):** $3x - 2 < 17$	А) **P (x):** $2x^2 - 18 = 0$; Б) **Q(x):** $2x + 3 < 15$
III вариант	**IV вариант**
А) **P (x):** $3x^2 - 12 = 0$; Б) **Q(x):** $5x - 4 > 29$	А) **P (x):** $x^2 - 9 = 0$; Б) **Q(x):** $4x + 6 > 12$

Задание 2. На множестве M = {1,2,3, … ,20} заданы предикаты: A (x): «x не делится на 5»; B (x): «x – четное число»; C (x): «x – число простое»; D (x): «x кратно 3». Определить следующие предикаты и найти их множества истинности:

I вариант	**II вариант**
A (x) & B(x); $C\ (x) \vee$ D (x); $\bar{B}$ (x); $A\ (x) \rightarrow$ C (x);	C (x) & B (x); $B\ (x) \vee$ D (x); $\bar{C}$ (x); $C\ (x) \rightarrow$ A (x);
III вариант	**IV вариант**
C (x) & D (x); $B(x) \vee$ C (x); $\bar{A}$ (x); $D\ (x) \rightarrow C(x)$;	B (x) & D (x); $A\ (x) \vee$ B (x); $\bar{D}$ (x); $A\ (x) \rightarrow$ B (x);

Задание 3. Записать высказывание и определить его истинность, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел.

I вариант	**II вариант**
$(\exists x)\ (\forall y)$: $(x + y = 10)$ $(\forall x)\ (\exists y)\ (\exists z)$: $x*y = z$	$(\forall x)\ (\exists y)$: $(x + y = 8)$ $(\forall x)\ (\forall y)$: $(x>y)$
III вариант	**IV вариант**
$(\forall x)\ (\exists y)\ (x – y = 7)$ $(\forall x)\ (\forall y)$: $(x+y>0)$	$(\exists x)\ (\forall y)\ (x – y = 5)$ $(\forall z)\ (\exists y)\ (\exists x)$: $x + y = z$

Задание 4. Записать предложенное высказывание в символичной форме, введя предикаты.

I вариант	**II вариант**
У каждого человека есть мать. Некоторые студенты – второкурсники.	Существуют города, которые больше Москвы. На каждом доме есть номер.
III вариант	**IV вариант**
Каждое материальное тело имеет массу. Существуют кустарники, которые больше чем деревья.	Некоторые космические тела являются астероидами. У любой группы есть классный руководитель

Задание 5. Постройте отрицание к высказываниям, содержащим кванторы.

I вариант	**II вариант**
Все планеты имеют атмосферу. Некоторые люди ходят в театр.	Некоторые студенты учатся на «отлично». Все птицы улетают зимой в теплые края.
III вариант	**IV вариант**
Некоторые машины красного цвета. Все компьютеры подключены к Интернету.	Все кошки любят молоко. Некоторые приборы исправны.

Задание 6. Проверьте правильность умозаключений.

I вариант	**II вариант**
a) Все адвокаты богаты. Все богатые едят омаров. Все адвокаты едят омаров. b) Некоторые адвокаты богаты. Некоторые врачи богаты. Некоторые врачи – адвокаты.	a) Некоторые марсиане зеленые. Все елки зеленые. Некоторые марсиане – елки. b) Все мужчины любят мясо. Некоторые учителя – мужчины. Некоторые учителя любят мясо.
III вариант	**IV вариант**
a) Все врачи любят музыку. Все поэты любят музыку. Все врачи – поэты. b) Некоторые врачи умные. Все умные люди поэты. Некоторые врачи – поэты.	a) Все машины дорогие. Велосипед недорогой. Велосипед – не машина. b) Все мужчины смотрят телевизор. Некоторые слесари – мужчины. Некоторые слесари смотрят телевизор.

3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

3.1. Графы. Исследование отображений и свойств бинарных отношений с помощью графов

Цель работы: научиться определять основные характеристики графов и решать задачи с их применением.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Для выполнения работы необходимо ***знать*** основные понятия теории графов; необходимо ***уметь*** формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

Теоретическая часть.

Время выполнения: *90 минут.*

Графом G = (V, X) называется пара двух конечных множеств: V – множества вершин и X – множества ребер. Если у ребер не указано направление, то такой граф называется ***неориентированным***, у ***ориентированного*** графа каждое ребро имеет направление.

Мультиграфом называется граф, содержащий кратные ребра.

Псевдографом называется граф, содержащий петли или/и кратные ребра.

Степенью вершины графа deg(V) называется количество ребер ей инцидентных.

Операции над графами:

1. Объединение графов включает все вершины и ребра, которые содержатся в исходных графах.
2. Пересечение графов включает только одинаковые вершины и ребра, которые содержатся в исходных графах.
3. Кольцевая сумма содержит объединение графов без их пересечения.
4. Дополнение содержит те вершины и ребра, которые не хватает исходному графу до полного графа.

Эйлеровым графом называется граф, содержащий эйлеров цикл (цикл, содержащий все ребра графа только один раз).

Гамильтоновым графом называется граф, содержащий гамильтонов цикл (цикл, проходящий через каждую вершину только один раз).

Матрицей инцидентности неориентированного графа (неографа) называется таблица, состоящая из n строк (по числу вершинам) и m столбцов (ребер), в которой могут быть следующие значения:

- 1, если вершина инцидента ребру;
- 0, если вершина не инцидентна ребру;
- 2, если ребро является петлей.

Матрицей инцидентности ориентированного графа (ортграфа) называется таблица, состоящая из n строк (по числу вершин) m столбцов (ребрам), в которой могут быть следующие значения:

- -1, если вершина является началом ребра;
- 0, если вершина не инцидентна ребру;
- 1, если вершина является концом ребра;
- ±1, если ребро является петлей.

Матрицей смежности графа называется квадратная матрица с n элементам (по числу вершин), в которой могут быть следующие значения:

- 0, если между вершинами нет ребра;
- λ, если между вершинами есть ребро с кратностью λ.

Пример 1. Граф G = (V, X) задан множеством вершин, где V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} и списком ребер X = {(1, 2), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 6), (4, 5)}.

а) Постройте граф.

б) Укажите вид графа, наличие петель, изолированных вершин и кратных ребер.

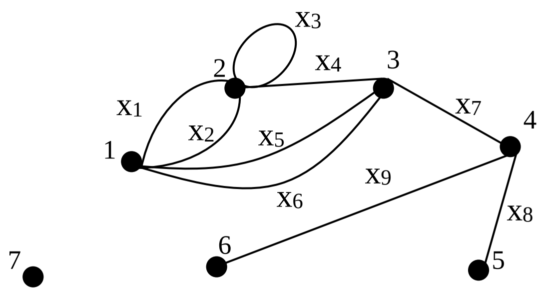
в) Определите степень каждой вершины графа.

б) Постройте матрицу инцидентности.

г) Постройте матрицу смежности.

Решение

а) Соединим попарно вершины, инцидентные каждому из заданных ребер



б) Задан неориентированный псевдограф, имеющий две пары кратных ребер: $\{(1, 2)^2, (1, 3)^2\}$.

Граф имеет изолированную вершину 7 и петлю в вершине 2.

в) deg(1) = 4, deg(2) = 5, deg(3) = 4, deg(4) = 3, deg(5) = 1, deg(6) = 1, deg(7) = 0 г) матрица инцидентности

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
2	1	1	2	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0

д) матрица смежности

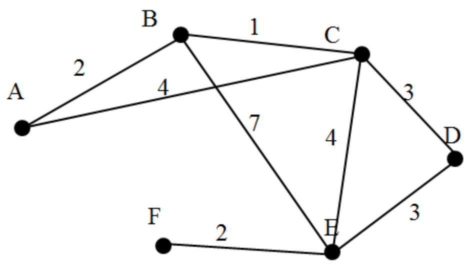
	1	2	3	4	5	6	7
1		2	2	0	0	0	0
2	2	1	1	0	0	0	0
3	2	1		1	0	0	0
4	0	0	1		1	1	0
5	0	0	0	1		0	0
6	0	0	0	1	0		0
7	0	0	0	0	0	0	

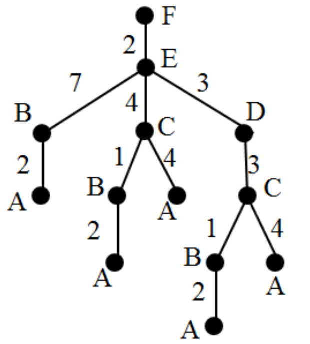
Пример 2. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет). Определите длину кратчайшего маршрута из A в F.

	A	B	C	D	E	F
A		2	4			
B	2		1		7	
C	4	1		3	4	
D			3		3	
E		7	4	3		2
F					2	

Решение

Изобразим с помощью графа данные таблицы. Точками обозначим населенные пункты. Там, где пункты соединены дорогой, там соединяем точки.





Нарисуем пути из пункта A в F. Начнем с конца, с пункта F.

Получим кратчайший путь AB-BC-CE-EF = 2 + 1 + 4 + 2 = 9.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называют графом?
2. Охарактеризуйте виды графов.
3. Какими способами можно задать граф?

Задание 1. Граф G = (V, X) задан множеством вершин, где V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} и списком ребер.

а) Постройте граф.

б) Укажите вид графа, наличие петель, изолированных вершин и кратных ребер.

в) Определите степень каждой вершины графа.

б) Постройте матрицу инцидентности.

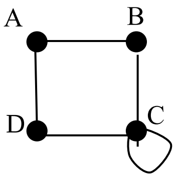
г) Постройте матрицу смежности.

I вариант X = {(2, 3), (4, 3), (7, 6), (7, 7), (7, 2), (6, 4), (2, 7), (6, 4)}

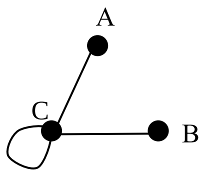
II вариант X = {(4, 5), (6, 5), (7, 6), (7, 7), (7, 2), (6, 4), (2, 7), (6, 4)}

Задание 2. Даны два графа $G_1 = (V_1, X_1)$ и $G_2 = (V_2, X_2)$. Изобразите геометрически объединение графов $G_1 \cup G_2$; пересечение графов $G_1 \cap G_2$ и кольцевую сумму $G_1 \oplus G_2$.

I вариант

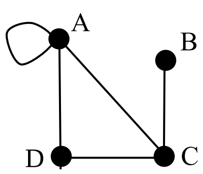


G_1

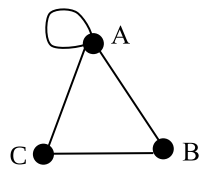


G_2

II вариант



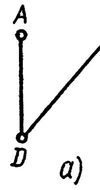
G_1



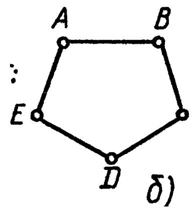
G_2

Задание 3. Изобразите дополнения графов:

I вариант



II вариант



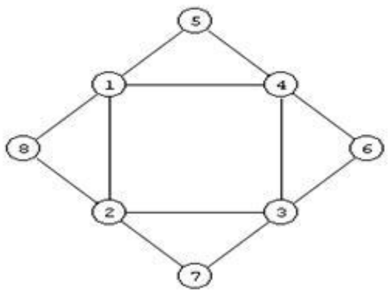
Задание 4. Решить задачу с помощью ориентированного графа:

I вариант. Из пункта А в пункт В выехали пять машин одной марки разного цвета: белая, чёрная, красная, синяя, зелёная. Чёрная едет впереди синей, зелёная – впереди белой, но позади синей, красная впереди чёрной. Какая машина едет первой и какая последней?

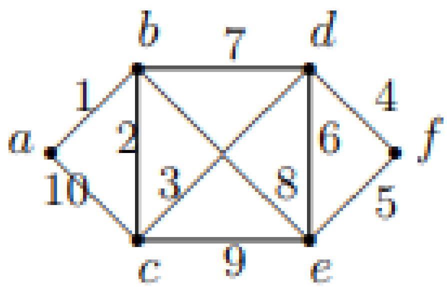
II вариант. Из Череповца в Вологду выехали пятеро велосипедистов: Белов, Чернов, Краснов, Смирнов и Захаров. Чернов едет впереди Смирнова. Захаров едет впереди Белова, но позади Смирнова. Краснов – впереди Чернова. Определите, в каком порядке едут велосипедисты.

Задание 5. Определить является ли граф эйлеровым. Проверить теорему о четности вершин эйлерова графа. Если граф является эйлеровым, то записать эйлеров цикл.

I вариант



II вариант



Задание 6. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет). Определите длину кратчайшего маршрута из A в F.

I вариант

	A	B	C	D	E	F
A		2	4	8		16
B	2			3		
C	4			3		
D	8	3	3		5	3
E				5		5
F	16			3	5	

II вариант

	A	B	C	D	E	F
A		4				
B	4		6	3	6	
C		6			4	
D		3			2	
E		6	4	2		5
F					5	

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

4.1. Работа машины Тьюринга

***Цель работы*:** научиться строить машины Тьюринга и применять нормальные алгоритмы Маркова.

Знания и умения, приобретаемые студентом в результате освоения темы, формируемые компетенции. Для выполнения работы необходимо ***знать*** основы теории алгоритмов; необходимо ***уметь*** формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

Теоретическая часть.
Время выполнения: 90 минут.

Для уточнения понятия алгоритм его заменили строго формализованными математическими моделями: рекурсивные функции, машины Тьюринга и нормальные алгоритмы Маркова.

Машина Тьюринга состоит из ленты бесконечной длины, разделенной на ячейки, и управляющей головки, которая перемещается вдоль ленты.

Создать (запрограммировать) МТ означает создать ее **устройство управления** – нарисованную или напечатанную на листе бумаги прямоугольная таблица.

Входные символы Состояния	s_0	s_1	s_2	s_n
q_1		Команды ТМ		
q_2				
q_n				

Команды ТМ записываются в виде: символ, направление передвижения, состояние.

Пример 1. На ленте есть слово, состоящее из символов #, $, 1 и 0. Составить программу, заменяющую все символы # и $ на нули. В момент запуска головка находится над первой буквой слова справа. Завершается программа тогда, когда головка оказывается над пустым символом после самой левой буквы слова.

Решение

Рассмотрим пример ленты для описанной машины Тьюринга:

	S_0Нq_0	1Лq_1	0Лq_1	0Лq_1	0Лq_1		
	S_0	1	#	$	0	S_0	

q_1 – состояние изменения символа и движения влево; q_1 – состояние остановки.

Получим следующую программу:

	S_0	1	0	#	$
q_1	S_0Нq_0	1Лq_1	0Лq_1	0Лq_1	0Лq_1

*Пример 2***.** Построить машину Тьюринга, которая прибавляет единицу к числу на ленте. Машина должна прибавить единицу к последней цифре числа. Если последняя цифра равна 9, то ее заменить на 0 и прибавить единицу к предыдущей цифре. В начальный момент машина находится против самой правой цифры числа.

Решение. Входное слово состоит из цифр целого десятичного числа, записанных в последовательные ячейки на ленте.

Программа для данной машины Тьюринга может выглядеть так:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	S_0
q_1	1Нq	2Нq	3Нq	4Нq	5Нq	6Нq	7Нq	8Нq	9Нq	0Лq	1Нq

q_1 – состояние изменения цифры, q_0 – состояние останова.

Пример 3. Алфавит машины Тьюринга состоит из символом a,b,c. Составить программу, которая переносит первый символ непустого слова Р в его конец.

Например:

	a	b	c	b		

→

		b	c	b	a	

Решение

Для решения этой задачи предлагается выполнить следующие действия:

1. Запомнить первый символ слова, используя различные состояния машины.

2. Стереть этот символ.

3. Перегнать автомат вправо под первую пустую клетку за словом, и записать в неё запомненный символ.

Программа будет следующей:

	a	b	c	S_0	
q_1	S_0Пq	S_0Пq	S_0Пq_4	S_0Нq_0	q_1 – анализ 1 символа, его удаление и разветвление программы
q_2	aПq_2	bПq_2	cПq_2	a Нq_0	q_2 – запись справа a
q_3	aПq_3	bПq_3	cПq_3	b Нq_0	q_3 – запись справа b
q_4	aПq_4	bПq_4	cПq_4	c Нq_0	q_4 – запись справа c

Нормальным алгоритмом Маркова называется непустой конечный упорядоченный набор формул подстановок. **Формулой подстановки** называется запись вида $\alpha \to \beta$, где α и β – любые слова (возможно, и пустые).

Работа алгоритма Маркова состоит из нескольких шагов:

1. Формулы просматриваются сверху вниз, начиная с верхней, выбирается первая применимая формула, далее выполняется подстановка и получается новое слово P_1.

2. Далее полученное слово P_1 берется за исходное и снова формулы просматриваются сверху вниз, начиная с верхней и т.д.

3. Работа алгоритма повторяется до тех пор, пока либо не возникнет ситуация, когда ни одна подстановка не подходит - правило остановки; либо не будет установлено, что процесс подстановок не может остановиться.

Пример 4. Дано слово 1 + 2 + 2 + 1 + 4. Какое слово получится в результате применения к нему марковских подстановок:

1) $2 + 2 \to 4$
2) $5 + 1 \to 6$
3) $1 + 4 \to 5$

Решение

$$1 + \underline{2 + 2} + 1 + 4 \xrightarrow{1} \underline{1 + 4} + 1 + 4 \xrightarrow{3} \underline{5 + 1} + 4 \xrightarrow{2} 6 + 4$$

Т. к. больше не одна подстановка не подходит, то работа алгоритма заканчивается.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте тезис Черча.
2. Какова основная цель теории алгоритмов?

Задание 1. Постройте машину Тьюринга

Замечания:

1) В задачах рассматриваются только целые неотрицательные числа, если не сказано иное.

2) Под «единичной» системой счисления понимается запись неотрицательного целого числа с помощью палочек – должно быть выписано столько палочек, какова величина числа; например: $2 \to ||$, $5 \to |||||$, $0 \to \langle$пустое слово$\rangle$.

1.1 A={a,b,c}. Приписать слева к слову P символ b (P → bP).

1.2 A={a,b,c}. Приписать справа к слову P символы bc (P → Pbc).

1.3 A={a,b,c}. Заменить на a каждый второй символ в слове P.

1.4 A={a,b,c}. Оставить в слове P только первый символ (пустое слово не менять).

1.5 A={a,b,c}. Оставить в слове P только последний символ (пустое слово не менять).

1.6 A={a,b,c}. Определить, является ли P словом ab. Ответ (выходное слово): слово ab, если является, или пустое слово иначе.

1.7 A={a,b,c}. Определить, входит ли в слово P символ a. Ответ: слово из одного символа a (да, входит) или пустое слово (нет).

1.8 A={a,b,c}. Если в слово P не входит символ a, то заменить в P все символы b на c, иначе в качестве ответа выдать слово из одного символа a.

1.9 A={a,b,0,1}. Определить, является ли слово P идентификатором (непустым словом, начинающимся с буквы). Ответ: слово a (да) или пустое слово (нет).

1.10 A={a,b,0,1}. Определить, является ли слово P записью числа в двоичной системе счисления (непустым словом, состоящем только из цифр 0 и 1). Ответ: слово 1 (да) или слово 0.

1.11 A={0,1}. Считая непустое слово P записью двоичного числа, удалить из него незначащие нули, если такие есть.

1.12 A={0,1}. Для непустого слова P определить, является ли оно записью степени двойки (1, 2, 4, 8, ...) в двоичной системе счисления. Ответ: слово 1 (является) или слово 0.

1.13 A={0,1,2,3}. Считая непустое слово P записью числа в четверичной системе счисления, определить, является оно чётным числом или нет. Ответ: 1 (да) или 0.

1.14 A={0,1}. Считая непустое слово P записью числа в двоичной системе, получить двоичное число, равное учетверенному числу P (например: 101 → 10100).

1.15 A={0,1}. Считая непустое слово P записью числа в двоичной системе, получить двоичное число, равное неполному частному от деления числа P на 2 (например: 1011 → 101).

1.16 A={a,b,c}. Если P – слово чётной длины (0, 2, 4, ...), то выдать ответ a, иначе – пустое слово.

1.17 A={0,1,2}. Считая непустое слово P записью числа в троичной системе счисления, определить, является оно чётным числом или нет. Ответ: 1 (да) или 0. (Замечание: в чётном троичном числе должно быть чётное количество цифр 1.)

1.18 A={a,b,c}. Пусть P имеет нечётную длину. Оставить в P только средний символ.

1.19 A={a,b,c}. Если слово P имеет чётную длину, то оставить в нём только левую половину.

1.20 A={a,b,c}. Приписать слева к непустому слову P его первый символ.

1.21 A={a,b}. Для непустого слова P определить, входит ли в него ещё раз его первый символ. Ответ: a (да) или пустое слово.

1.22 A={a,b}. В непустом слове P поменять местами его первый и последний символы.

1.23 A={a,b}. Определить, является P палиндромом (перевёртышем, симметричным словом) или нет. Ответ: a (да) или пустое слово.

1.24 A={a,b}. Заменить в P каждое вхождение a на bb.

1.25 A={a,b,c}. Заменить в P каждое вхождение ab на c.

1.26 A={a,b}. Удвоить слово P (например: abb → abbabb).

1.27 A={a,b}. Удвоить каждый символ слова P (например: bab → bbaabb).

1.28 A={a,b}. Перевернуть слово P (например: abb → bba).

1.29 A={0,1}. Считая непустое слово P записью двоичного числа, получить это же число, но в четверичной системе. (Замечание: учесть, что в двоичном числе может быть нечётное количество цифр.)

1.30 A={0,1,2,3}. Считая непустое слово P записью числа в четверичной системе счисления, получить запись этого числа в двоичной системе.

1.31 A={0,1,2}. Считая непустое слово P записью положительного числа в троичной системе счисления, выполнить действие:

а) увеличить это число на 1;

б) уменьшить это число на 1;

в) умножить это число на 2;

г) разделить это число на 2 (с отбрасыванием остатка);

д) найти остаток от деления на 2.

1.32 A={a,b}. Если в P символов a больше, чем символов b, то выдать ответ a, если символов a меньше символов b, то выдать ответ b, а иначе в качестве ответа выдать пустое слово.

1.33 На ленте есть слово, состоящее из символов %, #, 0 и 1. Разработайте программу, заменяющую все символы % на # и наоборот. В момент запуска головка находится над первой буквой слова справа. Завершается программа тогда, когда головка оказывается над пустым символом после самой левой буквы слова.

1.34 Постройте машину Тьюринга, которая прибавляет единицу к числу, записанному в пятеричной системе счисления. В начальный момент машина находится против самой правой цифры числа (машина должна прибавить единицу к последней цифре числа, если последняя цифра равна 4, то ее заменить на 0 и прибавить единицу к предыдущей цифре).

1.35 Входной алфавит машины Тьюринга: A={a,b}. Составить программу, удаляющую из слова P его второй символ.

Т. е. надо запомнить и стереть первый символ, передвинуть головку вправо и на месте второго символа записать первый символ.

	0					0

0				0

0				0	

1.36 На ленте есть слово, состоящее из символов №, %, 0 и 1. Разработайте программу, заменяющую все символы № на % и наоборот. В момент запуска головка находится над первой буквой слова справа. Завершается программа тогда, когда головка оказывается над пустым символом после самой левой буквы слова.

1.37 Постройте машину Тьюринга, которая прибавляет единицу к числу, записанному в шестеричной системе счисления. В начальный момент машина находится против самой правой цифры числа (машина должна прибавить единицу к последней цифре числа, если последняя цифра равна 5, то ее заменить на 0 и прибавить единицу к предыдущей цифре).

1.38 Входной алфавит машины Тьюринга: A={c,d}. Составить программу, удаляющую из слова P его второй символ.

Т. е. надо запомнить и стереть первый символ, передвинуть головку вправо и на месте второго символа записать первый символ.

	0					0

0				0

0				0	

Задание 2. Примените подстановки нормального алгоритма Маркова.

2.1 A={a,b,c}. Приписать слово bac слева к слову P.

2.2 A={a,b,c}. Заменить слово P на пустое слово, т. е. удалить из P все символы.

2.3 A={0,1,2}. Считая слово P записью числа в троичной системе счисления, получить остаток от деления этого числа на 2, т. е. получить слово 1, если число нечётно, или слово 0, если число чётно. (Замечание: в чётном троичном числе должно быть чётное количество цифр 1.)

2.4 A={a,b,c}. Определить, входит ли символ a в слово P. Ответ (выходное слово): слово a, если входит, или пустое слово, если не входит.

2.5 A={a,b}. Если в слово P входит больше символов a, чем символов b, то в качестве ответа выдать слово из одного символа a, если в P равное количество a и b, то в качестве ответа выдать пустое слово, а иначе выдать ответ b.

2.6 A={0,1,2,3}. Преобразовать слово P так, чтобы сначала шли все чётные цифры (0 и 2), а затем – все нечётные.

2.7 A={a,b,c}. Преобразовать слово P так, чтобы сначала шли все символы a, затем – все символы b и в конце – все символы c.

2.8 A={a,b,c}. Определить, из скольких различных символов составлено слово P; ответ получить в единичной системе счисления (например: acaac $\rightarrow$ | |).

2.9 A={a,b,c}. В непустом слове P удвоить первый символ, т. е. приписать этот символ слева к P.

2.10 A={a,b,c}. За первым символом непустого слова P вставить символ c.

2.11 A={a,b,c}. Из слова P удалить второй символ, если такой есть.

2.12 A={a,b,c}. Если в слове P не менее двух символов, то переставить два первых символа.

2.13 A={0,1,2}. Считая непустое слово P записью троичного числа, удалить из этой записи все незначащие нули.

2.14 A={a,b,c}. Приписать слово abc справа к слову P.

2.15 A={a,b,c}. Удалить из непустого слова P его последний символ.

2.16 A={0,1}. Считая непустое слово P записью числа в двоичной системе, получить двоичное число, равное учетверённому числу P (например: 101 $\rightarrow$ 10100).

2.17 A={0,1}. Считая непустое слово P записью числа в двоичной системе, получить двоичное число, равное неполному частному от деления числа P на 2 (например: 1011 $\rightarrow$ 101).

2.18 A={a,b}. В слове P все символы a заменить на b, а все (прежние) символы b – на a.

2.19 A={a,b,c}. Удвоить каждый символ в слове P (например: bacb $\rightarrow$ bbaaccbb).

2.20 A={a,b}. Приписать слева к слову P столько палочек, сколько всего символов входит в P (например: babb → ||||babb).

2.21 A={a,b}. Пусть слово P имеет чётную длину (0, 2, 4, ...). Удалить левую половину этого слова. (Рекомендация: использовать решение предыдущей задачи.)

2.22 A={a,b}. Пусть длина слова P кратна 3. Удалить правую треть этого слова.

2.23 A={a,b}. Приписать справа к слову P столько палочек, со скольких подряд идущих символов a начинается это слово (например: aababa → aababa| |).

2.24 A={a,b,c}. Удалить из слова P второе вхождение символа a, если такое есть.

2.25 A={a,b,c}. В непустом слове P оставить только последний символ.

2.26 A={a,b,c}. Из всех вхождений символа a в слово P оставить только последнее вхождение, если такое есть.

2.27 A={a,b,c}. Если слово P начинается с символа a, то заменить P на пустое слово, а иначе P не менять.

2.28 A={a,b}. Если слово P содержит одновременно символы a и b, то заменить P на пустое слово.

2.29 A={a,b,c}. Если буквы в непустом слове P не упорядочены по алфавиту, то заменить P на пустое слово, а иначе P не менять.

2.30 A={a,b,c}. Если P отлично от слова abaca, то заменить его на пустое слово.

2.31 A={0,1}. Считая непустое слово P записью двоичного числа, определить, является ли это число степенью 2 (1, 2, 4, ...). Ответ: слово 1, если является, или слово 0 иначе.

2.32 A={0,1,2,3}. Считая непустое слово P записью четверичного числа, проверить, чётно оно или нет. Ответ: слово 0, если чётно, и слово 1 иначе.

2.33 A={0,1,2,3}. Считая непустое слово P записью четверичного числа, получить остаток от деления этого числа на 4.

2.34 A={0,1}. Считая непустое слово P записью двоичного числа, получить это же число, но в четверичной системе. (Замечание: учесть, что в двоичном числе может быть нечётное количество цифр.)

2.35 A={0,1,2}. Считая непустое слово P записью троичного числа, увеличить это число на 1.

2.36 A={0,1,2}. Считая непустое слово P записью положительного троичного числа, уменьшить это число на 1. равным 0.)

2.37 A={a,b,c}. Определить, входит ли первый символ непустого слова P ещё раз в это слово. Ответ: слово a, если входит, или пустое слово иначе.

2.38 A={a,b}. Перенести последний символ непустого слова P в начало слова.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Практикум содержит дополнительную информацию к теоретическому материалу лекций дисциплины «Дискретная математика с элементами математической логики». Предназначен для помощи студентам в освоении практических навыков и умений.

В каждом из четырех разделов в доступной форме кратко представлен конкретный теоретический материал, разбираются примеры решения задач, даются контрольные вопросы для проверки знаний и задания для самостоятельной работы.

Данный практикум поможет студентам овладеть основами математической логики, навыками решения логических задач.

Разработанный практикум может быть внедрен в учебный процесс при подготовке студентов специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Спирина М.С. Дискретная математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. Образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2018. – 368 с.

2. Спирина М.С. Дискретная математика: Сборник задач с алгоритмами решений математика: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования/ М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. – 288 с.

3. Гусева А.И. Дискретная математика: учебник / А.И. Гусева, В.С. Киреев, А.Н. Тихомирова. – М.: КУРС: ИНФРА-М, 2018. – 208 с. – СПО (*электронно-библиотечная система znanium.com).*

4. Гусева А.И. Дискретная математика: сборник задач / А.И. Гусева, В.С. Киреев, А.Н. Тихомирова. – М.: КУРС: ИНФРА-М, 2018. – 224 с. – СПО (*электронно-библиотечная система znanium.com).*

5. Канцедал С.А. Дискретная математика: учеб. пособие/ С.А. Канцедал. – М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2018. – 222с. – СПО (*электронно-библиотечная система znanium.com).*

ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

1. Онлайн-калькулятор по математической логике. – URL: http://tablica-istinnosti.ru/ru/.

2. Прикладная математика. Справочник математических формул. Примеры и задачи с решениями. – URL: http://www.pm298.ru.

3. Математический форум MathHelpPlanet. Обсуждение и решение задач по математике, физике, химии, экономике – URL: http://mathhelpplanet.com/static.php.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Составитель:
Русанова Анна Васильевна

Практикум по выполнению практических работ студентов специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» по дисциплине «Дискретная математика с элементами математической логики»

Авторская редакция
Компьютерная верстка: Т.В. Опарина

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел. : + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru