

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»  
Институт математики, информационных технологий и физики  
Кафедра математического анализа

Н.А. Соловьева, Т.С. Тинюкова, Д.Л. Федоров

**Математический анализ в примерах и задачах.  
Предел числовой последовательности**

Учебное пособие



Ижевск  
2024

УДК 517.1  
ББК 22.16  
С 60

*Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ*

**Рецензент:** д-р. физ.-мат. наук, профессор, вед. науч. сотрудник отд. теоретической физики УдмФИЦ УрО РАН Ю.П.Чубурин

**Соловьева Н.А., Тинюкова Т.С., Федоров Д.Л.**

С60 Математический анализ в примерах и задачах. Предел числовой последовательности : учеб. пособие. – 2-е изд. перераб. и доп. – Ижевск : Удмуртский университет, 2024. – 90 с.

Предлагаемое учебное пособие посвящено изучению одного из разделов математического анализа — теории пределов числовых последовательностей. Приводятся основные понятия данной теории и подробные решения типовых задач. Учебное пособие предназначено для студентов всех направлений Института математики, информационных технологий и физики. Пособие будет полезно студентам направлений нематематического профиля.

УДК 517.1  
ББК 22.161

© Н.А. Соловьева, Т.С. Тинюкова,  
Д.Л. Федоров, 2024  
© ФГБОУ ВО «Удмуртский  
государственный университет», 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	5
1. Метод математической индукции . . . . .	6
2. Верхние и нижние грани множества вещественных чисел . . . . .	10
3. Ограниченные числовые последовательности . . . . .	15
4. Предел числовой последовательности . . . . .	18
5. Вычисление пределов числовых последовательностей с помощью простейших преобразований . . . . .	24
6. Вычисление пределов числовых последовательностей применением свойств последовательностей . . . . .	30
7. Число $e$ . . . . .	32
8. Предел монотонной последовательности . . . . .	35
9. Подпоследовательности. Верхний и нижний пределы последовательности . . . . .	40
Материалы для проведения коллоквиума по теме «Предел последовательности» . . . . .	42
Теоретические упражнения по теме «Предел последовательности» . . . . .	43
Контрольные работы по теме «Предел последовательности» . . . . .	46
Индивидуальные задания . . . . .	49
Вариант 1 . . . . .	49
Вариант 2 . . . . .	50
Вариант 3 . . . . .	51
Вариант 4 . . . . .	53
Вариант 5 . . . . .	54
Вариант 6 . . . . .	55
Вариант 7 . . . . .	56
Вариант 8 . . . . .	58

Вариант 9 . . . . .	59
Вариант 10 . . . . .	60
Вариант 11 . . . . .	62
Вариант 12 . . . . .	63
Вариант 13 . . . . .	64
Вариант 14 . . . . .	65
Вариант 15 . . . . .	67
Вариант 16 . . . . .	68
Вариант 17 . . . . .	69
Вариант 18 . . . . .	71
Вариант 19 . . . . .	72
Вариант 20 . . . . .	73
Вариант 21 . . . . .	74
Вариант 22 . . . . .	76
Вариант 23 . . . . .	77
Вариант 24 . . . . .	78
Вариант 25 . . . . .	80
Вариант 26 . . . . .	81
Вариант 27 . . . . .	82
Вариант 28 . . . . .	83
Вариант 29 . . . . .	85
Вариант 30 . . . . .	86
Ответы . . . . .	88
Список литературы . . . . .	90

## Предисловие

Предлагаемое учебное пособие посвящено изучению теории пределов числовых последовательностей — одного из разделов математического анализа, который лежит в основе математического образования и необходим для понимания и освоения всех курсов фундаментальной и прикладной математики, компьютерных наук и их приложений.

Особенностью данного пособия является логически замкнутое, последовательное и систематичное изложение теоретического и практического материала по разделу «Пределы числовых последовательностей», представленного в виде необходимых теоретических сведений, разобранных примеров и упражнений, которые можно использовать на практических занятиях и для самостоятельной работы студента.

Пособие снабжено образцами вариантов контрольной работы, а также материалами для проведения коллоквиума по рассмотренным темам. В частности, имеются теоретические упражнения, предназначенные для более глубокого освоения изучаемых терминов и понятий.

Учебное пособие предназначено для студентов всех направлений Института математики, информационных технологий и физики (01.03.01 Математика, 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 01.03.03 Механика и математическое моделирование, 02.03.01 Математика и компьютерные науки), и будет полезно для студентов направлений нематематического профиля.

Задачи освоения данной темы:

- 1) получить базовые знания по математическому анализу;
- 2) выработать общематематическую культуру: умение логически мыслить, устанавливать логические связи между понятиями, знать основные алгоритмы решения задач математического анализа, применять полученные знания для решения прикладных задач.

Во второе издание пособия добавлен раздел «Вычисление пределов числовых последовательностей применением свойств последовательностей» и включено 30 вариантов индивидуальных заданий. В каждом варианте имеется 20 типовых заданий, которые полностью соответствуют темам, рассмотренным в пособии. Теоретический материал дополнен примерами задач с решениями, предложены новые задания для самостоятельной работы. Исправлены замеченные опечатки и неточности.

## 1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Метод математической индукции является важным способом доказательства утверждений, зависящих от натурального аргумента. В основе метода математической индукции лежит принцип математической индукции.

Доказательство справедливости утверждения  $S(n)$  для любого натурального  $n$  методом математической индукции проводится в три этапа:

1. База индукции. Проверяется справедливость утверждения  $S(n)$  для  $n = 1$  (если доказывается, что утверждение  $S(n)$  справедливо для  $n \geq n_0$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}$ , то база индукции проверяется для  $n = n_0$ );

2. Индукционное предположение. Предполагается справедливость утверждения  $S(n)$  при некотором натуральном  $n = k$ ;

3. Индукционный переход. Доказывается справедливость утверждения  $S(n)$  для числа  $n = k + 1$ , отталкиваясь от индукционного предположения.

*Пример 1.1.* Докажите, что число  $a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$  кратно 3 при любом  $n \in \mathbb{N}$ .

*Решение.*

1. База индукции. При  $n = 1$  число  $a_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9$  кратно 3.

2. Индукционное предположение. Пусть утверждение справедливо при  $n = k$ , т.е. число  $a_k = k^3 + 3k^2 + 5k$  кратно 3.

3. Индукционный переход. Установим, что при  $n = k + 1$  число

$$a_{k+1} = (k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 5(k + 1)$$

кратно 3.

В самом деле,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 5(k + 1) = \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5 = \\ &= (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3(k^2 + 3k + 3) = a_k + 3(k^2 + 3k + 3). \end{aligned}$$

Таким образом,  $a_{k+1}$  представили в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых кратно 3 ( $a_k$  кратно 3 в силу индукционного предположения). Следовательно,  $a_{k+1}$  кратно 3.

Таким образом, если равенство верно при  $n = k$ , то оно верно и при  $n = k + 1$ . Следовательно, доказываемое утверждение верно при любом натуральном  $n$ .

*Пример 1.2.* Докажите методом математической индукции, что при каждом  $n \in \mathbb{N}$  верно равенство

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \quad (1.1)$$

*Решение.*

1. База индукции. Проверим справедливость равенства (1.1) при  $n = 1$ .  
Получим верное равенство  $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$ .

2. Индукционное предположение. Пусть равенство (1.1) верно при  $n = k$ , т.е.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}. \quad (1.2)$$

3. Индукционный переход. Покажем, что равенство (1.1) верно при  $n = k + 1$ , т.е.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}. \quad (1.3)$$

Используя индукционное предположение, заменим сумму всех кроме последнего слагаемых в левой части равенства (1.3) на  $\frac{k}{k+1}$  (см. (1.2)), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ & = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} = \\ & = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

*Пример 1.3.* Докажите методом математической индукции неравенство Бернулли

$$(1+a)^n \geq 1+an \quad (1.4)$$

при всех  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  и  $a > -1$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

*Решение.*

1. База индукции. При  $n = 0$  неравенство (1.4) имеет вид

$$(1+a)^0 \geq 1+a \cdot 0, \text{ т.е. } 1 \geq 1$$

и, очевидно, верно.

2. Индукционное предположение. Пусть неравенство (1.4) справедливо при  $n = k$ , т. е.

$$(1 + a)^k \geq 1 + ak. \quad (1.5)$$

3. Индукционный переход. Покажем, что

$$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + a(k + 1). \quad (1.6)$$

Умножим обе части неравенства (1.5) на положительное число  $(1 + a)$ , получим

$$\begin{aligned} (1 + a)^k(1 + a) &\geq (1 + ak)(1 + a), \\ (1 + a)^{k+1} &\geq 1 + a + ak + a^2k. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Поскольку  $a^2 \geq 0$ , имеем

$$1 + a + ak + a^2k \geq 1 + a + ak = 1 + a(k + 1). \quad (1.8)$$

Из (1.7) и (1.8) следует справедливость неравенства (1.6). На основании принципа математической индукции заключаем, что неравенство Бернулли верно при всех  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

*Пример 1.4.* Докажите неравенство  $2^n > n^2 + 6$  при  $n > 4$ .

*Решение.* 1. База индукции. Проверим справедливость неравенства при  $n = 5$ :

$$2^5 > 5^2 + 6 \iff 32 > 31 \text{ — верно.}$$

2. Индукционное предположение. Предположим, что неравенство верно при некотором  $k \geq 5$ :

$$2^k > k^2 + 6, \quad k \geq 5.$$

3. Индукционный переход. Рассмотрим левую часть доказываемого неравенства при  $n = k + 1$ . Используя индукционное предположение, получим неравенство

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(k^2 + 6) = 2k^2 + 12.$$

Для завершения рассуждений осталось убедиться в справедливости неравенства

$$2k^2 + 12 > (k + 1)^2 + 6.$$

Оно легко проверяется путём равносильных преобразований:

$$\begin{aligned} 2k^2 + 12 > (k + 1)^2 + 6 &\iff 2k^2 + 12 > k^2 + 2k + 7 \iff \\ &\iff k^2 - 2k + 5 > 0 \iff (k - 1)^2 + 4 > 0 \text{ — верно.} \end{aligned}$$



## Задачи

Докажите, что при каждом  $n \in \mathbb{N}$  :

1. число  $7^n - 1$  кратно 6;
2. число  $5^n - 4n + 15$  кратно 16;
3. число  $n(2n^2 - 3n + 1)$  кратно 6;
4. число  $2n^3 + 3n^2 + 7n$  кратно 6;
5. число  $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$  кратно 11;
6. число  $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$  кратно 19.

Докажите, что при каждом  $n \in \mathbb{N}$  верны равенства:

7.  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ;
8.  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ ;
9.  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$ ;
10.  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ;
11.  $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$ ;
12.  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ;
13.  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$ ;
14.  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ;
15.  $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$  при  $n \geq 2$ ;
16.  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$ .

Докажите, что при каждом  $n \in \mathbb{N}$  верны неравенства:

17.  $2^n > 5n$  при  $n \geq 5$ ;  
 18.  $3^n > 5n + 1$  при  $n \geq 3$ ;  
 19.  $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}$ ;  
 20.  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$  при  $n \geq 2$ .

## 2. ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ГРАНИ МНОЖЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Под множеством будем понимать совокупность каких-либо элементов. Множества будем задавать следующими способами: перечислением элементов  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  или с помощью признака, которым обладают элементы данного множества, например,

$$A = \left\{ a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** Множество вещественных чисел  $A$  называется **ограниченным снизу**, если найдется число  $m$  такое, что каждый элемент множества  $A$  равен или больше  $m$

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad a \geq m.$$

Число  $m$  называется **нижней гранью множества  $A$** .

*Пример 2.1.* Рассмотрим множество  $A = (1; 3)$ . Множество  $A$  ограничено снизу. Например, число  $m_1 = -1$  является его нижней гранью. Нижняя грань не единственная, число  $m_2 = 0$  (как и любое число менее или равное 1) также является нижней гранью множества  $A$ .

На числовой оси множество находится правее каждой своей нижней грани (см. рис. 1).

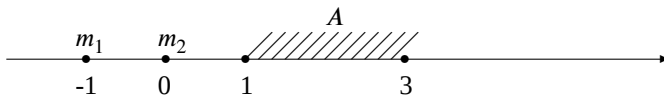


Рис. 1

*Пример 2.2.* Покажем, что множество  $B = (-\infty; 1)$  не является ограниченным снизу. Запишем отрицание к определению 2.1:

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists b_m \in B \quad b_m < m.$$

Для любого (сколь угодно малого) числа  $m$  найдется элемент  $b_m$  множества  $B$  меньший числа  $m$  (см. рис. 2).

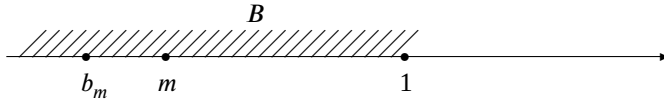


Рис. 2

Элемент  $b_m$  множества  $B$  можно выбрать не единственным способом. Пусть  $b_m = m - 1$ . Если  $m = -2$ , то  $b_m = -2 - 1 = -3$ . Следовательно, множество  $B$  не является ограниченным снизу.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.** Множество вещественных чисел  $A$  называется **ограниченным сверху**, если найдется число  $M$  такое, что каждый элемент множества  $A$  равен или меньше  $M$

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad a \leq M.$$

Число  $M$  называется **верхней гранью** множества  $A$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.** Множество называется **ограниченным**, если оно ограничено сверху и снизу.

*Пример 2.3.* Множество  $A = (1; 3)$  ограниченное снизу и сверху. Число  $M_1 = 4$  является его верхней гранью. Верхняя грань не единственная. Например, число  $M_2 = 5$  (как и любое число большее или равное 3) также является верхней гранью множества  $A$  (см. рис. 3).

Множество находится левее каждой своей верхней грани.

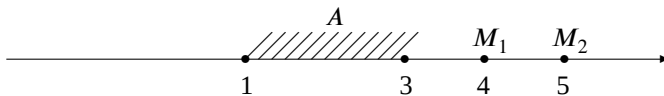


Рис. 3

*Пример 2.4.* Покажем, что множество  $B = (0; +\infty)$  не является ограниченным сверху. Запишем отрицание к определению 2.2:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists b_M \in B \quad b_M > M.$$

Для любого (сколь угодно большого) числа  $M$  найдется элемент  $b_M$  множества  $B$  больший числа  $M$  (см. рис. 4).

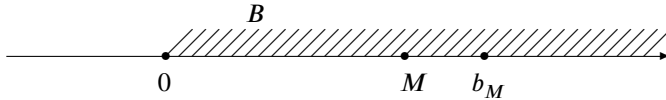


Рис. 4

Элемент  $b_M$  множества  $B$  можно выбрать не единственным способом. Например,  $b_M = M + 3$ . Если  $M = 50$ , то  $b_M = 50 + 3 = 53$ . Следовательно, множество  $B$  не является ограниченным сверху.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.** Число  $s$  называется **инфинумом** (точной нижней гранью) множества  $A$  и обозначается  $\inf A$ , если:

- 1)  $\forall a \in A \quad a \geq s$  ( $s$  является нижней гранью  $A$ );
- 2)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in A \quad a_\varepsilon < s + \varepsilon$ .

Если множество  $A$  не является ограниченным снизу, то  $\inf A = -\infty$ .

*Пример 2.5.* Пусть  $A = (1; 3)$ . Покажем, что  $\inf A = 1$ . Пункт 1) в определении 2.4 примет вид

$$\forall a \in (1; 3) \quad a \geq 1$$

и, очевидно, справедлив. Рассмотрим пункт 2)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in (1; 3) \quad a_\varepsilon < 1 + \varepsilon.$$

Это означает, что, если мы «немного» добавим к 1 (а именно, мы добавляем значение  $\varepsilon$ , которое считаем малым), то найдется элемент нашего множества, который будет меньше  $1 + \varepsilon$  (см. рис. 5); это означает, что инфинум нельзя увеличить, даже если увеличение очень мало, нарушается пункт 1).

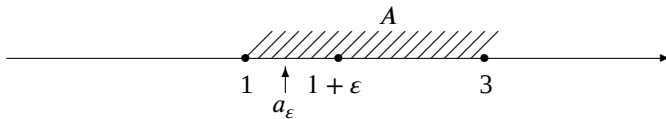


Рис. 5

Например, можно взять  $a_\varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  (сердину отрезка  $[1; 1 + \varepsilon]$ ) или  $a_\varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon}{3}$ . Значение  $a_\varepsilon$  определяется не единственным образом.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5.** Число  $S$  называется **супремумом** (точной верхней гранью) множества  $A$  и обозначается  $\sup A$ , если:

- 1)  $\forall a \in A \quad a \leq S$  ( $S$  является верхней гранью  $A$ );
- 2)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in A \quad a_\varepsilon > S - \varepsilon$ .

Если множество  $A$  не является ограниченным сверху, то  $\sup A = +\infty$ .

*Пример 2.6.* Пусть  $A = (1; 3)$ . Исходя из определения 2.5, покажем, что  $\sup A = 3$ . Рассмотрим сначала пункт 1) определения 2.5:

$$\forall a \in (1; 3) \quad a < 3,$$

он справедлив. Пункт 2) примет вид:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in (1; 3) \quad a_\varepsilon > 3 - \varepsilon,$$

т. е. если мы «немного» вычтем из 3 (вычитаем малое положительное значение  $\varepsilon$ ), то найдется элемент множества  $A$  такой, что он будет больше  $3 - \varepsilon$  (см. рис. 6); это означает, что супремум нельзя (даже «немного») уменьшить, иначе нарушается справедливость пункта 1).

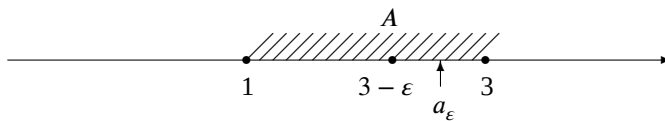


Рис. 6

Например, можно взять  $a_\varepsilon = 3 - \frac{\varepsilon}{2}$  (сердину отрезка  $[3 - \varepsilon; 3]$ ) или  $a_\varepsilon = 3 - \frac{2\varepsilon}{3}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6.** Пусть задано множество  $A$  и

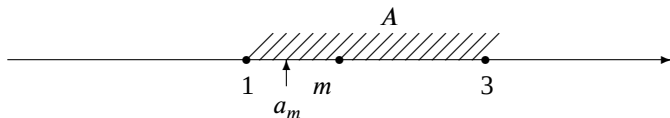
$$\exists m \in A \quad \forall a \in A \quad a \geq m.$$

Число  $m$  называется **минимальным элементом** множества  $A$  и обозначается  $\min A$ .

*Пример 2.7.* Множество  $A = [1; 3)$  имеет минимальный элемент  $\min A = 1$ .

*Пример 2.8.* Множество  $A = (1; 3)$  не имеет минимального элемента. Покажем это. Запишем отрицание к определению 2.6:

$$\forall m \in A \quad \exists a_m \in A \quad a_m < m.$$



Элемент  $a_m$  можно выбрать не единственным способом. Например, можно взять  $a_m = \frac{1+m}{2}$  (середина отрезка  $[1, m]$ ) или  $a_m = 1 + \frac{m-1}{3}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7.** Пусть задано множество  $A$  и

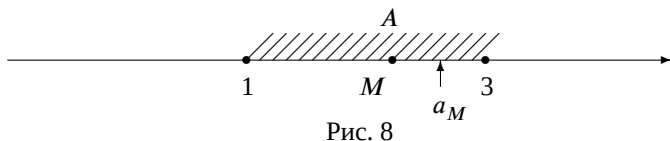
$$\exists M \in A \quad \forall a \in A \quad a \leq M.$$

Число  $M$  называется **максимальным элементом** множества  $A$  и обозначается  $\max A$ .

*Пример 2.9.* Множество  $A = (1; 3]$  имеет максимальный элемент  $\max A = 3$ .

*Пример 2.10.* Множество  $A = (1; 3)$  не имеет максимального элемента. Покажем это. Запишем отрицание к определению 2.7:

$$\forall M \in A \quad \exists a_M \in A \quad a_M > M.$$



Элемент  $a_M$  определяется не единственным образом (см. рис. 8). Например,  $a_M = \frac{M+3}{2}$  (середина отрезка  $[M, 3]$ ).

*Замечание.* Если множество  $A$  имеет максимальный (минимальный) элемент, то  $\max A = \sup A$  ( $\min A = \inf A$ ).

### Задачи

а) Установите или опровергните ограниченность множества  $A$  снизу и сверху, с указанием нижней и верхней граней. В случае неограниченности множества докажите это;

б) найдите максимальный  $\max A$  и минимальный  $\min A$  элементы множества  $A$ . В случае их отсутствия докажите это;

в) найдите  $\sup A$  и  $\inf A$  данного множества.

1.  $A = [-2, 3)$ .
2.  $A = [-1, 4]$ .
3.  $A = \mathbb{N}$ .
4.  $A = \mathbb{Z}$ .
5.  $A = \left\{ \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ .
6.  $A = \left\{ \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ .
7.  $A = \{3^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$ .
8.  $A = \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ .
9.  $A = \{n^2 (1 + (-1)^n), n \in \mathbb{N}\}$ .
10.  $A = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ .
11.  $A = (-\infty, 0] \cup \{2\}$ .
12.  $A = \{0\} \cup [1, +\infty)$ .

### 3. ОГРАНИЧЕННЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.** Если каждому натуральному числу  $n \in \mathbb{N}$  ставится в соответствие по определенному закону некоторое вещественное число  $x_n$ , то множество  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  называют числовой последовательностью (или просто последовательностью).

Последовательность обозначают  $\{x_n\}$ , где  $x_n$  называют общим или  $n$ -членом последовательности.

Способы, используемые для задания последовательности:

1. с помощью формулы общего члена последовательности. Например, формула  $x_n = 3n, n \in \mathbb{N}$ , задает последовательность  $\{3, 6, 9, \dots, 3n, \dots\}$ .

2. с помощью рекуррентной формулы, т.е. формулы, выражающей  $n$ -й член последовательности через предыдущие. Например, формула  $x_{n+1} = x_n + 2, x_1 = 1$  задает последовательность  $\{1, 3, 5, \dots\}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется ограниченной сверху, если существует число  $M$  такое, что для всех  $n \in \mathbb{N}$  верно неравенство  $x_n \leq M$ , т.е.

$$\exists M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq M. \quad (3.1)$$

*Пример 3.1.* Докажите, что последовательность

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 3n + 4} \right\} \quad (3.2)$$

ограничена сверху.

*Решение.* Рассмотрим общий член последовательности:

$$x_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 3n + 4} = \frac{n^2 + 3n + 4 - n - 4}{n^2 + 3n + 4} = 1 - \frac{n + 4}{n^2 + 3n + 4} < 1.$$

Таким образом,  $x_n < M = 1$  и  $\{x_n\}$  ограничена сверху.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется ограниченной снизу, если

$$\exists m \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq m. \quad (3.3)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется ограниченной, если она ограничена сверху и ограничена снизу, т. е.

$$\exists m \quad \exists M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq x_n \leq M. \quad (3.4)$$

Критерий ограниченности числовой последовательности. Последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, тогда и только тогда, когда существует число  $M^*$  такое, что для всех  $n \in \mathbb{N}$  верно неравенство  $|x_n| \leq M^*$ , т. е.

$$\exists M^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M^*. \quad (3.5)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется неограниченной, если

$$\forall M \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad |x_n| > M. \quad (3.6)$$

*Пример 3.2.* Исследуйте последовательность

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

на ограниченность.

*Решение.* Заданная последовательность является ограниченной, так как для любого натурального номера  $n \in \mathbb{N}$  верно неравенство:

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1.$$

То есть последовательность является ограниченной снизу числом  $m = 0$  и сверху числом  $M = 1$ , а значит она является ограниченной.

*Пример 3.3.* Исследуйте последовательность

$$\{x_n\} = \{2^{(-1)^n}\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

на ограниченность.



*Решение.* Последовательность  $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots \right\}$  ограничена снизу  $\frac{1}{2}$ , сверху 2, т. е. ограничена.

*Пример 3.4.* Исследуйте последовательность

$$\{x_n\} = \{(-1)^n n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

на ограниченность.

*Решение.* Запишем (3.6) для данной последовательности

$$\forall M \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad |(-1)^n n| = n > M. \quad (3.7)$$

Утверждение (3.7) верно, если положить, например,  $n = [M] + 1$ , где квадратные скобки обозначают целую часть числа  $M$ , то есть наибольшее целое число, не превосходящее  $M$ . Таким образом,  $\{x_n\}$  неограниченная.

*Пример 3.5.* Исследуйте последовательность

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{\cos n}{\sqrt{n^4+1}} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

на ограниченность.

*Решение.* Из неравенств  $|\cos n| \leq 1$ ,  $\sqrt{n^4+1} > n^2$  получаем

$$|x_n| = \left| \frac{\cos n}{\sqrt{n^4+1}} \right| \leq \frac{1}{n^2} \leq 1.$$

Таким образом, последовательность ограничена.

*Пример 3.6.* Докажите, что последовательность

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{n^3 + n}{n^2 + 3n + 2} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

неограниченная.

*Решение.* Справедлива оценка

$$|x_n| = \left| \frac{n^3 + n}{n^2 + 3n + 2} \right| = \frac{n^3 + n}{n^2 + 3n + 2} > \frac{n^3}{n^2 + 3n^2 + 2n^2} = \frac{n}{6}.$$

Если  $\frac{n}{6} > M^*$  ( $n > 6M^*$ ), то и  $|x_n| > M^*$ . Таким образом, (3.7) верно при  $n = [6M^*] + 1$ .

## Задачи

Исследуйте последовательность  $\{x_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  на ограниченность, если

1.  $x_n = \frac{2n^2 + 5n + 3}{n^2 + 3n + 4}$ .
2.  $x_n = \frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 + n + 2}$ .
3.  $x_n = \sin \frac{\pi n}{4}$ .
4.  $x_n = \cos \frac{\pi n}{2}$ .
5.  $x_n = 100 - n^2$ .
6.  $x_n = n^3 - 2$ .
7.  $x_n = \frac{n^2}{n + 1}$ .
8.  $x_n = \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ .
9.  $x_n = (-1)^n 2^n$ .
10.  $x_n = (-1)^n 5^n$ .
11.  $x_n = (-1)^n \cdot n^2$ .
12.  $x_n = (-1)^{n+1} \cdot n^3 - 1$ .
13.  $x_n = n^{(-1)^n}$ .
14.  $x_n = n^{2(-1)^{n+1}}$ .
15.  $x_n = \frac{3n + (-1)^n}{9n - 1}$ .
16.  $x_n = \frac{(-1)^n \cdot 5n}{4 - n}, n \neq 4$ .
17.  $x_n = \frac{(n + 2)(n - 2n^2)}{2n^3 - 1}$ .
18.  $x_n = \frac{(n^2 - 2)(1 + n)}{1 + n^3}$ .
19.  $x_n = \frac{5n^6 + 6}{(n^4 + 1)(n^2 - 1)}, n > 1$ .
20.  $x_n = \frac{\sqrt{n^3 + 4}}{(n + 2)(\sqrt{n + 3})}$ .
21.  $x_n = \sqrt{4n^2 + 2} - 2n$ .
22.  $x_n = 3n - \sqrt{3 + 9n^2}$ .
23.  $x_n = \sqrt{n^4 + n^3} - \sqrt{n^4 - n^3}$ .
24.  $x_n = \sqrt{2n^2 + n} - \sqrt{2n^2 - n}$ .

## 4. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.** Число  $a$  называют **пределом числовой последовательности**  $\{x_n\}$ , если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , что для любого натурального  $n \geq N_\varepsilon$  верно неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad |x_n - a| < \varepsilon. \quad (4.1)$$

Если  $a$  является пределом числовой последовательности  $\{x_n\}$ , то пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и говорят, что последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $a$ . Числовые последовательности, сходящиеся к нулю, называют **бесконечно малыми**.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.** Для произвольного  $\varepsilon > 0$  под  $\varepsilon$ -**окрестностью точки**  $a \in \mathbb{R}$  понимается интервал  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Определение предела числовой можно сформулировать еще таким способом: для каждого положительного  $\varepsilon$  существует такое натуральное  $N_\varepsilon$ , что для любого  $n \geq N_\varepsilon$  элементы последовательности  $\{x_n\}$  принадлежат  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  или, другими словами, для каждого  $\varepsilon > 0$  вне  $\varepsilon$ -окрестности находится только конечное число членов последовательности.

*Пример 4.1.* Докажите, что последовательность  $\{x_n\}$ , где  $x_n = \frac{1}{n}$ , бесконечно мала.

*Решение.* Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon. \quad (4.2)$$

Решим неравенство  $\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$  относительно  $n$ , получим

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \frac{1}{n} < \varepsilon. \quad (4.3)$$

Утверждение (4.3) справедливо, например, при  $N_\varepsilon = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ , где квадратными скобками выделена целая часть числа  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Таким образом, мы доказали, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

Равенство  $N_\varepsilon = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$  позволяет нам вычислить значение  $N_\varepsilon$  для каждого положительного  $\varepsilon$ . Например, при  $\varepsilon = 0,2$  имеем  $N_\varepsilon = \left[ \frac{1}{0,2} \right] + 1 = 6$ . А при  $\varepsilon = 0,03$  находим  $N_\varepsilon = 34$ . При уменьшении  $\varepsilon$  значение  $N_\varepsilon$  увеличивается.

Изобразим члены последовательности  $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$  на числовой прямой (см. рис. 1).

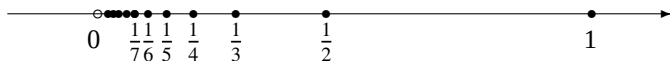


Рис. 1

Видим, что элементы  $x_n$  числовой последовательности всё ближе приближаются к нулю при возрастании  $n$ . Другими словами, какую бы окрестность нуля мы не взяли, вне этой окрестности либо конечное число членов последовательности, либо их вообще нет.

*Пример 4.2.* Исходя из определения, докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2} = 0.$$

*Решение.* Перепишем определение 4.1 для данного случая:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \left| \frac{2n-1}{n^2} \right| < \varepsilon. \quad (4.4)$$

Усилим неравенство  $\frac{2n-1}{n^2} < \varepsilon$  и вместо (4.4) запишем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \frac{2n}{n^2} < \varepsilon. \quad (4.5)$$

Мы увеличили дробь  $\frac{2n-1}{n^2}$ , увеличив её числитель. А если большая величина  $\frac{2n}{n^2}$  будет меньше  $\varepsilon$ , то и меньшая величина  $\frac{2n-1}{n^2}$  также не превзойдет  $\varepsilon$ . Таким образом, если выполнено (4.5), то выполнено и (4.4). Умножим неравенство в (4.5) на  $n$  и разделим на  $\varepsilon$ , получим  $\frac{2}{\varepsilon} < n$ . Отсюда находим  $N_\varepsilon = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ .

*Пример 4.3.* Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-5}{n+1} = 1$ .

*Решение.* По определению предела последовательности

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \left| \frac{n-5}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Перепишем неравенство  $\left| \frac{n-5}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$  в виде  $\frac{6}{n+1} < \varepsilon$ , отсюда имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \frac{6}{\varepsilon} - 1 < n. \quad (4.6)$$

Утверждение (4.6) справедливо, например, при  $N_\varepsilon = \left\lceil \frac{6}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ .

Пример 4.4. Пользуясь определением, докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \neq 1.$$

Решение. Запишем отрицание к (4.1)

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad |x_n - a| \geq \varepsilon. \quad (4.7)$$

Рассмотрим полученное неравенство в (4.7):

$$\left| \frac{(-1)^n}{n+1} - 1 \right| \geq \varepsilon \iff \left| \frac{(-1)^n - n - 1}{n+1} \right| \geq \varepsilon \iff \frac{n+1 - (-1)^n}{n+1} \geq \varepsilon.$$

Последнее неравенство можно усилить уменьшив числитель и увеличив знаменатель дробного выражения в его правой части:

$$\frac{n+1 - (-1)^n}{n+1} \geq \frac{n}{n+1} \geq \frac{n}{2n} \geq \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, справедливость утверждения (4.7) установлена при  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  и  $n = N + 1$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется **бесконечно большой**, если для каждого  $E > 0$  существует такое натуральное  $N$ , что для любого  $n \geq N$  верно неравенство  $|x_n| > E$  или

$$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |x_n| > E.$$

При этом пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  и говорят, что последовательность имеет бесконечный предел.

Бесконечно большая последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $+\infty$ , если

$$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad x_n > E;$$

пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

Бесконечно большая последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $-\infty$ , если

$$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad x_n < -E; \quad (4.8)$$

пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной и расходящейся.

Пример 4.5. Исходя из определения, докажите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 1) = +\infty.$$

Решение. Покажем, что

$$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad n^2 - 1 > E$$

или

$$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad n > \sqrt{E + 1}. \quad (4.9)$$

Утверждение (4.9) верно, например, при  $N = [\sqrt{E + 1}] + 1$ .

Пример 4.6. Исходя из определения, докажите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{n + 1} = -\infty.$$

Решение. Запишем (4.8) для данной числовой последовательности

$$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{-n^2}{n + 1} < -E. \quad (4.10)$$

Справедлива оценка

$$\frac{n^2}{n + 1} \geq \frac{n^2}{n + n} = \frac{n}{2}.$$

Усиливая неравенство, запишем утверждение, из справедливости которого будет следовать справедливость (4.10)

$$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \frac{n}{2} > E. \quad (4.11)$$

При  $N = [2E] + 1$  (4.11) верно.

Пример 4.7. Исходя из определения, докажите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n \cdot n^2 + 5) = \infty.$$

Решение. Покажем, что

$$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |(-1)^n \cdot n^2 + 5| > E. \quad (4.12)$$

Заметим, что

$$(-1)^n \cdot n^2 + 5 = \begin{cases} n^2 + 5, & n - \text{четное,} \\ -n^2 + 5, & n - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Усилим неравенство в (4.12)

$$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad N \geq 3 \quad \forall n \geq N \quad n^2 - 5 > E. \quad (4.13)$$

Последнее неравенство верно, например, при  $N = \lceil \sqrt{E + 5} \rceil + 3$ .

### Задачи

Исходя из определения предела числовой последовательности, докажите равенства или неравенства

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + (-1)^{n+1}}{n} = 0$ .
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} = 0$ .
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n - 1} = \frac{1}{2}$ .
6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n}{1 + n} = -1$ .
7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2} = 1$ .
8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 3n^2}{n^2} = 3$ .
9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{2n - 9}} = 0$ .
10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n + 1}} = 0$ .
11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{\pi n}{2} = 0$ .
12.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n + 1}} = 0$ .
13.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2}{n^3} = 0$ .
14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3 + 1} = 0$ .
15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-0, 1)^n = 0$ .
16.  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0, 3^n = 0$ .
17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$ .
18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n}} = 2$ .
19.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n} = 0, |q| \leq 1$ .
20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0, 2^n}{5n} = 0$ .
21.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{(n + 1)4^n} = 0$ .
22.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{n2^n} = 0$ .
23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \neq 1$ .
24.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n + 1)4^n} \neq 1$ .
25.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n}{n} \neq 0$ .
26.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{1 + n} \neq 1$ .

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+n}{3-n} \right) \neq -2.$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4+n}{1+n} \right) \neq 0.$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} (n+3)^2 = +\infty.$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

$$31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} = +\infty.$$

$$32. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n}{2n+1} = +\infty.$$

$$33. \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2+4) = -\infty.$$

$$34. \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt{n+6}) = -\infty.$$

$$35. \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right) = \infty. \quad 36. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi + 2\pi n}{4} \right) = \infty.$$

### 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОСТЕЙШИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

**ТЕОРЕМА 5.1** (об арифметических свойствах пределов числовых последовательностей). Если последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  сходятся, т. е. существуют  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ , то:

1) последовательности  $\{x_n \pm y_n\}$  сходятся и  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ;

2) последовательность  $\{x_n y_n\}$  сходится и  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ;

3) последовательность  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$  также сходится и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$ , если

$$y_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0.$$

**ТЕОРЕМА 5.2** (об арифметических свойствах бесконечно больших последовательностей). Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \neq \infty$ . Тогда

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \infty$ ;

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = \infty$  при условии  $A \neq 0$ ;

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$  при условии, что  $y_n \neq 0$ ;

4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$  при условии, что  $x_n \neq 0$ .



Утверждения последней теоремы принято записывать коротко в символическом виде:

$$1) \infty \pm A = \infty; \quad 2) \infty \cdot A = \infty \quad (A \neq 0); \quad 3) \frac{\infty}{A} = \infty; \quad 4) \frac{A}{\infty} = 0.$$

При вычислении пределов зачастую появляются выражения, значение которых не определено. Такие выражения называют неопределенностями. Основные виды неопределенностей:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right), \left(\frac{0}{0}\right), (0 \cdot \infty), (\infty - \infty), (1^\infty), (0^\infty), (\infty^0).$$

Все другие выражения неопределенностями не являются и принимают вполне конкретное конечное или бесконечное значение.

Раскрывать неопределенности позволяет упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.).

*Пример 5.1.* Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 1}{10n^2 + 12n}.$$

*Решение.* При  $n \rightarrow \infty$  числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, т.е. имеем неопределенность вида  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ . Вынесем в числителе старшую степень  $n^3$ , а в знаменателе  $n^2$ , получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 1}{10n^2 + 12n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3}\right)}{n^2 \left(10 + \frac{12}{n}\right)}.$$

Используя теорему 5.2, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3}\right)}{10 + \frac{12}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(10 + \frac{12}{n}\right)} = \infty.$$

*Пример 5.2.* Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 1}{2n^4 + n^2 + 1}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 1}{2n^4 + n^2 + 1} &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left( 1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3} \right)}{n^4 \left( 2 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^3}}{n \left( 2 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.\end{aligned}$$

Пример 5.3. Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n + 1)^2 - (2n - 1)^2}{n^2 + 2n + 1}.$$

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n + 1)^2 - (2n - 1)^2}{n^2 + 2n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 10n}{n^2 + 2n + 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( 5 + \frac{10}{n} \right)}{n^2 \left( 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{10}{n}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 5 + \frac{10}{n} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = 5.\end{aligned}$$

Пример 5.4. Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)},$$

где

$$\begin{aligned}P_k(n) &= a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0, \\ Q_m(n) &= b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0.\end{aligned}$$

Решение. Вынесем в числителе  $n^k$ , а в знаменателе  $n^m$ , получим

$$\begin{aligned}P_k(n) &= n^k \left( a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \dots + \frac{a_0}{n^k} \right), \\ Q_m(n) &= n^m \left( b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \dots + \frac{b_0}{n^m} \right).\end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k (a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \dots + \frac{a_0}{n^k})}{n^m (b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \dots + \frac{b_0}{n^m})}.$$

Таким образом,

если  $k > m$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \infty;$$

если  $k < m$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = 0;$$

если  $k = m$ , то по теореме 5.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_m(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{n} + \dots + \frac{a_0}{n^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \dots + \frac{b_0}{n^m}} = \frac{a_m}{b_m}.$$

*Замечание.* При вычислении предела последовательности,  $n$ -ый член которой является частным двух многочленов, т. е. имеет место неопределенность вида  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)$ , необходимо вынести старшие степени в числителе и знаменателе. Возможны следующие случаи:

1. если старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя, то предел равен  $\infty$ ;

2. если старшая степень числителя меньше старшей степени знаменателя, то предел равен 0;

3. если старшая степень числителя равна старшей степени знаменателя, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях.

*Пример 5.5.* Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}{3n^2}.$$

*Решение.* Применим в числителе формулу суммы  $n$  первых членов арифметической прогрессии  $S_n = (a_1 + a_n)n/2$ . Получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}{3n^2} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + (2n - 1))n}{2 \cdot 3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

Пример 5.6. Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + 3n^2 n!}{5(n+2)! + n!}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + 3n^2 n!}{5(n+2)! + n!} &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n! + 3n^2 n!}{5(n+2)(n+1)n! + n!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1+3n^2}{5(n+2)(n+1)+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+n+1}{5n^2+15n+11} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Пример 5.7. Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[6]{n} + \sqrt[5]{32n^{10} + 1}}{(n + \sqrt[4]{n}) \sqrt[3]{n^3 - 1}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[6]{n} + \sqrt[5]{32n^{10} + 1}}{(n + \sqrt[4]{n}) \sqrt[3]{n^3 - 1}} &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left( \frac{1}{n^{5/6}} + \sqrt[5]{32 + \frac{1}{n^{10}}} \right)}{n^2 \left( 1 + \frac{1}{n^{3/4}} \right) \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^3}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{5/6}} + \sqrt[5]{32 + \frac{1}{n^{10}}}}{\left( 1 + \frac{1}{n^{3/4}} \right) \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^3}}} = 2. \end{aligned}$$

Пример 5.8. Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 2 \cdot 4^n}{4^{n+1} - 5}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 2 \cdot 4^n}{4^{n+1} - 5} &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3 + 2 \cdot 4^n}{4^n \cdot 4 - 5} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \left( 3 \cdot \frac{3^n}{4^n} + 2 \right)}{4^n \left( 4 - \frac{5}{4^n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{3^n}{4^n} + 2}{4 - \frac{5}{4^n}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 5.9. Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 2n + 3} - n \right).$$

Решение. Умножим и разделим на выражение

$$\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n,$$

получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 2n + 3} - n \right) &= (\infty - \infty) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \sqrt{n^2 + 2n + 3} - n \right) \left( \sqrt{n^2 + 2n + 3} + n \right)}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 3 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 2 + \frac{3}{n} \right)}{n \left( \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1 \right)} = 1. \end{aligned}$$

## Задачи

Вычислите пределы

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + 2n)^3 - 8n^3}{(1 + 4n)^2 + n^2}.$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 - 3n)^2}{(n - 3)^3 - (n + 3)^3}.$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4 - n)^3 - (3 - n)^3}{(1 - n)^3 - (1 + n)^3}.$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 - n)^3 + (1 - n)^3}{(1 + n)^2 - (1 + n)^4}.$
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{\sqrt{n^4 + 2}}.$
6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{1 + 2 + 3 + \dots + n}.$
7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n+1}}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}}.$
8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{2}{7} + \frac{2^2}{7^2} + \dots + \frac{2^n}{7^n}}.$
9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 3)! + (n + 1)!}{(n + 2)!}.$
10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n + 1)! + (3n + 2)!}{(3n + 3)! - (3n + 2)!}.$
11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 3} + n^2}{\sqrt[4]{n^{12} + 2n + 1} - n^2}.$
12.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3 - \sqrt{n^3 + 2}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n}.$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^3 + 3} - \sqrt{n + 5}}{\sqrt[3]{n^3 + 2} - \sqrt{n - 1}}.$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 3} - \sqrt{n - 2}}{\sqrt[4]{n^4 + 2} - \sqrt{n - 2}}.$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 4^{n+1}}{3^n + 4^n}.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^{n+1}}{2^{n+1} + 2^{n+2}}.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)} \right).$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n(n+6)} - n \right).$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt[3]{4 + 8n^3} - 2n \right).$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n + \sqrt[3]{3 - n^3} \right).$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3} \left( \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} - 1 \right).$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3} \left( 1 - \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n}} \right).$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3} - 1}{\sqrt[n]{9} - 1}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{8} - 1}{1 - \sqrt[n]{16}}.$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3\sqrt[n]{81} - 4\sqrt[n]{27}}{(\sqrt[n]{3} - 1)^2}.$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{8} - 2\sqrt[n]{4} - \sqrt[n]{2} + 2}{1 - \sqrt[n]{2}}.$$

27. Приведите пример двух бесконечно малых последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  таких, что

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ , б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$ , в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$ , г)  $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ .

## 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЕМ СВОЙСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Будем говорить, что бесконечно большая последовательность  $\{x_n\}$  имеет более высокий порядок роста, чем бесконечно большая последовательность  $\{y_n\}$ , если  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$  бесконечно большая. Этот параграф посвящен вычислению пределов, с помощью следующих равенств, позволяющих сравнивать порядки роста различных бесконечно больших последовательностей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_{|a|} n}{n^\alpha} = 0, \quad (6.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \quad (6.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad (6.3)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $|a| > 1$ .

*Пример 6.1.* Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2^n]{n}.$$

*Решение.* Используя равенство (6.1), вычислим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2^n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln(n^{1/2^n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{2^n}} = e^0 = 1.$$

*Пример 6.2.* Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5^n}{2^n(n-1)!}.$$

*Решение.* Преобразуем выражение и, используя (6.3), вычислим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5^n}{2^n(n-1)!} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2,5^n}{(n-1)!} = -2,5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2,5^{n-1}}{(n-1)!} = -2,5 \cdot 0 = 0.$$

**ТЕОРЕМА 6.1.** Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательности есть также бесконечно малая последовательность.

*Пример 6.3.* Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$ .

*Решение.* Обозначим  $x_n = (-1)^n$ ,  $y_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ . Заметим, что последовательность  $\{x_n\}$  не имеет предела при  $n \rightarrow \infty$ , но при этом ограничена, так как  $|(-1)^n| = 1$ . Последовательность  $\{y_n\}$  является бесконечно малой, потому что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0$ . Тогда по теореме 6.1 произведение этих последовательностей есть бесконечно малая, то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ .

*Пример 6.4.* Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin \frac{\pi n}{4}}{2^n + n}$ .

*Решение.* Пусть  $x_n = \sin \frac{\pi n}{4}$  и  $y_n = \frac{n^2}{2^n + n}$ . Поскольку  $\left| \sin \frac{\pi n}{4} \right| \leq 1$ , последовательность  $\{x_n\}$  ограничена. Используя правило (6.2) сравнения порядков

роста бесконечно больших последовательностей, находим предел второй последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{2^n}}{1 + \frac{n}{2^n}} = \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

Окончательно по теореме 6.1 получаем  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ .

## Задачи

Вычислите пределы.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3}$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n}$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3n]{3n}$ .
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{3n}$ .
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2} + \sqrt[n]{2}}{4\sqrt[n]{n+1} + \sqrt[n]{2n}}$ .
6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n^2]{n} - 4\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n-1]{n} + 2\sqrt[n]{n^3}}$ .
7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)!}$ .
8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{(n-1)!}$ .
9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(0,2)^n n!}$ .
10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{(-0,1)^{n+1} (n-1)!}$ .
11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2^n - 1}{1 - n!}$ .
12.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + n^3 \cdot 3^n + 4}{n^2 + (n!)^2}$ .
13.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{1+2n}{n^3-3} \right)$ .
14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} n \cdot \left( \frac{3^n + n^4}{n^3 + 5^n} \right)$ .
15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot \cos(n^2 + 1)}{1 + n^2}$ .
16.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - (-1)^n) \cdot \sqrt[n]{3n}}{(n+1)^2}$ .

## 7. Число $e$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1.** Числом  $e$  называется предел числовой последовательности  $\left\{ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$



Пример 7.1. Вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n}.$$

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n} = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n \cdot \frac{3}{2}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

Пример 7.2. Вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n &= (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n \cdot \frac{n-1}{n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{\frac{n}{n-1}} = e^1 = e. \end{aligned}$$

Пример 7.3. Вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n^2} &= (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n^2 \cdot \frac{-(n+1)}{2} \cdot \frac{2}{-(n+1)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{\frac{-(n+1)}{2}}\right)^{\frac{2n^2}{-(n+1)}} = (e^{-\infty}) = 0. \end{aligned}$$

Пример 7.4. Вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 3n}{n^3}\right)^{2-n+n^2}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 3n}{n^3}\right)^{2-n+n^2} &= (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{(2-n+n^2) \cdot \frac{n^2}{3} \cdot \frac{3}{n^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{3}}\right)^{\frac{3(2-n+n^2)}{n^2}} = e^3. \end{aligned}$$

Пример 7.5. Вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n+1} \right)^{2n^2+1}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n+1} \right)^{2n^2+1} &= (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{(2n^2+1) \cdot \frac{n+1}{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right)^{\frac{2n^2+1}{n+1}} = (e^{+\infty}) = +\infty. \end{aligned}$$

### Задачи

Вычислите пределы

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{4n} \right)^n.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{6n} \right)^n.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{3n} \right)^{n^2}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{5n} \right)^{n^2}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n-1}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{3n} \right)^{3n}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{5}{n^2 + 2n + 7} \right)^{1-n^2}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{6 - n^2 + 3n} \right)^{2n^2 - 6n}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 3}{n^2 + 2} \right)^{n^2}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 6}{n^2 + 8} \right)^{1-n^2}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + 1}{n^3} \right)^{4+n^2}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 - n^3}{-n^3 - 1} \right)^{n^2+1}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^3 - 3n + 8}{4 + 2n^3} \right)^{n^2+1}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 2n + 3n^2}{3n^2 - 8n} \right)^{5n}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5 - n^2}{4 - n^2} \right)^{6n^3}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 3}{n^2 + 2} \right)^{2n^3}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 4}{2n^2 + 1} \right)^{2n^2}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n + 3}{n + 1} \right)^{n+4}.$

## 8. ПРЕДЕЛ МОНОТОННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *возрастающей* (*убывающей*), если для каждого номера  $n$  выполняется неравенство  $x_n < x_{n+1}$  ( $x_n > x_{n+1}$ ). Возрастающие и убывающие последовательности называются *строго монотонными*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если для каждого номера  $n$  выполняется неравенство  $x_n \leq x_{n+1}$  ( $x_n \geq x_{n+1}$ ). Возрастающие и убывающие последовательности называются *нестрого монотонными*.

В некоторых случаях приведённые неравенства могут не выполняться для малых значений  $n$ . В этом случае говорят, что последовательность  $\{x_n\}$  является монотонной при достаточно больших  $n$ .

Для проверки строгой или нестрогой монотонности часто применяют один из двух способов:

- 1) если разность двух соседних членов последовательности  $x_{n+1} - x_n > 0$  (или  $< 0$ ), то последовательность  $\{x_n\}$  — возрастающая (или убывающая); если же  $x_{n+1} - x_n \geq 0$  (или  $\leq 0$ ), то последовательность  $\{x_n\}$  — неубывающая (невозрастающая);
- 2) если последовательность  $\{x_n\}$  состоит из положительных чисел и частное двух соседних членов  $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$  (или  $< 1$ ), то последовательность  $\{x_n\}$  — возрастающая (или убывающая); если же  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$  (или  $\leq 1$ ), то последовательность  $\{x_n\}$  — неубывающая (или невозрастающая).

*Пример 8.1.* Покажем, что последовательность  $x_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1}$  является возрастающей. Для этого рассмотрим разность двух соседних членов последовательности:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)^2 + 1}{n+2} - \frac{n^2 + 1}{n+1} = \frac{n^2 + 3n}{n^2 + 3n + 2}.$$

Последнее выражение, очевидно, является положительным при каждом натуральном  $n$ . Следовательно последовательность  $\{x_n\}$  является возрастающей.

*Пример 8.2.* Пусть  $x_n = \frac{2^n}{n!}$ . Рассмотрим частное соседних членов последовательности:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n+1}.$$

Отсюда видно, что при  $n \geq 2$  отношение  $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ , следовательно последовательность  $x_n$  является убывающей начиная со второго элемента.

**ТЕОРЕМА 8.1** (Вейерштрасса). *Если  $\{x_n\}$  — неубывающая или возрастающая, но ограниченная сверху последовательность, то она имеет предел, причём  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_n x_n$ . Аналогично, если последовательность  $\{x_n\}$  — невозрастающая или убывающая, но ограничена снизу, то она имеет предел, причём  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_n x_n$ .*

Теорема Вейерштрасса обычно используется для доказательства существования предела последовательности, заданной рекуррентно.

*Пример 8.3.* Пусть  $x_1 = 0$  и  $x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{2}$  при  $n = 1, 2, \dots$ . Требуется найти предел этой последовательности. Докажем с помощью метода математической индукции, что  $x_n < 1$  для всех  $n$ . При  $n = 1$  это неравенство выполняется. Предположим, что оно выполняется также при некотором  $n = k$ . Тогда  $x_{k+1} = \frac{x_k + 1}{2} < \frac{1 + 1}{2} = 1$ . Таким образом, последовательность  $\{x_n\}$  ограничена сверху числом 1. Теперь установим монотонность последовательности. Рассмотрим разность соседних членов:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + 1}{2} - x_n = \frac{1 - x_n}{2} > 0, \text{ так как } x_n < 1.$$

Это значит последовательность  $\{x_n\}$  — возрастающая. По теореме Вейерштрасса существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Обозначим этот предел через  $a$ . Легко установить, что тогда и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$ . Следовательно из определения самой последовательности и арифметических свойств предела получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 1}{2} \iff a = \frac{a + 1}{2}.$$

Полученное уравнение имеет единственное решение  $a = 1$ . Поэтому окончательно получаем  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

*Пример 8.4.* Пусть  $x_1 = 1$  и  $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$  для  $n = 1, 2, \dots$ . Убедимся сначала, что все элементы последовательности ограничены сверху числом 2. При  $n = 1$  это утверждение верно. Если предположить, что при некотором натуральном  $k$  будет  $x_k < 2$ , то получим

$$x_{k+1} < \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Методом математической индукции заключаем, что  $x_n < 2$  при всех  $n$ . Заметим также из определения самой последовательности, что  $x_n > 0$  для всех  $n$ . Исследуем теперь монотонность последовательности  $x_n$ . Имеем

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - x_n = \frac{2 + x_n - x_n^2}{\sqrt{2 + x_n} + x_n} = \frac{(2 - x_n)(1 + x_n)}{\sqrt{2 + x_n} + x_n}.$$

В последнем выражении числитель и знаменатель принимают положительные значения при всех  $n$ . Следовательно  $x_{n+1} > x_n$ , то есть последовательность  $\{x_n\}$  возрастающая. По теореме Вейерштрасса она имеет предел  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Поэтому из определения последовательности получаем<sup>1)</sup>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + x_n} \iff a = \sqrt{2 + a}.$$

Получившееся иррациональное уравнение имеет единственный корень  $a = 2$ . Таким образом,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ .

В рассмотренных примерах этап доказательства существования предела является принципиально важным. Если опустить этот этап и перейти непосредственно к вычислению значения предела, можно получить ошибочные результаты. В связи с этим приведём следующий пример.

*Пример 8.5.* Пусть  $x_n = 2^{n-1}$ . Эту же последовательность можно задать равенствами  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = 2x_n$  при  $n = 1, 2, \dots$ . Если предположить, что последовательность имеет конечный предел  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , то будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2x_n \iff a = 2a.$$

Отсюда заключаем, что  $a = 0$ . Однако в действительности эта последовательность является бесконечно большой и  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-1} = +\infty$ . Причина возникшего противоречия заключается как раз в том, что данная последовательность не имеет конечного предела.

<sup>1)</sup>Помимо арифметических свойств предела, здесь также используется свойство непрерывности функции  $y = \sqrt{x}$ . Понятие непрерывности изучается позже в теме «предел функции».

В некоторых случаях, когда последовательность оказывается не монотонной, целесообразно применять теорему Вейерштрасса к её подпоследовательностям.

*Пример 8.6.* Пусть последовательность задана равенствами  $x_{n+1} = 2 - \frac{x_n}{2}$  и  $x_1 = \frac{1}{2}$ . Из её определения выводим равенство  $x_n = 2 - \frac{x_{n-1}}{2}$ , откуда получаем

$$x_{n+1} = 2 - \frac{2 - \frac{x_{n-1}}{2}}{2} = 1 + \frac{x_{n-1}}{4}. \quad (8.1)$$

Методом математической индукции покажем, что подпоследовательность из элементов с нечётными номерами  $\{x_{2k-1}\}$  ограничена сверху числом  $\frac{4}{3}$ , а подпоследовательность с чётными номерами  $\{x_{2k}\}$  ограничена снизу этим же числом. Замечаем, что  $x_1 < \frac{4}{3}$  и  $x_2 = \frac{7}{4} > \frac{4}{3}$ . Предположим, что наши предположения выполняются для некоторых значений  $k$ . Тогда из равенства (8.1) получаем

$$x_{2k+1} = 1 + \frac{x_{2k-1}}{4} < 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3},$$

$$x_{2k+2} = 1 + \frac{x_{2k}}{4} > 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

Ограниченность обеих подпоследовательностей доказана. Покажем, что подпоследовательность  $\{x_{2k-1}\}$  возрастающая, а подпоследовательность  $\{x_{2k}\}$  убывающая. Из равенства (8.1) следует  $x_{n+1} - x_{n-1} = 1 - \frac{3}{4}x_{n-1}$ . Поэтому

$$x_{2k+1} - x_{2k-1} = 1 - \frac{3}{4}x_{2k-1} > 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 0,$$

$$x_{2k+2} - x_{2k} = 1 - \frac{3}{4}x_{2k} < 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 0.$$

Из монотонности и ограниченности каждой из подпоследовательностей по теореме Вейерштрасса следует существование их пределов:  $a_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1}$  и  $a_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k}$ . В равенстве (8.1) положим сначала  $n = 2k - 1$ , а затем  $n = 2k$  и перейдём в обоих случаях к пределу при  $k \rightarrow \infty$ . Получим уравнения

$$a_i = 1 + \frac{1}{4}a_i, \quad \text{где } i = 1 \text{ или } 2.$$

Отсюда находим  $a_1 = a_2 = \frac{4}{3}$ . Так как пределы подпоследовательностей равны, то вся последовательность сходится к этому же пределу, то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{4}{3}$ .

Приведём ещё один пример последовательности, заданной рекуррентно, но не имеющей предела.

*Пример 8.7.* Пусть  $x_1 = 3$ ,  $x_{n+1} = x_n^2 + x_n - 4$ . Если предположить, что эта последовательность имеет предел, придём к уравнению  $a = a^2 + a - 4$ , откуда возможными значениями предела будут числа  $a = \pm 2$ . Однако, ни одно из них не является пределом последовательности. Покажем методом математической индукции, что для всех  $n$  выполняется неравенство  $x_n \geq 2 + n$ . При  $n = 1$  неравенство верно. Пусть неравенство верно также при некотором значении  $k$ . Заметим, что функция  $f(x) = x^2 + x - 4$  является возрастающей на промежутке  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ . Поэтому

$$x_{k+1} = f(x_k) \geq f(2 + k) = (2 + k)^2 + 2 + k - 4 = 2 + k^2 + 5k \geq 2 + k + 1.$$

Тем самым, неравенство доказано. Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2+n) = \infty$ , то и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

## Задачи

Докажите монотонность и ограниченность числовой последовательности, найдите предел последовательности  $\{x_n\}$ .

1.  $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{2}$ ,  $x_1 = 1$ .
2.  $x_{n+1} = \frac{3x_n - 1}{4}$ ,  $x_1 = 0$ .
3.  $x_{n+1} = x_n^2 + x_n - \frac{1}{4}$ ,  $x_1 = 0$ .
4.  $x_{n+1} = 2x_n^2 - x_n + \frac{3}{8}$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}$ .
5.  $x_{n+1} = \sqrt{x_n - 2} + 2$ ,  $x_1 = 4$ .
6.  $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n^2}$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}$ .

Докажите монотонность и ограниченность подпоследовательностей  $\{x_{2k-1}\}$  и  $\{x_{2k}\}$ , найдите предел последовательности  $\{x_n\}$ .

7.  $x_{n+1} = \frac{3 - x_n}{2}$ ,  $x_1 = 2$ .
8.  $x_{n+1} = \frac{3}{2 + x_n}$ ,  $x_1 = 0$ .

Покажите, что последовательность не имеет предела.

9.  $x_{n+1} = \frac{3}{n}$ ,  $x_1 = 1$ .
10.  $x_{n+1} = 2x_n - 1$ ,  $x_1 = 2$ .

## 9. ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1.** Последовательность

$$\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots\},$$

полученная из  $\{x_n\}$ , удалением ряда ее членов без изменения порядка следования оставшихся членов, называется **подпоследовательностью** последовательности  $\{x_n\}$ .

*Пример 9.1.* Рассмотрим числовую последовательность

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}.$$

Выпишем две ее подпоследовательности

$$\begin{aligned} \{x_{n_k}\} &= \left\{ \frac{1}{2k} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \right\}, \\ \{x_{n_l}\} &= \left\{ \frac{1}{5l-1} \right\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots \right\}. \end{aligned}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2.** Точка  $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  называется **частичным пределом последовательности**  $\{x_n\}$ , если существует подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ , сходящаяся к  $a$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3.** **Верхним (нижним) частичным пределом последовательности** называется число, которое является наибольшим (наименьшим) частичным пределом последовательности. Верхний и нижний частичные пределы обозначаются, соответственно,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Если последовательность  $\{x_n\}$  не ограничена сверху, то верхний частичный предел равен плюс бесконечности  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . Соответственно, если последовательность не ограничена снизу, то  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

*Пример 9.2.* Рассмотрим числовую последовательность

$$\{y_n\} = \{(-1)^n\}$$

и две ее подпоследовательности

$$\{y_{n_k}\} = \{y_{2k}\} = \{(-1)^{2k}\} = \{1, 1, 1, \dots\}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = 1,$$



$$\{y_{n_l}\} = \{y_{2l+1}\} = \{(-1)^{2l+1}\} = \{-1, -1, -1, \dots\}, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} y_{n_l} = -1.$$

Таким образом,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = -1$ .

*Пример 9.3.* Найдите все частичные пределы числовой последовательности  $\{x_n\}$ , где  $x_n = \sin \frac{\pi n}{2}$ . Выпишите верхний и нижний пределы  $\{x_n\}$ .

*Решение.* Выпишем несколько первых членов последовательности

$$\{x_n\} = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}.$$

Члены последовательности повторяются через четыре шага за счет периодичности функции  $\sin x$ . Таким образом, можно выделить следующие подпоследовательности:

$$1) n = 1 + 4k, x_{n_k} = \sin \frac{\pi(1 + 4k)}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) = 1,$$

$$2) n = 2 + 4k, x_{n_k} = \sin \frac{\pi(2 + 4k)}{2} = \sin (\pi + \pi k) = 0,$$

$$3) n = 3 + 4k, x_{n_k} = \sin \frac{\pi(3 + 4k)}{2} = \sin \left( \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right) = -1.$$

Следовательно,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$ .

## Задачи

Найдите все частичные пределы числовой последовательности  $\{x_n\}$ . Выпишите верхний и нижний пределы данной последовательности.

$$1. x_n = \frac{1}{n+1}.$$

$$2. x_n = \frac{1+n}{n}.$$

$$3. x_n = (-1)^n \frac{4n-1}{n+6}.$$

$$4. x_n = (-1)^{n-1} \frac{n+6}{n-1}.$$

$$5. x_n = \sin \frac{\pi n}{4}.$$

$$6. x_n = \cos \frac{\pi n}{2}.$$

$$7. x_n = 2^{(-1)^n n}.$$

$$8. x_n = \frac{4}{3^{(-1)^n n}}.$$

$$9. x_n = \frac{n \cos(\pi n/2) + 2}{n+1}.$$

$$10. x_n = \frac{1 - n \sin(\pi n/4)}{2n-7}.$$

$$11. x_n = (\cos(\pi n/4))^{n+1}.$$

$$12. x_n = (\sin(\pi n/4))^n.$$

$$13. x_n = \frac{(1 + \sin(\pi n/2)) + \lg n}{\lg(3n)}. \quad 14. x_n = \frac{(1 + \cos(\pi n)) + \lg n}{\lg(5n)}.$$

$$15. x_n = n^{\sin(\pi n/2)}. \quad 16. x_n = n^{\sin(\pi n/3)}.$$

### **МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ КОЛЛОКВИУМА ПО ТЕМЕ «ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ»**

В этом разделе пособия приведены рекомендуемые материалы для проведения коллоквиума по математическому анализу. Рассмотрены теоретические вопросы и теоретические упражнения.

1. Грани числовых множеств. Ограниченные множества. Точная верхняя и нижняя грани множеств. Теорема о существовании точных верхней и нижней граней ограниченного множества.
2. Определение предела числовой последовательности. Теорема о единственности предела.
3. Ограниченные последовательности. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
4. Арифметические свойства предела: умножение на число, предел модуля, предел суммы и разности.
5. Арифметические свойства предела: пределы произведения и частного.
6. Переход к пределу в неравенствах. Принцип двух милиционеров.
7. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса о пределе ограниченной монотонной последовательности.
8. Последовательности, сходящиеся к  $\pm\infty$ , бесконечно большая последовательность. Неограниченность бесконечно большой последовательности.
9. Определение числа  $e$ .
10. Принцип вложенных отрезков.
11. Частичный предел последовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса о существовании частичного предела. Верхний и нижний пределы последовательности.

12. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ ПО ТЕМЕ «ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ»**

Решения предлагаемых упражнений должны сопровождаться подробными рассуждениями. Если предложенное в упражнении утверждение является верным, то оно должно быть доказано в соответствии с определениями используемых понятий или с применением подходящих теорем. Если же утверждение является ложным, это нужно подтвердить подходящим примером.

1. Докажите следующие свойства верхней и нижней грани:

$$1) \sup_n (a_n + b_n) \leq \sup_n a_n + \sup_n b_n;$$

$$2) \inf_n (a_n + b_n) \geq \inf_n a_n + \inf_n b_n;$$

2. Докажите следующие свойства верхнего и нижнего пределов:

$$1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

$$2) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

$$3) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k > n} a_k;$$

$$4) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k > n} a_k.$$

3. Пусть последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  ограничены, причём  $x_n > 0$  для всех  $n = 1, 2, \dots$ . Можно ли тогда утверждать, что последовательность  $\{x_n^{y_n}\}$  также ограничена?

4. Пусть последовательность  $\{x_n\}$  ограничена и отлична от нуля для всех  $n = 1, 2, \dots$ . Можно ли утверждать тогда, что последовательность  $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$  также ограничена?

5. Пусть последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  ограничены, причём  $x_n > 1$  для всех  $n = 1, 2, \dots$ . Можно ли тогда утверждать, что последовательность  $\left\{ \frac{y_n}{x_n} \right\}$  также ограничена?

6. Пусть последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, а  $\{y_n\}$  не ограничена. Можно ли тогда утверждать, что последовательность  $\{x_n \cdot y_n\}$  также не ограничена?
7. Привести примеры бесконечно больших последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ .
8. Пусть  $\{x_n\}$  — неограниченная последовательность и  $x_n \neq 0$ . Следует ли отсюда, что последовательность  $\frac{1}{x_n}$  является ограниченной?
9. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = 0$ . Следует ли отсюда, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ?
10. Приведите пример последовательности  $\{x_n\}$  такой, чтобы выполнялось равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^n = 1$ .
11. Приведите пример последовательности  $\{x_n\}$  такой, чтобы выполнялось равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^n = +\infty$ .
12. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $y_n = \max\{x_n, x_{n+1}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ .
13. Докажите, что любую последовательность можно представить в виде произведения бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей.
14. Пусть последовательность  $\{x_n\}$  — монотонная (строго или нестрого). Следует ли отсюда, что последовательность  $\{|x_n|\}$  также является монотонной?
15. Пусть последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  являются монотонными (строго или нестрого). Следует ли отсюда, что последовательность  $\{x_n \cdot y_n\}$  также является монотонной?
16. Пусть последовательность  $\{x_n\}$  является ограниченной, а последовательность  $\{y_n\}$  монотонна (строго или нестрого). Можно ли утверждать, что последовательность  $\{x_n \cdot y_n\}$  является ограниченной?

17. Докажите, что число  $A$  является частичным пределом последовательности  $x_n$  тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N : |x_n - A| < \varepsilon.$$

18. Докажите, что  $A = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия

1)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N : x_n < A + \varepsilon;$

2)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N : x_n > A - \varepsilon.$

Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для нижнего предела последовательности.

19. Докажите, что  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  тогда и только тогда, когда

$$\forall E > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N : x_n > E.$$

Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для нижнего предела последовательности.

## КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ»

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ».

#### ВАРИАНТ 1.

1. Исследуйте числовую последовательность  $\{x_n\}$  на ограниченность, если

$$x_n = \frac{2n + 3}{2n} \cos n.$$

2. Используя определение предела числовой последовательности, докажите равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n}{2n - 3} = \frac{1}{2}.$$

3. Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (1 - n)^2}{1 + 3n}$ .

4. Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[8]{n^2 + 1} + \sqrt[3]{n}}{(\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[7]{n})\sqrt{n}}$ .

5. Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 3}{n - 1}\right)^{3n+1}$ .

6. Найдите все частичные пределы числовой последовательности  $\{x_n\}$ , заданной равенством

$$x_n = \frac{5 + n(-1)^{n+1}}{3 + 4n}.$$

Выпишите верхний и нижний пределы данной последовательности.

7. Докажите существование предела последовательности  $\{x_n\}$  и найдите его, если  $x_1 = \frac{3}{2}$ ,  $x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 4$ .

8\*. Приведите пример бесконечно больших последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 - y_n^2) = 5$ .

#### ВАРИАНТ 2.

1. Исследуйте числовую последовательность  $\{x_n\}$  на ограниченность, если

$$x_n = \frac{n^2 - 1}{2 + n}.$$

2. Используя определение предела числовой последовательности, докажите неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{6n} \neq \frac{1}{3}.$$

3. Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-1} - n)$ .

4. Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3n-n^2} + \sqrt[2]{n^3}}{(4n + \sqrt[5]{n})\sqrt{n}}$ .

5. Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2-2}\right)^{1-n^2}$ .

6. Найдите все частичные пределы числовой последовательности  $\{x_n\}$ , заданной равенством

$$x_n = \left(\cos \frac{\pi n}{2}\right)^n.$$

Выпишите верхний и нижний пределы данной последовательности.

7. Докажите существование предела последовательности  $\{x_n\}$  и найдите его, если  $x_1 = \frac{9}{2}$ ,  $x_{n+1} = x_n^2 - 8x_n + 20$ .

8\*. Приведите пример бесконечно больших последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 - y_n^2) = -3$ .

### ВАРИАНТ 3.

1. Исследуйте числовую последовательность  $\{x_n\}$  на ограниченность, если

$$x_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}.$$

2. Используя определение предела числовой последовательности, докажите равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{1-n} = -\infty.$$

3. Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + 2n! \cdot n^2}{2n(n+1)! - 7n}$ .

4. Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^5} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)}{4+5n}$ .

5. Вычислите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3n-1}{4n+n^2}\right)^{n^2}$ .

6. Найдите все частичные пределы числовой последовательности  $\{x_n\}$ , если

$$x_n = \operatorname{tg} \frac{\pi + 2\pi n}{4}.$$

Выпишите верхний и нижний пределы данной последовательности.

7. Докажите существование предела последовательности  $\{x_n\}$  и найдите его, если  $x_1 = \frac{5}{2}$ ,  $x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6$ .

8\*. Приведите пример бесконечно малых последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n^2} = 1$ .



## Индивидуальные задания

### Вариант 1

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{8n-3}{4n+3}$  имеет своим пределом число  $A = 2$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{6}$ ,  $\varepsilon = 0,09$ ,  $\varepsilon = 0,002$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -4$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{4n+3}{8n+3}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2-3n+8}{4n-3}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(9n+5)(3n^2+9n+3)}{(9n^2-6n-1)^2}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{8n^2-3n+4} - \sqrt{8n^2+4n+3} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{12n-9} \left( \sqrt{4n-3} + \sqrt[4]{8n+3} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{8n-3}{8n+3} \right)^{4n-6}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n-8)(4n+1)}{4n^2-3n+4} \right)^{6-12n}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2+n-5}{7n^2-n-2} \right)^{2n+9}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arccos^{2n+1} \left( \sqrt{8n^2+9n} - \sqrt{8n^2+5n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2-5n+3)(n-1)!}{(2n-7)n!+4(n+1)!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -2 \log_3(5n-3) + 4 \log_3(6n+5) - \log_3(2n^2+8n+1) \right)$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 7n^7 + \sqrt[5]{6n^4+1} \right)}{\ln(4n^5+7n^2+3)}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n n}{7 \cdot 4^n + 4 \cdot 9^n n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5^n + \log_2^3(2n+5)}{\sqrt[4]{5 \cdot 3^n + n!}}$ .

16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1)}{n^2 - 9n - 7}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 6 + 36 + \dots + 6^{n-1}}{8^n + 9n}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} + 6x_n + 12$ ,  $x_0 = -5$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 2}$ ,  $x_0 = -\frac{1}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \cos \frac{7n + 4}{3} \pi$ .

### Вариант 2

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{7n + 3}{4n + 7}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{7}{4}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{6}$ ,  $\varepsilon = 0,06$ ,  $\varepsilon = 0,001$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -4$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{4n - 3}{7n + 7}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{4n - 7}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{7n^2 + 3n + 4} - \sqrt{7n^2 + 4n + 7})$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{11n + 21} (\sqrt{4n + 4} + \sqrt[4]{7n + 7})$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7n + 4}{7n + 8} \right)^{4n-5}$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^2 + 3n + 4}{(n - 6)(4n + 2)} \right)^{11n-3}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^2 + 9}{5n^2 - n + 6} \right)^{4n+6}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin^{3n+1} (\sqrt{12n^2 + 14n} - \sqrt{12n^2 + 8n})$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n^2 - 3n + 4)^2}{5n^2 (2n^2 - 4n + 6)}$ .

11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-9)(n+1)! + (3n^2 + 8n - 1)n!}{4(n+2)!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-4 \log_8(2n+4) + 2 \log_8(5n-6) + \log_8(7n^2 + 4n - 6))$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2n^6 + 3n^3 + 3)}{\ln(2n + \sqrt[3]{4n^{12} + 2})}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(-4)^n + 9 \cdot 7^n n^3}{7^n n^2}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 4^n + 2n^2 + n + 7}}{7 \cdot 5^n + (n+1)!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{n^2 - 2n - 1}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 12 + 48 + \dots + 3 \cdot 4^{n-1}}{8^n + 9n}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{2} - 6x_n - 24$ ,  $x_0 = -7$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{-5x_n - 12}{x_n + 2}$ ,  $x_0 = -\frac{7}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \operatorname{ctg} \frac{2(5n+2)}{3} \pi$ .

### Вариант 3

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{7n+7}{8n+3}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{7}{8}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{7}$ ,  $\varepsilon = 0,03$ ,  $\varepsilon = 0,007$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -3$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{8n-7}{7n+3}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 + 7n + 7}{8n - 3}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-3)(8n-5)(n^2+2n-1)}{(-6n^2+5n)^2}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{7n^2 + 7n + 8} - \sqrt{7n^2 + 8n + 3} \right)$ .

6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{15n + 21} \left( \sqrt{7n + 3} + \sqrt{8n + 9} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7n + 9}{7n + 5} \right)^{8n-4}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n-5)(8n+3)}{8n^2 + 7n + 8} \right)^{-15n-6}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 + 2n - 6}{5n^2 + 5} \right)^{3n+7}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}^{3n+1} \left( \sqrt{4n^2 + 10n} - \sqrt{4n^2 + 6n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 4n - 8)(n-2)!}{(n+6)(n-1)! + 3n!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -2 \log_9(n-5) + 4 \log_9(7n+7) - \log_9(8n^2 + 8n) \right)$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 5n^7 + \sqrt[5]{7n^{10} + 2} \right)}{\ln(9n^5 + 5n + 6)}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-6)^n n}{7^n n^3 + 10 \cdot 9^n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + \log_4^5(4n+2)}{\sqrt[4]{8 \cdot 3^n + (n-1)!}}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1)}{n^2 + 8n + 3}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 7 + 49 + \dots + 7^{n-1}}{8^n + n}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} + 4x_n + 4$ ,  $x_0 = -3$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2}$ ,  $x_0 = 0$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \operatorname{tg} \frac{13n+7}{4} \pi$ .

### Вариант 4

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{2n+7}{4n-6}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{1}{2}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ,  $\varepsilon = 0,04$ ,  $\varepsilon = 0,002$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -2$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{4n-7}{2n-6}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2+7n+2}{4n+6}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n^2 - 4n - 3)^2}{(2n+6)(8n-8)(3n^2-9)}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\sqrt{2n^2+4n-6} + \sqrt{2n^2+7n+4} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{6n-42} \left( \sqrt[4]{2n-6} + \sqrt{4n+10} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+10}{2n-3} \right)^{4n-3}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^2+7n+4}{(n+1)(4n+4)} \right)^{6n+16}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2-6}{7n^2+n-6} \right)^{3n+1}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg}^{n-1} \left( \sqrt{27n^2+18n} - 3\sqrt{3n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n-6)n! + (3n^2+7n-2)(n-1)!}{4(n+1)!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \log_2(2n+1) - 4 \log_2(5n+7) + \log_2(n^2-4n-7) \right)$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(6n^2+7)}{\ln(7n^2+\sqrt[5]{5n^5+5})}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(-2)^n + 2 \cdot 3^n n^2}{8^n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 2^n - 3n^2 + 6n + 5}}{2 \cdot 5^n + n!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 11 + 20 + \dots + (9n-7)}{n^2 - 8n - 9}$ .

17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + 63 + 567 + \dots + 7 \cdot 9^{n-1}}{11^n + 5n}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{2} - 4x_n - 12$ ,  $x_0 = -5$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{3(2x_n + 5)}{x_n + 2}$ ,  $x_0 = -4$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \sin \frac{10n + 1}{3}\pi$ .

### Вариант 5

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{2n - 2}{7n + 1}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{2}{7}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{5}$ ,  $\varepsilon = 0,02$ ,  $\varepsilon = 0,008$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -1$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{7n + 2}{2n + 1}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 - 2n + 2}{7n - 1}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n - 1)(9n - 6)(-4n^2 - 2n + 1)}{(9n^2 + 3n + 7)^2}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2n^2 - 2n + 7} - \sqrt{2n^2 + 7n + 1} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{9n - 2} \left( \sqrt{2n + 1} + \sqrt{7n + 2} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n + 2}{2n + 5} \right)^{7n-2}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n + 2)(7n + 5)}{7n^2 - 2n + 7} \right)^{-9n-1}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 4n - 9}{3n^2 + 4n + 9} \right)^{n+8}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}^{3n-1} \left( \sqrt{12n^2 + 10n} - \sqrt{12n^2 + 6n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 2n - 5)n!}{8n(n + 1)! + 2(n + 2)!}$ .

12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2 \log_5(4n - 8) + 4 \log_5(6n - 2) - \log_5(4n^2 - 3n))$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(7n^2 + \sqrt{6n^4 + 8})}{\ln(2n^5 + 9n^3 + 3)}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^n}{4 \cdot 6^n + 7 \cdot 8^n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 4^n + \log_2(n + 3)}{\sqrt{12 \cdot 5^n + (n + 1)!}}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 10 + 18 + \dots + (8n - 6)}{n^2 - 5n - 5}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}}{4^n + 4n^3}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} + 2x_n$ ,  $x_0 = -1$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{3x_n + 2}{x_n + 2}$ ,  $x_0 = \frac{1}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \cos \frac{n+1}{3} \pi$ .

### Вариант 6

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{5n + 8}{6n - 4}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{5}{6}$ . Определить  $N(\epsilon)$  для значений  $\epsilon = \frac{1}{9}$ ,  $\epsilon = 0,05$ ,  $\epsilon = 0,001$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -4$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{6n - 8}{5n - 4}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 + 8n + 5}{6n + 4}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(9n^2 - 8n + 1)^2}{(n - 2)(6n - 7)(5n^2 + 9n - 6)}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{5n^2 + 6n - 4} + \sqrt{5n^2 + 8n + 6})$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{11n - 32} (\sqrt{5n - 4} + \sqrt{6n + 8})$ .

7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n + 13}{5n + 1} \right)^{6n-1}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6n^2 + 8n + 6}{n(6n + 1)} \right)^{11n+17}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n^2 + 4n - 2}{10n^2 - n - 2} \right)^{5n}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin^{2n+1} \left( \sqrt{4n^2 - 2n} - \sqrt{4n^2 - 4n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)(n - 1)! + (3n^2 - 4n - 10)(n - 2)!}{n!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \log_6(n + 5) - 4 \log_6(4n + 8) + \log_6(5n^2 - 9n - 7))$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(6n^5 + 2n + 2)}{\ln(2n^4 + \sqrt[3]{7n^7 + 7})}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6(-5)^n n^2 + 4 \cdot 8^n}{9^n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3^n - n^2 + 7n + 8}}{10 \cdot 2^n + (n - 1)!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 11 + 17 + \dots + (6n - 1)}{n^2 + 9n - 3}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 8 + 32 + \dots + 2 \cdot 4^{n-1}}{6^n + 8n^3}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{2} - 2x_n - 4$ ,  $x_0 = -3$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{-7x_n - 18}{x_n + 2}$ ,  $x_0 = -\frac{9}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \operatorname{ctg} \frac{n-1}{4} \pi$ .

### Вариант 7

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{n-3}{5n+3}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{1}{5}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ,  $\varepsilon = 0,04$ ,  $\varepsilon = 0,002$ .



2. Докажите по определению предела, что число  $A = -3$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{5n+3}{n+3}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2-3n+1}{5n-3}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(8n+9)(9n-9)(-n^2-8n+7)}{(6n^2-4n-5)^2}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2-3n+5} - \sqrt{n^2+5n+3} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{6n-9} \left( \sqrt[3]{n+3} + \sqrt{5n-2} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-3}{n+9} \right)^{5n}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+5)(5n+2)}{5n^2-3n+5} \right)^{-6n}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+2n+7}{6n^2-1} \right)^{n-1}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arccos^{n+2} \left( \sqrt{18n^2+7n} - \sqrt{18n^2+n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n^2-4n-4)(n-1)!}{(8n-2)n!+4(n+1)!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -2 \log_4(2n-2) + 4 \log_4(3n-3) - \log_4(3n^2+5n-3) \right)$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 4n^5 + \sqrt[3]{5n^7+6} \right)}{\ln \left( 6n^8 + 8n^2 + 8 \right)}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^n n^2}{5 \cdot 7^n n + 9 \cdot 8^n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5^n + \log_4(3n+4)}{\sqrt[4]{2^n + n!}}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+8+13+\dots+(5n-2)}{n^2-2n+1}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+24+144+\dots+4 \cdot 6^{n-1}}{6^n+n}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} - 2x_n + 4$ ,  $x_0 = 3$ .

19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n + 1}$ ,  $x_0 = \frac{1}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \operatorname{tg} \frac{2(8n-1)}{3}\pi$ .

### Вариант 8

- Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{7n-4}{3n+4}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{7}{3}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{8}$ ,  $\varepsilon = 0,08$ ,  $\varepsilon = 0,005$ .
- Докажите по определению предела, что число  $A = -2$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{3n+4}{7n+4}$ .
- Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 - 4n + 7}{3n - 4}$  является бесконечно большой.
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n^2 + 9n - 7)^2}{(4n + 9)(7n + 2)(8n^2 + 8n - 1)}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{7n^2 - 4n + 3} - \sqrt{7n^2 + 3n + 4})$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{10n - 16} (\sqrt{3n - 2} + \sqrt[3]{7n + 4})$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7n - 3}{7n + 11} \right)^{3n+1}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 - 4n + 3}{n(3n + 3)} \right)^{10n-1}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 4n - 5}{3n^2 - 8} \right)^{n+2}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arcsin}^{2n+1} (\sqrt{12n^2 + 8n} - \sqrt{12n^2 + 2n})$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(8n - 8)(n + 1)! + (3n^2 + 8n + 10)n!}{2(n + 2)!}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \log_7(8n) - 4 \log_7(6n + 7) + \log_7(6n^2 + 7n - 8))$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(9n^4 + 9n^3 + 5)}{\ln(9n^3 + \sqrt[5]{2n^{12} + 9})}$ .

14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6(-7)^n + 5 \cdot 8^n n^3}{9^n n^2}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{3 \cdot 5^n - 4n^2 + n + 9}}{8 \cdot 5^n + (n+1)!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 10 + 16 + \dots + (6n - 2)}{n^2 + 7n + 6}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 18 + 162 + \dots + 2 \cdot 9^{n-1}}{12^n + 4n^2}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{2} + 2x_n$ ,  $x_0 = 1$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{2(2x_n + 3)}{x_n + 1}$ ,  $x_0 = -\frac{5}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \sin \frac{4n+1}{3} \pi$ .

### Вариант 9

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{7n+6}{8n+6}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{7}{8}$ . Определить  $N(\epsilon)$  для значений  $\epsilon = \frac{1}{4}$ ,  $\epsilon = 0,05$ ,  $\epsilon = 0,003$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -4$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{8n-6}{7n+6}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 + 6n + 7}{8n - 6}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n-7)(8n+5)(5n^2+7n+3)}{(-7n^2-5)^2}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{7n^2+6n+8} - \sqrt{7n^2+8n+6} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{15n+36} \left( \sqrt[4]{7n+6} + \sqrt{8n+9} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7n+8}{7n+6} \right)^{8n+2}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)(8n+4)}{8n^2+6n+8} \right)^{-15n-8}$ .

9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 - 2n - 3}{6n^2 + n + 3} \right)^{2n}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}^{3n} \left( \sqrt{9n^2 + 4n} - \sqrt{9n^2 - 2n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n^2 + 3n - 8)(n - 2)!}{(n - 3)(n - 1)! + 5n!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (4 \log_5(4n + 5) - 2 \log_5(6n - 1) - \log_5(4n^2 + 6n - 3))$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(9n^9 + \sqrt[4]{4n^{12} + 2})}{\ln(2n^6 + 5n + 7)}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-4)^n}{8 \cdot 10^n n + 3 \cdot 9^n n^2}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + \log_2(5n + 5)}{\sqrt{2^n + (n - 1)!}}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 13 + 22 + \dots + (9n - 5)}{n^2 + 9n - 3}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 28 + 196 + \dots + 4 \cdot 7^{n-1}}{11^n + 7n^2}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} - 4x_n + 12$ ,  $x_0 = 5$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{3x_n}{x_n + 1}$ ,  $x_0 = 1$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \cos \frac{13n + 7}{4} \pi$ .

### Вариант 10

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{8n}{3n - 9}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{8}{3}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ ,  $\varepsilon = 0,03$ ,  $\varepsilon = 0,002$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -3$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{3n}{8n - 9}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 + 8}{3n + 9}$  является бесконечно большой.

4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 + 7n + 1)^2}{(3n + 9)(5n - 3)(n^2 - 6n - 2)}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{8n^2 + 3} - \sqrt{8n^2 + 3n - 9} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{11n} \left( \sqrt{3n + 4} + \sqrt[3]{8n - 9} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{8n + 3}{8n - 8} \right)^{3n+3}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 + 3}{(n - 8)(3n + 5)} \right)^{11n+18}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 2n - 8}{6n^2 - 3n + 7} \right)^{n-5}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arccctg}^{3n} \left( \sqrt{27n^2 + 24n} - \sqrt{27n^2 + 6n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n + 7)n! + (n^2 - 3n + 2)(n - 1)!}{4(n + 1)!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -4 \log_4(3n - 6) + 2 \log_4(5n - 1) + \log_4(3n^2 - 2n - 5) \right)$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(6n^6 + 8n^2 + 8)}{\ln(6n^4 + \sqrt[4]{9n^9 + 4})}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(-4)^n n + 3 \cdot 5^n n^3}{6^n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{2 \cdot 3^n + n^2 + n - 7}}{4 \cdot 3^n + n!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 8 + 13 + \dots + (5n - 2)}{n^2 + 4n - 7}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 9 + \dots + 3^{n-1}}{5^n + n}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{2} + 4x_n - 4$ ,  $x_0 = 3$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{-5x_n - 8}{x_n + 1}$ ,  $x_0 = -3$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \operatorname{ctg} \frac{4(n + 1)}{3} \pi$ .

### Вариант 11

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{2n-2}{6n-5}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{1}{3}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{9}$ ,  $\varepsilon = 0,08$ ,  $\varepsilon = 0,002$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -3$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{6n+2}{2n-5}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2-2n+2}{6n+5}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-2)(6n+4)(5n^2+6n-2)}{(4n^2-n+1)^2}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2n^2-2n+6} - \sqrt{2n^2+6n-5} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{8n+10} \left( \sqrt{2n-5} + \sqrt{6n-2} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+2}{2n-3} \right)^{6n+4}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n-1)(6n+1)}{6n^2-2n+6} \right)^{-8n-13}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^2-6}{6n^2-3n-7} \right)^{4n+4}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arcctg}^{n-2} \left( \sqrt{12n^2-3n} - \sqrt{12n^2-7n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2+3n-5)n!}{(2n+6)(n+1)! + (n+2)!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -2 \log_2(4n-5) + 4 \log_2(7n-4) - \log_2(n^2+5n-7) \right)$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(8n^2 + \sqrt{n^4+6})}{\ln(6n^9 + 9n^3 + 7)}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-6)^n n}{7^n n^2 + 8^n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 4^n + \log_3^2(2n+2)}{\sqrt[4]{9 \cdot 3^n} + (n+1)!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+10+18+\dots+(8n-6)}{n^2-5n+6}$ .

17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}}{6^n + 5n^2}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{3} + 4x_n + 6$ ,  $x_0 = -5$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{4x_n}{x_n + 1}$ ,  $x_0 = \frac{3}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \operatorname{tg} \frac{13n + 1}{3} \pi$ .

### Вариант 12

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{n}{6n + 1}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{1}{6}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ ,  $\varepsilon = 0,006$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -4$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{6n}{n + 1}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 + 1}{6n - 1}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-6n^2 - 2n + 2)^2}{(5n - 3)(8n - 8)(9n^2 - 4n)}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 6} - \sqrt{n^2 + 6n + 1} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{7n} \left( \sqrt[3]{n+1} + \sqrt{6n+1} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+5}{n+4} \right)^{6n+5}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6n^2 + 6}{(n+1)(6n+2)} \right)^{7n+10}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n^2 - 2n + 2}{8n^2 + 5n - 3} \right)^{5n-4}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arccos}^{3n-1} \left( \sqrt{4n^2 + 6n} - \sqrt{4n^2 + 4n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+9)(n-1)! + (n^2-8)(n-2)!}{4n!}$ .

12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \log_7 (n+7) - 4 \log_7 (2n-1) + \log_7 (6n^2 + 6n - 3))$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln (9n^9 + n + 8)}{\ln (8n^6 + \sqrt[3]{n^7} + 1)}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^n n^2 + 3 \cdot 7^n}{9^n n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4^n + 3n^2 + 7n + 8}}{2 \cdot 3^n + (n-1)!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1)}{n^2 + 9n - 7}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}}{2^n + n^2}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{3} - 4x_n - 18$ ,  $x_0 = -7$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{2(3x_n + 5)}{x_n + 1}$ ,  $x_0 = -\frac{7}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \sin \frac{13n + 7}{4} \pi$ .

### Вариант 13

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{4n-9}{3n-5}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{4}{3}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{5}$ ,  $\varepsilon = 0,05$ ,  $\varepsilon = 0,001$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -5$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{3n+9}{4n-5}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 - 9n + 4}{3n + 5}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-3)(9n+3)(3n^2+9n-4)}{(6n^2-5n+7)^2}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - 9n + 3} - \sqrt{4n^2 + 3n - 5})$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{7n+45} (\sqrt{3n-7} + \sqrt{4n-5})$ .



7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n-9}{4n-1} \right)^{3n-6}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n-1)(3n+3)}{3n^2-9n+3} \right)^{4-7n}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n^2-n-3}{9n^2-n+4} \right)^{5n+5}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arccos^{3n+2} \left( \sqrt{18n^2+5n} - \sqrt{18n^2-n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n^2-n-2)(n-1)!}{(8n-7)n! + 2(n+1)!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2 \log_4(6n-4) + 4 \log_4(8n+2) - \log_4(3n^2+2n-6))$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 4n + \sqrt[4]{4n^8+2} \right)}{\ln(9n^7+5n^2+9)}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n}{3 \cdot 6^n + 5 \cdot 9^n n^3}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^n + \log_3^4(4n+2)}{\sqrt[5]{8 \cdot 3^n + n!}}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+11+19+\dots+(8n-5)}{n^2+5n+9}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+4+\dots+2^{n-1}}{6^n+8n}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{3} + 2x_n$ ,  $x_0 = -2$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{3x_n-2}{x_n}$ ,  $x_0 = \frac{3}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \cos \frac{2(5n-1)}{3} \pi$ .

#### Вариант 14

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{n+8}{5n}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{1}{5}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{9}$ ,  $\varepsilon = 0,09$ ,  $\varepsilon = 0,003$ .

2. Докажите по определению предела, что число  $A = -5$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{5n-8}{n}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2+8n+1}{5n}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(9n^2 - 8n - 9)^2}{(n-2)(6n+9)(-2n^2+9n)}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\sqrt{n^2+5n} + \sqrt{n^2+8n+5} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{6n} \left( \sqrt[4]{n} + \sqrt{5n+11} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+9}{n+5} \right)^{5n-5}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n^2+8n+5}{(n+3)(5n+4)} \right)^{6n+9}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2-2n+1}{5n^2-n} \right)^{n-6}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin^{3n} \left( \sqrt{27n^2+n} - \sqrt{27n^2-8n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n+5)(n+1)! + (3n^2+8n-1)n!}{(n+2)!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \log_6(2n+7) - 4 \log_6(2n+8) + \log_6(5n^2+6n+7))$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(8n^5+3n^3+5)}{\ln(9n^5+\sqrt[3]{n^7}+5)}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9(-2)^n + 8 \cdot 3^n}{5^n n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3 \cdot 2^n + 5n - 2}}{11 \cdot 2^n + (n+1)!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6+14+22+\dots+(8n-2)}{n^2-n-5}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+5+25+\dots+5^{n-1}}{7^n+2n^2}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{3} - 2x_n - 6$ ,  $x_0 = -4$ .

19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{3x_n + 2}{x_n}$ ,  $x_0 = -\frac{3}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \operatorname{ctg} \frac{4(n+1)}{3}\pi$ .

### Вариант 15

- Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{3n-6}{8n+5}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{3}{8}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ,  $\varepsilon = 0,08$ ,  $\varepsilon = 0,005$ .
- Докажите по определению предела, что число  $A = -5$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{8n+6}{3n+5}$ .
- Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2-6n+3}{8n-5}$  является бесконечно большой.
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n(3n-8)(-n^2-5n)}{(-2n^2-5n+9)^2}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{3n^2-6n+8} - \sqrt{3n^2+8n+5} \right)$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{11n-30} \left( \sqrt[3]{3n+5} + \sqrt{8n-2} \right)$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n-4}{3n+11} \right)^{8n-4}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+2)(8n+5)}{8n^2-6n+8} \right)^{9-11n}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n^2+5n-4}{8n^2+3n+4} \right)^{5n+7}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}^{n+1} \left( \sqrt{4n^2+n} - \sqrt{4n^2-3n} \right)$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2+n-1)(n-2)!}{(7n+8)(n-1)!+3n!}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (4 \log_4(n+9) - 2 \log_4(5n-6) - \log_4(3n^2-3n+8))$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 5n^8 + \sqrt[4]{8n^8+4} \right)}{\ln(n^8+5n+1)}$ .

14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n n^3}{5 \cdot 8^n n^3 + 3 \cdot 9^n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + \log_3^2(n+5)}{\sqrt[4]{5} \cdot 2^n + (n-1)!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1)}{n^2 - 5n + 2}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + 42 + 294 + \dots + 6 \cdot 7^{n-1}}{7^n + 7n}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{3} - 2x_n + 6$ ,  $x_0 = 4$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{4x_n - 3}{x_n}$ ,  $x_0 = 2$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \operatorname{tg} \frac{13n+3}{4} \pi$ .

### Вариант 16

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{2n-7}{3n+4}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{2}{3}$ . Определить  $N(\epsilon)$  для значений  $\epsilon = \frac{1}{6}$ ,  $\epsilon = 0,04$ ,  $\epsilon = 0,003$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -1$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{3n+7}{2n+4}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 - 7n + 2}{3n - 4}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-7n^2 + 2n + 3)^2}{(6n+9)(7n+3)(-8n^2 + 9n + 3)}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2n^2 - 7n + 3} - \sqrt{2n^2 + 3n + 4} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5n-28} \left( \sqrt[3]{2n+4} + \sqrt{3n-7} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-4}{2n+11} \right)^{3n-3}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 - 7n + 3}{(n+4)(3n+1)} \right)^{5n-8}$ .

9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n^2 - n + 8}{8n^2 + 5n + 2} \right)^{5n-2}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}^{2n+1} \left( \sqrt{12n^2 + 8n} - \sqrt{12n^2 - 4n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6n-1)n! + (4n^2 + 10)(n-1)!}{3(n+1)!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-4 \log_8(5n-3) + 2 \log_8(8n-6) + \log_8(7n^2 - 5n + 3))$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3n^4 + 3n^2 + 2)}{\ln(2n^5 + \sqrt{n^6 + 4})}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9(-5)^n + 8 \cdot 5^n n^3}{6^n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 5^n - n^2 + 7n}}{7 \cdot 5^n + n!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + 13 + 20 + \dots + (7n-1)}{n^2 - 4n - 7}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 15 + 75 + \dots + 3 \cdot 5^{n-1}}{5^n + 6n^3}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{3} + 2x_n$ ,  $x_0 = 2$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{4x_n + 3}{x_n}$ ,  $x_0 = -2$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \sin \frac{16n-5}{3} \pi$ .

### Вариант 17

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{6n+7}{2n-1}$  имеет своим пределом число  $A = 3$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{7}$ ,  $\varepsilon = 0,05$ ,  $\varepsilon = 0,001$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -5$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{2n-7}{6n-1}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 + 7n + 6}{2n + 1}$  является бесконечно большой.

4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(6n-3)(-4n^2+7n+6)}{(-9n^2+6n-2)^2}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{6n^2+2n-1} + \sqrt{6n^2+7n+2}\right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{8n-7} \left(\sqrt{2n+8} + \sqrt[3]{6n-1}\right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n+11}{6n-1}\right)^{2n-2}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)(2n+2)}{2n^2+7n+2}\right)^{-8n-12}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4n+6}{8n^2+4n+6}\right)^{3n-8}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}^{2n-2} \left(3\sqrt{3n} - \sqrt{27n^2-6n}\right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2-8n+6)n!}{(5n-6)(n+1)! + 3(n+2)!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2 \log_6(2n) + 4 \log_6(2n+4) - \log_6(5n^2+2n-6)\right)$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(5n^3 + \sqrt[3]{9n^6+2})}{\ln(9n^3+2)}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n n}{9 \cdot 4^n n^3 + 9 \cdot 6^n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 4^n + \log_6^4(3n+2)}{\sqrt[3]{8 \cdot 4^n + (n+1)!}}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+5+8+\dots+(3n-1)}{n^2-8n-7}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+4+\dots+2^{n-1}}{6^n+n}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{3} - 4x_n + 18$ ,  $x_0 = 7$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{5x_n-4}{x_n}$ ,  $x_0 = \frac{5}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \cos \frac{n+1}{3}\pi$ .

### Вариант 18

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{2n+8}{n}$  имеет своим пределом число  $A = 2$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{5}$ ,  $\varepsilon = 0,05$ ,  $\varepsilon = 0,005$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -1$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{n-8}{2n}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2+8n+2}{n}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(8n^2+5n-1)^2}{(6n+3)(6n+4)(6n^2-4n)}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\sqrt{2n^2+n} + \sqrt{2n^2+8n+1} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n} \left( \sqrt[3]{2n} + \sqrt{n+10} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+13}{2n+1} \right)^{n-1}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+8n+1}{(n+3)(n+6)} \right)^{3n+13}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2-4n-2}{5n^2} \right)^{2n+4}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arccos^{3n} \left( \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6n+6)(n-1)! + (n^2+8n-8)(n-2)!}{2n!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -4 \log_9(n+1) + 2 \log_9(8n-2) + \log_9(8n^2+2n-5) \right)$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3n^7+6n+9)}{\ln(8n^8+\sqrt[4]{6n^7+7})}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6(-2)^n + 7 \cdot 2^n}{3^n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{2n+4n^2+2n-2}}{8 \cdot 4^n + (n-1)!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+9+15+\dots+(6n-3)}{n^2+7n-7}$ .

17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 7 + 49 + \dots + 7^{n-1}}{7^n + 4n^3}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{3} + 4x_n - 6$ ,  $x_0 = 5$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{5x_n + 4}{x_n}$ ,  $x_0 = -\frac{5}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \operatorname{ctg} \frac{5n+3}{4} \pi$ .

### Вариант 19

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{4n+8}{7n-3}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{4}{7}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ,  $\varepsilon = 0,008$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -5$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{7n-8}{4n-3}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 + 8n + 4}{7n + 3}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-2)(9n+9)(7n^2-8n+4)}{(5n^2+n+7)^2}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\sqrt{4n^2+7n-3} + \sqrt{4n^2+8n+7} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{11n-24} \left( \sqrt{4n-3} + \sqrt{7n+11} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n+8}{4n-1} \right)^{7n}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n-4)(7n+4)}{7n^2+8n+7} \right)^{-11n-17}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2-4n+6}{3n^2+5n-7} \right)^{2n-4}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin^{2n+2} \left( \sqrt{8n^2+n} - \sqrt{8n^2-3n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2-2n)(n-1)!}{(8n-5)n! + 2(n+1)!}$ .



12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2 \log_5 (n+3) + 4 \log_5 (7n+3) - \log_5 (4n^2 - 2n + 4))$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln (9n^4 + \sqrt[4]{9n^5 + 1})}{\ln (n^4 + 6n^2 + 5)}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-4)^n}{2 \cdot 5^n n^3 + 9^n n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5^n + \log_2 (5n + 2)}{\sqrt[3]{10 \cdot 4^n + n!}}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{n^2 + 8n + 9}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 8 + 32 + \dots + 2 \cdot 4^{n-1}}{8^n + 6n^2}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{4} + 3x_n + 3$ ,  $x_0 = -4$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{2 \cdot (2x_n - 3)}{x_n - 1}$ ,  $x_0 = \frac{5}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \operatorname{tg} \frac{13n + 1}{3} \pi$ .

### Вариант 20

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{5n - 1}{n + 6}$  имеет своим пределом число  $A = 5$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{9}$ ,  $\varepsilon = 0,06$ ,  $\varepsilon = 0,007$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -2$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{n + 1}{5n + 6}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 - n + 5}{n - 6}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n^2 - 3n - 9)^2}{(2n - 3)(7n + 4)(-9n^2 + 6n - 4)}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5n^2 - n + 1} - \sqrt{5n^2 + n + 6})$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{6n - 6} (\sqrt{n + 3} + \sqrt[3]{5n + 6})$ .

7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n}{5n+9} \right)^{n+1}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - n + 1}{(n-4)(n+5)} \right)^{6n}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 - 4}{4n^2 - n - 5} \right)^{2n-6}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin^{n-2} \left( \sqrt{12n^2 + 5n} - \sqrt{12n^2 - n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n+4)(n+1)! + (4n^2 - 4n + 1)n!}{5(n+2)!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \log_5(4n-2) - 4 \log_5(4n+7) + \log_5(4n^2 - 6n))$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(7n^4 + 7n^3 + 9)}{\ln(4n^3 + \sqrt[5]{7n^4 + 3})}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9(-7)^n n^3 + 5 \cdot 7^n}{8^n n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3 \cdot 2^n - n^2 + 6n - 4}}{11 \cdot 3^n + (n+1)!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 6 + 11 + \dots + (5n-4)}{n^2 - 5n + 1}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 20 + 100 + \dots + 4 \cdot 5^{n-1}}{9^n + 6n^2}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{4} - 3x_n - 15$ ,  $x_0 = -8$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{2x_n}{1-x_n}$ ,  $x_0 = -\frac{1}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \sin \frac{16n+1}{3}\pi$ .

### Вариант 21

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{8n-2}{5n-2}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{8}{5}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ ,  $\varepsilon = 0,08$ ,  $\varepsilon = 0,003$ .

2. Докажите по определению предела, что число  $A = -2$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{5n+2}{8n-2}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2-2n+8}{5n+2}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-8)(3n+2)(n^2+n+8)}{(9n^2+8n-1)^2}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{8n^2-2n+5} - \sqrt{8n^2+5n-2} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{13n+4} \left( \sqrt{5n-2} + \sqrt[3]{8n-2} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{8n}{8n+2} \right)^{5n+2}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n-6)(5n+1)}{5n^2-2n+5} \right)^{-13n-8}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^2-3n+1}{7n^2+n+5} \right)^{4n+7}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin^{n-1} \left( \sqrt{n^2-4n} - \sqrt{n^2-6n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n^2-4n-3)(n-2)!}{(2n+5)(n-1)!+3n!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (4 \log_6(4n+1) - 2 \log_6(7n+4) - \log_6(5n^2+7n-2))$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(9n^2 + \sqrt[3]{6n^5+7})}{\ln(6n^7+8n+1)}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^n n}{7 \cdot 6^n + 9^n n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + \log_3^5(2n+4)}{\sqrt{2 \cdot 5^n + (n-1)!}}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+7+12+\dots+(5n-3)}{n^2-7n+3}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+24+144+\dots+4 \cdot 6^{n-1}}{6^n+n}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{4} + 2x_n$ ,  $x_0 = -2$ .

19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{5x_n - 8}{x_n - 1}$ ,  $x_0 = 3$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \cos \frac{17n + 3}{4}\pi$ .

### Вариант 22

- Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{3n - 3}{8n - 1}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{3}{8}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{8}$ ,  $\varepsilon = 0,02$ ,  $\varepsilon = 0,004$ .
- Докажите по определению предела, что число  $A = -2$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{8n + 3}{3n - 1}$ .
- Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 - 3n + 3}{8n + 1}$  является бесконечно большой.
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n^2 - 6)^2}{(2n - 1)(3n + 5)(-2n^2 + 8n - 6)}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{3n^2 - 3n + 8} - \sqrt{3n^2 + 8n - 1} \right)$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{11n + 3} \left( \sqrt{3n - 1} + \sqrt{8n - 2} \right)$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n}{3n + 4} \right)^{8n+3}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{8n^2 - 3n + 8}{n(8n + 2)} \right)^{11n+7}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 5n - 7}{3n^2 + 2n + 4} \right)^{2n+5}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arccctg}^{2n+2} \left( \sqrt{12n^2 + 10n} - \sqrt{12n^2 - 2n} \right)$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n + 9)n! + (3n^2 + 7n - 1)(n - 1)!}{3(n + 1)!}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \log_9(4n + 4) - 4 \log_9(6n + 5) + \log_9(8n^2 - 5n + 4))$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(4n^7 + 3n^2 + 6)}{\ln(6n^9 + \sqrt[4]{5n^7 + 2})}$ .

14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(-5)^n + 8 \cdot 5^n n}{7^n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 \cdot 4^n + n^2 + 9n - 1}}{6 \cdot 2^n + n!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + 14 + 22 + \dots + (8n - 2)}{n^2 - 3n - 7}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 45 + 405 + \dots + 5 \cdot 9^{n-1}}{11^n + 7n^2}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{4} - 2x_n - 8$ ,  $x_0 = -6$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{3x_n}{1 - x_n}$ ,  $x_0 = -1$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \operatorname{ctg} \frac{2(8n - 1)}{3} \pi$ .

### Вариант 23

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{4n + 2}{3n - 7}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{4}{3}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ,  $\varepsilon = 0,02$ ,  $\varepsilon = 0,005$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -2$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{3n - 2}{4n - 7}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 + 2n + 4}{3n + 7}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 8)(5n - 5)(-6n^2 + 6n + 2)}{(-8n^2 - 6n + 6)^2}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{4n^2 + 2n + 3} - \sqrt{4n^2 + 3n - 7} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{7n - 14} \left( \sqrt{3n + 4} + \sqrt{4n - 7} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n + 6}{4n - 1} \right)^{3n+4}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n(3n + 3)}{3n^2 + 2n + 3} \right)^{-7n-19}$ .

9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 - 2n + 5}{6n^2 + 4n - 6} \right)^{2n+1}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}^{2n+2} \left( \sqrt{12n^2 + 5n} - \sqrt{12n^2 + n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n^2 + n - 2) n!}{(5n - 7)(n + 1)! + 4(n + 2)!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2 \log_6(3n + 1) + 4 \log_6(4n + 1) - \log_6(5n^2 - 7n + 5))$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(5n^5 + \sqrt{8n^9 + 3})}{\ln(5n^5 + 8n^3 + 8)}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-4)^n n}{5^n n + 4 \cdot 9^n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^n + \log_4^3(4n + 4)}{\sqrt[3]{11 \cdot 4^n + (n + 1)!}}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 7 + 12 + \dots + (5n - 3)}{n^2 + 3n - 9}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}}{4^n + 2n^3}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{4} + x_n - 1, x_0 = 0$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{2 \cdot (3x_n - 5)}{x_n - 1}, x_0 = \frac{7}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \operatorname{tg} \frac{2(8n - 1)}{3} \pi$ .

### Вариант 24

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{3n + 8}{4n + 6}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{3}{4}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{7}, \varepsilon = 0,01, \varepsilon = 0,008$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -5$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{4n - 8}{3n + 6}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 + 8n + 3}{4n - 6}$  является бесконечно большой.

4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(8 - 8n^2)^2}{(3n + 2)(4n - 8)(n^2 - 7n + 7)}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\sqrt{3n^2 + 4n + 6} + \sqrt{3n^2 + 8n + 4} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{7n + 48} \left( \sqrt{3n + 6} + \sqrt{4n + 11} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - 4n}{5 - 4n} \right)^{4n+5}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^2 + 8n + 4}{(n + 2)(4n + 4)} \right)^{7n+13}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 + n + 8}{6n^2 + 3n + 7} \right)^{3n+9}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin^{3n+1} \left( \sqrt{9n^2 + 4n} - \sqrt{9n^2 + n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6n + 2)(n - 1)! + (5n^2 + 8n + 6)(n - 2)!}{5n!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \log_6(5n + 1) - 4 \log_6(8n - 7) + \log_6(5n^2 + n + 2) \right)$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(8n^7 + 9n + 3)}{\ln(2n^3 + \sqrt[4]{3n^6 + 1})}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(-2)^n n^2 + 5 \cdot 7^n}{8^n n^3}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{4^n + 4n^2 + 7n - 8}}{12 \cdot 3^n + (n - 1)!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 11 + 17 + \dots + (6n - 1)}{n^2 - 9n + 3}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 40 + 320 + \dots + 5 \cdot 8^{n-1}}{9^n + 6n}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{4} - x_n - 3$ ,  $x_0 = -4$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{4x_n}{1 - x_n}$ ,  $x_0 = -\frac{3}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \sin \frac{9n - 5}{4} \pi$ .

### Вариант 25

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{2n-6}{3n+7}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{2}{3}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{7}$ ,  $\varepsilon = 0,03$ ,  $\varepsilon = 0,004$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -4$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{3n+6}{2n+7}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2-6n+2}{3n-7}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n+6)(7n+8)(7n^2-5n+6)}{(-5n^2+6n-6)^2}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2n^2-6n+3} - \sqrt{2n^2+3n+7} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5n-42} \left( \sqrt[4]{2n+7} + \sqrt{3n-2} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-6}{2n+7} \right)^{3n-6}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+4)(3n+5)}{3n^2-6n+3} \right)^{13-5n}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2-n-3}{4n^2-3n-5} \right)^{n+8}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin^{2n-2} \left( \sqrt{18n^2+14n} - \sqrt{18n^2+8n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2+9n+4)(n-1)!}{(7n+2)n! + 3(n+1)!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -2 \log_4(3n+6) + 4 \log_4(4n-7) - \log_4(3n^2-3n-8) \right)$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 3n + \sqrt[5]{4n^9+1} \right)}{\ln(2n^5+3n^2+1)}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n n}{4 \cdot 6^n + 9^n n^3}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^n + \log_4(n+5)}{\sqrt[3]{12 \cdot 2^n + n!}}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n^2-6n-2}$ .



17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 7 + 49 + \dots + 7^{n-1}}{9^n + n}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{4} - x_n + 3$ ,  $x_0 = 4$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{5x_n - 12}{x_n - 2}$ ,  $x_0 = \frac{7}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \cos \frac{4n-5}{3} \pi$ .

### Вариант 26

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{8n-5}{2n-6}$  имеет своим пределом число  $A = 4$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{9}$ ,  $\varepsilon = 0,09$ ,  $\varepsilon = 0,005$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -2$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{2n+5}{8n-6}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 - 5n + 8}{2n + 6}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n^2 - n + 5)^2}{(9n - 1)(9n + 8)(3n^2 + 6n - 2)}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{8n^2 - 5n + 2} - \sqrt{8n^2 + 2n - 6} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{10n + 30} \left( \sqrt{2n - 5} + \sqrt{8n - 6} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{8n - 4}{8n - 5} \right)^{2n-5}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 - 5n + 2}{(n - 1)(2n + 1)} \right)^{10n+2}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 - 9}{4n^2 - 4n} \right)^{2n+6}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin^{2n+2} \left( \sqrt{3n} - \sqrt{3n^2 - 3n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n(n+1)! + (4n^2 - 3n - 6)n!}{3(n+2)!}$ .

12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \log_6 (2n + 2) - 4 \log_6 (3n - 7) + \log_6 (5n^2 + 5n - 3))$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln (4n^5 + 5n^3 + 5)}{\ln (3n + \sqrt[5]{9n^8 + 1})}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(-3)^n + 2 \cdot 5^n}{9^n n^2}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 5^n + 2n^2 + 6n - 6}}{3^n + (n + 1)!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 10 + 17 + \dots + (7n - 4)}{n^2 - 6n - 5}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 27 + 243 + \dots + 3 \cdot 9^{n-1}}{11^n + 5n^3}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{4} + x_n + 1$ ,  $x_0 = 0$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n}{2 - x_n}$ ,  $x_0 = \frac{1}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \operatorname{ctg} \frac{n-2}{3} \pi$ .

### Вариант 27

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{n+5}{n+8}$  имеет своим пределом число  $A = 1$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{5}$ ,  $\varepsilon = 0,07$ ,  $\varepsilon = 0,009$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -4$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{n-5}{n+8}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 + 5n + 1}{n - 8}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - 1)(4n + 5)(-2n^2 - 2n - 3)}{(-5n^2 + 7n + 1)^2}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\sqrt{n^2 + n + 8} + \sqrt{n^2 + 5n + 1} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n + 40} \left( \sqrt{n+6} + \sqrt[3]{n+8} \right)$ .

7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+7}{n+10} \right)^{n-4}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+2)(n+7)}{n^2+5n+1} \right)^{1-2n}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n^2-2n-3}{9n^2+5n-3} \right)^{5n+2}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}^{2n+1} \left( \sqrt{4n^2+3n} - \sqrt{4n^2-n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2+9)(n-2)!}{(2n+8)(n-1)!+n!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (4 \log_5(6n+8) - 2 \log_5(8n-9) - \log_5(4n^2+2n-7))$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(7n^8 + \sqrt{4n^{12} + 9})}{\ln(n^2 + 2n + 7)}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n n^2}{7 \cdot 4^n n^2 + 9 \cdot 8^n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + \log_6^6(3n+3)}{\sqrt[3]{7 \cdot 5^n + (n-1)!}}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n^2-8}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+5+25+\dots+5^{n-1}}{6^n+2n^2}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{4} - 2x_n + 8$ ,  $x_0 = 6$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{3 \cdot (2x_n - 5)}{x_n - 2}$ ,  $x_0 = 4$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \operatorname{tg} \frac{9n-1}{4} \pi$ .

### Вариант 28

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{6n+4}{n+8}$  имеет своим пределом число  $A = 6$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{8}$ ,  $\varepsilon = 0,02$ ,  $\varepsilon = 0,002$ .

2. Докажите по определению предела, что число  $A = -3$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{n-4}{6n+8}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2+4n+6}{n-8}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(9n^2 - 6n + 5)^2}{(2n - 8)(8n + 5)(2n^2 - 9n)}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\sqrt{6n^2 + n + 8} + \sqrt{6n^2 + 4n + 1} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{7n + 32} \left( \sqrt{n+6} + \sqrt[3]{6n+8} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6n+7}{6n+11} \right)^{n-3}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+4n+1}{(n-6)(n+3)} \right)^{7n-1}$ .
9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^2+3n-7}{9n^2+n+9} \right)^{4n-2}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}^{3n} \left( \sqrt{27n^2+18n} - 3\sqrt{3n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(8n+7)n! + (3n^2+9n+1)(n-1)!}{3(n+1)!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \log_4(6n+3) - 4 \log_4(6n+9) + \log_4(3n^2+4n+7) \right)$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(5n^6+8n^2+7)}{\ln(6n+\sqrt[3]{5n^{11}+1})}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9(-4)^n n^2 + 5^n}{7^n n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 4^n - 2n^2 + 9n - 9}}{11 \cdot 4^n + n!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n^2+5}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+14+98+\dots+2 \cdot 7^{n-1}}{11^n+7n^3}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{4} + 2x_n$ ,  $x_0 = 2$ .

19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{1 - 2x_n}{x_n - 2}$ ,  $x_0 = 0$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \sin \frac{2(2n-1)}{3} \pi$ .

### Вариант 29

- Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{6n+5}{5n+4}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{6}{5}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{7}$ ,  $\varepsilon = 0,02$ ,  $\varepsilon = 0,005$ .
- Докажите по определению предела, что число  $A = -5$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{5n-5}{6n+4}$ .
- Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2+5n+6}{5n-4}$  является бесконечно большой.
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n-3)(8n-8)(-3n^2+4n+4)}{(3n^2-4n+4)^2}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\sqrt{6n^2+5n+4} + \sqrt{6n^2+5n+5} \right)$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{11n+20} \left( \sqrt{5n+8} + \sqrt{6n+4} \right)$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6n+9}{6n+8} \right)^{5n-2}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n-5)(5n+4)}{5n^2+5n+5} \right)^{-11n-5}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^2-4n}{8n^2+2n+8} \right)^{4n+5}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arccctg}^{3n-1} \left( \sqrt{12n^2-2n} - \sqrt{12n^2-6n} \right)$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2+2n+8)n!}{(n+4)(n+1)! + (n+2)!}$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2 \log_7(6n-5) + 4 \log_7(8n+7) - \log_7(6n^2-3n-6))$ .
- Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(4n^8 + \sqrt{3n^{10} + 7})}{\ln(13n^3 + 3)}$ .

14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n n^2}{2 \cdot 7^n n^2 + 3 \cdot 9^n}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n + \log_6(5n + 4)}{\sqrt[5]{5 \cdot 2^n + (n + 1)!}}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1)}{n^2 + 5n - 5}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 8 + 32 + \dots + 2 \cdot 4^{n-1}}{5^n + 8n^2}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{4} - 3x_n + 15$ ,  $x_0 = 8$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{7x_n - 18}{x_n - 2}$ ,  $x_0 = \frac{9}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \cos \frac{2(8n - 1)}{3} \pi$ .

### Вариант 30

1. Докажите по определению предела, что последовательность  $a_n = \frac{3n + 1}{2n + 5}$  имеет своим пределом число  $A = \frac{3}{2}$ . Определить  $N(\varepsilon)$  для значений  $\varepsilon = \frac{1}{5}$ ,  $\varepsilon = 0,03$ ,  $\varepsilon = 0,006$ .
2. Докажите по определению предела, что число  $A = -4$  не является пределом последовательности  $a_n = \frac{2n - 1}{3n + 5}$ .
3. Докажите по определению, что последовательность  $a_n = \frac{n^2 + n + 3}{2n - 5}$  является бесконечно большой.
4. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n^2 + 3n + 4)^2}{(2n + 2)(4n + 4)(-2n^2 - 8n + 6)}$ .
5. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{3n^2 + n + 2} - \sqrt{3n^2 + 2n + 5} \right)$ .
6. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n + 5} \left( \sqrt{2n + 5} + \sqrt{3n + 5} \right)$ .
7. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n + 6}{3n + 10} \right)^{2n-1}$ .
8. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + n + 2}{(n - 1)(2n + 5)} \right)^{5n+1}$ .

9. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 3n - 6}{4n^2 + 3n + 9} \right)^{n+3}$ .
10. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin^{2n+1} \left( \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n} \right)$ .
11. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n + 5)(n - 1)! + (2n^2 + 6n + 4)(n - 2)!}{3n!}$ .
12. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-4 \log_4(4n + 6) + 2 \log_4(5n - 7) + \log_4(3n^2 - 2n - 7))$ .
13. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(4n^9 + 2n + 3)}{\ln(5n^6 + \sqrt[4]{5n^{10} + 8})}$ .
14. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(-5)^n + 9 \cdot 7^n}{9^n n^2}$ .
15. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2^n - 4n^2 + n - 4}}{9 \cdot 3^n + (n - 1)!}$ .
16. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 7 + 12 + \dots + (5n - 3)}{n^2 + 9n + 1}$ .
17. Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 8 + 32 + \dots + 2 \cdot 4^{n-1}}{7^n + 5n}$ .
18. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{4} + 3x_n - 3$ ,  $x_0 = 4$ .
19. Докажите монотонность, ограниченность и найдите предел последовательности, заданной равенствами  $x_{n+1} = \frac{2 - 3x_n}{x_n - 2}$ ,  $x_0 = -\frac{1}{2}$ .
20. Найдите частичные пределы последовательности  $a_n = \operatorname{ctg} \frac{n+3}{4} \pi$ .

## ОТВЕТЫ

### К п.2.

1.  $A$  ограничено,  $\max A = 3$ ,  $\min A = -2$ ,  $\sup A = 3$ ,  $\inf A = -2$ .
2.  $A$  ограничено,  $\max A = 4$ ,  $\min A = -1$ ,  $\sup A = 4$ ,  $\inf A = -1$ .
3.  $A$  ограничено только снизу,  $\max A = 1$ ,  $\min A = 1$ ,  $\sup A = +\infty$ ,  $\inf A = 1$ .
4.  $A$  не ограничено,  $\max A = +\infty$ ,  $\min A = -\infty$ ,  $\sup A = +\infty$ ,  $\inf A = -\infty$ .
5.  $A$  ограничено,  $\max A = 2$ ,  $\min A = 2$ ,  $\sup A = 2$ ,  $\inf A = 0$ .
6.  $A$  ограничено,  $\max A = 2$ ,  $\min A = 2$ ,  $\sup A = 2$ ,  $\inf A = 1$ .
7.  $A$  ограничено,  $\max A = 1/3$ ,  $\min A = 1/3$ ,  $\sup A = 1/3$ ,  $\inf A = 0$ .
8.  $A$  ограничено,  $\max A = 1$ ,  $\min A = 0$ ,  $\sup A = 1$ ,  $\inf A = 0$ .
9.  $A$  ограничено только снизу,  $\max A = +\infty$ ,  $\min A = 0$ ,  $\sup A = +\infty$ ,  $\inf A = 0$ .
10.  $A$  ограничено,  $\max A = 1,5$ ,  $\min A = 0$ ,  $\sup A = 1,5$ ,  $\inf A = 0$ .

### К п.5.

1.  $\frac{12}{17}$ ; 2.  $-\frac{1}{2}$ ; 3. 0; 4. 0; 5.  $\frac{1}{2}$ ; 6. 2; 7.  $\frac{2}{5}$ ; 8.  $\frac{10}{21}$ ; 9.  $+\infty$ ; 10. 0;
11. 0; 12. 5; 13.  $+\infty$ ; 14.  $+\infty$ ; 15. 4; 16.  $-\infty$ ; 17.  $\frac{1}{2}$ ; 18. 3; 19. 0;
20. 0; 21.  $-\frac{1}{9}$ ; 22.  $-\frac{4}{9}$ ; 23.  $\frac{1}{2}$ ; 24.  $-\frac{3}{4}$ ; 25. 6; 26. 2.

### К п.6.

1. 1; 2. 1; 3. 1; 4. 1; 5.  $\frac{2}{5}$ ; 6. -1; 7. 0; 8. 0; 9. 0; 10. 0; 11. 0;
12. 0; 13. 0; 14. 0; 15. 0; 16. 0.

### К п.7.

1.  $e^{1/4}$ ; 2.  $e^{1/6}$ ; 3.  $+\infty$ ; 4.  $+\infty$ ; 5.  $e^{-1}$ ; 6.  $e^{-2}$ ; 7.  $e^5$ ; 8.  $e^4$ ; 9.  $e$ ;
10.  $e^{14}$ ; 11. 1; 12. 1; 13.  $e^{-3/2}$ ; 14.  $e^{50/3}$ ; 15. 0; 16. 0; 17. 0;
18.  $\infty$ .

### К п.8.

1. 2; 2. -1; 3.  $-\frac{1}{2}$ ; 4.  $\frac{1}{4}$ ; 5. 3; 6. 0; 7. 1; 8. 1.

### К п.9.

1. 0;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ; 2. 1;  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ; 3.  $\{-4, 4\}$ ;



$$\begin{aligned}
& \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 4, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -4. \mathbf{4. 1}; \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1. \mathbf{5.} \left\{ \pm 1, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right\}; \\
& \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1. \mathbf{6.} \{ \pm 1, 0 \}; \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1. \mathbf{7.} \{ 0, +\infty \}; \\
& \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0. \mathbf{8.} \{ 0, +\infty \}; \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0. \mathbf{9.} \{ \pm 1, 0 \}; \\
& \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1. \mathbf{10.} \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{4}, \pm \frac{1}{2}, 0 \right\}; \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{1}{2}. \\
& \mathbf{11.} \{ \pm 1, 0 \}; \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1. \mathbf{12.} \{ \pm 1, 0 \}; \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1. \\
& \mathbf{13.} 1; \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1. \mathbf{14.} 1; \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1. \mathbf{15.} \{ 0, 1, +\infty \}; \\
& \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0. \mathbf{16.} \{ 0, 1, +\infty \}; \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.
\end{aligned}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н.Берман. — М.: Лань, 2016. — 492 с.
2. Вавилов В.В. Задачи по математике. Начала анализа: справ. пособие / В.В.Вавилов, И.И.Мельников, С.Н.Олехник, П.И.Пасиченко. — М.: Наука, 1990. — 608 с.
3. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Кн. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Учеб. пособие для университетов, пед. вузов./ Под ред. В.А.Садовничего — 2-е изд., перераб. — М.: Высш. шк. 2000. — 725 с.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб.пособие для вузов/ Б.П. Демидович. — М.: АСТ, 2009. — 558с.
5. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1 (6-е изд.)/ В.А. Зорич. — М.: МЦНМО, 2012. — 818 с.
6. Ильин В.А. Математический анализ. Ч. 1 4-е изд., пер. и доп. учебник для бакалавров/ В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. — Люберцы: Юрайт, 2016. — 660 с.
7. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной: Учеб. для вузов. — 5-е изд., перераб. и доп. / Л.Д.Кудрявцев. — М.:Дрофа, 2003. — 704 с.
8. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: учеб. пособие/ Под ред. Л.Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 496 с.
9. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). 1 курс / К.Н.Лунгу, Д.Т.Письменный, С.Н.Федин и др. — М.:Айрис Пресс, 2013. — 574 с.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учеб. для вузов: в 3-х т. Т.1 / Г.М.Фихтенгольц. — 8-е изд. — М.:Физматлит, 2006. — 679 с.
11. Шипачев В.С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 1 / В.С.Шипачев, А.Н.Тихонов. — М.: Издательство Юрайт, 2019. — 248 с.

*Учебное издание*

Соловьева Надежда Александровна  
Тинюкова Татьяна Сергеевна  
Федоров Дмитрий Леонидович

**Математический анализ в примерах и задачах.  
Предел числовой последовательности**

Учебное пособие

*Авторская редакция*

Подписано в печать 18.03.2024. Формат 60 x 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Усл. печ. л 5,28 Уч.-изд. л.5,03  
Тираж 34 экз. Заказ № 513.

Издательский центр «Удмуртский университет»  
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021  
Тел. +7(3412)916-364, E-mail: editotial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет».  
426034, Ижевск, Университетская, 1, корп. 2  
Тел: +7(3412)685-718