Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра дифференциальных уравнений

И.Н. Банщикова, Т.С. Быкова

Сборник индивидуальных заданий по линейной алгебре

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2024

УДК 512.64 (075.8)
ББК 22.143я73
Б230
Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доцент каф. прикладной математики и инфор. технологий ИжГТУ имени М.Т. Калашникова А.Г. Ицков

Банщикова И.Н., Быкова Т.С.

Б230 Сборник индивидуальных заданий по линейной алгебре : учеб.-метод. пособие : [Электрон. ресурс]. – Ижевск : Удмуртский университет, 2024. – 104 с.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов бакалавриата 1-2 курсов направлений подготовки 19.03.01 Биотехнология, 06.03.01 Биология, изучающих дисциплину «Математика». Пособие может быть использовано при организации практических и самостоятельных работ студентов по данной дисциплине. Учебно-методическое пособие также может быть полезно студентам математических специальностей высших учебных заведений при изучении тем, связанных с линейной алгеброй.

В пособии представлены следующие темы линейной алгебры: матрицы, операции с матрицами, определитель матрицы, минор элемента матрицы, алгебраическое дополнение элемента матрицы, обратная матрица, ранг матрицы, способы решения систем линейных алгебраических уравнений. Сборник содержит 30 вариантов индивидуальных заданий, а также подробный разбор решения типовых задач.

УДК 512.64 (075.8)
ББК 22.143я73

Оглавление

Введение

Линейная алгебра – одна из базовых математических дисциплин. Она является основой для многих разделов высшей математики, например, для векторной алгебры, аналитической геометрии, функционального анализа, дифференциальных уравнений. Методы линейной алгебры широко используются при решении прикладных задач, в том числе, в математическом моделировании, в теории приближений, в линейном программировании, в эконометрике и естественных науках (напр., в квантовой механике). Очень важна роль линейной алгебры в обработке информации, и следовательно, в информатике и программировании.

Таким образом, линейная алгебра, является обязательной для освоения всеми студентами естественно-научных направлений.

Данное пособие нацелено на отработку базовых навыков матричной алгебры и связанной с ней теорией систем линейных алгебраических уравнений. В пособии представлено 30 вариантов индивидуальных заданий, а также подробный разбор решения типовых задач.

Теоретические вопросы

1. Определение матрицы.
2. Типы матриц.
3. Сумма матриц: определение, свойства.
4. Произведение матрицы на число: определение, свойства.
5. Произведение матриц: определение, свойства.
6. Транспонирование матриц: определение, свойства.
7. Элементарные преобразования матриц. Ступенчатые матрицы.
8. Линейная зависимость / независимость строк (столбцов) матрицы.
9. Определители малых порядков.
10. Определение минора и алгебраического дополнения элемента квадратной матрицы.
11. Определение определителя произвольного порядка.
12. Теорема разложения определителя произвольного порядка по строке (по столбцу).
13. Свойства определителей.
14. Применение свойств при вычислении определителей.
15. Обратная матрица: определение, свойства.
16. Алгоритм нахождения обратной матрицы.
17. Ранг матрицы: определение, способы вычисления.
18. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): координатная и матричная записи. Однородные / неоднородные системы.
19. Определение решения системы линейных алгебраических уравнений. Совместные /несовместные системы.
20. Критерий совместности СЛАУ.
21. Матричный метод решения СЛАУ.
22. Формулы Крамера решения СЛАУ.
23. Метод Гаусса решения СЛАУ.
24. Определенные / неопределенные СЛАУ. Условия определенности / неопределенности СЛАУ.

Индивидуальные задания
Вариант 1

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & -3 & 2\\ 1 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -4 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 4 & 3 & -4\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}3 & 8 & 12\\ -5 & -10 & 3\\ 10 & -2 & -5\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1 & -6\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}20 & 23\\ -27 & -31\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & -2 & -10\\ -14 & 36 & 30\\ -10 & 5 & 20\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 1\\ 5 & -5 & 1 & -2\\ 0 & 3 & -5 & 0\\ 4 & 1 & -2 & -2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & -1 & 2\\ 3 & -8 & -7 & 0 & 11\\ 1 & -3 & 0 & 1 & 2\\ 6 & -17 & -13 & 0 & 14\\ 3 & -9 & -6 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{31} и алгебраическое дополнение элемента a_{24} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & -4\\ -9 & 10 & 6 & 4\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB-2C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -3\\ -3 & -1 & 4\\ -4 & -2 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}11 & 4\\ 13 & 5\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 81 & 40 \\ -35 & -24 \\ -72 & -30 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} 2x - 3y = -4, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x + 2y + 4z = 0, \\ -4x + y - 8z = -3, \\ 3x - y + 2z = 7. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 5x + 12y - 2z = -1, \\ 4x + 8y - 4z = 12. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x + y - z = 1, \\ x + 2y - 2z = 3, \\ -4x - 2y + 2z = 5. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -1, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если

$$\vec{a} = (1; 5; 4), \vec{b} = (2; 12; 9), \vec{c} = (-1; -2; -2), \vec{d} = (3; -1; 2).$$

Вариант 2

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}-6&1&2&3\\4&1&0&-2\\3&1&2&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&8\\0&2\\1&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&4&-3\\4&-2&-1\\-2&2&-1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}13&-1&4\\-5&11&-8\\-2&-4&4\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}3&2&-4&-4\\1&0&1&0\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}34&20\\-29&-17\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&-4&-9\\7&-36&-27\\-6&13&27\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&-2&1&-4\\0&-2&0&5\\-7&12&-6&18\\1&-3&1&-4\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&-3&0&0&4\\2&-5&-3&-1&13\\1&-3&2&-3&4\\0&1&-3&2&6\\-2&6&0&3&-5\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{41} и алгебраическое дополнение элемента a_{23} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-3&5&1&5\\1&0&1&1\\0&1&0&-2\\-9&15&4&16\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB+2C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\5&-3&-5\\4&-4&-7\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}5&1\\7&2\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 8 & -2 \\ -17 & -12 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \\ -6 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} -2x + 3y = 1, \\ -x + 2y = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x + 3y + z = -5, \\ -x + 4y - 3z = -3, \\ 2x - 5y + 2z = -8. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x - 2y + 6z = -7, \\ -2x + y - z = -2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + 3y + z = 1, \\ x - 2y - 3z = 3, \\ -2x + 4y + 6z = -8. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если

$\vec{a} = (1; 4; 2), \vec{b} = (3; -1; -1), \vec{c} = (-13; 1; 3), \vec{d} = (-6; 3; 3).$

Вариант 3

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 5 & -1\\ 0 & -3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 16\\ -1 & 4\\ -1 & 8\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4 & -2 & 4\\ -1 & 1 & 3\\ -2 & 4 & 0\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}4 & -5 & -5\\ 4 & 8 & 2\\ 3 & -2 & 3\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}-5 & 4 & -8 & -8\\ -1 & 1 & -1 & -2\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-36 & -15\\ 41 & 17\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-5 & -1 & -8\\ 26 & 15 & 40\\ 20 & 5 & 32\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 1\\ 5 & 3 & -5 & 2\\ 0 & 3 & -5 & 0\\ 8 & 13 & -4 & 4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 2 & 3\\ -2 & -9 & -7 & 1 & -4\\ -2 & -10 & -6 & -1 & -3\\ -1 & -4 & -3 & 6 & 4\\ 1 & 5 & 4 & 5 & 11\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{31} и алгебраическое дополнение элемента a_{22} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 3\\ 3 & -8 & 6 & 16\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB-2C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -3\\ 6 & 4 & -1\\ 10 & 6 & -5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 15 & 13 \\ 13 & 27 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 & 3 \\ 6 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} -x + 5y = 1, \\ -x + 2y = 6. \end{cases}$

б) $\begin{cases} -8x - 2y - 5z = 8, \\ 3x + y + 4z = 7, \\ 4x - 2y + 7z = -4. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 4, \\ x - y + 2z = -1 \\ 3x - 2y + 4z = 3. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y + 2z = -2, \\ x - y + 2z = -7, \\ 2x + 3y + 4z = 1. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_1 - x_2 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + x_3 + 4x_4 = 3, \\ 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если

$\vec{a} = (2; 3; 2), \vec{b} = (1; -2; -3), \vec{c} = (-1; 2; 1), \vec{d} = (-4; 1; -6).$

Вариант 4

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}0 & -3 & 2 & 3\\ 4 & -5 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 4 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ -3 & 10 & 1\\ -4 & 4 & 7\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}8 & 2 & 1 & -4\\ -15 & -4 & -1 & 8\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}47 & 15\\ -41 & -13\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -7\\ -29 & -48 & -42\\ 10 & -3 & 14\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 5\\ 0 & -7 & 0 & 5\\ -2 & 1 & -1 & -1\\ 3 & 2 & 1 & 5\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -13 & 7 & 4\\ -2 & 0 & 8 & -3 & 0\\ 5 & 1 & -19 & 14 & 5\\ 2 & 0 & -6 & 7 & 5\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{41} и алгебраическое дополнение элемента a_{32} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -2 & 5\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ -15 & -5 & 6 & -14\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB-3C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -3 & -2\\ 2 & 4 & 1\\ -2 & -6 & -3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 9 & -9 \\ -19 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & -6 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} 3x + 3y = 4, \\ -x + 2y = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x + 8y - 9z = 7, \\ -2x + 3y + 4z = -5, \\ x + 7y + 2z = 6. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x - y + z = 3, \\ 3x - 3y + 2z = 7. \end{cases}$

г) $\begin{cases} -x + 3y + 4z = -6, \\ -6x + 6y + 7z = -8, \\ 5x - 3y - 3z = -2. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если

$$\vec{a} = (1; 4; 2), \vec{b} = (1; -3; 1), \vec{c} = (-1; 1; -1), \vec{d} = (-2; 1; 1).$$

Вариант 5

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 14\\ 2 & 9\\ 2 & 7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 4\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}6 & -8 & -5\\ 4 & 0 & -2\\ -6 & 12 & 8\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}-3 & 9 & -7 & -18\\ 1 & -2 & 2 & 4\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}87 & 47\\ -76 & -41\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-5 & -4 & -6\\ -29 & 96 & -36\\ -20 & -15 & -24\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & 4 & 2 & 1\\ 9 & 15 & 14 & 4\\ 0 & 1 & -5 & 0\\ 4 & 9 & 4 & 2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 4 & 1\\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3\\ 1 & 0 & -1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 6 & 1\\ 2 & 0 & -6 & 11 & 3\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{31} и алгебраическое дополнение элемента a_{24} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -2 & -1\\ -3 & -14 & 6 & 4\\ -3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB+2C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ -2 & 4 & -11\\ 4 & -4 & 17\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ -3 & 15 \\ 25 & -17 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & -4 & 3 \\ -6 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -5 \\ 6 & 9 & 1 \\ 1 & -12 & -6 \\ 8 & -15 & -11 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} 8x - 3y = 3, \\ -x + 2y = 5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3x + 2y + z = 3, \\ 6x - 2y + 3z = -8, \\ -2x + 2y - z = 8. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y - z = -2, \\ 3x - y + 2z = 9, \\ 4x + z = 7. \end{cases}$

г) $\begin{cases} -3x - 4y + 2z = 5, \\ -8x - 8y + z = 4, \\ 5x + 4y + z = -2. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (1; 2; 3), \vec{b} = (-3; 7; 1), \vec{c} = (-4; 3; -1), \vec{d} = (15; -7; 14)$.

Вариант 6

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -2 & 3\\ 4 & 6 & 5 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ 4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5 & 2 & -4\\ 4 & 2 & 0\\ 3 & 2 & -4\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}9 & 12 & 4\\ 2 & 6 & 0\\ 0 & -8 & 5\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}-8 & -2 & -1 & 4\\ -17 & -4 & -3 & 8\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-29 & -17\\ 43 & 25\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 1 & -5\\ -24 & 10 & 25\\ 30 & 7 & -30\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-5 & -3 & 1 & -4\\ 0 & -3 & 0 & 5\\ 6 & 2 & -1 & 7\\ 20 & 13 & -4 & 16\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & -3 & -4 & 1 & 4\\ 2 & -5 & -8 & 3 & 5\\ 3 & -9 & -10 & 8 & 9\\ 5 & -14 & -20 & 9 & 14\\ 3 & 9 & -12 & 6 & 15\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{41} и алгебраическое дополнение элемента a_{23} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -4 & 1 & 0\\ -12 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB-3C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 3\\ -3 & -11 & 9\\ 3 & 9 & -8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}9 & 3\\ 29 & 10\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 36 & 21 \\ -31 & -20 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 6 \\ -1 & 0 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 7 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} 8x + 3y = 3, \\ x + 2y = 5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 2y + 4z = -8, \\ 5x + 4y - 3z = -1, \\ -2x - 3y + z = -7. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y - z = 6, \\ 3x - y + 3z = -7, \\ 4x + y + 2z = -1. \end{cases}$

г) $\begin{cases} -x + y + 3z = 8, \\ -5x + 2y + 5z = 6, \\ 4x - y - 2z = -2. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (1; 3; 2), \vec{b} = (2; 2; 3), \vec{c} = (3; 1; 1), \vec{d} = (3; 5; 2)$.

Вариант 7

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}6&4&3&2\\-1&4&3&0\\2&1&6&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6&-2\\1&1\\3&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4&-4&-2\\-2&-2&2\\2&-2&4\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}9&1&9\\0&6&-5\\-11&3&3\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\2&-1&3&2\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-13&15\\16&-19\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6&2&-4\\31&-50&-20\\-24&-7&16\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}6&2&-4&1\\-1&2&0&0\\0&6&-5&0\\12&3&-8&2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&4&-2&5&-1\\-1&-3&6&-1&0\\-1&-4&4&-9&1\\2&9&0&17&-7\\3&12&-6&18&0\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{31} и алгебраическое дополнение элемента a_{22} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5&-4&-2&-2\\-2&1&0&1\\0&1&1&0\\15&-11&-6&-5\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:

а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;

б) матрицу X из уравнения $AXB+3C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\10&4&2\\-3&-1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&-2\\5&7\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix},\, D=\begin{pmatrix}23 & 13\\ 49 & 74\\ -24 & -18\end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A=\begin{pmatrix}6 & -7 & 2 & -9\\ 0 & -3 & 5 & 4\\ -7 & 6 & 1 & -3\\ -1 & -1 & 3 & -12\end{pmatrix},\, B=\begin{pmatrix}1 & -3 & -7\\ 6 & 8 & -9\\ 8 & 2 & -23\\ 7 & 5 & -16\end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases}-4x+y=-1,\\ 2x-4y=5.\end{cases}$

б) $\begin{cases}3x+5y+3z=-10,\\ -4x-3y-7z=8,\\ -2x+y-5z=2.\end{cases}$

в) $\begin{cases}2x+4y+z=4,\\ 3x+6y+2z=4,\\ x+2y+z=0.\end{cases}$

г) $\begin{cases}-2x+y-2z=4,\\ -2x+2y-6z=7,\\ -y+4z=-2.\end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3-2x_4=-1,\\ -x_1+x_2-2x_3=-2,\\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4=4,\\ 3x_2-3x_3+2x_4=-1.\end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если $\vec{a}=(1;3;4),\vec{b}=(2;2;-1),\vec{c}=(3;1;-1),\vec{d}=(2;-6;-9)$.

Вариант 8

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 4\\ 6 & -1 & 2 & -3\\ 4 & 3 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 2\\ -2 & 4 & 4\end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix}6 & 6 & 2\\ 14 & 12 & 7\\ 15 & 13 & 7\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}8 & 2 & 1 & -4\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}41 & -15\\ -35 & 13\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 1 & -3\\ 31 & -30 & -18\\ -25 & -4 & 15\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1 & -4\\ 0 & -8 & 0 & 5\\ 13 & -9 & 3 & -8\\ -8 & 5 & -2 & 8\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 4 & -2 & -2 & 3\\ -2 & -7 & 8 & 7 & -7\\ 3 & 12 & -4 & -8 & 10\\ 1 & 5 & 2 & 4 & 2\\ 3 & 12 & -6 & -3 & 17\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{41} и алгебраическое дополнение элемента a_{32} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}4 & -4 & 4 & 1\\ -12 & 13 & -12 & -2\\ 5 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1 & -4\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB-3C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 1\\ 2 & 4 & 0\\ -3 & -9 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 23 & 7\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-34 & -2\\ 85 & 26\\ -52 & -29\end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A=\begin{pmatrix}9 & -1 & 2 & -3\\ 4 & -5 & -2 & 1\\ 0 & -3 & -4 & -6\\ 1 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 4\\ -3 & -4 & 5\\ 3 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} 2x+6y=1,\\ -5x+3y=0.\end{cases}$

б) $\begin{cases} -5x-4y+7z=2,\\ -x+9z=-6,\\ 4x+2y-8z=8.\end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+2y+z=5,\\ 2x+3y+z=1,\\ x-y=4.\end{cases}$

г) $\begin{cases} x-4y-3z=4,\\ -5x+6y-4z=3,\\ 6x-10y+z=7.\end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1,\\ -x_1-x_2+x_4=-1,\\ 2x_2-3x_3-2x_4=0,\\ 2x_1+x_2+x_3=2.\end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если $\vec{a}=(1;3;5), \vec{b}=(1;2;3), \vec{c}=(1;1;3), \vec{d}=(2;7;14)$.

Вариант 9

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\5&-5&3&2\\0&-1&0&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2&6\\-3&5\\-1&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&4&4\\1&3&2\\-2&2&-4\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}0&0&4\\12&8&-6\\-2&0&9\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}-1&5&-3&-10\\0&3&-1&-6\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-13&14\\17&-19\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-11&32&8\\-6&5&4\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}3&-3&2&1\\7&-6&9&2\\0&-4&-5&0\\9&-8&6&3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&2&4&0&2\\0&1&3&5&1\\-1&-2&-2&-3&2\\-2&-3&-5&8&0\\-2&-4&-8&3&8\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{31} и алгебраическое дополнение элемента a_{24} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&-4&-1\\-4&1&0&1\\0&3&1&-4\\3&-2&12&4\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB-2C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1&-3&1\\1&1&-2\\-3&-9&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&-2\\-1&-5\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 8 & 22 \\ -5 & -4 \\ 7 & 64 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 3 & 0 \\ -6 & 1 & -5 & -11 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & 4 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} -5x + 6y = 3, \\ 2x + 4y = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} -4x + 2y + 4z = 4, \\ 7x - 5y - 8z = -2, \\ 5x + y + 2z = 2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 3x + 4z = -5. \end{cases}$

г) $\begin{cases} -4x + 4y - 5z = -1, \\ -7x + 5y - 8z = -2, \\ 3x - y + 3z = 7. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (-1; 1; 3), \vec{b} = (3; -2; -1), \vec{c} = (-1; 3; 2), \vec{d} = (2; 6; 7)$.

Вариант 10

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -4\\ -5 & 6 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ -2 & 6\\ -1 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4 & -3 & 3\\ 2 & -4 & 4\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & -5 & -1\\ 6 & 14 & -3\\ 0 & -5 & 4\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}17 & 6 & -4 & -12\\ 6 & 2 & -1 & -4\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-52 & -22\\ 69 & 29\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -1\\ -11 & 54 & -6\\ -6 & -8 & -3\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 1 & 2\\ 0 & -5 & 0 & 5\\ -11 & 10 & 3 & 11\\ -8 & 7 & 2 & 4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & -1 & -4 & -2 & -2\\ -2 & 3 & 4 & 9 & 4\\ -1 & 1 & 6 & 6 & 3\\ 1 & 0 & -8 & 6 & -2\\ 3 & -3 & -12 & -3 & 4\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{41} и алгебраическое дополнение элемента a_{23} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1 & -1\\ 5 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -4 & 1 & -2\\ -10 & 3 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB-3C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ -5 & -1 & 1\\ 9 & 3 & -5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}11 & 4\\ -20 & -7\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}18 & 12\\ 23 & 13\\ 49 & 8\end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 5 & 0 & -3\\ -4 & -9 & 6 & 3\\ 4 & -7 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 3 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & -3 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -4\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} x-6y=2,\\ 5x+3y=1.\end{cases}$

б) $\begin{cases} -2x+2y-3z=2,\\ 3y+9z=3,\\ -4x+y-10z=-9.\end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y-z=1,\\ 8x+3y-6z=2,\\ 7x+2y-5z=1.\end{cases}$

г) $\begin{cases} -4x+4y-5z=-1,\\ -7x+5y-8z=-2,\\ 3x-y+3z=7.\end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3-x_4=-2,\\ x_1+x_3-x_4=0,\\ -x_1+3x_2-x_3+2x_4=3,\\ 3x_2-2x_3+4x_4=3.\end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если $\vec{a}=(6;-1;1), \vec{b}=(0;1;2), \vec{c}=(-1;1;3), \vec{d}=(2;-1;5)$.

Вариант 11

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\6&5&1&-3\\0&2&1&-3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-6&4\\7&-6\\-3&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&-4&4\\1&2&-2\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&15&-7\\2&-14&7\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}-3&-6&-2&12\\-4&-7&-3&14\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-16&-11\\19&13\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&6&-10\\-7&-72&40\\8&25&-40\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}4&1&-1&1\\19&9&-11&5\\0&2&-5&0\\20&4&-5&5\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&-4&1&-4&4\\-1&5&-2&4&-4\\-2&8&0&7&-11\\-3&13&-4&15&-14\\-2&8&-2&11&-9\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{31} и алгебраическое дополнение элемента a_{22} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-1&-4&0&5\\-3&0&1&1\\3&12&1&-14\\0&1&-2&-4\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:

а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;

б) матрицу X из уравнения $AXB+4C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\13&5&-11\\-9&-3&7\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}11&4\\2&1\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 31 & 0 \\ 58 & 34 \\ -42 & -12 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & -7 & 5 & 11 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x + y + 2z = -6, \\ -6x - 2y - 2z = -4, \\ 5x + 2y + z = 9. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x + 3y = 5. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6x + 5y + z = 0, \\ x + y = -5, \\ 7x + 6y + z = 2. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 - x_3 - x_4 = -1, \\ x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (3; 1; 4), \vec{b} = (4; 2; -1), \vec{c} = (1; 3; 1), \vec{d} = (10; 12; 6)$.

Вариант 12

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}3&4&-5&6\\1&2&4&3\\6&1&0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}10&-4\\7&-2\\5&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4&4&0\\-2&3&4\\0&-4&-1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}3&-6&4\\12&-8&-2\\8&2&-6\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1&-2&2&4\\2&-7&5&14\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}29&41\\-34&-48\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-4&-4&-9\\-15&-48&-36\\-24&-23&-54\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}5&1&1&3\\0&4&0&5\\14&4&3&9\\20&3&4&12\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&3&2&5&-1\\-1&-2&-1&-8&3\\2&6&2&11&-6\\2&5&3&10&-1\\-1&-3&-2&-2&0\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{41} и алгебраическое дополнение элемента a_{32} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-4&-4\\6&-2&-12&-11\\-4&1&0&1\\0&5&1&-2\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:

а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;

б) матрицу X из уравнения $AXB-3C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}6&4&-2\\19&13&-3\\-6&-4&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3&-3\\11&10\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 17 & 4 \\ 74 & 52 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 6 & -2 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & -5 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -9 \\ 3 & 1 & -4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} 4x - y = 1, \\ x - 3y = 5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} -9x - 8y + 2z = 1, \\ 3x + 5y + z = 5, \\ 7x + 6y - 2z = -3. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y - z = 5, \\ x - 2y + 2z = -5, \\ 3x - y + z = 0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} -3x + 6y + 4z = 0, \\ 3x - 2y - 3z = 2, \\ 4y + z = 6. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 1, \\ 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - x_4 = -3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (9; 2; 1), \vec{b} = (-9; -1; 1), \vec{c} = (-1; 4; -1), \vec{d} = (37; 2; 1)$.

Вариант 13

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$A=\begin{pmatrix}4 & -6 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 2 & -3\\ 4 & -4 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 7 & 11\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ -2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -4\\ 6 & 1 & -6\\ 1 & -6 & 8\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}2 & 11 & -1 & -22\\ -1 & -7 & 1 & 14\end{pmatrix}$, E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}19 & 31\\ -24 & -39\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & -5 & -8\\ -9 & -100 & -40\\ -10 & -24 & -40\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}3 & 5 & -3 & 1\\ 7 & 13 & -11 & 2\\ 0 & -5 & -5 & 0\\ -9 & -14 & 9 & -3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3 & -2 & 3\\ 2 & 9 & -4 & -1 & 9\\ 2 & 8 & -8 & -4 & 2\\ 1 & 5 & -1 & 4 & 3\\ 1 & 4 & -3 & -5 & 3\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{31} и алгебраическое дополнение элемента a_{24} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2 & 4\\ -4 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 1 & -3\\ -3 & 4 & -6 & 13\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:

а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;

б) матрицу X из уравнения $AXB+2C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ -11 & -7 & -2\\ -6 & -4 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 66 & 20 \\ -95 & -27 \\ -61 & -13 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \\ -4 & 7 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -6 & 7 & -5 \\ 6 & -9 & 3 \\ -3 & -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ 5x - 3y = 5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 4, \\ -3x - 2y = 3, \\ 3x + 4y - 2z = 1. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3, \\ 2x + y + 3z = 9, \\ 3x + 3y + 5z = 12. \end{cases}$

г) $\begin{cases} -3x + 6y + 4z = 0, \\ 3x - 2y - 3z = 2, \\ 4y + z = 6. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (1; 1; -2), \vec{b} = (2; -2; 3), \vec{c} = (-5; 1; 3), \vec{d} = (-5; 3; 3)$.

Вариант 14

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&0\\3&1&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&4\\1&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-2&-4\\2&3&1\\-4&-2&-4\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}10&3&2\\-1&1&6\\3&-5&18\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}16&4&2&-8\\5&1&1&-2\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-23&-15\\34&22\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5&5&-7\\26&125&-35\\10&11&-14\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-2&3&1&1\\0&6&0&5\\-11&13&6&11\\-2&4&1&1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&4&2&-4&-2\\2&9&6&-4&-6\\-1&-4&0&5&4\\1&5&4&3&1\\-1&-4&-2&7&11\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{41} и алгебраическое дополнение элемента a_{23} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&5&1\\-2&5&10&3\\-1&1&0&1\\0&1&1&3\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB+4C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\-11&-5&3\\-8&-4&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5&1\\-8&-1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2&0\\-3&-1\\-1&4\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}6&2\\-28&-12\\-8&11\end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A=\begin{pmatrix}-9&3&-7&2\\0&3&-1&0\\-3&0&-4&3\\-5&0&3&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1&0\\-3&4&2\\-4&3&-5\\-3&-1&0\end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases}7x+3y=-4,\\5x+2y=1.\end{cases}$

б) $\begin{cases}x-2y-3z=-7,\\-3x+3y+5z=8,\\4x+y-z=4.\end{cases}$

в) $\begin{cases}2x-4y+3z=1,\\x-2y+4z=3,\\3x-6y+7z=4.\end{cases}$

г) $\begin{cases}2x+2y-z=1,\\3x+2y-8z=9,\\-x+7z=5.\end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3-2x_4=-1,\\x_1+2x_2-x_3-x_4=-2,\\-x_2+2x_3+3x_4=5,\\-3x_1-x_2+3x_3=3.\end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если

$\vec{a}=(1;2;4),\vec{b}=(1;-1;1),\vec{c}=(2;2;4),\vec{d}=(2;3;3).$

Вариант 15

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если
$A=\begin{pmatrix}3&1&0&-3\\4&1&0&5\\-1&1&2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&12\\3&22\\1&6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&-4&4\\3&-4&-4\\0&-2&2\end{pmatrix}$,
$D=\begin{pmatrix}-2&-3&-3\\0&9&3\\16&12&6\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}1&22&-6&-44\\0&-3&1&6\end{pmatrix}$, E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}71&31\\-62&-27\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&-1&-6\\-9&-5&30\\6&-2&-18\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-3&1&-4&1\\4&0&7&-1\\0&9&-5&0\\-6&3&-8&2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&-1&1&-4&-3\\-2&3&-3&11&9\\1&-1&3&-3&0\\1&0&0&2&2\\3&-3&3&-9&-2\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{31} и алгебраическое дополнение элемента a_{22} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2&5&-1&-2\\-2&0&1&1\\0&1&-4&2\\-6&-15&4&7\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB-2C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1&-3&4\\2&4&-5\\-2&-6&9\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5&1\\12&3\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -33 & -9 \\ 49 & 9 \\ -59 & -17 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ -5 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} -4x + 7y - 9z = -5, \\ 2x - 8y + 8z = -8, \\ -x + 10y - 4z = 4. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ -x + 2y = 1. \end{cases}$

г) $\begin{cases} -x + 2y - 2z = 4, \\ 3y - z = 3, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_4 = -1, \\ -x_1 + x_3 - x_4 = -1, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (1; 1; 1), \vec{b} = (-2; 2; -7), \vec{c} = (3; 5; 4), \vec{d} = (17; 29; 16)$.

Вариант 16

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}-6&1&0&2\\3&1&-5&1\\0&3&0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}14&6\\4&2\\7&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5&0&1\\-4&-1&-4\\4&-2&-4\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}13&-14&4\\-1&6&6\\0&10&17\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}4&2&-3&-4\\-7&-4&7&8\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-10&-64\\9&57\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&-2&-5\\6&-30&25\\3&7&15\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-5&-2&1&0\\0&4&0&5\\-4&-4&1&4\\25&11&-5&0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&-1&-3&-2&4\\-1&2&6&6&-2\\3&-3&-7&-8&8\\-2&3&9&11&-6\\-1&1&3&5&2\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{41} и алгебраическое дополнение элемента a_{32} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-2&-4&5&2\\-4&1&0&1\\0&3&1&3\\-4&-7&10&5\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB-2C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-8&-2&7\\12&4&-3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&-1\\4&-1\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -18 & 17 \\ 58 & -29 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -4 & 5 \\ 3 & -7 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 3 \\ -4 & -7 & -5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} x + 5y = 1, \\ x + 2y = 6. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 10x + 6y - 9z = -9, \\ 3x + 9y - 2z = 1, \\ -4x - 8y + 2z = 6. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x - 3y - 4z = -14. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6x - y + 8z = 2, \\ 4x + 3z = -9, \\ -2x + y - 5z = 1. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (1; 2; -2), \vec{b} = (-2; -1; -5), \vec{c} = (3; 1; 8), \vec{d} = (7; 5; 10)$.

Вариант 17

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}9 & -3 & 2 & 3\\ 4 & -5 & 7 & 0\\ 3 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}10 & 16\\ 7 & 12\\ 5 & 8\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & -4\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}-3 & 7 & -7\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & -8 & 5\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}-3 & 12 & -8 & -24\\ 2 & -7 & 5 & 14\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-31 & -10\\ 41 & 13\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -4\\ -11 & 48 & -24\\ -6 & 7 & -12\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}4 & 6 & -2 & 1\\ -3 & -7 & 6 & -1\\ 0 & -5 & -5 & 0\\ -16 & -23 & 8 & -4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 1 & -2\\ 3 & 8 & -10 & 4 & -4\\ 1 & 3 & 0 & 5 & -5\\ 6 & 17 & -16 & 4 & -9\\ 3 & 9 & -6 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{31} и алгебраическое дополнение элемента a_{24} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ -12 & -3 & -11 & 1\\ 0 & 1 & -4 & -1\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB+3C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 10 & 4 & -8\\ -6 & -2 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ -12 & 51 \\ 7 & -40 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -7 & -5 \\ -6 & 4 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & -7 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \\ -6 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} 3x - 3y = 4, \\ x + 2y = -4. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 9x + 8y + 5z = -2, \\ -5x + 6y + 3z = -6, \\ 7x + 4y + 4z = 8. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 3, \\ 4x + 2y + 5z = 5, \\ 2x + y + 2z = 2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} -3y - z = -3, \\ 2x - 3y - 9z = -6, \\ 2x - 6y - 10z = 1. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -1, \\ -x_1 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -2. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (1; -2; -1), \vec{b} = (-2; 5; -1), \vec{c} = (3; -8; 1), \vec{d} = (2; -7; 3)$.

Вариант 18

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}5&4&3&2\\-1&6&1&0\\3&1&2&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-10&6\\-4&2\\-5&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4&-3&0\\2&3&-2\\-3&-3&3\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}4&9&-12\\-9&4&-3\\3&-5&7\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}4&2&-3&-4\\9&4&-5&-8\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}19&-21\\-15&17\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}5&6&-3\\-24&150&15\\-20&-23&12\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}5&-1&1&5\\0&9&0&5\\6&0&1&3\\10&-1&2&10\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&-2&-2&-3&5\\0&1&0&-4&-4\\-2&4&6&7&-11\\1&-1&-2&-4&-2\\1&-2&-2&0&10\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{41} и алгебраическое дополнение элемента a_{23} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-4&-1&-3&1\\2&1&0&1\\0&5&1&2\\12&4&9&-2\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB+3C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}4&2&1\\-3&-1&-1\\-12&-6&-2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}5&1\\-8&-1\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -19 & 10 \\ 3 & -3 \\ 25 & -13 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 & -4 \\ 6 & 5 & -7 & 0 \\ -1 & -5 & 6 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} 7x + 3y = 3, \\ -x + 2y = 5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} -x + 7y + z = 1, \\ 2x - 9y - 3z = 6, \\ -8x + 6y + 9z = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ 5x + y + 3z = 0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4y - z = -5, \\ -5x + 5y - 6z = 0, \\ 5x - y + 5z = 1. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -4, \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -1, \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -1. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (1; 2; 2), \vec{b} = (0; -1; -1), \vec{c} = (1; 2; 1), \vec{d} = (-3; -4; -3)$.

Вариант 19

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}7&4&-1&3\\1&5&-2&3\\4&6&5&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6&8\\5&8\\3&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&2&-2\\2&2&4\\-2&-1&1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}8&0&-4\\5&2&-3\\1&2&1\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}-1&8&-4&-16\\1&-5&3&10\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}15&-57\\-13&50\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2&5&-2\\-9&50&-10\\8&-19&8\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2&-5&3&1\\7&-18&5&3\\0&3&-5&0\\10&-24&15&5\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&-3&5&5&0\\-2&7&-7&-12&2\\0&0&2&5&3\\0&1&3&1&-2\\2&-6&10&13&5\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{31} и алгебраическое дополнение элемента a_{22} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-3&4&5&3\\3&0&1&1\\0&1&-2&0\\9&-12&-14&-8\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB+3C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}4&2&3\\5&3&3\\-8&-4&-5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 25 & 2 \\ -34 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -4 & -2 \\ 1 & -8 & 5 & -2 \\ -3 & 5 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} 8x - 3y = 3, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 8x + 4y - z = 4, \\ -3x - 2y = -1, \\ 2x + 3y + 2z = 5. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ x + 5y - z = 7. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x - 7y - 2z = 1, \\ x + 2y + z = 2, \\ 4x - 5y - z = 1. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -3, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если

$$\vec{a} = (1; 2; -1), \vec{b} = (-1; 1; 2), \vec{c} = (2; -1; 1), \vec{d} = (0; 10; 8).$$

Вариант 20

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}7&4&-3&2\\1&4&3&0\\2&1&3&-3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&6\\2&4\\2&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5&4&4\\0&1&-2\\1&-1&4\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}13&-1&4\\8&2&0\\12&-4&10\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}11&4&-3&-8\\-5&-2&2&4\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-13&27\\16&-34\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6&-2&-1\\-29&-20&5\\24&-7&-4\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&-1&1&5\\0&-1&0&5\\0&-3&-1&9\\4&-3&4&-20\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&4&5&2&3\\3&13&14&8&11\\1&4&7&-1&6\\2&9&9&9&11\\-1&-4&-5&1&10\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{41} и алгебраическое дополнение элемента a_{32} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}5&0&1&2\\1&1&0&1\\0&3&1&0\\10&1&2&5\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB-3C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}4&2&-1\\-3&-1&3\\8&4&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&-1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}3&2\\-3&2\\1&4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-12&-21\\13&2\\-8&-43\end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A=\begin{pmatrix}6&-4&5&7\\-5&1&-3&5\\7&-6&1&2\\0&1&-3&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&-5&4\\3&-5&1\\6&4&-5\\1&3&-4\end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases}4x+y=1,\\2x-4y=5.\end{cases}$

б) $\begin{cases}-7x-8y-9z=7,\\2x+4y-4z=-10,\\3x+5y+6z=6.\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+y+z=1,\\x-y+z=3,\\4x-2y+4z=10.\end{cases}$

г) $\begin{cases}3x+4y-3z=1,\\-x-5y-9z=-4,\\4x+9y+6z=1.\end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases}-x_1+2x_2-3x_3=1,\\2x_1-4x_2+x_3-7x_4=-9,\\2x_2-x_3+5x_4=7,\\-2x_1-x_3+x_4=-1.\end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если $\vec{a}=(2;1;6),\vec{b}=(5;1;-2),\vec{c}=(8;1;-3),\vec{d}=(-35;-4;20)$.

Вариант 21

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}3&-4&-3&2\\1&0&3&1\\2&1&-4&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-4&-6\\-2&-5\\-2&-3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4&3&0\\2&-3&4\\2&0&4\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}10&4&7\\0&10&3\\6&0&7\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1&-5&3&10\\-1&2&-2&-4\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-25&-21\\31&26\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-5&5&-10\\-14&-75&-30\\5&-4&10\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2&6&1&1\\3&5&-3&1\\0&-5&-5&0\\-2&-5&-1&-1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&-1&1&0&3\\-2&3&-6&1&-6\\0&0&2&3&-4\\1&0&-3&4&2\\3&-3&3&3&9\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{31} и алгебраическое дополнение элемента a_{24} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-1&-4&3&1\\3&13&-9&-2\\1&1&0&1\\0&2&1&2\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB+2C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}5&3&-2\\-4&-2&2\\5&3&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}7&2\\-12&-3\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -73 & -10 \\ 62 & 14 \\ -60 & -12 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -1 & 3 \\ -7 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & -5 & 3 \\ 8 & -4 & 9 & 13 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} -x + y = 4, \\ -7x + 2y = -4. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x - y + z = 2, \\ x + 4y - 2z = 3. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y + 2z = 6, \\ 2x - y = 0, \\ x - 2y - 2z = -6. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6x - y + 3z = 1, \\ -x + y + z = -3, \\ 5x + 4z = 2. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если

$\vec{a} = (4;\ -1; 2), \vec{b} = (3; 4;\ -5), \vec{c} = (1;\ -3; 2), \vec{d} = (5;\ 3;\ 8).$

Вариант 22

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}2&-4&-3&2\\5&0&4&1\\2&1&-4&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6&-4\\4&-2\\3&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&-2&3\\2&4&-3\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}-2&3&-3\\-7&10&-11\\6&-9&10\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}-5&-2&2&4\\-11&-4&3&8\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}29&23\\-19&-15\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&6&-9\\21&180&-45\\-20&-29&45\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-3&3&1&-3\\0&3&0&5\\16&-16&-5&19\\-9&10&3&-9\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}-1&4&5&0&4\\0&1&5&0&0\\-1&4&3&3&1\\2&-7&-5&3&-8\\2&-8&-10&3&-6\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{41} и алгебраическое дополнение элемента a_{23} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-1&5&2&-3\\4&0&1&1\\0&1&3&3\\3&-15&-5&10\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB+4C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}4&2&-3\\17&9&-9\\8&4&-5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&3\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}22 & -7\\ 22 & 6\\ 20 & 1\end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A=\begin{pmatrix}0 & -3 & -1 & -6\\ 9 & 8 & 7 & 7\\ 3 & 8 & 3 & 2\\ 1 & -7 & 1 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -8 & 3 & 9\\ -3 & -1 & 8\\ -9 & 7 & 5\end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases}3x-7y=-9,\\ -9x-8y=4.\end{cases}$

б) $\begin{cases}3x-y+2z=5,\\ -4x+y-8z=-12,\\ 5x+2y+4z=9.\end{cases}$

в) $\begin{cases}4x-2y-z=-1,\\ 3x-y+z=-2,\\ x-y-2z=1.\end{cases}$

г) $\begin{cases}-9x-5y=7,\\ 7x+9y+3z=5,\\ 2x-4y-3z=-6.\end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases}4x_1+3x_2+2x_3+x_4=5,\\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=3,\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=3,\\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5.\end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если $\vec{a}=(-5;4;\ 7),\vec{b}=(-2;1;\ -2),\vec{c}=(-8;3;4),\vec{d}=(8;7;\ -4)$.

Вариант 23

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-3&2\\7&0&2&1\\2&1&-4&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6&2\\5&3\\3&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4&-2&-4\\-2&4&0\\-4&2&-4\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}17&-7&0\\-11&9&3\\2&4&19\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}0&3&-1&-6\\1&-5&3&10\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}6&-15\\-5&13\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-2&-5&-8\\-9&-100&-40\\-10&-24&-40\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2&2&-1&1\\-3&-4&-2&-2\\0&2&-5&0\\-6&-5&3&-3\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&-4&2&2&4\\2&-9&2&9&10\\2&-8&2&3&10\\1&-5&0&10&4\\-1&4&-2&1&-3\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{31} и алгебраическое дополнение элемента a_{22} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2&5&-1&0\\5&1&0&1\\0&-1&1&2\\4&11&-2&1\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB-2C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1&-3&-3\\1&1&-1\\3&9&10\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}3&0\\-1&1\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & 0 \\ 29 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 1 & -8 \\ -7 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \\ -3 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -3 \\ 3 & -8 & 11 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} x - 8y = 6, \\ -3x + 5y = 5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x - 2y + 7z = 1, \\ -8x - 2y - 5z = 1, \\ 3x + y + 4z = 2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} -2x + y + 3z = 3, \\ 4x + 5y - 6z = 1, \\ 2x + 6y - 3z = 4. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1, \\ x - y + 2z = -7, \\ 3x + 2y + z = 5. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ -x_1 - x_2 + 4x_4 = -1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (-9;\ 4; 2), \vec{b} = (8; 3; 7), \vec{c} = (6;\ -2; 1), \vec{d} = (7;\ -5; 6)$.

Вариант 24

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}2&4&-1&2\\5&0&3&1\\2&1&-4&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2&2\\0&-2\\-1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&2\\4&-4&-2\\4&-4&1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}9&-12&-6\\-8&19&12\\-1&8&9\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}-8&-2&-1&4\\-1&0&-1&0\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-28&-16\\37&21\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}5&2&-7\\-14&-6&21\\25&11&-35\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&-8&-4&-10\\0&1&0&5\\1&-9&-5&-14\\0&-4&-5&-20\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&-1&2&2&5\\-1&2&-2&1&-9\\-1&1&0&-5&-6\\0&1&0&6&-6\\1&-1&2&5&7\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{41} и алгебраическое дополнение элемента a_{32} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-4&5&3&-4\\-2&0&1&1\\0&1&-4&2\\8&-10&-5&9\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB-3C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&3&4\\4&-4&-3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-3&-3\\2&1\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -9 & -5 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & -8 & 6 & 2 \\ -7 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 1 \\ 6 & 7 & -9 \\ 3 & 2 & 9 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} 6x + 2y = 1, \\ -9x + 6y = -5. \end{cases}$

б) $\begin{cases} -2x + 2y + z = 1, \\ 6x - 2y + 3z = -13, \\ -3x + 2y + z = 1. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9x + 7y - z = 6, \\ -4x - 3y + 2z = -5, \\ 5x + 4y + z = 1. \end{cases}$

г) $\begin{cases} -x + 4y - z = -7, \\ 2x + 5y + 2z = 2, \\ 3x + y + 3z = -4. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (1; 1; 2), \vec{b} = (-2; -1; 2), \vec{c} = (1; 2; 3), \vec{d} = (4; 3; 2)$.

Вариант 25

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 6 & -11\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 4 & 4\\ -4 & -2 & 4\end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix}2 & -12 & -6\\ -2 & 4 & -5\\ -2 & 14 & 3\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}-5 & -11 & -3 & 22\\ -3 & -6 & -2 & 12\end{pmatrix}$, E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-41 & -16\\ 49 & 19\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-4 & -4 & -6\\ 9 & 0 & 12\\ 20 & 21 & 30\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-4 & -5 & -4 & 1\\ 13 & 19 & 7 & -3\\ 0 & -3 & -5 & 0\\ 8 & 11 & 8 & -2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -3 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 4 & 5\\ -2 & 5 & -9 & 2 & -1\\ -2 & 4 & -6 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{31} и алгебраическое дополнение элемента a_{24} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2 & 2\\ -2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 5\\ 12 & -3 & -5 & -5\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB+3C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 5 & -3 & -9\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 8 & 1\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -5 & 11 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} 5x + y = -1, \\ 2x + 4y = -1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x - 6y + 6z = 7, \\ 4x - y + 4z = 7, \\ 4x - 2y + 5z = 7. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7x + 2y - 2z = 3, \\ 4x + 5y - 2z = -1, \\ 3x - 3y = 4. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ -x + 2y + z = 1, \\ x + y + 2z = 5. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_4 = -1, \\ -x_1 + x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -4. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если

$$\vec{a} = (2; 3; 7), \vec{b} = (-3; -5; 0), \vec{c} = (-1; 4; 2), \vec{d} = (0; 5; 16).$$

Вариант 26

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 4 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -4\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4 & -4 & 2\\ 3 & -2 & 3\\ 1 & -4 & -1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 3 & -5\\ -6 & -8 & 6\\ -4 & -3 & -3\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}-15 & -4 & -1 & 8\\ -8 & -2 & -1 & 4\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-37 & -13\\ 46 & 16\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & -5 & -5\\ 13 & 100 & 20\\ 9 & 16 & 15\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1 & 5\\ 0 & -6 & 0 & 5\\ 5 & -7 & 2 & 8\\ -4 & 9 & -2 & -10\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -4 & 4\\ 3 & -2 & -4 & -16 & 8\\ 2 & -2 & 2 & -3 & 4\\ 5 & -4 & -4 & -21 & 18\\ 2 & -2 & 0 & -5 & 16\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{41} и алгебраическое дополнение элемента a_{23} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ -3 & 12 & -11 & -5\\ 0 & 1 & -4 & 2\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB-2C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -3 & -9 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -36 & -8 \\ 8 & 10 \\ -80 & -29 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} 6x - 2y = -1, \\ -x + 5y = -1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2y + 7z = 14, \\ 2x - y - 3z = -4, \\ 3x + 4y - 5z = -7. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + 4y - 5z = -8, \\ 2x + y + 4z = 20, \\ 5x + 5y - z = 12. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x + y + z = 7, \\ -x + y - 2z = 6. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (2; 1; 0), \vec{b} = (3; -2; -1), \vec{c} = (-1; 3; 2), \vec{d} = (7; 0; 2).$

Вариант 27

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3 & 2\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -4 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 10\\ 2 & 7\\ 2 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 4\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}9 & 8 & -3\\ 1 & 0 & 5\\ 2 & -8 & 0\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}-2 & 7 & -5 & 14\\ 1 & -2 & 2 & 4\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}97 & 48\\ -83 & -41\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-5 & -4 & -4\\ -19 & -48 & -16\\ -15 & -11 & -12\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}5 & 2 & 4 & -1\\ 21 & 5 & 12 & -4\\ 0 & 6 & -5 & 0\\ 10 & 3 & 8 & -2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -4 & 2 & 5\\ 1 & -4 & 5 & 5 & -1\\ -2 & 9 & -10 & 1 & -2\\ -2 & 8 & -6 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{31} и алгебраическое дополнение элемента a_{22} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -4\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB-3C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}6 & 4 & -3\\ -5 & -3 & 4\\ -6 & -4 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}9 & 3\\ -7 & -2\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-2&-1\\-2&4\\-3&-3\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}-37&-8\\53&1\\61&23\end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-1&3\\2&2&-1&3\\-2&1&4&3\\4&1&0&5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}5&0&-5\\2&3&1\\3&2&-1\\2&3&1\end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases}7x+2y=2,\\-6x+3y=2.\end{cases}$

б) $\begin{cases}2x+y+3z=11,\\x-y=4,\\2x+3y+z=1.\end{cases}$

в) $\begin{cases}3x+4y-2z=11,\\3x-2y+4z=11,\\y-z=0.\end{cases}$

г) $\begin{cases}x+5y+z=0,\\3x+4y+2z=8,\\4x+9y+3z=-1.\end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases}4x_1+x_2-x_4=-5,\\-x_1+x_3-2x_4=1,\\3x_2-3x_3+2x_4=-3,\\6x_1-3x_2+x_3-3x_4=-3.\end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если $\vec{a}=(1;3;2),\vec{b}=(2;-5;7),\vec{c}=(1;3;-1),\vec{d}=(4;1;8)$.

Вариант 28

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 3 & 2\\ 4 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-8 & 10\\ -2 & 2\\ -4 & 5\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4 & 2 & -3\\ -4 & -2 & 0\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}9 & -2 & -12\\ -5 & 0 & -12\\ -3 & 6 & 8\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}2 & 2 & -5 & -4\\ 3 & 4 & -4 & -4\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-17 & 47\\ 19 & -53\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ 5 & -8 & 6\\ -12 & 7 & -18\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-5 & -3 & 1 & -5\\ 0 & -6 & 0 & 5\\ 16 & 12 & -3 & 18\\ 20 & 13 & -4 & 20\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & -4 & 1 & -2 & -4\\ -1 & 5 & 0 & 1 & 9\\ -1 & 4 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -7 & 3 & -2 & 2\\ 3 & -12 & 3 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{41} и алгебраическое дополнение элемента a_{32} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 2 & 3\\ -12 & -2 & 6 & 10\\ 5 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB-2C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 5 & 4\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -28 & -24 \\ 21 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} 3x + y = -8, \\ 2x - 2y = -3. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + y + z = 6, \\ x + 3y + z = 4, \\ x + y + 3z = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} -5x + 5y + 2z = 0, \\ x + y + z = 2, \\ 6x - 4x - z = 2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 11x + 3y - z = 2, \\ 2x + 5y - 5z = 0, \\ 9x - 2y + 4z = -7. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1, \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -2. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если

$$\vec{a} = (5; -1; -2), \vec{b} = (1; 2; 3), \vec{c} = (-1; -1; 4), \vec{d} = (7; 4; 11).$$

Вариант 29

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -5 & 2\\ 3 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -4 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 1 & -2\\ -1 & -2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -3\\ -4 & 0 & 0\\ -4 & 3 & -1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & -2 & -6\\ -3 & -5 & -9\\ 0 & 6 & 8\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 4\\ -1 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-61 & -25\\ 76 & 31\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 6 & -2\\ 13 & 18 & -6\\ 24 & 37 & -12\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-3 & -3 & 2 & 1\\ -5 & -11 & 1 & 2\\ 0 & -7 & -5 & 0\\ -15 & -14 & 10 & 5\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & -2 & 4\\ -1 & -1 & 5 & 3 & 0\\ -1 & -2 & 6 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5\\ 1 & 2 & -4 & 1 & 14\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{31} и алгебраическое дополнение элемента a_{24} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 4 & 4\\ -2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ -9 & -11 & -12 & -11\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB+3C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ 4 & 2 & 1\\ -9 & -3 & 10\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 8 & 7\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 35 & 34 \\ 30 & 27 \\ -90 & -75 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & -12 & 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & -7 \\ 7 & -4 & -11 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} 13x + 2y = -2, \\ 6x + y = -4. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x - y + z = 4, \\ x + y + z = 6, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - y + z = 10, \\ x + 2y + 4z = 31, \\ 2x - 3y - 3z = -21. \end{cases}$

г) $\begin{cases} -x + 3y + 11z = 2, \\ -5x + 5y + 2z = 0, \\ -4x + 2y - 9z = -3. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 4, \\ 2x_2 - x_3 + 5x_4 = -2, \\ -2x_1 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если

$$\vec{a} = (3; 2; -2), \vec{b} = (-1; -1; 1), \vec{c} = (0; 4; 1), \vec{d} = (5; 15; 0).$$

Вариант 30

Задание 1. Найти $A+B$, $C+D$, $A\cdot B$, $C\cdot D$, $B\cdot F$, C^2-2D^T+3E, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & -2 & 2\\ 5 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -4 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-6 & 8\\ -2 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ -4 & 1 & 3\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}-6 & -7 & -3\\ 4 & -7 & -4\\ 6 & 3 & 2\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}3 & 2 & -4 & -4\\ 4 & 2 & -3 & -4\end{pmatrix},$$ E – единичная матрица соответствующих размеров.

Задание 2. Найти определители матриц

$$A=\begin{pmatrix}-31 & -11\\ 46 & 16\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ -3 & -32 & 2\\ 6 & 13 & -3\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1 & -4\\ 0 & 3 & 0 & 5\\ -9 & 28 & -5 & 22\\ 6 & -14 & 3 & -12\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2 & 5 & 0\\ -2 & 7 & 3 & 12 & -1\\ -1 & 3 & 4 & 2 & -2\\ -4 & 13 & 7 & 19 & 2\\ -2 & 6 & 4 & 7 & 13\end{pmatrix}.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{41} и алгебраическое дополнение элемента a_{23} матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4 & -1\\ 5 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 5\\ 6 & -2 & 12 & -2\end{pmatrix}.$$

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB+4C=D$, если

$$A=\begin{pmatrix}6 & 4 & -1\\ -5 & -3 & 5\\ -12 & -8 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 6 & -3\end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 40 & -33 \\ 0 & 8 \\ -58 & 55 \end{pmatrix}.$$

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases} -x + 3y = 1, \\ 2x + 6y = 8. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 20, \\ -x + 2y - 3z = 3, \\ 4x + 3y - 5z = -8. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - 6y - z = -1, \\ x - 7y - 2z = -3. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x + y + 2z = 29, \\ 3x - y + z = 10, \\ 2x + 2y + z = 5. \end{cases}$

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} = (5; 4; 2), \vec{b} = (6; -3; 5), \vec{c} = (-2; 2; -3), \vec{d} = (18; 9; 4)$.

Решение типовых примеров

Задание 1. Найти значения $A+B$, $C+D$, $B\cdot F$, $A\cdot C$, C^2-3D^T+2E, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -4\\ 2 & -5 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -3 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 2\\ 4 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, E – единичная матрица соответствующих размеров.

Решение.

1) Операция сложения не может быть применена к матрицам A и B, так как их размеры не совпадают.

2) Матрицы C и D имеют одинаковые размеры (2×2), поэтому к ним можно применить операцию сложения (напомним, что эта операция выполняется поэлементно). Итак,

$$C+D=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-2 & 4+1\\ -3+4 & 0+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

3) Чтобы было возможно умножение матриц, нужно чтобы число столбцов первой матрицы совпадало с числом строк второй матрицы. Для матриц B и F это условие выполнено: число столбцов матрицы B равно 2 и число строк матрицы F равно 2, в результате их умножения получится матрица размеров 3×4 (3 – число строк матрицы B, $4-$ число столбцов матрицы F).

$$B\cdot F=\begin{pmatrix}\mathbf{6} & \mathbf{-3}\\ 1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{3} & 2 & 4 & 2\\ \mathbf{4} & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\text{элементы } i\text{-й строки умножаются на}\\ \text{соотвествующие элементы } j\text{-го столбца,}\\ \text{произведения суммируются и результат}\\ \text{записывается в ячейку с номрами } (i,j)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{6\cdot 3+(-3)\cdot 4} & 6\cdot 2+(-3)\cdot 2 & 6\cdot 4+(-3)\cdot 3 & 6\cdot 2+(-3)\cdot 1\\ 1\cdot 3+(-2)\cdot 4 & 1\cdot 2+(-2)\cdot 2 & 1\cdot 4+(-2)\cdot 4 & 1\cdot 2+(-2)\cdot 1\\ (-3)\cdot 3+4\cdot 4 & (-3)\cdot 2+4\cdot 2 & (-3)\cdot 4+4\cdot 3 & (-3)\cdot 2+4\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{6} & 6 & 15 & 9 \\ -5 & -2 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4) Число столбцов матрицы A равно 3, а число строк матрицы C равно 2, поэтому умножение $A \cdot C$ невозможно.

5) Все операции в выражении $C^2 - 3D^T + 2E$ возможны, так как размеры матриц согласованы – все матрицы квадратные, размера 2×2. Выполним вычисления по действиям:

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 5 + 4 \cdot (-3) & 5 \cdot 4 + 4 \cdot 0 \\ (-3) \cdot 5 + 0 \cdot (-3) & (-3) \cdot 4 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ -15 & -12 \end{pmatrix};$$

$$3D^T = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{при транспонировании строки матрицы} \\ \text{переписываются в столбцы с сохранением порядка} \end{bmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 3 & 9 \end{pmatrix};$$

$$C^2 - 3D^T + 2E = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ -15 & -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 - (-6) + 2 & 20 - 12 + 0 \\ -15 - 3 + 0 & -12 - 9 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 8 \\ -18 & -19 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Найти определители матриц

$$A = \begin{pmatrix} -22 & 48 \\ 25 & -55 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -9 \\ 5 & -12 & 18 \\ -6 & 5 & -18 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 5 \\ 9 & 13 & 4 & 7 \\ -6 & -5 & -3 & -6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 9 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -7 & -2 & -1 \\ -4 & -7 & 15 & 8 & 6 \\ -2 & -4 & 6 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для вычисления определителей любого порядка существует несколько способов. Комбинирование различных способов, а также применение свойств определителей позволяет строить ход решения по-разному и находить более короткие пути, приводящие к ответу.

1) Вычислим определитель матрицы A по формуле

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} -22 & 48 \\ 25 & -55 \end{vmatrix} = -22 \cdot (-55) - 48 \cdot 25 =$$

$$= 1210 - 1200 = 10.$$

Теперь вычислим определитель матрицы A, предварительно упростив его, используя свойства:

– *определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на произвольное число;*

– *из элементов строки определителя можно выносить общий множитель.*

Применим эти свойства следующим образом: к элементам первой строки прибавим элементы второй строки, а затем вынесем общий множитель 5 из второй строки:

$$\det A = \begin{vmatrix} -22 & 48 \\ 25 & -55 \end{vmatrix}^{I+II} = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 25 & -55 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & -11 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (3 \cdot (-11) - (-7) \cdot 5) = 5 \cdot (-33 + 35) = 5 \cdot 2 = 10.$$

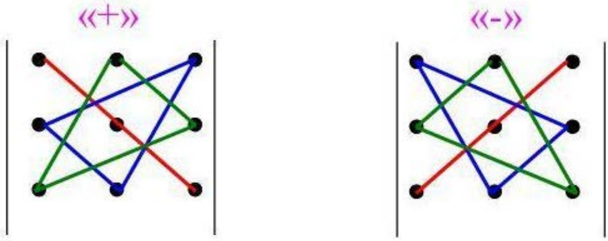
2) Вычислим определитель матрицы B по правилу «треугольников»

$$\det B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} + b_{12} \cdot b_{23} \cdot b_{31} + b_{13} \cdot b_{21} \cdot b_{32} -$$

$$-(b_{13} \cdot b_{22} \cdot b_{31} + b_{12} \cdot b_{21} \cdot b_{33} + b_{11} \cdot b_{23} \cdot b_{32}),$$

которое можно изобразить на схеме



$$\det B = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -9 \\ 5 & -12 & 18 \\ -6 & 5 & -18 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot (-12) \cdot (-18) + 3 \cdot 18 \cdot (-6) + (-9) \cdot 5 \cdot 5 -$$

$$-\big((-9) \cdot (-12) \cdot (-6) + 3 \cdot 5 \cdot (-18) + (-3) \cdot 18 \cdot 5\big) =$$

$$= -648 - 324 - 225 - (-648 - 270 - 270) = -9.$$

Теперь вычислим определитель матрицы B, предварительно упростив его, используя свойства, и теорему разложения определителя по строке (*определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения*)

$$\det B = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -9 \\ 5 & -12 & 18 \\ -6 & 5 & -18 \end{vmatrix}_{III + (-2)I} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -9 \\ 5 & -12 & 18 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -12 & 18 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 3-й строке} \end{bmatrix} =$$

$$= (-3) \cdot \left(0 - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 18 \end{vmatrix} + 0\right) = (-3) \cdot (18 - 15) = -9.$$

3) Вычислим определитель матрицы C по теореме разложения по второй строке (этот выбор обусловлен наличием двух нулей в этой строке).

$$\det C = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 5 \\ 9 & 13 & 4 & 7 \\ -6 & -5 & -3 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= -0 + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 7 \\ -6 & -3 & -6 \end{vmatrix} - 0 + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 9 & 13 & 4 \\ -6 & -5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{определители 3-го} \\ \text{порядка вычисляем} \\ \text{любым способом} \end{bmatrix} = (-4) \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 5.$$

4) Вычислим определитель матрицы D путем приведения к треугольному виду (используя свойства, получим нули под главной диагональю).

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 9 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -7 & -2 & -1 \\ -4 & -7 & 15 & 8 & 6 \\ -2 & -4 & 6 & 7 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ II + 2I \\ III + (-3)I \\ IV + 4I \\ V + 2I \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ IV + (-1)II \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ V + (-1)IV \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48.$$

Задание 3. Найти минор элемента a_{13} и алгебраическое дополнение элемента a_{32} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & -2 & 12 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Напомним, что минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы A, оставшихся после вычеркивания i-й строки и j-го столбца. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется произведение $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Чтобы составить минор M_{13} элемента a_{13} вычеркиваем из матрицы A первую строчку и третий столбец, оставшиеся элементы записываем в новую матрицу (размеров 3×3) и вычисляем ее определитель

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 1-у столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - 0 + 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (-6 + 10) + 6 \cdot (5 - 3) = 20 + 12 = 32.$$

Алгебраическое дополнение A_{32} элемента a_{32} получим вычеркиванием из матрицы A третьей строки и второго столбца. Далее вычисляем определитель полученной матрицы (размеров 3×3), умножая его на $(-1)^{3+2}$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 12 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 2-у столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= -\left(-4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 0 - 12 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 12 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-10 - 6) + 12 \cdot (2 + 5) = -64 + 84 = 20.$$

Ответ: $M_{13} = 32$, $A_{32} = 20$.

Замечание. Определители можно вычислять любым (удобным) способом.

Задание 4. Для заданных матриц A, B, C, D найти:
а) обратные матрицы к матрицам A и B и сделать проверку;
б) матрицу X из уравнения $AXB - 3C = D$, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 5 \\ -15 & -9 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ 53 & 19 \\ -36 & -15 \end{pmatrix}.$$

Решение.
а) Проверим существует ли матрица, обратная к матрице A, для этого вычислим ее определитель

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 5 \\ -15 & -9 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ II + I \\ III + 3 \cdot I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 2.$$

Так как $\det A \neq 0$, то обратная матрица существует. Найдем ее методом присоединенной матрицы.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 - 5 \cdot (-9) =$$
$$= -8 + 45 = 37,$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -15 & 4 \end{vmatrix} = -\big(-4 \cdot 4 - 5 \cdot (-15)\big) =$$
$$= -(-16 + 75) = -59,$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -15 & -9 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-9) - (-2) \cdot (-15) =$$
$$= 36 - 30 = 6,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} = -\big(3 \cdot 4 - (-1) \cdot (-9)\big) =$$
$$= -(12 - 9) = -3,$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -15 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - (-1) \cdot (-15) =$$
$$= 20 - 15 = 5,$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -15 & -9 \end{vmatrix} = -\big(5 \cdot (-9) - 3 \cdot (-15)\big) =$$
$$= -(-45 + 45) = 0,$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-1) \cdot (-2) =$$
$$= 15 - 2 = 13,$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -\big(5 \cdot 5 - (-1) \cdot (-4)\big) =$$
$$= -(25 - 4) = -21,$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - 3 \cdot (-4) =$$
$$= -10 + 12 = 2.$$

Составим матрицу (A_{ij}) из алгебраических дополнений:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & -59 & 6 \\ -3 & 5 & 0 \\ 13 & -21 & 2 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем полученную матрицу

$$(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 37 & -3 & 13 \\ -59 & 5 & -21 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(A_{ij}\right)^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 37 & -3 & 13 \\ -59 & 5 & -21 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 37 & -3 & 13 \\ -59 & 5 & -21 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 5 \\ -15 & -9 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = E,$$

$$f_{11} = 37 \cdot 5 + (-3) \cdot (-4) + 13 \cdot (-15) = 2,$$

$$f_{12} = 37 \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) + 13 \cdot (-9) = 0,$$

$$f_{13} = 37 \cdot (-1) + (-3) \cdot 5 + 13 \cdot 4 = 0,$$

$$f_{21} = -59 \cdot 5 + 5 \cdot (-4) + (-21) \cdot (-15) = 0,$$

$$f_{22} = -59 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) + (-21) \cdot (-9) = 2,$$

$$f_{23} = -59 \cdot (-1) + 5 \cdot 5 + (-21) \cdot 4 = 0,$$

$$f_{31} = 6 \cdot 5 + 0 \cdot (-4) + 2 \cdot (-15) = 0,$$

$$f_{32} = 6 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot (-9) = 0,$$

$$f_{33} = 6 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 2.$$

Итак, $A^{-1} \cdot A = E$, следовательно, A^{-1} найдена верно.

Проверим существует ли матрица, обратная к матрице B, для этого вычислим ее определитель

$$\Delta = \det B = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 3 \neq 0.$$

Так как $\det B \neq 0$, то обратная матрица существует. Найдем ее методом присоединенной матрицы.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы B:

$$B_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = |1| = 1,$$

$$B_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -|2| = -2,$$
$$B_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -|1| = -1,$$
$$B_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = |5| = 5.$$

Составим матрицу (B_{ij}) из алгебраических дополнений:

$$(B_{ij}) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем полученную матрицу

$$(B_{ij})^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot (B_{ij})^T = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку

$$B^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ -2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 & -2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = E.$$

Итак, $B^{-1} \cdot B = E$, следовательно, B^{-1} найдена верно.

Ответ: $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 37 & -3 & 13 \\ -59 & 5 & -21 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

б) Найдем матрицу X из уравнения

$$AXB - 3C = D. \qquad (*)$$

Поскольку матрицы A^{-1} и B^{-1}, обратные к матрицам A и B, существуют, то решение уравнения (*) можно найти по формуле

$$X = A^{-1} \cdot (D + 3C) \cdot B^{-1}.$$

Выполним необходимые вычисления по действиям.

$$F \doteq D + 3C = \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ 53 & 19 \\ -36 & -15 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16 + 3 \cdot 1 & -4 + 3 \cdot 3 \\ 53 + 3 \cdot 3 & 19 + 3 \cdot 1 \\ -36 + 3 \cdot (-1) & -15 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 5 \\ 62 & 22 \\ -39 & -9 \end{pmatrix},$$

$$G \doteq A^{-1} \cdot F = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 37 & -3 & 13 \\ -59 & 5 & -21 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 & 5 \\ 62 & 22 \\ -39 & -9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 8 & 4 \\ 36 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \\ 18 & 6 \end{pmatrix},$$

$$X = G \cdot B^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \\ 18 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Задание 5. Найти ранг матрицы двумя способами (по определению и при помощи элементарных преобразований матриц):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

По определению минором k-го порядка произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов, а рангом матрицы A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю (обозначается $r(A), rangA$).

Найдем сначала ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

по определению. Матрица A имеет $m = 3$ строки и $n = 4$ столбца, поэтому

$$0 \le rangA \le \min(3,4),$$

$$0 \le rangA \le 3.$$

Так как у матрицы A есть ненулевые элементы, то $rangA \ge 1$. Найдем какой-либо ненулевой минор 2-го порядка ($k = 2$, если он существует). Таких миноров

$$C_m^k \cdot C_n^k = C_3^2 \cdot C_4^2 = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} =$$

$$= \frac{6}{2 \cdot 1} \cdot \frac{24}{2 \cdot 2} = 18$$

штук. Таким минором является, например,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 3 \ne 0.$$

Значит, $r(A) \ge 2$.

Вычислим миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 2-й строчке} \end{bmatrix} =$$

$$= 0 - 0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(6 - 6) = 0;$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 1-у столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 0 + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-2 - 2) + 6 \cdot (6 - 4) = -12 + 12 = 0.$$

Все миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2, равны нулю, следовательно, $r(A) < 3$. Итак, $r(A) = 2$.

Теперь найдем ранг матрицы при помощи элементарных преобразований. Приведем нашу матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований, для этого сначала умножим первую строчку на (-2), сложим с третьей строчкой и результат запишем в третью строчку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{III-2\cdot I} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2-2 & 6-6 & 1-6 & -2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix},$$

далее умножим вторую строчку на 5, сложим с третьей строчкой и результат запишем в третью строчку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix}_{III+5\cdot II} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5+5 & -10+10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получается ступенчатая матрица, которая содержит две ненулевые строчки, значит, ее ранг равен 2. Следовательно, ранг исходной матрицы также равен 2.

Ответ: $r(A) = 2$.

Найдем теперь ранг матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

по определению. Матрица B имеет $m = 4$ строки и $n = 4$ столбца, поэтому

$$0 \le rangB \le \min(4,4),$$

$$0 \le rangB \le 4.$$

Так как у матрицы A есть ненулевые элементы, то $rangB \ge 1$. Найдем какой-либо ненулевой минор 2-го порядка ($k = 2$, если он существует). Таких миноров

$$C_m^k \cdot C_n^k = C_4^2 \cdot C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} =$$

$$= \frac{24}{2 \cdot 2} \cdot \frac{24}{2 \cdot 2} = 36$$

штук. Таким минором является, например,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = -7 \ne 0.$$

Значит, $r(B) \ge 2$.

Вычислим миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 1-й строчке} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1+3) - 3 \cdot (-2+15) + 5 \cdot (2+5) = 4 - 39 + 35 = 0,$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 1-у столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= (-9+21) - 3 \cdot (18+21) + 5 \cdot (14+7) =$$

$$= 12 - 117 + 105 = 0,$$

$$M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 7 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 1-у столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-28) - 3 \cdot (2-28) - (14+7) =$$

$$= -29 + 78 - 21 = 28 \neq 0.$$

Нашли минор 3-го порядка, окаймляющий M_2, не равный нулю, следовательно, $r(A) \geq 3$.

Найдем 4-го порядка ($k = 4$). Таких миноров

$$C_m^k \cdot C_n^k = C_4^4 \cdot C_4^4 = \frac{4!}{4! \cdot (4-4)!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot (4-4)!} =$$

$$= |0! = 1| = \frac{24}{24 \cdot 1} \cdot \frac{24}{24 \cdot 1} = 1$$

штука.

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 1-у столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 7 & 7 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Посчитаем по отдельности каждый определитель 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 1-у столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1 - 63) + 3 \cdot (1 - 49) + 4 \cdot (9 + 7) =$$

$$= 64 - 144 + 64 = -16,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 7 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 1-у столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1 - 63) + 3 \cdot (5 - 49) + 4 \cdot (45 + 7) =$$

$$= -128 - 132 + 208 = -52,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 7 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 1-у столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (1 - 49) + 1 \cdot (5 - 49) + 4 \cdot (35 - 7) =$$

$$= -96 - 44 + 112 = -28,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 1-у столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (9 + 7) + 1 \cdot (45 + 7) - 3 \cdot (35 - 7) =$$

$$= 32 + 52 - 84 = 0.$$

Тогда

$$M_4 = -16 - 3 \cdot (-52) + 5 \cdot (-28) + 1 \cdot 0 =$$

$$= -16 + 156 - 140 = 0.$$

Минор 4-го порядка равен нулю, следовательно, $r(B) < 4$. Итак, $r(B) = 3$.

Теперь найдем ранг матрицы при помощи элементарных преобразований. Приведем нашу матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований, для этого:

1) умножаем первую строчку на (-2), складываем со второй строчкой и результат записываем во вторую строчку,

2) умножаем первую строчку на (-5), складываем с третьей строчкой и результат записываем в третью строчку,

3) умножаем первую строчку на (-7), складываем с четвертой строчкой и результат записываем в четвертую строчку,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ II - 2\cdot I \\ III - 5\cdot I \\ IV - 7\cdot I \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2-2 & -1-6 & -3-10 & 4+2 \\ 5-5 & 1-15 & -1-25 & 7+5 \\ 7-7 & 7-21 & 9-35 & 1+7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix}.$$

Далее сделаем следующее:

1) вторую строчку умножаем на (-2), складываем с третьей строчкой и результат пишем в третью строчку,

2) вторую строчку умножаем на (-2), складываем с четвертой строчкой и результат пишем в четвертую строчку,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ III - 2\cdot II \\ IV - 2\cdot II \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14+14 & -26+26 & 12-12 \\ 0 & -14+14 & -26+26 & 8-12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Теперь поменяем местами третью и четвертую строчки:

$$\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-13&6\\0&0&0&0\\0&0&0&-4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \leftarrow IV\\ \leftarrow III\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-13&6\\0&0&0&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Получается ступенчатая матрица, которая содержит три ненулевые строчки, значит, ее ранг равен 3. Следовательно, ранг исходной матрицы также равен 3.
Ответ: $r(A)=3$.

Задание 6. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы (каждую систему решаем тремя способами):

а) $\begin{cases}x-y=-1,\\2x+y=7.\end{cases}$

б) $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-4,\\x_1+2x_2-3x_3=0,\\-2x_1-2x_3=16.\end{cases}$

в) $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-4,\\x_1+2x_2-3x_3=0,\\-2x_1-2x_3=3.\end{cases}$

г) $\begin{cases}x+2y+3z=6,\\4x+5y+6z=9,\\7x+8y=-6.\end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases}x-y=-1,\\2x+y=7.\end{cases}$

Исследуем систему на совместность. Запишем расширенную матрицу системы:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|c}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&-1\\2&1&7\end{array}\right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований, для этого умножим первую строчку на (-2), сложим со второй строчкой и результат напишем во вторую строчку:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&-1\\2&1&7\end{array}\right)_{II-2\cdot I}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&-1\\2-2\cdot1&1-2\cdot(-1)&7-2\cdot(-1)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&-1\\0&3&9\end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$rang(A) = rang(A|B) = 2,$$

значит, система совместна. Количество неизвестных также равно 2:

$$n = rang(A) = rang(A|B) = 2,$$

значит, система определена, т.е. имеет единственное решение.

Решим систему по формулам Крамера. Для начала найдем определитель матрицы системы, т.е. определитель системы:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 3 \neq 0.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система невырождена (решение системы существует и единственно). Найдем остальные определители. Найдем определитель Δ_1, подставляя в определитель Δ вместо первого столбца $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ столбец свободных членов $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 7 \cdot (-1) = 6.$$

Определитель Δ_2 получается из Δ подстановкой столбца свободных членов $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ вместо второго столбца $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 2 \cdot (-1) = 9.$$

Отсюда получим решение системы уравнений:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2; \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3.$$

Проверка, подставим полученное решение в исходную систему. Подставим $x = 2$ и $y = 3$ в первое уравнение системы:

$$2 - 3 = -1,$$

$$-1 = -1.$$

Получили верное равенство. Подставим $x = 2$ и $y = 3$ во второе уравнение системы:

$$2 \cdot 2 + 3 = 7,$$
$$7 = 7.$$
Получили верное равенство. Таким образом, система решена верно.

Решим систему методом Гаусса. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду (мы это уже делали, когда исследовали систему на совместность, поэтому воспользуемся уже полученным результатом):
$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 9 \end{array}\right).$$
Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:
$$\begin{cases} x - y = -1, \\ \quad 3y = 9. \end{cases}$$
Из второго уравнения
$$y = \frac{9}{3} = 3;$$
подставим это значение в первое уравнение:
$$x - 3 = -1,$$
$$x = -1 + 3 = 2.$$
Итак, общее решение (оно же единственное):
$$x = 2, y = 3$$
(ответ получили такой же, что и с помощью формул Крамера).

Решим систему с помощью обратной матрицы. Найдем матрицу A^{-1}, обратную к матрице системы
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
методом присоединенной матрицы.

Так как $\det A = \Delta = 3 \neq 0$, то матрица A^{-1} существует, поэтому решение системы существует и единственно.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = |1| = 1,$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -|2| = -2,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -|-1| = -(-1) = 1,$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = |1| = 1.$$

Составим матрицу (A_{ij}) из алгебраических дополнений:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем полученную матрицу

$$(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A_{ij})^T = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 7 \\ -\frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итак, общее решение:

$$x = 2, y = 3$$

(ответ получили такой же, что и с помощью формул Крамера, а также методом Гаусса).

Ответ: $x = 2, y = 3$.

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$

Исследуем систему на совместность. Запишем расширенную матрицу системы:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array}\right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований, для этого сделаем следующее:

1) умножим первую строчку на (-1), сложим со второй строчкой и результат запишем во вторую строчку,

2) умножим первую строчку на 2, сложим с третьей строчкой и результат запишем в третью строчку

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II + (-1) \cdot I \sim \\ III + 2 \cdot I \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 + (-1) & 2 + (-1) & -3 + 1 & 0 + 4 \\ -2 + 2 & 0 + 2 & -2 + (-2) & 16 + (-8) \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right).$$

Теперь умножим вторую строчку на (-2), сложим с третьей строчкой и результат запишем в третью строчку

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \qquad\qquad\qquad\sim \\ III + (-2) \cdot II \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 + 0 & 2 + (-2) & -4 + 4 & 8 + (-8) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$r(A) = rang(A) = rang(A|B) = 2,$$

Количество неизвестных $n = 3$.

Так как

$$rang(A) = rang(A|B) = 2 < 3 = n,$$

то по теореме Кронекера-Капелли система совместна и неопределенна (то есть имеет бесконечно много решений). Решим сначала методом Гаусса (при нахождении ранга мы привели расширенную матрицу системы к ступенчатому виду).

Количество главных переменных равно $r(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - r(A) = 3 - 2 = 1$. Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 2-го порядка полученной матрицы A, например, минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Его столбцы – 1-й и 2-й столбцы матрицы A – соответствуют переменным x_1 и x_2 – это будут главные переменные, а x_3 – свободная переменная. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ \quad x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Теперь для наглядности запишем эту систему в другом виде (слева остаются только главные переменные):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - 4, \\ \quad x_2 = 2x_3 + 4. \end{cases}$$

Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение, получим

$$x_1 + 2x_3 + 4 = x_3 - 4,$$
$$x_1 = -2x_3 - 4 + x_3 - 4,$$
$$x_1 = -x_3 - 8.$$

Обозначим свободную переменную x_3 через t, получим общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = -t - 8, \\ x_2 = 2t + 4, \\ \quad x_3 = t, \end{cases}$$
$$t \in \mathbb{R}.$$

Частное решение системы получим, например, при $t = 0$:

$$\begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера. Для начала найдем определитель матрицы системы, т.е. определитель системы:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4 + 0) - (-2 - 6) - (0 + 4) = -4 + 8 - 4 = 0.$$

Так как $\det A = 0$, то система не может быть решена ни по формулам Крамера ни с помощью обратной матрицы. При этом система является совместной (например, есть решение $(-8; 4; 0)$) и неопределенной.

Ответ: по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы систему решить нельзя, $x_1 = -t - 8, x_2 = 2t + 4, x_3 = t, t \in \mathbb{R}$.

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ \quad -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

Исследуем систему на совместность. Запишем расширенную матрицу системы:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований, для этого сделаем следующее:

1) умножим первую строчку на (-1), сложим со второй строчкой и результат запишем во вторую строчку,

2) умножим первую строчку на 2, сложим с третьей строчкой и результат запишем в третью строчку

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ II + (-1) \cdot I \sim \\ III + 2 \cdot I \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 + (-1) & 2 + (-1) & -3 + 1 & 0 + 4 \\ -2 + 2 & 0 + 2 & -2 + (-2) & 3 + (-8) \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right).$$

Теперь умножим вторую строчку на (-2), сложим с третьей строчкой и результат запишем в третью строчку

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim \\ III + (-2) \cdot II \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 + 0 & 2 + (-2) & -4 + 4 & -5 + (-8) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right).$$

Так как

$$rang(A) = 2 \neq 3 = rang(A|B),$$

то по теореме Кронекера-Капелли система не совместна (не имеет решений). В самом деле, последней строке полученной расширенной матрицы соответствует уравнение

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -13,$$

не имеющее решений.

Ответ: система несовместна.

г) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 9, \\ 7x + 8y = -6. \end{cases}$

Исследуем систему на совместность. Запишем расширенную матрицу системы:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований, для этого сделаем следующее:

1) умножим первую строчку на (-4), сложим со второй строчкой и результат запишем во вторую строчку,

2) умножим первую строчку на (-7), сложим со второй строчкой и результат запишем во вторую строчку

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 0 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - 4 \cdot I \sim \\ III - 7 \cdot I \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4-4 & 5-8 & 6-12 & 9-24 \\ 7-7 & 8-14 & 0-21 & -6-42 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & -6 & -21 & -48 \end{array}\right),$$

Теперь умножим вторую строчку на (-2), сложим с третьей строчкой и результат запишем в третью строчку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & -6 & -21 & -48 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \sim \\ III - 2 \cdot II \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & -3 & -6 & -15\\ 0 & -6+6 & -21+12 & -48+30\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & -3 & -6 & -15\\ 0 & 0 & -9 & -18\end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$rang(A)=rang(A|B)=3,$$

значит, система совместна. Количество неизвестных также равно 3:

$$n=rang(A)=rang(A|B)=3,$$

значит, система определена, т.е. имеет единственное решение.

Решим систему по формулам Крамера. Для начала найдем определитель матрицы системы, т.е. определитель системы:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}\text{разложим}\\ \text{по 3-й строчке}\end{bmatrix}=$$

$$=7\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}-8\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}+0=7\cdot(12-15)-8\cdot(6-12)=$$

$$=7\cdot(-3)-8\cdot(-6)=-21+48=27\neq 0.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система невырождена (решение системы существует и единственно). Найдем остальные определители. Найдем определитель Δ_1, подставляя в определитель Δ вместо первого столбца $\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 7\end{pmatrix}$ столбец свободных членов $\begin{pmatrix}6\\ 9\\ -6\end{pmatrix}$:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 2 & 3\\ 9 & 5 & 6\\ -6 & 8 & 0\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}\text{разложим}\\ \text{по 3-й строчке}\end{bmatrix}=$$

$$=(-6)\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}-8\cdot\begin{vmatrix}6 & 3\\ 9 & 6\end{vmatrix}+0=$$

$$= (-6) \cdot (12 - 15) - 8 \cdot (36 - 27) =$$

$$= (-6) \cdot (-3) - 8 \cdot 9 = 18 - 72 = -54.$$

Определитель Δ_2 получается из Δ подстановкой столбца свободных членов $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ вместо второго столбца $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложим} \\ \text{по 1-й строчке} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 36 - 6 \cdot (-42) + 3 \cdot (-24 - 63) =$$

$$= 36 + 252 + 3 \cdot (-87) = 288 - 261 = 27.$$

Определитель Δ_3 получается из Δ подстановкой столбца свободных членов $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ вместо третьего столбца $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложим} \\ \text{по 1-й строчке} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-30 - 72) - 2 \cdot (-24 - 63) + 6 \cdot (32 - 35) =$$

$$= -102 - 2 \cdot (-87) + 6 \cdot (-3) = -102 + 174 - 18 = 54.$$

Отсюда получим решение системы уравнений:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-54}{27} = -2; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2.$$

Проверка, подставим полученное решение в исходную систему. Подставим $x = -2, y = 1, z = 2$ в первое уравнение системы:

$$-2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 6,$$
$$6 = 6.$$

Получили верное равенство. Подставим $x = -2, y = 1, z = 2$ во второе уравнение системы:

$$4 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 9,$$
$$-8 + 5 + 12 = 9,$$
$$9 = 9.$$

Получили верное равенство. Подставим $x = -2, y = 1, z = 2$ во второе уравнение системы:

$$7 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 = -6,$$
$$-14 + 8 = 7,$$
$$7 = 7.$$

Получили верное равенство. Таким образом, система решена верно.

Решим систему методом Гаусса. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду (мы это уже делали, когда исследовали систему на совместность, поэтому воспользуемся уже полученным результатом):

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right).$$

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ -3y - 6z = -15, \\ \quad -9z = -18. \end{cases}$$

Из третьего уравнения

$$z = \frac{-18}{-9} = 2;$$

подставим это значение во второе уравнение:

$$-3y - 6 \cdot 2 = -15,$$
$$-3y = -15 + 12,$$

$$-3y = -3,$$
$$y = \frac{-3}{-3} = 1.$$
подставим $z = 2$ и $y = 1$ в первое уравнение:
$$x + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 6,$$
$$x + 2 + 6 = 6,$$
$$x + 8 = 6,$$
$$x = 6 - 8 = -2$$
Итак, общее решение (оно же единственное):
$$x = -2, y = 1, z = 2$$
(ответ получили такой же, что и с помощью формул Крамера).

Решим систему с помощью обратной матрицы. Найдем матрицу A^{-1}, обратную к матрице системы
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$
методом присоединенной матрицы.

Так как $\det A = \Delta = 27 \neq 0$, то матрица A^{-1} существует, поэтому решение системы существует и единственно.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:
$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 8 = -48,$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 0 - 6 \cdot 7) = 42,$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = -3,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 0 - 3 \cdot 8) = 24,$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 3 \cdot 7 = -21,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) = 6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = -3,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3.$$

Составим матрицу $\left(A_{ij}\right)$ из алгебраических дополнений:

$$\left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 & 42 & -3 \\ 24 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем полученную матрицу

$$\left(A_{ij}\right)^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A_{ij}\right)^T = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -16 \cdot 6 + 8 \cdot 9 - 1 \cdot (-6) \\ 14 \cdot 6 - 7 \cdot 9 + 2 \cdot (-6) \\ -1 \cdot 6 + 2 \cdot 9 - 1 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -96 + 72 + 6 \\ 84 - 63 - 12 \\ -6 + 18 + 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -18 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, общее решение:

$$x = -2, y = 1, z = 2$$

(ответ получили такой же, что и с помощью формул Крамера, а также методом Гаусса).

Ответ: $x = -2, y = 1, z = 2$.

Задание 7. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$$

Решение.

Исследуем систему на совместность. Запишем расширенную матрицу системы:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \end{array}\right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 8 \cdot II - 3 \cdot I \\ 2 \cdot III - I \\ 8 \cdot IV - 3 \cdot I \\ 8 \cdot V - 7 \cdot I \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 24-24 & 24-18 & 16-15 & 8-6 & 80-63 \\ 8-8 & 4-6 & 6-5 & 2-2 & 16-21 \\ 24-24 & 40-18 & 8-15 & 8-6 & 120-63 \\ 56-56 & 32-42 & 40-35 & 16-14 & 144-147 \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 22 & -7 & 2 & 57 \\ 0 & -10 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ 3\cdot III+II \\ 3\cdot IV-11\cdot II \\ 3\cdot V+5\cdot II \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 17 \\ 0+0 & -6+6 & 3+1 & 0+2 & -15+17 \\ 0-0 & 66-66 & -21-11 & 6-22 & 171-187 \\ 0+0 & -30+30 & 15+5 & 6+10 & -9+85 \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -32 & -16 & -16 \\ 0 & 0 & 20 & 16 & 76 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV+8\cdot III \\ V-5\cdot III \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -32+32 & -16+16 & -16+16 \\ 0 & 0 & 20-20 & 16-10 & 76-10 \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 66 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow V \\ \leftarrow IV \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$rang(A) = rang(A|B) = 4,$$

значит, система совместна. Количество неизвестных также равно 4:

$$n = rang(A) = rang(A|B) = 4,$$

значит, система определена, т.е. имеет единственное решение.

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 17, \\ 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 6x_4 = 66. \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы получаем:

$$x_4 = \frac{66}{6} = 11.$$

Подставим $x_4 = 11$ в третье уравнение системы:

$$4x_3 + 2 \cdot 11 = 2,$$
$$4x_3 = 2 - 22,$$
$$4x_3 = -20,$$
$$x_3 = -\frac{20}{4} = -5.$$

Подставим $x_4 = 10$ и $x_3 = -5$ во второе уравнение системы:

$$6x_2 + (-5) + 2 \cdot 11 = 17,$$
$$6x_2 - 5 + 22 = 17,$$
$$6x_2 + 17 = 17,$$
$$6x_2 = 17 - 17,$$
$$6x_2 = 0,$$
$$x_2 = \frac{0}{6} = 0.$$

Подставим $x_4 = 10,\ x_3 = -5$ и $x_2 = 0$ в первое уравнение системы:

$$8x_1 + 6 \cdot 0 + 5 \cdot (-5) + 2 \cdot 11 = 21,$$
$$8x_1 - 25 + 22 = 21,$$
$$8x_1 - 3 = 21,$$
$$8x_1 = 21 + 3,$$

$$8x_1 = 24,$$
$$x_1 = \frac{24}{8} = 3.$$
Получили решение $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -5, x_4 = 11$. Проверим правильность решения, подставим полученные корни в исходную систему. Подставим в первое уравнение системы $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -5, x_4 = 11$:
$$8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21,$$
$$8 \cdot 3 + 6 \cdot 0 + 5 \cdot (-5) + 2 \cdot 11 = 21,$$
$$24 + 0 - 25 + 22 = 21,$$
$$21 = 21,$$
получили верное равенство. Подставим во второе уравнение системы $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -5, x_4 = 11$:
$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10,$$
$$3 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-5) + 11 = 10,$$
$$9 + 0 - 10 + 11 = 10,$$
$$10 = 10,$$
получили верное равенство. Подставим в третье уравнение системы $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -5, x_4 = 11$:
$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8,$$
$$4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-5) + 11 = 8,$$
$$12 + 0 - 15 + 11 = 8,$$
$$8 = 8,$$
получили верное равенство. Подставим в четвертое уравнение системы $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -5, x_4 = 11$:
$$3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15,$$
$$3 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + (-5) + 11 = 15,$$
$$9 + 0 - 5 + 11 = 15,$$
$$15 = 15,$$
получили верное равенство. Подставим в четвертое уравнение системы $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -5, x_4 = 11$:
$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18,$$
$$7 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot (-5) + 2 \cdot 11 = 18,$$
$$21 + 0 - 25 + 22 = 18,$$

$$18 = 18,$$

получили верное равенство. Таким образом, система решена верно.

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -5, x_4 = 11$.

Задание 8. Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если

$$\vec{a} = (1; 2; 1), \vec{b} = (-2; 3; -1), \vec{c} = (1;\ -1; 24), \vec{d} = (1; 8; -1).$$

Решение. Составим определитель из координат векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и вычислим его, разложив по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(6 - 1) - 2 \cdot (-4 + 1) + (2 - 3) = 5 + 6 - 1 = 10 \neq 0,$$

значит, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис трехмерного пространства и вектор $\vec{d}$ можно разложить по векторам базиса

$$\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c},$$

где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Перейдем к матричной записи полученного векторного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Используя свойства матриц и действия над ними, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных α, β, γ:

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma = 1, \\ 2\alpha + 3\beta - \gamma = 8, \\ \alpha - \beta + 2\gamma = -1. \end{cases}$$

Решим полученную систему линейных уравнений методом Крамера (через определители).

Находим главный определитель системы уравнений (он был найден ранее):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

следовательно, данная система уравнений имеет единственное решение, которое находим по формулам Крамера:

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta},\ \ \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta},\ \ \gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta},$$

где $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma$ получается путем замены $1, 2, 3$ столбца свободными членами.

Вычислим определители $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma$, раскладывая определители по первой строчке.

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (6 - 1) + 2 \cdot (16 - 1) + (-8 + 3) = 5 + 30 - 5 = 30,$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (16 - 1) - (4 + 1) + (-2 - 8) = 15 - 5 - 10 = 0,$$

$$\Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3+8) + 2\cdot(-2-8) + (-2-3) = 5 - 20 - 5 = -20.$$

Находим

$$\alpha = \frac{30}{3} = 3,\ \ \beta = 0,\ \ \gamma = -\frac{20}{10} = -2.$$

Тогда

$$\vec{d} = 3\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} - 2\cdot\vec{c},$$

$$\vec{d} = 3\cdot\vec{a} - 2\cdot\vec{c}.$$

Ответ: $\vec{d} = 3\cdot\vec{a} - 2\cdot\vec{c}$.

Литература

1. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М: Высшая школа. 1994. – 175 с.

2. Кузнецова О.В., Банщикова И.Н. Математика: учебно-методическое пособие. – Ижевск: ФГБОУ ВО «Ижевская ГСХА». 2016. – 60 с.

3. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике 1 курс. – М.: Айрис-пресс. 2008. – 576 с.

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М.: Айрис-пресс. 2009. – 608 с.

Учебное издание

Ирина Николаевна Банщикова
Татьяна Сергеевна Быкова

**Сборник индивидуальных заданий
по линейной алгебре**

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция
Компьютерная верстка: В.В. Данилова

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел.: + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru