Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных
технологий и физики
Кафедра математического анализа

Л. П. Сметанина, О. В. Максимова

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2024

УДК 517.38 (075.8)
ББК 22.161.12я73
С502

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: канд. физ -мат. наук, ст. науч. сотрудник УдмФИЦ УрО РАН А.Ю. Дроздов

Сметанина Л. П., Максимова О. В.
С502 Определенный интеграл : учеб.-метод. пособие . — Ижевск : Удмуртский университет, 2024. — 51 с.

В учебно-методическом пособии приведены основные теоретические сведения, изложена методика вычисления определенных интегралов, методы вычисления и некоторые области применения, а также представлены тестовые и индивидуальные задания. Данное пособие предназначено для студентов уровня бакалавриата всех направлений и всех форм обучения Института нефти и газа им. М.С. Гуцериева и Института экономики и управления в Удмуртском государственном университете.

УДК 517.38 (075.80
ББК 22.161.12я73

Содержание

Введение

Данное учебно-методическое пособие подготовлено преподавателями кафедры математического анализа и отражает многолетний опыт проведения занятий и организации самостоятельной работы студентов Института нефти и газа им. М.С.Гуцириева и Института экономики и управления в Удмуртском государственном университете.

Пособие предназначено для методического обеспечения раздела «Теория интегрирования» курса «Высшая математика».

В пособии содержатся краткие теоретические сведения, изложена методика вычисления всех основных типов определенных интегралов и рассмотрены области применения.

Индивидуальные задания могут быть использованы для организации работы на практических занятиях, а также как индивидуальные домашние задания.

Пособие позволяет обеспечить студентов наглядным вспомогательным материалом и индивидуальными заданиями при изучении курса «Высшая математика» и может быть использовано студентами других нематематических направлений УдГУ.

1 Понятие определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ — произвольное разбиение этого промежутка.

Пусть $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ и $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — **интегральная сумма** (геометрически это сумма площадей прямоугольников, имеющих основания Δx_i и высоту $f(\xi_i)$).

Если существует предел последовательности интегральных сумм, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a;\, b]$ на части и выбора так называемых средних точек ξ_i при $\max\Delta x_i \to 0$, то функция $f(x)$ называется **интегрируемой**, а сам предел называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

1.1 Формула Ньютона-Лейбница

Если $F(x)$ — одна из первообразных непрерывной на $[a;\, b]$ функции $f(x)$, то имеет место формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

которая называется **формулой Ньютона-Лейбница**.

Пример.

$$\int\limits_{-1}^{2} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$$

1.2 Основные свойства определенного интеграла

Подразумевается, что все рассматриваемые интегралы существуют.

1. По определению $\int\limits_{a}^{a} f(x)\,dx = 0$

2. $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = -\int\limits_{b}^{a} f(x)\,dx$

3. Для любых чисел a, b, c

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int\limits_{a}^{b} A\cdot f(x)\,dx = A\cdot\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$$

5. Определенный интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме определенных интегралов

$$\int\limits_{a}^{b} (f(x)\pm g(x))\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \pm \int\limits_{a}^{b} g(x)\,dx$$

6. Если $a < b$ и $f(x) \geqslant 0$, то $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \geqslant 0$

7. Если $a < b$ и $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$

8. $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$

9. Если M и m — максимум и минимум функции $f(x)$ на $[a;\,b]$, то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

1.3 Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$$

где $\qquad uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$

Пример. Вычислить $\int\limits_0^2 x \cdot \cos x\,dx$

$$\int\limits_0^2 x \cdot \cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \cos x\,dx; & v = \sin x \end{bmatrix} = x \cdot \sin x\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 \sin x\,dx =$$

$$= 2 \cdot \sin 2 - 0 \cdot \sin 0 + \cos x\Big|_0^2 = 2\sin 2 + \cos 2 - 1$$

1.4 Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;\,b]$, $x = \varphi(t)$ непрерывна, дифференцируема на $[\alpha;\,\beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$ и $\varphi(t)$

является монотонной, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

При использовании метода замены переменной в определенном интеграле не обязательно возвращаться к исходной переменной x, достаточно лишь изменить пределы интегрирования.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^3 x^2\cdot\sqrt{9-x^2}\,dx$

$$\int\limits_0^3 x^2\cdot\sqrt{9-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} \text{положим } x=3\sin t; & dx = 3\cos t\,dt \\ t=\arcsin\dfrac{x}{3} & \\ \alpha=\arcsin 0 = 0; & \beta = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sin^2 t\cdot\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt =$$

$$= 81\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt = 81\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt =$$

$$= \frac{81}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt = \frac{81}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{81\pi}{16}\,.$$

Пример 2. Найти $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \dfrac{dx}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+x^2}} = \left[\begin{matrix} \text{положим } x = \dfrac{1}{t}; & dx = -\dfrac{1}{t^2}\,dt \\ \alpha = 2; & \beta = 1 \end{matrix}\right] =$$

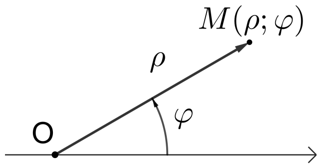
$$\int\limits_{2}^{1} \frac{-1\cdot dt}{\frac{1}{t}\cdot t^2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int\limits_{2}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int\limits_{1}^{2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\Bigg|_1^2 = \ln\left|2+\sqrt{5}\right| - \ln\left|1+\sqrt{2}\right| = \ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\,.$$

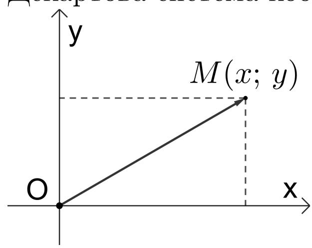
2 Кривая в полярной системе координат

Полярными координатами точки M называются два числа: полярный радиус ρ (или r) и полярный угол φ.

Полярная система координат



Декартова система координат



Полярная система координат задается лучом, который называется **полярной осью**. Точка, из которой данный луч выходит, называется **полюсом**.

Полярный радиус $\rho(M) = |\overline{OM}|$.

φ — угол, на который следует повернуть ось, чтобы ее направление совпало с направлением вектора $\overline{OM}$.

$\varphi > 0$, если поворот осуществляется против часовой стрелки,

$\varphi < 0$, если поворот осуществляется по часовой стрелке.

Полярный угол имеет множество значений (отличающихся на величину $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$).

Значение угла φ, где $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ называется **главным** (иногда главным называется значение φ, где $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$).

Если начало декартовой системы координат совместить с полюсом, а ось Ox с полярной осью, то между декартовыми и полярными координатами устанавливается связь

$x = \rho \cdot \cos\varphi$, $y = \rho \cdot \sin\varphi$;

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$.

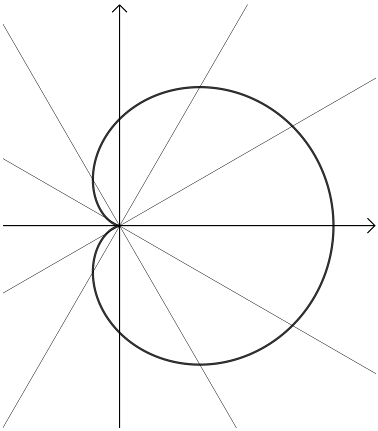
Пример 1.

Нарисовать кривую, заданную уравнением $\rho = 1 + \cos\varphi$.

Заметим, что $\rho \geqslant 0$.

Пусть $\varphi \in [0;\, 2\pi]$.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	2	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	2



Кривая называется **кардиоидой**.

Пример 2. Построить кривую, заданную уравнением $\rho = 6\cos\varphi$.

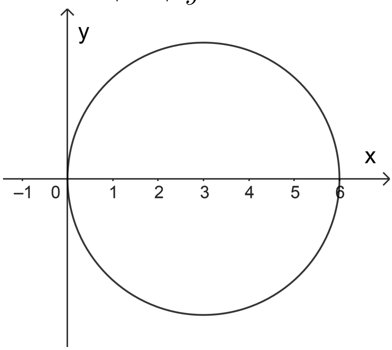
$\rho \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos\varphi \geqslant 0$.

Рассмотрим $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Перейдем к декартовым координатам $x = \rho\cos\varphi \implies \cos\varphi = \dfrac{x}{\rho}$;

$\rho = \dfrac{6x}{\rho} \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = 6x$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-3)^2 + y^2 = 9.$



Пример 3. Трехлепестковая роза

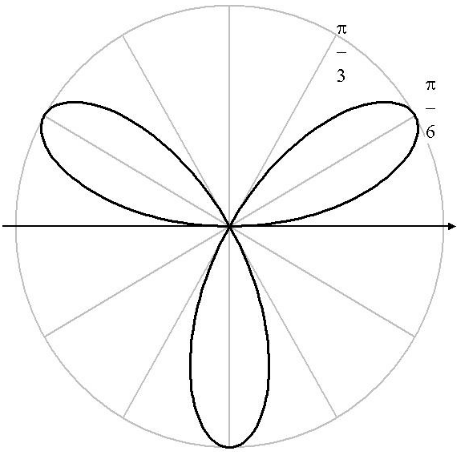
$\rho = a \cdot \sin 3\varphi;$

$\sin \varphi \geqslant 0$

$2\pi n \leqslant 3\varphi \leqslant \pi + 2\pi n; \quad n = 0,\ 1,\ 2$

$\dfrac{2\pi n}{3} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi n}{3}$

$\varphi \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3};\ \pi\right] \cup \left[\dfrac{4\pi}{3};\ \dfrac{5\pi}{3}\right]$



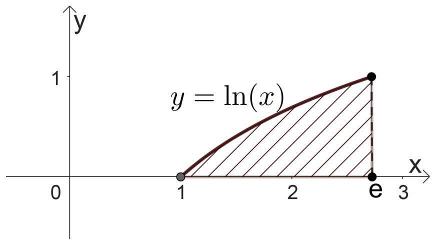
3 Вычисление площади плоской фигуры

3.1 В декартовых координатах

1. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной кривой $y = f(x) \quad (f(x) \geqslant 0)$, вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, вычисляется по формуле

$$S_\Phi = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Пример. Найти S_Φ — площадь фигуры, ограниченной линиями $\ln x, \quad x = 1, \quad x = e, \quad y = 0.$



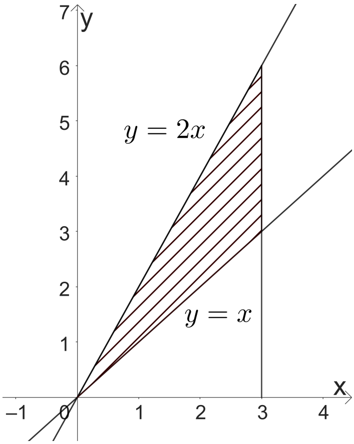
$$S_\Phi = \int\limits_1^e \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x; & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}; & v = x \end{bmatrix} = \ln x \cdot x\Big|_1^e - \int\limits_1^e x \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$(e - 0) - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

Ответ: $\underline{S_\Phi = 1}$.

2. Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f(x), \quad y = g(x) \quad (f(x) \geqslant g(x))$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле $S_\Phi = \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$.

Пример. Найти площадь S_Φ фигуры, ограниченной линиями $y = x, \quad y = 2x, \quad x = 3.$



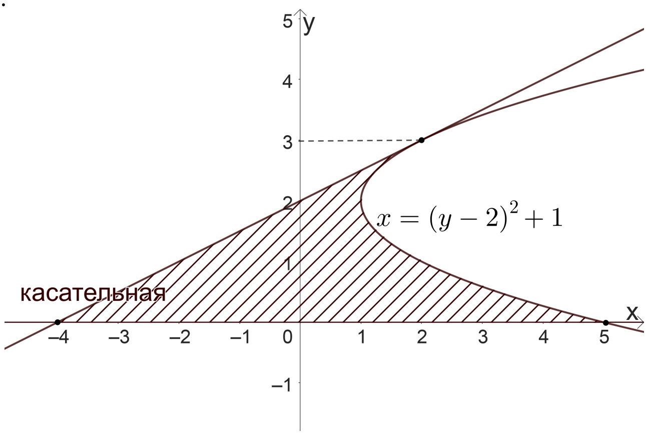
$$x = 2x \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

$$S_\Phi = \int\limits_0^3 \big(2x - x\big)\, dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^3 = 4,5$$

3. Иногда удобно использовать формулу

$$S_\Phi = \int\limits_c^d \big(f(y) - g(y)\big)\, dy \quad \text{(считая } x \text{ функцией от } y\text{)}$$

Пример. Найти площадь S_Φ фигуры, ограниченной параболой $(y-2)^2 = x-1$, касательной к ней в точке с ординатой $y_0 = 3$ и осью Ox.



Уравнение параболы запишем в виде $x = y^2 - 4y + 5$. Найдем уравнение касательной к параболе: $x = x_0 + x'(y_0) \cdot (y - y_0)$.

$x' = 2y - 4 \qquad x'(3) = 2.$

Абсцисса точки касания $x_0 = 2$.

Уравнение касательной $x = 2 + 2(y - 3)$ или $x = 2y - 4$.

$f(y) = y^2 - 4y + 5; \quad g(y) = 2y - 4.$

$$S_\Phi = \int\limits_0^3 \big((y^2 - 4y + 5) - (2y - 4)\big)\, dy = \int\limits_0^3 \big(y^2 - 6y + 9\big)\, dy =$$

$$\int\limits_0^3 (y-3)^2\, dy = \frac{1}{3}(y-3)^3 \Big|_0^3 = 9.$$

Иногда приходится разбивать фигуру на части, чтобы найти ее площадь.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и касательными к ней в точках $x = -1$ и $x = 2$.

Составим уравнение касательной к параболе в точке с абсциссой $x = -1$;

$y' = 2x, \quad y'(-1) = -2$

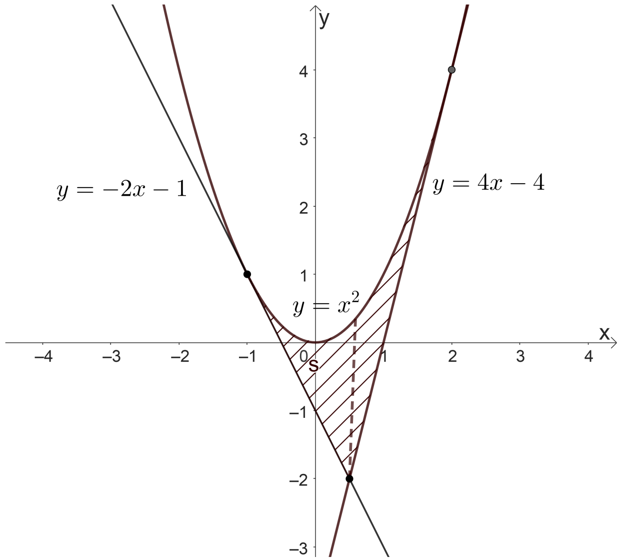
$y = (-1)^2 - 2(x + 1)$ или $y = -2x - 1$.

Аналогично в точке $x = 2$ уравнение касательной

$y = 4 + 4(x - 2)$ или $y = 4x - 4$.

Найдем точку пересечения касательных:

$-2x - 1 = 4x - 4, \quad 6x = 3, \quad x = \dfrac{1}{2}.$



$$S_\Phi = S_1 + S_2 = \int\limits_{-1}^{1/2} \Big(x^2 - (-2x-1)\Big)\,dx + \int\limits_{1/2}^{2} \Big(x^2 - (4x-4)\Big)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1/2} (x+1)^2\,dx + \int\limits_{1/2}^{2} (x-2)^2\,dx = \frac{(x+1)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1/2} + \frac{(x-2)^3}{3}\Bigg|_{1/2}^{2} =$$

$$= \frac{9}{8} - \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{9}{4}.$$

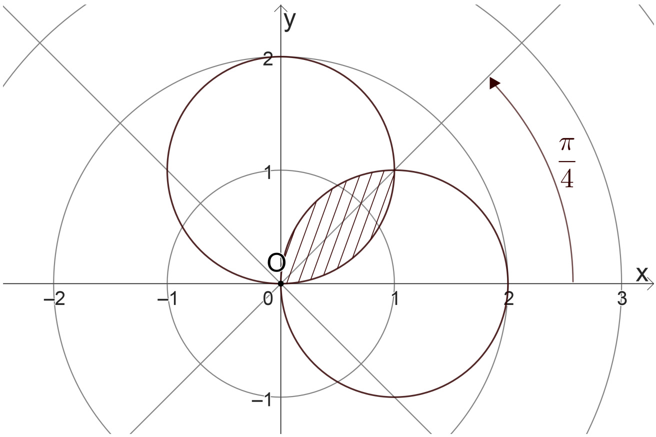
3.2 В полярных координатах

Площадь фигуры, ограниченной кривой в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вычисляется по формуле:

$$S_\Phi = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Пример 1.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2\cos\varphi$, $\rho = 2\sin\varphi$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.



Окружности пересекаются при $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, фигура симметрична относительно луча $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Следовательно, $S_\Phi = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} 4\sin^2\varphi\, d\varphi =$

$$\int\limits_0^{\pi/4} 2\bigl(1-\cos 2\varphi\bigr)\, d\varphi = 2\varphi - \sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

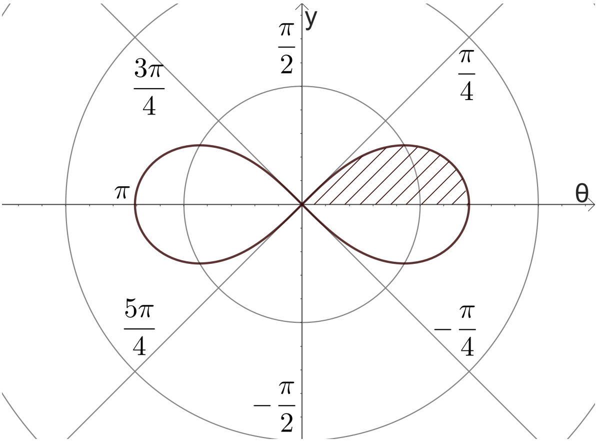
Пример 2. Найти площадь одного лепестка $\rho = \sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза).

$$S_\Phi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/3} \sin^2 3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\left(\varphi - \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{12}\,.$$

Пример 3.

Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли: $\rho = \sqrt{2\cos 2\varphi}$.

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right]$$



$$\frac{1}{4} S_\Phi = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/4} 2\cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\,.$$

Ответ: $S_\Phi = 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 2.$

4 Длина дуги кривой

Пусть незамкнутая кривая AB на плоскости Oxy задана уравнением $y = f(x)$, $f(x)$ — функция с непрерывной производной на $[a; b]$.

Длина дуги плоской кривой вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,.$$

Если кривая задана в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

Пример 1.

Найти длину дуги кривой $y = \ln\cos x$ при $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6}$.

Находим $f'(x) = \dfrac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\operatorname{tg} x$; $(f'(x))^2 = \operatorname{tg}^2 x$.

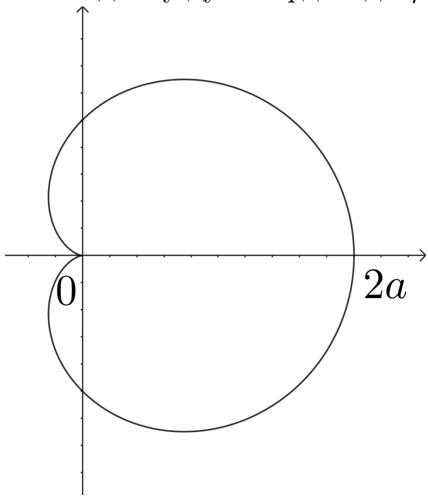
$$L = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx = \left[\begin{array}{c} 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \left|\dfrac{1}{\cos x}\right| = \dfrac{1}{\cos x} \end{array}\right] =$$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos x}\, dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/6} \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x}\, dx =$$

$$= -\int_0^{\pi/6} \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x - 1}\, dx = -\frac{1}{2} \ln \left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| \Bigg|_0^{\pi/6} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\ln\left|-\frac{1}{3}\right| - \ln|-1|\right) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 3\,.$$

Пример 2.
Найти длину дуги кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.



$\rho'(\varphi) = -a\sin\varphi$

$$L = 2\int\limits_0^\pi \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi = 2\int\limits_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int\limits_0^\pi \sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi = \begin{bmatrix} 1+\cos\varphi = 2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} \\ \\ 2+2\cos\varphi = 4\cos^2\dfrac{\varphi}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= 2a\cdot 2\int\limits_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^\pi = 8a\,.$$

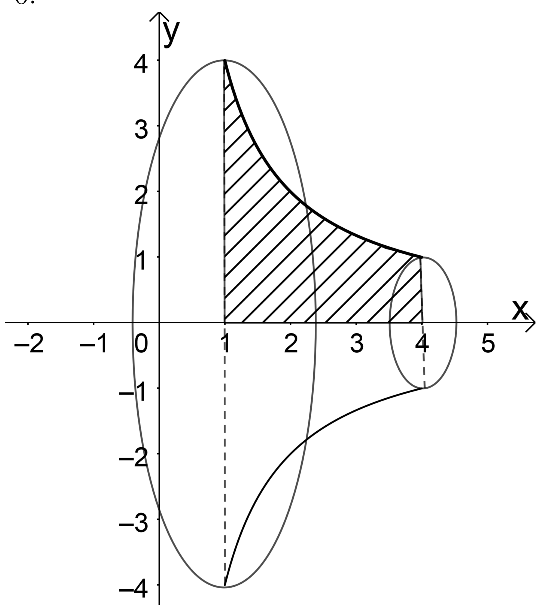
5 Объем тела вращения

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0, \quad x = a, \quad x = b$ в декартовой системе координат вращается вокруг оси Ox, то объем полученного тела определяется по формуле $V_{Ox} = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha, \quad \varphi = \beta$ вращается вокруг оси в полярной системе координат, то объем полученного тела определяется по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi \int\limits_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi\,.$$

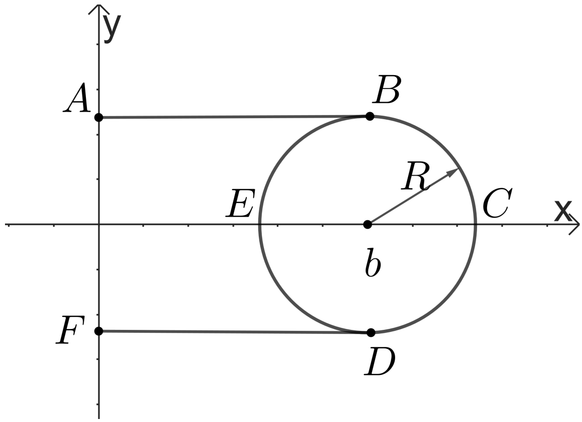
Пример 1. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{4}{x}, \quad x = 1, \quad x = 4,$ $y = 0$.



$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 16\pi \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4 = 16\pi \cdot \left(-\frac{1}{4} + 1\right) = 12\pi\,.$$

Пример 2. Вычислить объем тора (тело, которое получается при вращении круга радиуса R вокруг оси, лежащей на расстоянии b от центра ($b \geqslant R$)).

Объем тора можно представить как разность объемов вращения трапеций $ABCDF$ и $ABEDF$ вокруг оси Oy.



Уравнение окружности: $(x-b)^2 + y^2 = R^2$

$$\Longrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x = b + \sqrt{R^2 - y^2} \quad (\text{уравнение } BCD)\,, \\ &x = b - \sqrt{R^2 - y^2} \quad (\text{уравнение } BED)\,. \end{aligned}\right.$$

Тогда

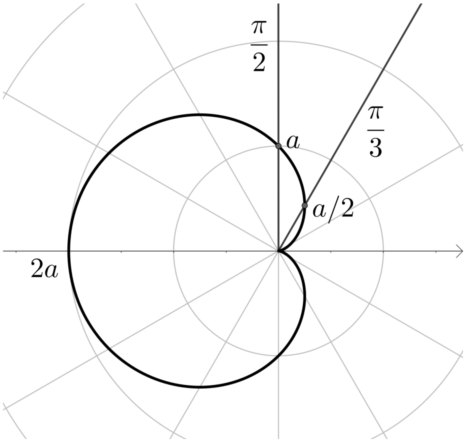
$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(\left(b + \sqrt{R^2 - y^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{R^2 - y^2}\right)^2 \right) dy =$$

$$= \pi \int\limits_{-R}^{R} \left(b^2 + 2b\sqrt{R^2-y^2} + R^2 - y^2 - b^2 + 2b\sqrt{R^2-y^2} - R^2 + y^2 \right) dy =$$

$$= 4\pi b \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - y^2}\, dy = \left[\begin{array}{c} y = R\sin t; \quad dy = R\cos t\, dt \\ \sqrt{R^2 - y^2} = \sqrt{R^2 \cos^2 t} = R|\cos t| = R\cos t \end{array} \right] =$$

$$= 4\pi b \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos^2 t\, dt = 2\pi b R^2 \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right) \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi^2 R^2 b\,.$$

Пример 3. Найти объем тела, полученного при вращении кардиоиды $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.



$$V = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{0}^{\pi} a^3 (1 - \cos\varphi)^3 \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{3} a^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos\varphi)^3\, d(1 - \cos\varphi) =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3} \cdot \frac{(1 - \cos\varphi)^4}{4} \Bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi a^3}{3} (4 - 0) = \frac{8\pi a^3}{3}\,.$$

6 Применения определенного интеграла при решении физических задач

Пример 1. Скорость тела при прямолинейном движении выражается формулой $v(t) = 2t + 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 10 секунд от начала движения.

Путь, пройденный телом со скоростью $v(t)$ за отрезок времени $[t_1;\, t_2]$, выражается интегралом $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$.

В нашем примере

$$S = \int\limits_0^{10} (2t + 3t^2)\, dt = t^2 + t^3 \Big|_0^{10} = 100 + 1000 = 1100(\text{м}).$$

Пример 2. Какую работу следует сделать для того, чтобы тело массой m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту H. Чему равна работа, если тело удаляется на бесконечность?

Работа силы $f(x)$, действующей на оси Ox на отрезке $[a;\, b]$, выражается формулой $A = \int\limits_a^b f(x)\, dx$.

По закону всемирного тяготения сила F, действующая на тело массой m, равна $F = k\dfrac{mM}{r^2}$, M — масса Земли, r — расстояние m от центра Земли, k — гравитационная постоянная.

На поверхности Земли $r = R$,

$$F = mg \quad \Longrightarrow \quad mg = k\frac{mM}{R^2} \quad \Longrightarrow \quad F = mg\frac{R^2}{r^2}$$

Работа $A = \int\limits_R^{R+h} F\, dr = \int\limits_R^{R+h} mgR^2\dfrac{dr}{r^2} = mgR\dfrac{h}{R+h}$

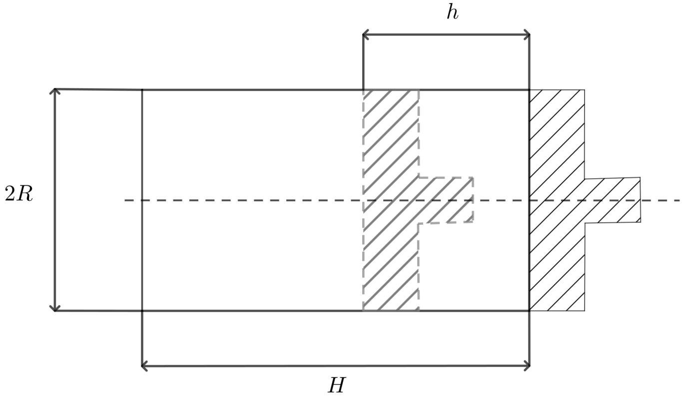
при $h \to \infty$ $\lim\limits_{h\to\infty} A = mgR.$

Пример 3. Сила F, с которой электрический заряд e_1 отталкивает заряд e_2 (того же знака), находящийся от него на расстоянии r, выражается формулой $F = k\dfrac{e_1e_2}{r^2}$.

Вычислить работу силы F при перемещении заряда из точки A_1, отстоящей от e_1 на расстоянии r_1, в точку A_2, отстоящую от e_1 на расстоянии r_2.

$$F = \int\limits_{r_1}^{r_2} k\frac{e_1e_2}{r^2}\,dr = -\frac{ke_1e_2}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} = ke_1e_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Пример 4. Цилиндр наполнен газом под атмосферным давлением. Считая газ идеальным, определить работу при сжатии газа поршнем переместившимся внутри цилиндры на расстояние h (м).



Уравнение состояния идеального газа $pV = C$, $C = const$.

В начальном состоянии давление $p = p_1$, $V = V_1 = HS$, где $S = \pi R^2$ — площадь поршня, $C = p_1V_1$.

Объем газа $V = (H - x)S$, где x — смещение поршня, $0 \leqslant x \leqslant h$.

Давление $p = \dfrac{p_1V_1}{V} = \dfrac{p_1H}{H - x}$.

Сила $F = pS$ и работа $A = \displaystyle\int\limits_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int\limits_{x_1}^{x_2} pS\,dx = \int\limits_{0}^{h} \frac{p_1H}{H_x}S\,dx.$

Таким образом, $A = \pi p_1HR^2\ln\dfrac{H}{H - h}$.

7 Несобственные интегралы

7.1 Интеграл по бесконечному промежутку

Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geqslant a$ и интегрируема на любом отрезке $[a; A]$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx$, то он называется **несобственным интегралом 1 рода** (по бесконечному промежутку) и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

В случае существования конечного предела интеграл называется **сходящимся**, в противном случае **расходящимся**.

Для функции, заданной для $x \leqslant b$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{b} f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и интегрируема на любом отрезке $[a; b]$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx.$$

Сходимость интеграла не зависит от выбора точки c.

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Если $\alpha = 1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \left(\ln x\Big|_1^A\right) = \lim_{A\to+\infty} \ln A = +\infty$$

интеграл расходится.

Если $\alpha \neq 1$, то $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^A \right) =$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{(1-\alpha)A^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \left[\begin{array}{l} \alpha-1, \text{ если } \alpha>1 \\ \infty, \text{ если } \alpha<1. \end{array} \right.$$

Таким образом, при $\alpha > 1$ интеграл сходится, при $\alpha < 1$ расходится.

Пример 2. Вычислить $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\, dx.$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\, dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} e^{-2x}\, dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^A \right) = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}\,.$$

Пример 3.

Найти площадь, ограниченную осью Ox и кривой $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Исследуем функцию $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

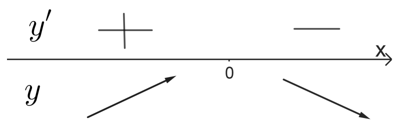
$x \in \mathrm{R}$

вертикальных асимптот нет

$k = \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} = 0, \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0,$

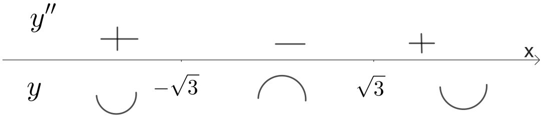
$y = 0$ — горизонтальная асимптота

$y' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

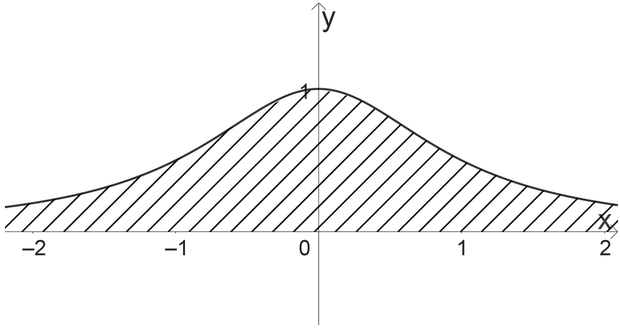


$x = 0$ — точка максимума; $f(0) = 1$

$$y'' = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-1}{(1+x^2)^3}$$



$x = \pm\sqrt{3}$ — точки перегиба



$$S = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A} \frac{dx}{1+x^2} = 2\cdot\lim_{A\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x\Big|_0^A\right) =$$

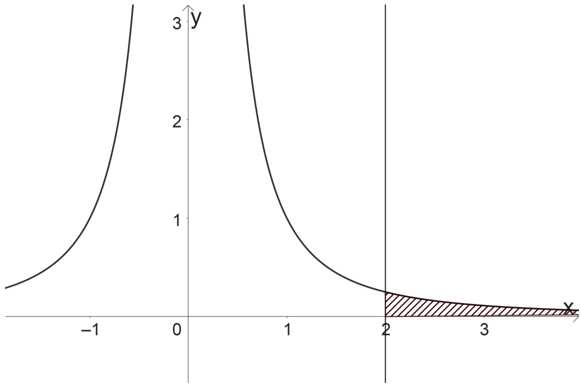
$$= 2\cdot\lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg} A = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

Пример 4.

Найти площадь фигуры, ограниченную линиями $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x = 2$ и осью абсцисс.

$$S = \int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_2^{A} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_2^A\right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{A} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,.$$



7.2 Интеграл от неограниченной функции

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;\, b)$ и $f(b) = \infty$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to 0} \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Геометрически этот несобственный интеграл (при $f(x) > 0$) — площадь фигуры, ограниченной графиком $y = f(x)$, прямой $x = a$ и вертикальной асимптотой $x = b$.

Если $f(x)$ непрерывна на $(a;\, b]$ и $f(a) = \infty$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to 0} \int\limits_{a+\beta}^{b} f(x)\,dx.$$

Если $c \in (a;\, b)$ и $f(c) = \infty$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to 0} \int\limits_a^{c-\beta} f(x)\,dx + \lim_{\alpha\to 0} \int\limits_{c+\alpha}^{b} f(x)\,dx.$$

Пример 1. Найти $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx$ или установить его расходимость.

$$\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{}dx = \frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^2 = \frac{2}{3}$$

I_2 — несобственный интеграл ($x = 1$ — точка разрыва)

$$I_2 = \lim_{\alpha\to 0} \int_{1+\alpha}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\alpha\to 0}\left(2\sqrt{x-1}\Bigg|_{1+\alpha}^2\right) = 2 - \lim_{\alpha\to 0} 2\sqrt{\alpha} = 2$$

$$I = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}.$$

Пример 2. Найти $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\beta\to 0}\int_{-1}^{0-\beta} x^{-2/3}\,dx = \lim_{\beta\to 0}\left(3x^{1/3}\Bigg|_{-1}^{-\beta}\right) =$$

$$= \lim_{\beta\to 0}(3\sqrt[3]{-\beta} + 3) = 3\,.$$

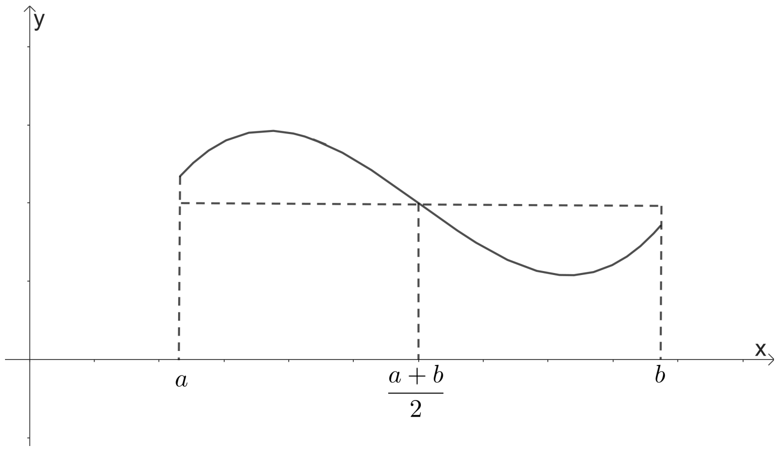
8 Численное интегрирование

Простейшие квадратурные формулы

Формула прямоугольников

Простейшее приближенное выражение определенного интеграла представляет собой площадь прямоугольника, основанием которого служит отрезок $[a;\, b]$, а высотой является ордината графика функции $f(x)$ от $\dfrac{a+b}{2}$ $\quad\left(f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$.

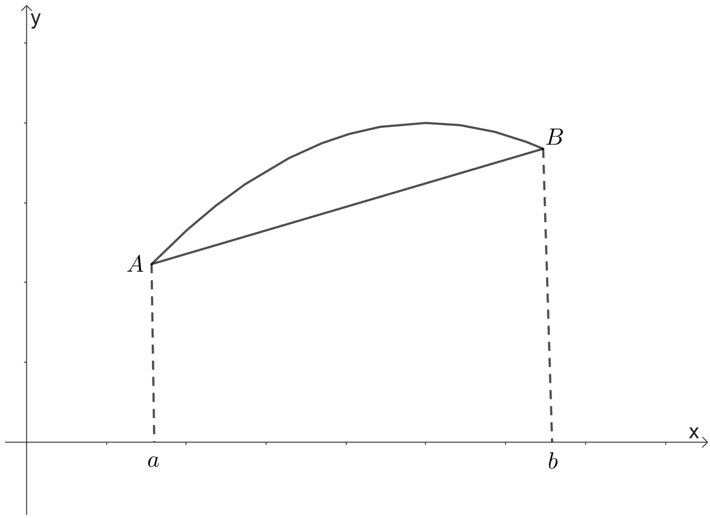
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$



Формула трапеций

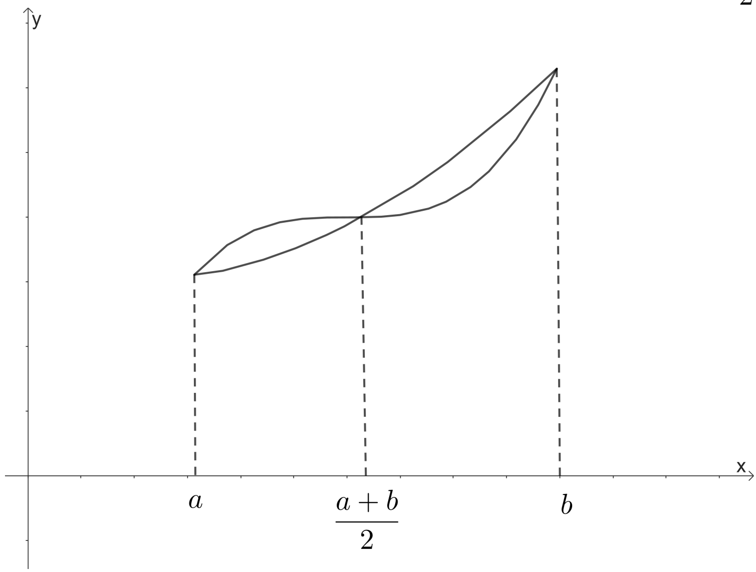
Приближенное выражение интеграла равно площади трапеции, сторонами которой является отрезок $[a;\, b]$, отрезки прямых $x=a$, $x=b$ и хорда AB

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}(b-a)\cdot\Big(f(a)+f(b)\Big).$$



Формула Симпсона

Приближенное выражение интеграла равно площади, ограниченной отрезком $[a; b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и параболой, проходящей через точки графика функции $y = f(x)$ с абсциссами a, $\dfrac{a+b}{2}$, b.



1. Метод прямоугольников

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h \cdot \sum_{k=1}^{n} f(x_k),$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$ — шаг разбиения, $x_0 = a - \dfrac{h}{2}$, $x_k = x_{k-1} + h$, $k = \overline{1,\, n}$.

2. Метод трапеций

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h \cdot \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right),$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $x_k = x_{k-1} + h$, $k = \overline{1,\, n}$.

3. Метод Симпсона

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3} \cdot \Big(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) \Big),$$

где $h = \dfrac{b-a}{2n}$, $x_0 = a$, $x_k = x_{k-1} + h$, $k = \overline{1,\, 2n}$.

При $h \to 0$ правые части стремятся к заданному интегралу. Однако, при фиксированном h отличается от интеграла на погрешность $R_n(f)$.

При заданной абсолютной погрешности $\varepsilon > 0$ подбирается n (h), при котором $|R_n(f)| < \varepsilon$.

Для метода прямоугольников $R_n(f) = \dfrac{b-a}{24} f''(\varepsilon)\, h^2$, $\varepsilon \in [a;\, b]$.

Для метода трапеций $R_n(f) = \dfrac{b-a}{12} f''(\varepsilon)\, h^2$, $\varepsilon \in [a;\, b]$.

Для метода Симпсона $R_n(f) = \dfrac{b-a}{180} f^{IV}(\varepsilon)\, h^4$, $\varepsilon \in [a;\, b]$

Пример 1.

Вычислить $\displaystyle\int\limits_{0{,}5}^{1} \frac{dx}{x}$ методом Симпсона с точностью до 10^{-4}.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $\quad f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $\quad f'''(x) = -\dfrac{6}{x^4}$, $f^{IV}(x) = \dfrac{24}{x^5}$, $\quad |f^{IV}| < 24 \cdot 2^5$, $\quad a = 0,5$, $\quad b = 1$;

$$h = \frac{1}{4n} \quad \Longrightarrow \quad \Big|R_n(f)\Big| < \frac{1}{2 \cdot 180} \cdot 24 \cdot 2^5 \cdot \left(\frac{1}{4n}\right)^4$$

или $\Big|R_n(f)\Big| < \dfrac{1}{120n^4}$

$$\frac{1}{120n^4} < 10^4 \quad \Longrightarrow \quad n^4 > \frac{10^3}{12}\,.$$

Следует выбрать $n = 4$, $\quad h = \dfrac{1}{16} = 0,0625$.

$x_0 = 0,5$	$f(x_0) = f(a) = 2$
$x_1 = 0,5625$	$f(x_1) = 1,7777$
$x_2 = 0,6250$	$f(x_2) = 1,6$
$x_3 = 0,6875$	$f(x_3) = 1,4545$
$x_4 = 0,75$	$f(x_4) = 1,3333$
$x_5 = 0,8125$	$f(x_5) = 1,2307$
$x_6 = 0,8750$	$f(x_6) = 1,1428$
$x_7 = 0,9375$	$f(x_7) = 1,0666$
$x_8 = 1$	$f(x_8) = f(b) = 1$

$$\frac{h}{3} = 0,0208\,.$$

Получаем $\displaystyle\int\limits_{0,5}^{1} \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{h}{3} \cdot \Big(f(a) + f(b) + 4 \cdot \big(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) +$ $f(x_7)\big) + 2 \cdot \big(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6)\big)\Big) = 0,6931\,.$

Замечание. Вычисления можно запрограммировать, воспользовавшись программой Microsoft Excel.

Чтобы запрограммировать таблицу расчетов нужно:

1.Задать значение переменной x с шагом $h = 0,0625$. Начиная с $x = 0,5$ и заканчивая $x = 1$, диапазон $B15 : B24$. Для этого в ячейку $B16$ ввести нижнюю границу интегрирования $x_0 = 0,5$. Затем в ячейку $B17$ ввести формулу $B17 = B16 + \$B\$14$. Затем скопировать эту ячейку в диапазон ячеек $B18 : B24$.

2. Заполнить в столбце C две ячейки $C16$ и $C24$ значениями интегрируемой функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на концах интервала интегрирования в ячейке $C16 = 1/1$, в ячейке $C24$ формулу $= 1/0,5$.

3. Столбец D заполняем значениями интегрируемой функции для нечетных индексов 1, 3, 5, 7: $D17 = 1/B17$, $D19 = 1/B19$, $D21 = 1/B21$, $D23 = 1/B23$.

4. Столбец E заполняем значениями интегрируемой функции для четных индексов 2, 4, 6: $E18 = 1/B18$, $E20 = 1/B20$, $E22 = 1/B22$.

5. Вычисляем сумму чисел в столбцах C, D, E. Сумму в столбце D учетверяем, а сумму в столбце E удваиваем как того требует формула Симпсона. Суммируем результаты, умножаем на $\dfrac{h}{3}$ и получаем приближенное значение с точностью до 0,0001.

Результаты вычислений показаны на рисунке ниже.

h=	0,0625	f(x)					
k	xk	f(0,5),f(1)	$f(x_{2k-1})$	$f(x_{2k})$			
0	0,5	2					
1	0,5625		1,77777778				
2	0,625			1,6			
3	0,6875		1,45454545				
4	0,75			1,3333333			
5	0,8125		1,23076923				
6	0,875			1,1428571			
7	0,9375		1,06666667				
8	1	1					
		3	22,1190365	8,152381	33,27142		
		s_1	s_2	s_3	S		
	$S_1 = f(a) + f(b)$		$S_2 = 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})$	$S_3 = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})$			
			$\frac{h}{3} \cdot (S_1 + S_2 + S_3)$	0,6931545			

Введенные нами формулы отражены на нижеследующем рисунке

h=	=0,0625					
k	xk	f(0,5),f(1)	f(x_{2k-1})	f(x_{2k})	Ответ	=(B14/3)*F25
0	0,5	=1/B16				
1	=B16+$B$14		=1/B17			
2	=B17+$B$14			=1/B18		
3	=B18+$B$14		=1/B19			
4	=B19+$B$14			=1/B20		
5	=B20+$B$14		=1/B21			
6	=B21+$B$14			=1/B22		
7	=B22+$B$14		=1/B23			
8	=B23+$B$14	=1/B24				
		3	22,11904	8,15238	33,27142	
		s_1	s_2	s_3	S	
	=4*СУММ(D17;D19;D21;D23)					
	=СУММ(E18;E20;E22)					
	=СУММ(C25:E25)					

Пример 2.

Вычислить $\displaystyle\int\limits_{0,5}^{1} \frac{dx}{x}$ методом прямоугольников для $n = 4$ и $n = 10$.

Оценить погрешность.

1) Для $n = 4$, $\quad h = \dfrac{b-a}{4} = 0,125.$

$x_0 = 0,4375$	$f(x_0) = 2,2857$
$x_1 = 0,5625$	$f(x_1) = 1,7778$
$x_2 = 0,6875$	$f(x_2) = 1,4545$
$x_3 = 0,8125$	$f(x_3) = 1,2308$
$x_4 = 0,9375$	$f(x_4) = 1,0667$

Получаем $\displaystyle\int\limits_{0,5}^{1} \frac{1}{x}\,dx \approx h \cdot \sum_{k=1}^{4} f(x_k) = 0,6912\,.$

$$\left|R_4(f)\right| < \frac{1}{48} \cdot 16 \cdot (0,125)^2 = 0,0052\,.$$

2) Для $n = 10, \quad h = \dfrac{b-a}{10} = 0,05.$

$x_1 = 0,525$	$f(x_1) = 1,9048$
$x_2 = 0,575$	$f(x_2) = 1,7391$
$x_3 = 0,625$	$f(x_3) = 1,6$
$x_4 = 0,675$	$f(x_4) = 1,4815$
$x_5 = 0,725$	$f(x_5) = 1,3793$
$x_6 = 0,775$	$f(x_6) = 1,2903$
$x_7 = 0,825$	$f(x_7) = 1,2121$
$x_8 = 0,875$	$f(x_8) = 1,1429$
$x_9 = 0,925$	$f(x_9) = 1,0811$
$x_{10} = 0,975$	$f(x_{10}) = 1,0256$

Получаем $\displaystyle\int\limits_{0,5}^{1} \frac{1}{x}\,dx \approx h \cdot \sum_{k=1}^{10} f(x_k) = 0,6928\,.$

$$\left|R_{10}(f)\right| < \frac{1}{48} \cdot 16 \cdot (0,05)^2 = 0,00083\,.$$

9 Тестовые задания

1. Определенный интеграл $\int\limits_1^2 x^4\,dx$ равен

1) $5,5$ 2) 6 3) $6,2$

2. Определенный интеграл $\int\limits_1^7 (6x^2+1)\,dx$ равен

1) 132 2) 118 3) 123

3. Определенный интеграл $\int\limits_0^1 x\cdot e^x\,dx$ равен

1) 3 2) 2 3) 1

4. Определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi} (\sin x\cdot\cos x+\cos x)\,dx$ равен

1) $0,5$ 2) $-0,5$ 3) 0

5. Определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} x\cdot\sin x\,dx$ равен

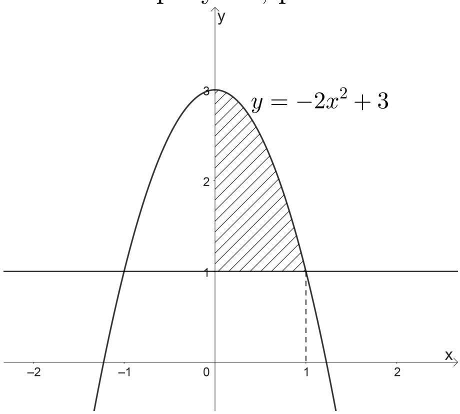
1) 0 2) 1 3) 2

6. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, равна

1) $\int\limits_0^1 (2-2x^2)\,dx$

2) $\int\limits_0^3 (3-2x^2)\,dx$

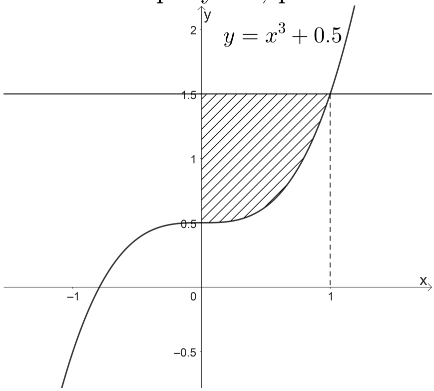
3) $\int\limits_{-1}^0 (-2x^2+3)\,dx$



7. Определенный интеграл $\int\limits_1^2 \frac{x^2+x+2}{x}\,dx$ равен

1) $2,5+2\ln 2$ 2) $2,5+\ln 2$ 3) $2+2\ln 2$

8. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, равна

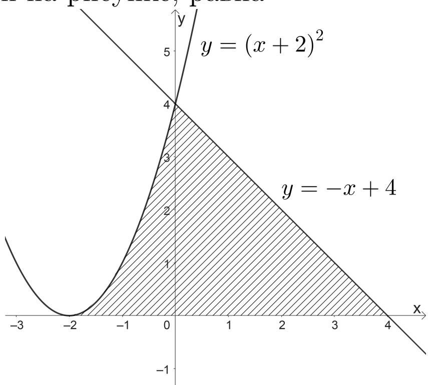


1) $\int\limits_0^1 (1-x^3)\,dx$

2) $\int\limits_0^1 (1,5-x^3)\,dx$

3) $\int\limits_0^1 (x^3+0,5)\,dx$

9. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, равна



1) $\int\limits_{-2}^2 (x+2)^2\,dx$

2) $\int\limits_{-2}^4 (4-x)\,dx$

3) $\int\limits_{-2}^0 (x+2)^2\,dx + \int\limits_0^4 (4-x)\,dx$

10. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\cos 2x$, осью Ox, осью Oy и прямой $y=\frac{\pi}{2}$.

1) $0,5$ 2) $0,25$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2x^4$.

1) $\frac{1}{5}$ 2) $\frac{2}{5}$ 3) $\frac{8}{5}$

12. Вычислите площадь фигуры, ограниченной осью Ox и линией $y = -x^2 + 8x - 7$.

1) 1 2) 8 3) 36

13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$ и $y = x + 4$.

1) $\dfrac{61}{6}$ 2) $\dfrac{103}{6}$ 3) $\dfrac{125}{6}$

14. Площадь фигуры, ограниченной $y = x^2$, $y = 3x^2$, $x = 1$, вычисляется с помощью интеграла

1) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ 2) $\displaystyle\int_0^1 (3x^2 - x^2)\,dx$ 3) $\displaystyle\int_0^1 (3x^2 + x^2)\,dx$

15. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 5 - x^2$, $y = x - 1$, вычисляется с помощью интеграла

1) $\displaystyle\int_0^2 (6 - x^2 - x)\,dx$ 2) $\displaystyle\int_{-3}^2 (6 - x^2 - x)\,dx$ 3) $\displaystyle\int_{-2}^3 (6 - x^2 - x)\,dx$

16. Отметьте собственные интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^{10} \frac{1}{2x-5}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 x \cdot \sin x\,dx$ 3) $\displaystyle\int_0^2 \ln x\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^2 e^{-x}\,dx$ 5) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x+5}\,dx$ 6) $\displaystyle\int_4^6 \ln x\,dx$

17. Отметьте несобственные интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{2x-5}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 x \cdot \cos x\,dx$ 3) $\displaystyle\int_0^2 \ln x\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^2 e^{-x}\,dx$ 5) $\displaystyle\int_{-6}^0 \frac{1}{x+5}\,dx$ 6) $\displaystyle\int_4^6 \ln x\,dx$

18. Сходящимися являются интегралы:

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-6/5}\,dx$ 2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-5/6}\,dx$ 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-4/5}\,dx$ 4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{5/4}\,dx$

19. Несобственный интеграл $\int\limits_4^{+\infty} (x-3)^{-2}\,dx$ равен

1) $\dfrac{1}{4}$ 2) -1 3) 1

20. Несобственный интеграл $\int\limits_3^{+\infty} \dfrac{6}{x^2}\,dx$ равен

1) 2 2) 0 3) 1

21. Вычислить $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^4}$.

1) 1 2) ∞ 3) $\dfrac{1}{3}$

22. Формула Ньютона-Лейбница имеет вид

1) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

2) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) + F(a)$

3) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)$

23. При перемене местами пределов интегрирования определенный интеграл

1) не изменится;
2) меняет знак;
3) равен 0.

24. Чему равен $\int\limits_a^a f(x)\,dx$ от любой непрерывной функции

1) $2\int\limits_0^a f(x)\,dx$ 2) $-\int\limits_a^a f(x)\,dx$ 3) 0

25. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[-9;\, 11]$, то интеграл $\int\limits_{-3}^{3} f(x)\,dx$ можно представить в виде

1) $\int\limits_{-9}^{11} f(x)\,dx + \int\limits_{-9}^{-3} f(x)\,dx + \int\limits_{3}^{11} f(x)\,dx$

2) $\int\limits_{-3}^{0} f(x)\,dx - \int\limits_{0}^{3} f(x)\,dx$

3) $\int\limits_{-9}^{11} f(x)\,dx - \int\limits_{-9}^{-3} f(x)\,dx - \int\limits_{3}^{11} f(x)\,dx$

26. Укажите формулу вычисления площади S плоской фигуры, ограниченной $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ $(f_1(x) < f_2(x))$ и $x = a$, $x = b$:

1) $S = \int\limits_{a}^{b} \Big(f_1(x) - f_2(x)\Big)\,dx$

2) $S = \int\limits_{a}^{b} \Big(f_2(x) - f_1(x)\Big)\,dx$

3) $S = \int\limits_{a}^{b} \Big(f_1(x) + f_2(x)\Big)\,dx$

27. Укажите формулу вычисления объема V, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной $y = f(x)$ $(f(x) \geqslant 0)$, $x = a$, $x = b$ и осью Ox:

1) $V = \pi \int\limits_{a}^{b} \Big(f'(x)\Big)^2\,dx$ 2) $V = \pi \int\limits_{a}^{b} \Big(f(x)\Big)^2\,dx$

3) $V = \pi \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$

10 Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Вычислить, используя метод интегрирования по частям, интеграл $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x + y = 4$, $xy = 3$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$, вокруг оси Ox.

4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{e^x \, dx}{e^{2x} - 4e^x + 3}$ или установить его расходимость.

5. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3}{x^8 + 1} \, dx$, применяя одну из формул (прямоугольников, трапеций или Симпсона) с точностью до 10^{-4}.

6. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции с основаниями $a = 4,5$ м, $b = 6,6$ м (верхнее основание больше нижнего) и высотой $h = 3$ м. Плотность воды $\rho = 1000\,\text{кг}/\text{м}^3$, ускорение свободного падения g принять равным $9,8\,\text{м}/\text{с}^2$. Указание: давление воды на глубине x определяется по формуле $\rho g x$.

Вариант 2

1. Вычислить, используя метод интегрирования по частям, интеграл $\int\limits_0^4 \ln(2x+1)\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3\sin x$, $y = 3\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y^2 - x = 0$, вокруг оси Ox.

4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{x}}$ или установить его расходимость.

5. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$, применяя одну из формул (прямоугольников, трапеций или Симпсона) с точностью до 10^{-4}.

6. Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту $H = 300$ км. Масса спутника равна $m = 6,0$ тонн, радиус Земли $R_{\text{Земли}} = 6380$ км. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли принять равным $9,8\,\text{м}/\text{с}^2$.

Вариант 3

1. Вычислить, используя метод интегрирования по частям, интеграл $\int\limits_1^2 (x+2)\cdot\sin 3x\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = -x$, $x = -1$, $x = 1$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры,

ограниченной графиками функций $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}$, $x + y = 2$, вокруг оси Oy.

4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} (3x+4)e^{4x}\,dx$ или установить его расходимость.

5. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_{1}^{4} \dfrac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$, применяя одну из формул (прямоугольников, трапеций или Симпсона) с точностью до 10^{-4}.

6. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции с основаниями $a = 5,1$ м, $b = 7,8$ м (верхнее основание больше нижнего) и высотой $h = 3$ м. Плотность воды $\rho = 1000\,\text{кг}/\text{м}^3$, ускорение свободного падения g принять равным $9,8\,\text{м}/\text{с}^2$. Указание: давление воды на глубине x определяется по формуле $\rho g x$.

Вариант 4

1. Вычислить, используя метод интегрирования по частям, интеграл $\int\limits_{0}^{2} (x^2+1)\cdot e^{2x}\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x+1)^2$, $y = (x-1)^2$, $y = 0$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$, вокруг оси Oy.

4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \sqrt{x+1}\cdot\ln(x+1)\,dx$ или установить его расходимость.

5. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$, применяя одну из формул (прямоугольников, трапеций или Симпсона) с точностью до 10^{-4}.

6. Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту $H = 300$ км. Масса спутника равна $m = 7,0$ тонн, радиус Земли $R_{\text{Земли}} = 6380$ км. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли принять равным $9,8\,\text{м/с}^2$.

Вариант 5

1. Вычислить, используя метод интегрирования по частям, интеграл $\int\limits_{1/3}^{1} x \cdot e^{3x+2}\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = (x-1)^3$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3$, $y = \sqrt{2}$, вокруг оси Ox.

4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{2x-3}}$ или установить его расходимость.

5. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, применяя одну из формул (прямоугольников, трапеций или Симпсона) с точностью до 10^{-4}.

6. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции с основаниями $a = 5,7$ м, $b = 9,0$ м (верхнее основание больше нижнего) и высотой $h = 4$ м. Плотность воды $\rho = 1000\,\text{кг/м}^3$, ускорение свободного падения g при-

нять равным $9,8\,\text{м}/\text{с}^2$. Указание: давление воды на глубине x определяется по формуле $\rho g x$.

Вариант 6

1. Вычислить, используя метод интегрирования по частям, интеграл $\int\limits_0^1 x\cdot\ln(x+1)\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - x$, $y^2 = 2x$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$, $x = 0$, вокруг оси Ox.

4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{x^{5/3}}$ или установить его расходимость.

5. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$, применяя одну из формул (прямоугольников, трапеций или Симпсона) с точностью до 10^{-4}.

6. Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту $H = 250$ км. Масса спутника равна $m = 6,0$ тонн, радиус Земли $R_{\text{Земли}} = 6380$ км. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли принять равным $9,8\,\text{м}/\text{с}^2$.

Вариант 7

1. Вычислить, используя метод интегрирования по частям, интеграл $\int\limits_0^{1/4} \operatorname{arctg} 4x\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = x, \;\; x = 4$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 2x + 1, \;\; x = 2, \;\; y = 0$, вокруг оси Oy.

4. Вычислить несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}\, dx$ или установить его расходимость.

5. Вычислить приближенно интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 x \cdot \ln(x+1)\, dx$, применяя одну из формул (прямоугольников, трапеций или Симпсона) с точностью до 10^{-4}.

6. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции с основаниями $a = 6,3$ м, $b = 10,2$ м (верхнее основание больше нижнего) и высотой $h = 4$ м. Плотность воды $\rho = 1000\,\text{кг}/\text{м}^3$, ускорение свободного падения g принять равным $9,8\,\text{м}/\text{с}^2$. Указание: давление воды на глубине x определяется по формуле $\rho g x$.

Вариант 8

1. Вычислить, используя метод интегрирования по частям, интеграл $\displaystyle\int\limits_1^e \ln^2 x\, dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$, $y = -x, \;\; \sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3, \;\; y = x$, вокруг оси Oy.

4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot (\sqrt[3]{x}+4)}$ или установить его расходимость.

5. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_{0}^{1} e^{x^2}\, dx$, применяя одну из формул (прямоугольников, трапеций или Симпсона) с точностью до 10^{-4}.

6. Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту $H = 450$ км. Масса спутника равна $m = 4,0$ тонн, радиус Земли $R_{\text{Земли}} = 6380$ км. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли принять равным $9,8\,\text{м/с}^2$.

Вариант 9

1. Вычислить, используя метод интегрирования по частям, интеграл $\int\limits_{1}^{4} \sqrt{x} \cdot \ln x\, dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $x = 4$, $y = 1$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3 + 2$, $y = 1$, $x = 1$, вокруг оси Ox.

4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} (1-6x)\cdot e^{2x}\, dx$ или установить его расходимость.

5. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\ln x}$, применяя одну из формул (прямоугольников, трапеций или Симпсона) с точностью до 10^{-4}.

6. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции с основаниями $a = 6,4$ м, $b = 12,0$ м (верхнее основание больше нижнего) и высотой $h = 5$ м. Плотность воды $\rho = 1000\,\text{кг/м}^3$, ускорение свободного падения g принять равным $9,8\,\text{м/с}^2$. Указание: давление воды на глубине x определяется по формуле $\rho g x$.

Вариант 10

1. Вычислить, используя метод интегрирования по частям, интеграл $\int\limits_0^{1/2} \arccos 2x\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $\;y = 0$.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = 4 - x^2$, $\;y = 0$, вокруг оси Oy.

4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x \cdot e^x\,dx$ или установить его расходимость.

5. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_2^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^2}}$, применяя одну из формул (прямоугольников, трапеций или Симпсона) с точностью до 10^{-4}.

6. Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту $H = 550$ км. Масса спутника равна $m = 4,5$ тонн, радиус Земли $R_{\text{Земли}} = 6380$ км. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли принять равным $9,8\,\text{м/с}^2$.

Список литературы

1. Конспект лекций по высшей математике : [в 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 11-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2011. - 279, [1] с. ; 70x100/16. - ISBN 978-5-8112-4375-4 (Ч. 1). - 978-5-8112-4000-5.

2. Баврин И. И. Высшая математика: Учеб.для вузов рек.МО РФ / И. И. Баврин . - 3-е изд.,стер. - М. : Академия, 2002. - 611с.

3. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин [и др.]. - Москва: Айрис Пресс, 2013. - 574, [1] с. : рис. ; 60x90/16. - (Высшее образование). - На обл. авт. не указаны. - ISBN 978-5-8112-5166-7.

4. Рябушко А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. П. Рябушко. - 2013. - Книга находится в Премиум-версии ЭБС IPRbooks. - Рус яз. - ISBN 978-985-06-2221-1.

5. Рябушко А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / А. П. Рябушко. - 2011. - Книга находится в Премиум-версии ЭБС IPRbooks. - Рус яз. - ISBN 978-985-06-1998-3.

6. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М. : ОНИКС : Мир и Образование, 2007. - 303, [1] с. ; 60x90/16. - ISBN 978-5-488-01070-3 (ОНИКС). - 978-5-488-01071-0 (ч. 1). - 978-5-94666-336-3 (Мир и Образование). - 978-5-94666-367-0 (ч. 1).

Учебное издание

Сметанина Людмила Петровна
Максимова Ольга Васильевна

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ
Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 04.03.2024. Формат 60 × 84/16.
Усл. печ. л. 3,1. Уч.-изд. л. 1,0.
Тираж 28 экз. Заказ № 550.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034 г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021.
Тел.: +7 (3412) 916-364 E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра
«Удмуртский университет»
426034 Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18