Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт гражданской защиты
Многопрофильный колледж профессионального образования

# УПРОЩЕННЫЙ КУРС «ДИНАМИКА» В ДИСЦИПЛИНАХ «ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА» И «МЕХАНИКА»

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2024

УДК 621.01(075.8)
ББК 30.12я73
У677

*Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УдГУ*

**Рецензенты**: д-р техн. наук, профессор каф. теоретической механики и сопротивления материалов ФГБОУ ВО « УдГАУ» П. В. Дородов, канд. техн. наук, доцент каф. механики ФГБОУ ВО «ИжГТУ» С.А. Девятериков.

**Составитель**: Кулагин А.В.

У677 Упрощенный курс «Динамика» в дисциплинах «Техническая механика» и «Механика» : учеб.-метод. пособие : [Электрон. ресурс] / сост. А.В. Кулагин. – Ижевск : Удмуртский университет, 2024. – 55 с.

В учебно-методическом пособии представлен учебный материал по дисциплинам «Техническая механика» СПО и «Механика» ВО (модуль «Инженерная подготовка в техносферной безопасности») в виде основного лекционного курса раздела «Динамика» теоретической механики с примерами решения типовых задач и заданий для самостоятельного решения. Материал лекций составлен на базе соответствующих классических трудов по теоретической механике.

Издание предназначено студентам направлений подготовки «Техносферная безопасность» ВО и «Пожарная безопасность», «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений», «Эксплуатация нефтепромыслового оборудования» и «Противопожарная защита» СПО.

УДК 621.01(075.8)
ББК 30.12я73

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебно-методическом пособии представлены основные лекционные и практические темы, связанные с расчетами динамических характеристик при различных видах движения материальной точки с учетом причин их вызвавших на базовом уровне освоения дисциплин «Техническая механика» СПО и модуля «Инженерная подготовка в техносферной безопасности» – по дисциплине «Механика» ВО». Отметим, что динамика твердого тела в предлагаемом курсе не рассматривается.

Это пособие рекомендовано для студентов направлений подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность» ВО, 20.02.04 «Пожарная безопасность» СПО, 21.02.01. «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений» СПО.

Пособие направлено на формирование профессиональных компетенций в соответствии с требованиями ФГОС ВО и СПО.

В эпоху развития нейросетевых технологий, когнитивного подхода в рамках инженерного прогресса промышленности нашей страны необходимы высоко квалифицированные кадры технического направления высшего и среднего звена. Это предъявляет новые требования к подготовке кадров на уровне среднего и высшего образования. Данное пособие предлагает повысить уровень подготовки студентов на начальном этапе изучения дисциплины

На этой стадии обучения студентам соответствующих специальностей предлагается освоить классические подходы к решению задач динамики материальной точки с применением знаний высшей математики, физики и инженерной графики для того, чтобы решать основные инженерные задачи и задачи прикладных технических дисциплин.

Освоение дисциплины «Механика» модуля «Инженерная подготовка в техносферной безопасности» направлено на формирование элементов компетенций УК1 – УК9, ОПК-1 – ОПК-4 в соответствии с ФГОС ВО и ООП ВО. Приказ Министерства науки и высшего образования РФ от 25 мая 2020 г. № 680 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 20.03.01 Техносферная безопасность» (с изменениями и дополнениями):

УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

УК-2. Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений;

УК-3. Способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде;

УК-4. Способен осуществлять деловую коммуникацию в устной и письменной формах на государственном языке Российской Федерации и иностранном(-ых) языке(-ах);

УК-5. Способен воспринимать межкультурное разнообразие общества в социально-историческом, этическом и философском контекстах;

УК-6. Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни;

УК-7. Способен поддерживать должный уровень физической подготовленности для обеспечения полноценной социальной и профессиональной деятельности;

УК-8. Способен создавать и поддерживать в повседневной жизни и в профессиональной деятельности безопасные условия жизнедеятельности для сохранения природной среды, обеспечения устойчивого развития общества, в том числе при угрозе и возникновении чрезвычайных ситуаций и военных конфликтов;

УК-9. Способен использовать базовые дефектологические знания в социальной и профессиональной сферах.

ОПК-1. Способен учитывать современные тенденции развития техники и технологий в области техносферной безопасности, измерительной и вычислительной техники, информационных технологий при решении типовых задач в области профессиональной деятельности, связанной с защитой окружающей среды и обеспечением безопасности человека;

ОПК-2. Способен обеспечивать безопасность человека и сохранение окружающей среды, основываясь на принципах культуры безопасности и концепции риск-ориентированного мышления;

ОПК-3. Способен осуществлять профессиональную деятельность с учетом государственных требований в области обеспечения безопасности;

ОПК-4. Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности.

Освоение дисциплины «Техническая механика» направлено на формирование элементов основных компетенций ОК1 - ОК 9 в соответствии с ФГОС СПО и ООП СПО подготовки 20.02.04 «Пожарная безопасность». Приказ Министерства просвещения России от 07.07.2022. № 537:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 2. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 3. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 4. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 5. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 6. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностях, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 7. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 8. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;

ОК 9. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Освоение дисциплин «Техническая механика» СПО направлены на формирование элементов профессиональных компетенций ОК 1 – ОК 9 в соответствии с ФГОС СПО и ООП СПО подготовки 21.02.01 «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений». Приказ Министерства образования и науки России от 12.05.2014. № 482:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес;

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность;

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития;

ОК 5. Использовать Информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности;

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями;

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды, за результат выполнения заданий;

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации;

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

# ВВЕДЕНИЕ

«Динамика» – раздел теоретической механики, предполагающий изучение теории и расчета материальных точек и твердых тел одновременно в состоянии покоя и движения или при их совместном действии в разделах «Статика», «Кинематика». [1–20].

Раздел «Динамика» изучается студентом после того, как он овладел на базовом уровне разделами «Статика» и «Кинематика», далее студент на более высоком уровне приступает к изучению дисциплин «Детали машин», «Сопротивление материалов», «Теория машин и механизмов», «Прикладная механика», «Механика сплошных сред», «Гидрогазодинамика», «Теплофизика», «Разработка нефтяных и газовых месторождений», «Здания и сооружения» в зависимости от требований ФГОС ВО и СПО.

Потом эти знания могут быть применены по профилю профессиональной деятельности руководителя организации, инженера-конструктора, инженера-технолога, инженера-исследователя, мастера производственного или технического участка.

В этом пособии представлен основной лекционно-практический материал по разделу «Динамика». Лекционный материал дополнен примерами с подробным объяснением их решения и заданиями для самостоятельного решения.

Представлено 5 основных лекционных тем дисциплины, каждая из которых содержит конспект лекции с графическим материалом и примерами решения типовых задач и заданий для самостоятельного решения студентами СПО и ВО. Пособие снабжено дополнительными заданиями для студентов ВО для рубежного контроля, далее зачета или экзамена согласно учебному плану ВО или СПО.

# ТЕМА 1. ДИНАМИКА. ДИНАМИКА ТОЧКИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пусть к материальной точке с массой $m$ приложена система сил. Составим уравнение, выражающее основной закон динамики

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{1}$$

где $\bar{a}$ – ускорение абсолютного движения материальной точки, $\bar{F}$ – равнодействующая всех приложенных к точке заданных сил, если точка свободная и реакций связей, если точка несвободная.

Спроецируем уравнение (1) на оси декартовой системы координат, получим:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x; \\ m\ddot{y} &= F_y: \\ m\ddot{z} &= F_z, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\ddot{x} = a_x$, $\ddot{y} = a_y$, $\ddot{z} = a_z$ – проекции ускорения на декартовы оси координат, $F_x, F_y, F_z$ – проекции равнодействующей силы $\bar{F}$ на эти же оси координат.

Уравнения (2) представляют систему дифференциальных уравнений движения материальной точки в проекциях на оси декартовой системы координат.

Спроецируем уравнение (1) на касательную, главную нормаль и бинормаль траектории движения точки, которые направлены по ортам $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ , получим:

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= F_\tau; \\ m\frac{V^2}{r} &= F_n; \\ 0 &= F_b, \end{aligned} \tag{3}$$

где $r$ –радиус кривизны траектории движения точки в текущий интервал времени, $\ddot{s}$=$a_\tau$, $\frac{V^2}{r}a_n, 0 = a_b$ – проекции ускорения точки на естественные оси. а $F_\tau$, $F_n$, $F_b$ – проекции равнодействующей силы на те же оси.

Уравнения (3) представляют систему уравнений движения материальной точки на естественные оси или уравнения движения Эйлера. Их применяют, когда известна траектория движения точки.

При помощи применения уравнений (2) и (3) движения точки решают две основные динамики точки.

## 1.1. ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. (ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ ПО ЗАДАННОМУ ДВИЖЕНИЮ)

Формулировка задачи следующая: масса точки и ее траектория движения известны, необходимо определить равнодействующую всех приложенных к точке сил.

В общем случае движение точки с массой *m* представлено уравнениями:

$$x=x(t);$$
$$y=y(t); \tag{4}$$
$$z=z(t).$$

Продифференцировав дважды уравнения (4) и подставляя в уравнения (2), определим проекции равнодействующей силы:

$$F_x = m\ddot{x};$$
$$F_y = m\ddot{y};$$
$$F_z = m\ddot{z}.$$

Модуль и направление равнодействующей силы вычисляется равенством

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

где в проекциях по ортам:

$$\cos(\bar{F}, \bar{\imath}) = \frac{F_x}{F};$$
$$\cos(\bar{F}, \bar{\jmath}) = \frac{F_y}{F};$$
$$\cos(\bar{F}, \bar{k}) = \frac{F_z}{F}.$$

Зададим закон движения точки относительно траектории

$$S=S\ (t). \tag{5}$$

Продифференцируем дважды по *t* уравнение (5) и подставив в равенство (3), определим проекции равнодействующей силы на естественные оси:

$$F_\tau = m\ddot{s};$$
$$F_n = \frac{mV^2}{r};$$
$$F_b = 0,$$

где радиус кривизны *r* определяется из уравнения траектории движения.

Направление и модуль равнодействующей силы соответствуют уравнению

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2},$$

где в проекциях по ортам:

$$\cos(\bar{F}, \bar{\tau}) = \frac{F_\tau}{F};$$
$$\cos(\bar{F}, \bar{n}) = \frac{F_n}{F};$$

$$\cos(\overline{F}, \overline{b}) = 0.$$

Отметим, что если точка несвободная, то при определении равнодействующей всех приложенных сил, в числе которых учитываются заданные силы и реакции связей, зная заданные силы, определяются и реакции связей.

## Примеры с решениями

**Пример 1.** Материальная точка $M$ массы $m$ движется в плоскости $XOY$ согласно параметрическим уравнениям:

$$x = a\cos\omega t; \quad y = b\sin\omega t. \tag{6}$$

Определить силу, которая действует на точку.

**Решение.** Изобразим систему координат $XOY$. Исключив время $t$ из уравнений (6), убедимся, что траекторией движения точки является эллипс (Рисунок 1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a$ и $b$ – полуоси с центрами относительно начала координат.

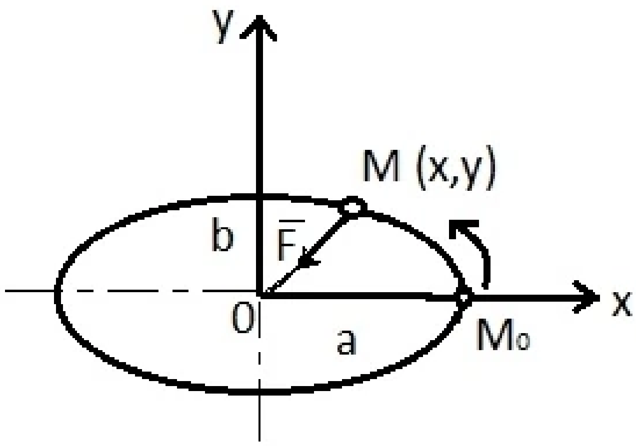



Рис. 1. Траектория движения материальной точки

Продифференцировав дважды по $t$ уравнения (6), имеем:

$$\dot{x} = -a\omega\sin\omega t, \dot{y} = b\omega\cos\omega t;$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2\cos\omega t, \ddot{y} = -b\omega^2\sin\omega t.$$

Спроецировав силы $\overline{F}$ на оси координат, получаем:

$$F_x = m\ddot{x} = -ma\omega^2\cos\omega t = -m\omega^2 x;$$

$$F_y = m\ddot{y} = -mb\omega^2\sin\omega t = -m\omega^2 y.$$

Радиус-вектор $\bar{r} = \overline{OM}$ движения точки $M$ представляем так

$$\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath},$$

где $x$ и $y$ – координаты движения точки $M$.

И окончательно

$$\bar{F}=F_x\bar{\imath}+F_y\bar{\jmath}=-m\omega^2\bar{r}_c.$$

Сила $\bar{F}$, которая приложена к точке $M$, противоположна радиус-вектору $\bar{r}=\overline{OM}$ и, значит, направлена к началу координат $O$. Модуль силы пропорционален расстоянию точки $M$ от начала координат $O$.

**Пример 2.** Материальная точка $M$ массы $m$=1кг движется по окружности радиуса $R$=2 м по закону (Рисунок 2).

$$S=2e^{3t}, \tag{7}$$

здесь $s$[м], t[с].

Определить силу, действующую в функции времени $t$.

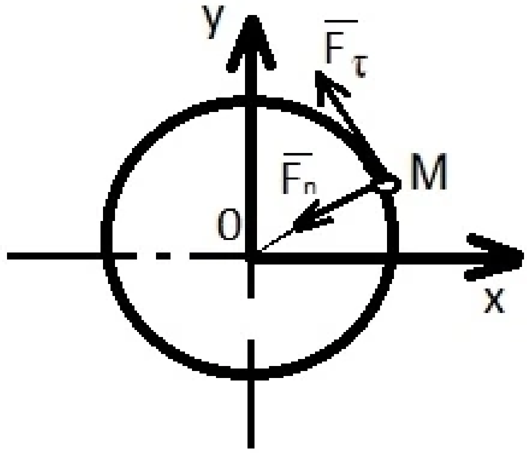



Рис. 2. Схема движения точки $M$

**Решение.** Продифференцировав дважды по $t$ уравнение (7), имеем:

$$\dot{S}=V_\tau=6e^{3t}\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\ddot{S}=\dot{V}_\tau=a_\tau=18e^{3t}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Определяем нормальное ускорение

$$a_n=\frac{V^2}{r}=\frac{(6e^{3t})^2}{2}=18e^{6t}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Определяем проекции силы $\bar{F}$ на касательную и главную нормаль:

$$F_\tau=ma_\tau=18e^{3t}\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}=18\text{e}^{3t}\text{Н};$$

$$F_n=ma_n=18e^{3t}\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}=18\text{e}^{3t}\text{Н}.$$

Найдем модуль силы $\bar{F}$

$$F=\sqrt{F_\tau^2+F_n^2}=18e^{3t}\sqrt{1+e^{3t}}\text{Н}.$$



11

**Пример 3.** Груз $A$ весом $\bar{F} = \bar{G}$ перемещается вверх по шероховатой плоскости, которая составляет с горизонтом угол α под действием силы тяги $\bar{\mathrm{T}}$, составляющей угол $\beta$ с плоскостью наклона (Рисунок 3).

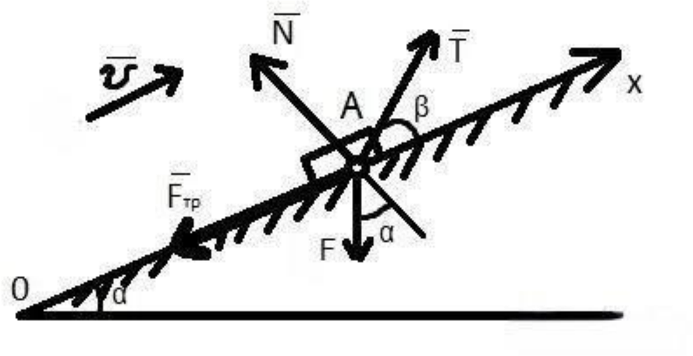



Рис. 3. Схема перемещения груза $A$

Закон движения груза соответствует уравнению

$$x = kgt^2, \tag{8}$$

где $k$ – постоянный коэффициент.

Вычислить силу трения скольжения груза относительно плоскости движения.

**Решение.** Направим ось $x$ в направлении перемещения груза. На груз $A$ действуют заданные силы $\bar{G}$ и $\bar{\mathrm{T}}$ и реакции связей наклонной плоскости $\bar{N}$ и $\bar{F}_{\text{тр}}$.

Представим дифференциальное уравнение движение груза в проекции на ось $x$ так

$$m\ddot{x} = F\cos\beta - G\sin\propto - F_{\text{тр}}\ . \tag{9}$$

Продифференцируем дважды по $t$ уравнение (8), получаем:

$$\dot{x}{=}2kgt;$$

$$\ddot{x} = 2kg.$$

Подставим в равенство (9) значение $\ddot{x}$, учитывая, что $m = \frac{G}{g}$

$$\frac{G}{g}2kg = F\cos\beta - G\sin\alpha - F_{\text{тр}}.$$

Тогда искомая сила трения равна

$$F_{\text{тр}} = F\,cos\,\beta - G(\sin\propto + 2k).$$

**Задания для самостоятельного решения первой задачи динамики точки**

1. Движение тела массой 1,2 кг выражается уравнениями $x=t^3$, $y=-3+t-2t^2$. Определить силу, которую имеет тело в момент времени $t$=4 с.

2. Свободная материальная точка находится под действием постоянной силы $F$=28 Н в течение 27 с и проходит за это время по криволинейной траектории путь 0,64 км. До начала действия силы точка находится в покое. Найти массу точки.

3. Груз весом $\bar{G}$ подвешен на нити длиной $l$ и перемещается по окружности в горизонтальной плоскости с некоторой скоростью $\bar{V}$. Угол отклонения нити от вертикали составляет $\alpha$. Вычислить силу натяжения нити (Рисунок 4).

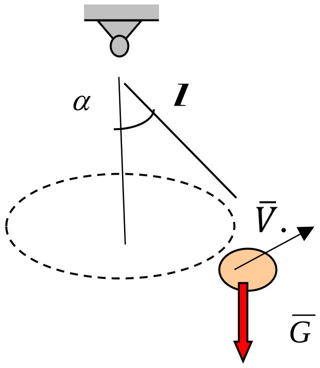
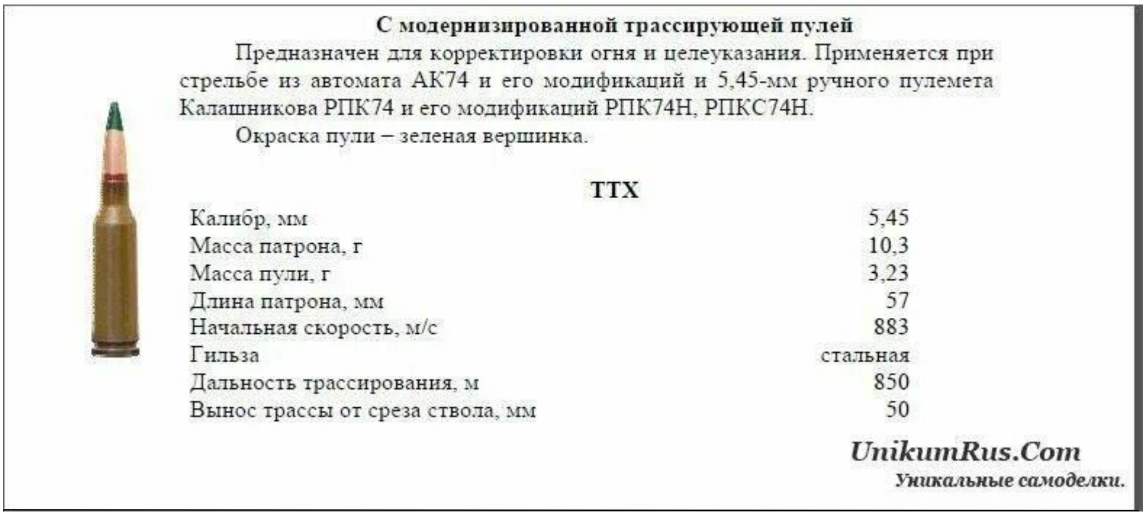



Рис. 4. Схема перемещения груза на нити в горизонтальной плоскости

4. Пуля массой 3,23 г направлена стрелком из автомата Калашникова АК-47 (Рисунок 5) вертикально вниз под действием силы тяжести $\bar{G}$ и испытывает сопротивление воздуха (Рисунок 6). Закон движения пули соответствует уравнению $x = 320t - 100(1 - e^{-2t})$.



**С модернизированной трассирующей пулей**

Предназначен для корректировки огня и целеуказания. Применяется при стрельбе из автомата АК74 и его модификаций и 5,45-мм ручного пулемета Калашникова РПК74 и его модификаций РПК74Н, РПКС74Н.

Окраска пули – зеленая вершинка.

**ТТХ**

| | |
|---|---|
| Калибр, мм | 5,45 |
| Масса патрона, г | 10,3 |
| Масса пули, г | 3,23 |
| Длина патрона, мм | 57 |
| Начальная скорость, м/с | 883 |
| Гильза | стальная |
| Дальность трассирования, м | 850 |
| Вынос трассы от среза ствола, мм | 50 |



Рис. 5. Пуля АК-47, направленная стрелком вертикально вниз

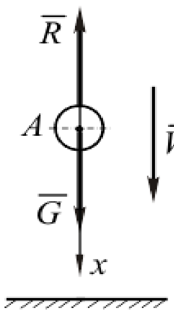



Рис. 6. Расчетная схема задачи

Вычислить силу сопротивления среды $\bar{R}$, ориентируясь на функцию изменения скорости.

5. Груз 1 движется по гладкой горизонтальной плоскости под действие веса груза 3 через блок на нити. Определить силу натяжения нити, если грузы 1 и 3 имеют одинаковую массу $m$=2,5 кг. Массой блока 2 пренебрегаем (Рисунок 7).

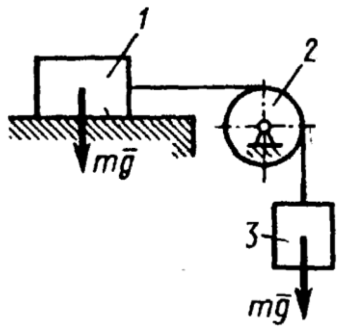



Рис. 7. Схема движения груза по гладкой горизонтальной плоскости

6. Автомобиль массой $m$ движется с постоянной скоростью $\bar{V}$ по выпуклому мосту, имеющему в вертикальном сечении форму дуги окружности радиуса $r$. Определить силу давления автомобиля на мост при прохождении им середины моста.

**Дополнительные задания для студентов ВО**

7. На палубе корабля располагается человек массой $m$= 78,5 кг. Корабль совершает колебания в вертикальном плоскости движения волн с периодом $T$ = 11с и амплитудой $A$ = 0,65 м. Определить максимальное и минимальное давление человека на палубу.

8. Уравнения движения материальной точки с массой $m$ на плоскости $XOY$ соответствует уравнениям

$$x\text{-}at,\ y - bt\ (a = \text{const},\ b = \text{const}).$$

Определить силу, определяющую движение.

## 1.2. ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПО ЗАДАННЫМ СИЛАМ)

Формулировка задачи следующая: зная массу точки и заданные силы, которые приложены к точке, определить ее движение. Для этого составим уравнения движения точки в общем виде:

$$x=x(t);$$
$$y=y(t);$$
$$z=z(t).$$

Для решения задачи интегрируем систему дифференциальных уравнений движения точки (2) и в общем решении содержится шесть произвольных постоянных интегрирования, определяемых начальными условиями при $t=t_0$:

$$x=x_0,\ \dot{x}=\dot{x_0};$$
$$y=y_0,\ \dot{y}=\dot{y_0};$$
$$z=z_0,\ \dot{z}=\dot{z_0}.$$

Из начальных условий находят положение точки и ее скорость в фиксированное время, чаще всего в состоянии покоя $t_0$=0.

При движении материальной точки в плоскости координатные оси $x$ и $y$ располагаются в плоскости движения и число дифференциальных уравнений движения сокращается до двух:

$$m\ddot{x} = F_x;\ m\ddot{y} = F_y, \tag{10}$$

а число начальных условий будет равно четырем при $t=t_0$:

$$x=x_0,\ \dot{x}=\dot{x_0};$$
$$y=y_0,\ \dot{y}=\dot{y_0}.$$

При прямолинейном движении материальной точки, ось $x$ располагается линейно относительно траектории движения точки, остается одно дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} = F_x,$$

а число начальных условий становится равным двум при $t=t_0$:

$$x=x_0,\ \dot{x}=\dot{x_0}.$$

Вторую задачу динамики можно решить и с помощью естественных уравнений движения (3).

Отметим, что если материальная точка несвободная, то вторая задача динамики точки заключается не только в определении движения точки, но и в вычислении реакций связей.

## Примеры с решениями

**Пример 4.** Материальной точке *M* весом $\bar{F} = \bar{G}$ сообщается начальная скорость $\bar{V}_0$ , которая направлена вдоль горизонтали. Переместившись по негладкой горизонтальной плоскости за 2 с на расстояние *S*=4 м, точка остановилась.

Приняв ускорение свободного падения $g = 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, вычислить начальную скорость $\bar{V}_0$ и коэффициент трения скольжения $f$ . (Рисунок 8).

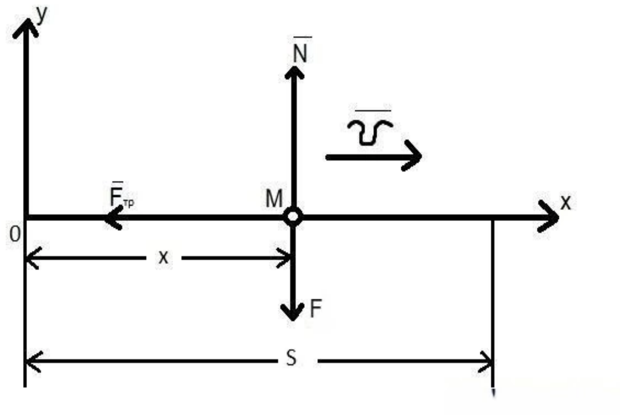



Рис. 8. Схема движения материальной точки *M* к задаче

**Решение.** Проведем систему координат *XOY* из точки состояния покоя. Ось *x* располагаем по траектории движения точки.

Изображаем точку в промежуточный момент времени. На точку действуют: заданная сила веса $\bar{G}$ , нормальная реакция плоскости $\bar{N}$ и сила трения скольжения $\bar{F}_{\text{тр}}$.

Составим дифференциальные уравнения движения точки в виде равенств (10):

$$m\ddot{x} = F_x = -F_{\text{тр}}; \tag{11}$$

$$m\ddot{y} = F_y = N - G \, . \tag{12}$$

Так как для любого момента времени вертикальная координата точки *y(t)*=0, то ускорение $\ddot{y} = 0$ из равенства (12) найдется так

$$N=G.$$

Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = fN = fG = fmg.$$

И из равенства (11) получим

$$\ddot{x} = -fg.$$

Проинтегрируем это уравнение ускорения движения

$$\dot{x} = -fgt + C_1 \, . \tag{13}$$

Из заданных условий задачи при $t$=2 с и $V = \dot{x}$=0 из равенства (13) определяем константу $C_1$

$$C_1=2fG.$$

после подстановки в равенство (13) получим

$$\dot{x} = 2fg - fgt \; . \tag{14}$$

Уравнение (14) представляет скорость движения точки в любой момент времени. Интегрируя равенство (14), имеем

$$x = 2fGt - fG\frac{t^2}{2} + C_2. \tag{15}$$

Подставляя в равенство (15) начальные условия $t$=0, $x(0)$=0 определим константу $C_2$

$$C_2=0.$$

Следовательно

$$x = 2fgt - fg\frac{t^2}{2}. \tag{16}$$

Уравнение (16) представляет закон движения точки вдоль оси $x$ в любой момент времени.

При определении коэффициента $f$ воспользуемся условием задачи, что при $t$=2 с, $x(2)=S$=4 м. Для этого условия из равенства (16) вычисляем коэффициент $f$=0,2.

Из равенства (14) определим начальную скорость, положив $t$=0,

$$V_0 = \dot{x}_0 = 4\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

**Пример 5.** Свободная материальная точка $M$ весом $\bar{G}$ движется с начальной скоростью $\bar{V}_0$ в пустоте вертикально вверх. Определить высоту подъема $h$ и время полета $t_1$ для интервала времени, когда скорость точки при подъеме станет в два раза меньше начальной (Рисунок 9).

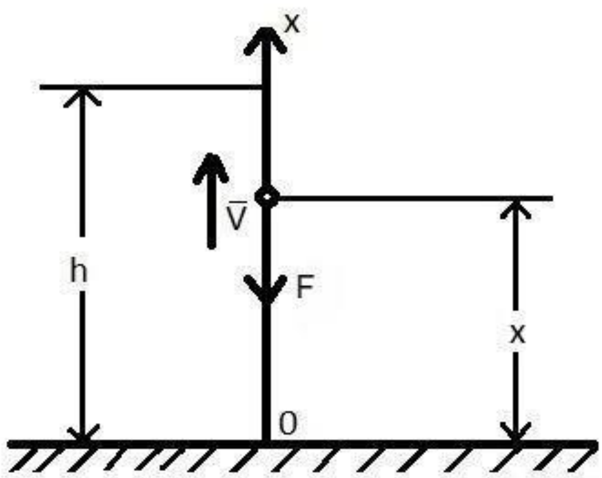



Рис. 9. Схема вертикально брошенной материальной точки

**Решение.** Ось *x* проведем вертикально вверх. Началом отсчета будем считать исходное положение точки. Изобразим точку *M* в текущий интервал времени. К точке приложена заданная сила $\bar{F} = \bar{G}$. Дифференциальное уравнение составим в форме равенства

$$m\ddot{x} = F_x = -G = -mg,$$

откуда

$$\ddot{x} = -g.$$

Интегрируя последнее выражение, имеем уравнение скорости

$$\dot{x} = -gt + C_1 \tag{17}$$

Подставляя в равенство (17) начальные условия при $t=0$, $\dot{x}(0) = V_0$, получим значение константы $C_1$

$$C_1=V_0,$$

следовательно

$$\dot{x} = V_0 - gt. \tag{18}$$

Уравнение (18) определяет скорость движения точки в любой интервал времени.

Интегрируя равенство (18), получим

$$x = V_0 t - \frac{gt^2}{2} + C_2. \tag{19}$$

Подставляя в равенство (19) начальные условия: при $t$=0, $x(0)=0$, имеем

$$C_2=0,$$

и следовательно

$$x = V_0 t - \frac{gt^2}{2}\,. \tag{20}$$

18

Уравнение (20) полностью определяет закон движения точки в любой интервал времени относительно оси *x*.

Подставим в равенство (18) $x(\dot{t_1})$ и определим время полета

$$t_1 = \frac{V_0}{2g}.$$

Подставим это значение в уравнение (20) $t = t_1 = \frac{V_0}{2g}$ и получим искомую высоту подъема точки

$$h = \frac{3}{8}\frac{V_0^2}{g}.$$

**Задания для самостоятельного решения второй задачи динамики точки**

1. Груз, сброшенный с самолета, движется согласно уравнениям: $x = 3{,}2V_0 \cdot t$; $y = 3h - gt^2/2$. Определить: уравнение траектории, величину и направление скорости движения груза в интервал времени, когда он пересечет горизонтальное направление оси.

2. Груз массой 1,5 кг движется под действием переменной силы *F=10(1–t) Н*. Через какой интервал времени (с) груз остановится, если начальная скорость движения груза $V_0$=25 м/с и сила совпадет с направлением скорости тела? Какое расстояние пройдет груз до остановки?

3. На точку *М* массой $m$ = 0,02 кг действует горизонтальная сила $F$, подчиняющаяся закону движения *F=3cos5t.* Н. Вычислить траекторию движение точки *М* в горизонтальной плоскости, если в начальный интервал времени скорость к направлению силы *F* была перпендикулярна и двигалась с начальной скоростью *Vo*= 15 см/с.

4. К телу массы 2,7 кг, располагающемуся на столе привязана нить, другой конец которой прикреплен к точке *А*. Вычислить ускорение, приложенное к точке А, при котором поднятое тело вверх по вертикали оборвет нить при ее натяжении силой *N* =42 Н.

**Дополнительные задания для студентов ВО**

5. Материальная точка *М* массой $m$ = 0,05 кг движется относительно оси симметрии *О,* пропорциональной кубу расстояния *ОМ*. Исходные данные следующие: расстояние *ОМ* = 10 см, скорость точки $V_0$ = 0,1 м/с, направленная по прямой *ОМ* от центра *О* и сила сопротивления составляет *F* =0,4 мН. Установить уравнение движения точки под действием силы сопротивления, а также определить скорость, которую точка приобрела на расстоянии 20 см от центра *О.*

6. Груз *М* массой $m$, который двигается по шероховатой горизонтальной плоскости с начальной скоростью $\bar{V}_0$, испытывает сопротивление воздуха по закону $R_c=kx^2$, совпадающее по направлению с силой трения. Зная коэффициент трения скольжения $f$ вычислить пройденный путь и время движения до остановки (Рисунок 10).

7. Материальная точка массой $m$ = 18 кг отталкивается от начального положения равновесия с силой направленной вдоль оси *x* по закону $P = \frac{k}{x^3}$ с начальными параметрами движения $x_0 = 3$ м, $V_0 = 15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}, P_0 = 0{,}050$ кН. Определить закон движения материальной точки $x = x(t)$ (Рисунок 11).

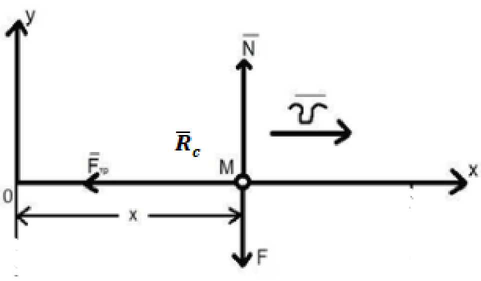



Рис. 10. Схема движения груза *М* массой $m$
по шероховатой горизонтальной плоскости

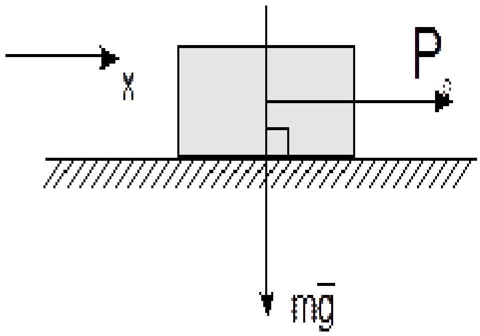



Рис. 11. Схема движения груза массой *m* под действием силы $\bar{P}$ по горизонтальной плоскости

8. За какой интервал времени и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом вагон трамвая, перемещающийся по рельсам со скоростью 12 м/с, если сопротивление движению, развиваемое при торможении, составляет 0,4 веса вагона?

# ТЕМА 2. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

## 2.1. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Количеством движения материальной точки называется вектор, равный произведению массы точки $m$ на ее скорость движения $\bar{V}$. (Рисунок 11).

$$\bar{q} = m\bar{V}\left[\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}\right].$$

Элементарным импульсом силы, действующей на точку, называется вектор $d\bar{S}$, равный произведению силы $\bar{F}$ на бесконечно малый интервал времени $dt$, в пределах которого действие сила $\bar{F}$. (Рисунок 12).

$$d\bar{S} = \bar{F}dt.$$

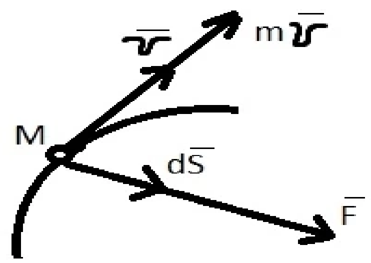



Рис. 12. Количество движения и импульс материальной точки

Импульсом силы за конечный временной интервал ($t_0$,$t$) называется интегральный вектор функции $\bar{F}(t)$ по скалярному аргументу $t$

$$\bar{S} = \int_{t_0}^{t} \bar{F}\,(t)dt\ [\text{н}\cdot\text{с}].$$

Формулировка теоремы об изменении количества движения материальной точки следующая:

1. В дифференциальной форме.

Дифференциал количества движения материальной точки равен элементарному импульсу силы, которая действует на точку

$$d(m\bar{V}) = \bar{F}dt. \quad (21)$$

2. В конечной форме.

Изменение количества движения материальной точки за конечный интервал времени равно импульсу действующей силы за это же время

$$m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \int_{t_0}^{t} \bar{F}\,dt. \quad (22)$$

Геометрически соотношение (22) представлено на рисунке 13.

Проецируем равенства (21) и (22) на какую-либо неподвижную ось, имеем скалярные выражения теоремы:

$$d(mV_x) = F_x dt; \tag{23}$$

$$mV_x - mV_{0x} = \int_{t_0}^{t} F_x \, dt. \tag{24}$$

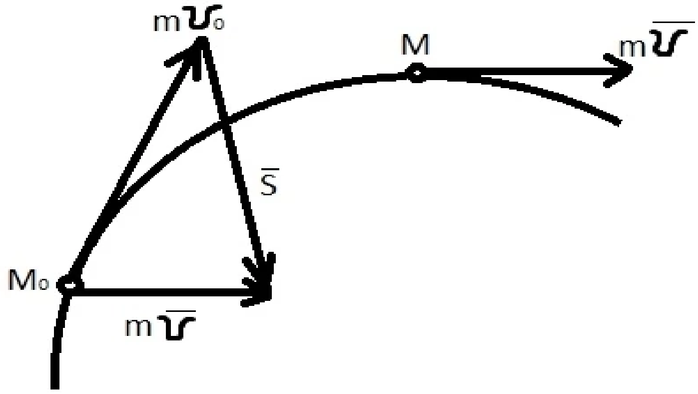



Рис. 13. Изменение количества движения материальной точки в конечной форме

**Примеры с решениями**

**Пример 6.** Груз *A* массы *m* начинает движение из состояния покоя по горизонтальной негладкой плоскости под действием силы $\overline{\mathrm{T}}$, которая составляет с горизонтом постоянный угол $\alpha$ и соответствует неравенству

$$T \sin\alpha \leq mg.$$

Определить скорость движения груза в течение времени *t* с начала приложения силы $\overline{\mathrm{T}}$, если коэффициент трения скольжения равен $f$ , а сила зависит от времени *T*=*at*, где *a*-постоянный коэффициент (Рисунок 14).

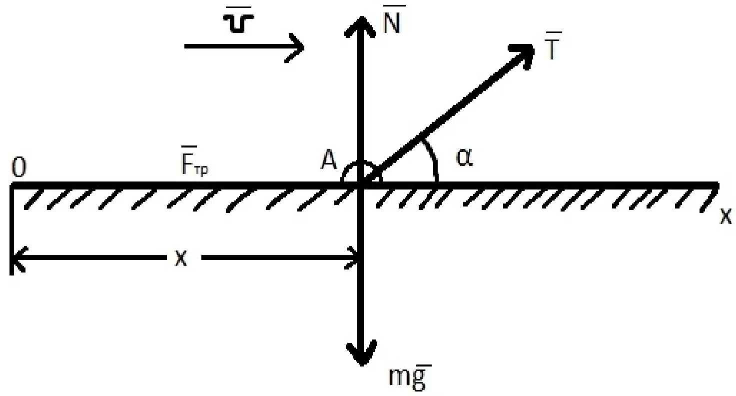



Рис. 14. Схема движения груза *A* под действием силы $\overline{\mathrm{T}}$

**Решение.** Приняв груз за материальную точку, рассмотрим ее движение. К телу приложены заданные силы: $\overline{\mathrm{T}}$, вес $\bar{G} = m\bar{g}$, а также: нормальная реакция $\bar{N}$ и сила трения $\bar{F}_{\text{тр}}$.

Используем теорему об изменении количества движения точки в виде равенства (24)

$$mV_x - mV_{0x} = \int_{t_0}^{t} F_x\, dt.$$

Согласно рисунку 13 составим уравнение изменения силы по горизонтали

$$F_x = T\cos\alpha - F_{\text{тр}} = T\, cos\, \alpha - fN. \qquad (25)$$

Поскольку по вертикали движение отсутствует, то силы, которые проецируются на эту ось уравновешены и, получаем

$$N + T\sin\alpha = mg,$$

Распишем это уравнение относительно реакции $\bar{N}$

$$N = mg - T\sin\alpha.$$

Подставляя эту реакцию в равенство (25), получим

$$F_x = T(\cos\alpha + f\sin\alpha) - fmg = atb - fmg = ab(t - \tfrac{fmg}{ab}).$$

или

$$F_x = ab(t - c),$$

где введены сокращения

$$b = \cos \propto + f\sin\alpha;$$

$$c = \frac{fmg}{ab}.$$

Подставляем в равенство (24) значение $F_x$ и имеем в виду, что $V_{0x}$=0, имеем

$$mV_x = ab\int_{t_0}^{t}(t - c)dt. \qquad (26)$$

Уравнение (26) сохраняет смысл в том случае, когда сила $F_x$ станет равной $\bar{F}_{\text{тр}}$, то есть при $t_0$=c.

Интегрируя правую часть равенства (24), получим

$$mV_x = ab\frac{(t - c)^2}{2},$$

откуда

$$V_x = \frac{ab}{2m}(t - c)^2.$$

Подставляя значения $b$ и $c$ в это уравнение, окончательно имеем уравнение текущего изменения скорости $V_x$ движения груза в течение времени $t$.

$$V_x = \frac{a(\cos\alpha + f\sin\alpha)}{2m}\left[t - \frac{fmg}{a(cos\,\alpha + f\, sin\,\alpha)}\right]^2.$$

**Пример 7.** Материальная точка с массой $m$ совершает равномерное движение по окружности со скоростью $\bar{V}$. Определить величину импульса силы, который действует на точку при ее движении по дуге $AB$, равной четверти окружности, и по дуге $ABC$, равной половине окружности. (Рисунки 15: а, б, в).

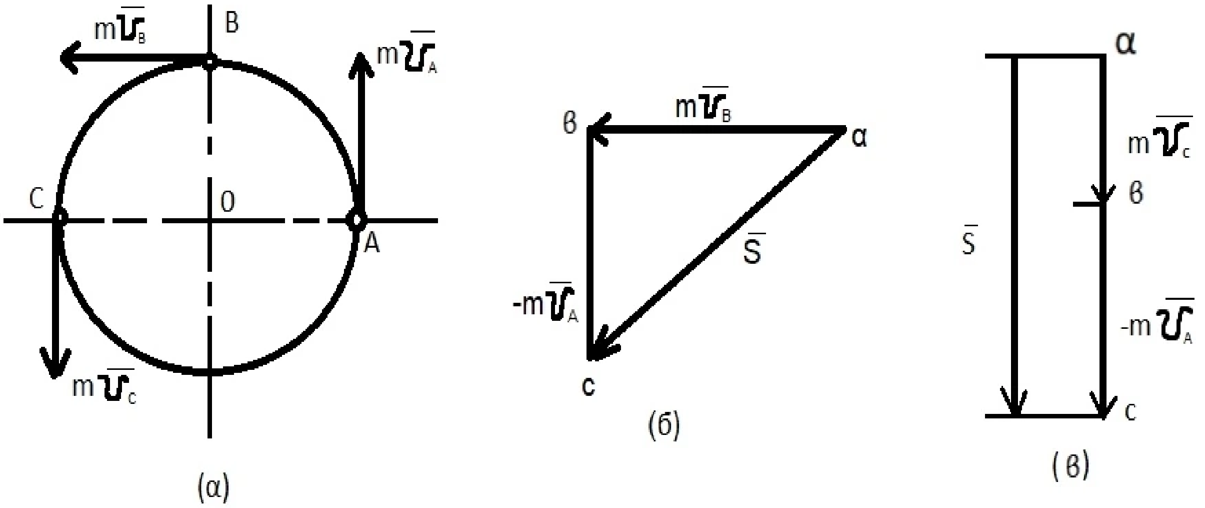



Рис. 15. Схема равномерного движения точки по окружности
с примерами решения для двух случаев

**Решение.** Первый случай. Применяем теорему об изменении количества движения точки в форме тождества (21)

$$m\bar{V} - m\bar{V}_0 = \bar{S}. \qquad (27)$$

В формуле (27) $\bar{S} = \int_0^t \bar{F}\,dt$ – импульс силы и следовательно:

$$m\bar{V} = m\bar{V}_B;$$
$$m\bar{V}_0 = m\bar{V}_A.$$

Таким образом из равенства (27) получаем

$$m\bar{V}_B - m\bar{V}_A = \bar{S}. \qquad (28)$$

Перепишем выражение (28) таким образом

$$\bar{S} = m\bar{V}_B - m\bar{V}_A = m\bar{V}_B + (-m\bar{V}_A).$$

Вектор $\bar{S}$ представляет геометрическую сумму двух векторов. (Рисунок 14б). Вычислим это значение

$$\bar{S} = \overline{ac}.$$

Так как $V_A = V_B = V$, то из треугольника $abc$ можно определить модуль импульса силы $S = mV\sqrt{2}$.

Второй случай.

$$m\bar{V} = m\bar{V}_C;$$
$$m\bar{V}_0 = m\bar{V}_A.$$

Таким образом из равенства (27) получаем

$$m\bar{V}_C - m\bar{V}_A = \bar{S}.$$

Выполняя математические действия аналогично первому случаю, имеем

$$\bar{S} = m\bar{V}_C + (-m\bar{V}_A).$$

Графически подтверждаем векторную сумму векторов $m\bar{V}_C$ и $(-m\bar{V}_A)$. (Рисунок 14в).

Поскольку $V_A$=$V_C$=$V$, определяем модуль импульса силы

$$\bar{S}=\overline{ac} = 2mV.$$

**Задания для самостоятельного решения задачи на применение теоремы об изменении количества движения точки**

1. Груз с массой $m$=12 кг двигается поступательно относительно гладкой горизонтальной плоскости с начальной скоростью $V_0$=0,5 м/с. Определить направление скорости груза через 5 с от начала приложения к нему постоянной силы $\bar{\mathrm{F}} = 30$ н, которая направлена противоположно его начальной скорости $V_0$.

2. Пневматический ковочный молот с вертикальным расположением штампа и массой $m$=2000 кг совершает вертикально вниз с высоты $h$=1,5м движение на поковочную заготовку. Деформация заготовки происходит в течение $t$=0,01 с. Вычислить среднее значение силы давления молота на заготовку (Рисунок 16).

Рис. 16. Пневматический ковочный молот (Интернет-ресурс)

3. Груз $M$ начинает движение под углом α к горизонту с начальной скоростью $\bar{V}_0$. Определить время $t_1$ перемещения груза до максимальной высоты, не учитывая сопротивление воздушной среды (Рисунок 17).

Аналогично этому движению можно рассмотреть баллистическую траекторию снаряда, выпущенного из ствола гаубицы или гаубицы-пушки калибра 122-152 мм. (Рисунок 18).

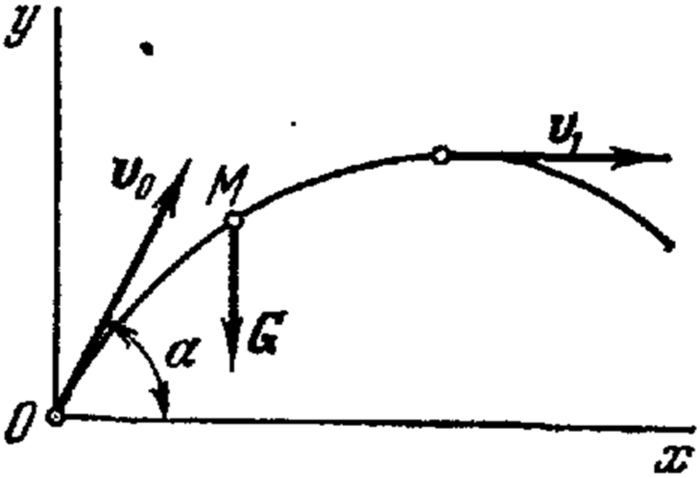



Рис. 17. Траектория движения груза *M* (Интернет-ресурс)


Рис. 18. Баллистическая траектория снаряда, выпущенного из ствола гаубицы (Интернет-ресурс)

4. На какое максимальное расстояние $l_{max}$ улетит мяч, если футболист действует на мяч постоянной по направлению силой, величина которой изменяется по закону, представленному на рисунке 19. Длительность удара $\tau$=7$\cdot$10$^{-3}$ с, максимальная сила $F_{max}$=4$\cdot$10$^3$ н, масса мяча $m$=0,55 кг. Ускорение свободного падения $g$=10м/с$^2$ Сопротивление воздуха не учитывать.

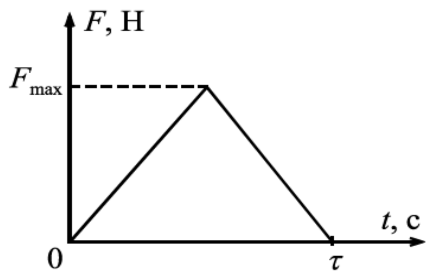



Рис.19. Закон изменения силы от времени при ударе по мячу (Интернет-ресурс)

5. Шарик массой $m$ = 100 г, подвешенный на нити длиной $l$ = 40 см, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Какова кинетическая энергия $K$ шарика, если во время его движения нить образует с вертикалью постоянный угол α = 60°.

**Дополнительные задания для студентов ВО**

6. Автомобиль перемещается со скоростью 62 км/ч по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha$=15°. Принимая, что сила $\bar{F}$ сопротивления торможению составляет 0,4 от силы веса $\bar{G}$ автомобиля определить на каком расстоянии $s$ и через какой интервал времени $t_1$ с начала торможения автомобиль прекратит движения. Все другие силы сопротивления и местные деформации не учитывать (Рисунок 20).

7. Электровоз массой 500 т, двигаясь с выключенным двигателем, испытывает сопротивление движению с силой $R$=(8000+500$V$) Н, где $\bar{V}$-скорость электровоза. Зная начальную скорость электровоза $V_0$=28 м/с, вычислить, какой путь пройдет электровоз до остановки.

8. Утрамбовочная машина с массой бабы 65 кг и с поперечным сечением 12 дм$^2$ падает с высоты 1,5 м. При последнем ударе баба входит в грунт на глубину 1,2 см и сопротивление грунта движению бабы считаем постоянным. Вычислить наибольшую нагрузку, которую выдержит грунт, не давая осадки? Допускается, что утрамбованный грунт может выдержать без осадки нагрузку, не превосходящую того сопротивления, которое встречает баба, перемещаясь в грунт.

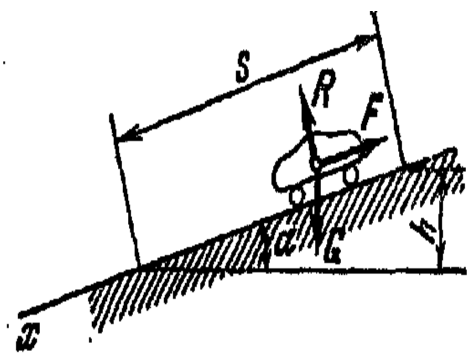



Рис. 20. Схема перемещения автомобиля по наклонной плоскости (Интернет-ресурс)

9. Тело весом $G$= 50 кг падает с высоты $H$=100 см и входит в грунт на глубину $h$ =2 см. Учитывая, что сопротивление грунта при движении постоянно, определить время удара и величину ударной силы, равной силе сопротивления грунта.

10. Граната массой 15 кг, летевшая горизонтально со скоростью 12 м/с, разорвалась в воздухе на две части. Скорость осколка массой 8 кг возросла в направлении движения до 30 м/с. Определить скорость второго осколка.

11.Кубик, движущийся поступательно со скоростью $\bar{V}$ (Рисунок 21) по гладкой горизонтальной плоскости, испытывает удар с шероховатой вертикальной стенкой. Коэффициент трения скольжения кубика по стенке $f$ и угол наклона α известны. Одна из граней кубика параллельна стенке. Под каким углом $\beta$ кубик отскочит от стенки? Будем считать, что перпендикулярная стенке проекция скорости кубика в результате соударения остается постоянной.

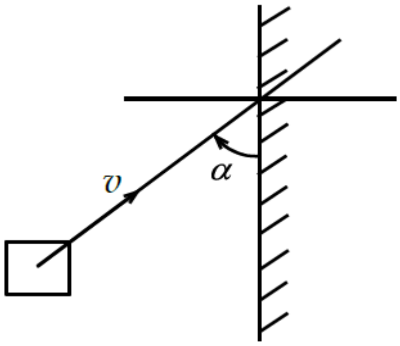



Рис. 21. Движение кубика по гладкой горизонтальной плоскости до момента удара с шероховатой вертикальной стенкой (Интернет-ресурс)

# ТЕМА 3. РАБОТА И МОЩНОСТЬ

## 3.1. РАБОТА ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ

Пусть точка *М* двигается прямолинейно под действием постоянной по модулю и по направлению силы $\overline{F}$ получила перемещение $\bar{s} = \overline{\mathrm{M_1M_2}}$. (Рисунок 22).

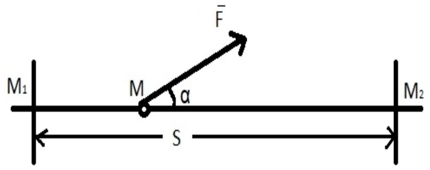



Рис. 22. Работа силы постоянной по модулю

Работой постоянной силы по модулю $\bar{F}$ на перемещение $\bar{s}$ есть произведение модуля силы перемещение, пройденное точкой приложения силы на косинус угла между направлением вектора силы и вектора перемещения точки приложения силы

$$A = Fs\cos(\bar{F}, \bar{s}) \quad [\text{н·м}]=[\text{Дж}]. \tag{29}$$

Уравнение (29) можно представить в векторном виде:

$$A = \bar{F} \cdot \bar{s},$$

то есть работа силы $\bar{F}$ на перемещении $\bar{s}$ равна скалярному произведению вектора силы и вектора перемещения точки приложения силы.

Из этого следует, что работа силы является скалярной величиной.

Рассмотрим частные случаи работы:

1. если $\alpha = (\overline{F},\ \overline{s}) < 90°$, то работа силы положительная;
2. если $\alpha = (\overline{F},\ \overline{s}) > 90°$, то работа силы отрицательная;
3. если направление силы $\bar{F}$ совпадает с направлением перемещения точки $\bar{s}$, то есть если $\alpha = (\overline{F},\ \overline{s}) = 0°$, то A=F·s.
4. если сила $\bar{F}$ направлена противоположно вектору перемещения $\bar{s}$, то есть если $\alpha = (\overline{F},\ \overline{s}) = 180°$, то A=-F·s.
5. если сила $\bar{F}$ перпендикулярна вектору перемещения $\bar{s}$, то есть если $\alpha = (\overline{F},\ \overline{s}) = 90°$, то *A*=0. Сила $\bar{F}$ механической работы в этом случае не совершает.

Обратимся к конкретным практическим случаям действия работы.

## 3.2. РАБОТА ПЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ

Пусть точка $M$ движется по криволинейной траектории под действием силы $\bar{F}$ переменной по величине и по направлению. (Рисунок 23).

Поделим участок криволинейной дуги пути $M_1M_2$ на бесконечно большое число бесконечно малых дуг.

Введем обозначение $d\bar{r}$ вектора элементарного перемещения точки $M$ за бесконечно малый интервал времени $dt$ и направленный по вектору скорости точки $M$.

Элементарной работой силы $\bar{F}$ называется скалярное произведение силы $\bar{F}$ на элементарное перемещение $d\bar{r}$ точки приложения силы:

$$\delta A = \bar{F} d\bar{r}\ .$$

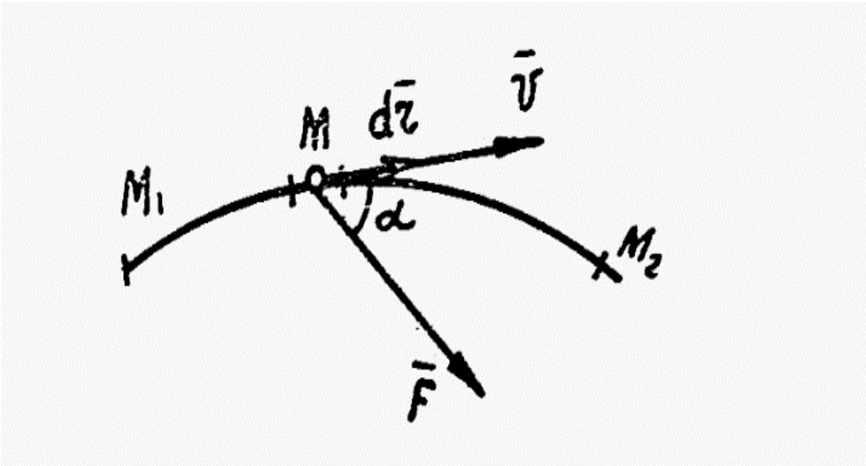



Рис. 23. Работа переменной силы $\bar{F}$ по величине и направлению

Модуль элементарного перемещения определится по формуле

$$|d\bar{r}| = ds,$$

где $ds$ –длина элементарной дуги.

Элементарная работа силы может быть представлена еще в двух формах:

$$\delta A = Fds \cdot \cos(\bar{F}, \overline{V}),$$

где $F$ и $ds$ – соответственно модули векторов $\bar{F}$ и $d\bar{r}$, $\bar{V}$ – скорость перемещения точки, тогда

$$\delta A = Xdx + YdY + Zdz,$$

где $X,Y,Z$ и $dx,dy,dz$ – соответственно проекции на оси координат векторов $\bar{F}$ и $d\bar{r}$.

Работа переменной силы $\bar{F}$ а конечном криволинейном участке пути $M_1M_2$- это предел суммы элементарных работ силы на элементарных перемещениях точки действия силы $\bar{F}$ по направлению дуги $M_1M_2$.

Суммарная работа переменной силы выражается одним из трех равенств

$$A_{MM_1} = \int_{M_1}^{M_2} \bar{F}\, d\bar{r} = \int_{M_1}^{M_2} F\, ds \cdot cos(\bar{F}, \overline{V}) = \int_{M_1}^{M_2} Xdx + YdY + Zdz.$$

## 3.3. РАБОТА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории и равна произведению силы тяжести на разность высот начального и конечного положения точки

$$A=\pm Fh,$$

где $\bar{F}$ – сила тяжести, $h$ – разность высот.

Работу считают положительной, если точка движется вниз, и отрицательной, если движется вверх.

## 3.4. РАБОТА УПРУГОЙ СИЛЫ

Рассмотрим винтовую пружину, один конец которой укреплен неподвижно, а к другому концу подвешен груз, под действием которого пружина растягивается (Рисунок 24).

При растяжении пружины начинает действовать сила упругости пружины $F_\lambda$, которая стремится вернуть пружину в первоначальное ненапряженное положение.

Численное значение упругой силы пропорционально удлинению пружины

$$F_\lambda=c\lambda,$$

где $c[\frac{\text{н}}{\text{м}}]$ – постоянный коэффициент (индекс пружины), характеризующий ее жесткость, зависящий от конструкции и материала. Его определяют в виде отношения силы $\bar{F}$, приложенной к пружине, к производимому ею статическому удлинению пружины.

$$c=\frac{F}{\lambda_{\text{ст}}}.$$

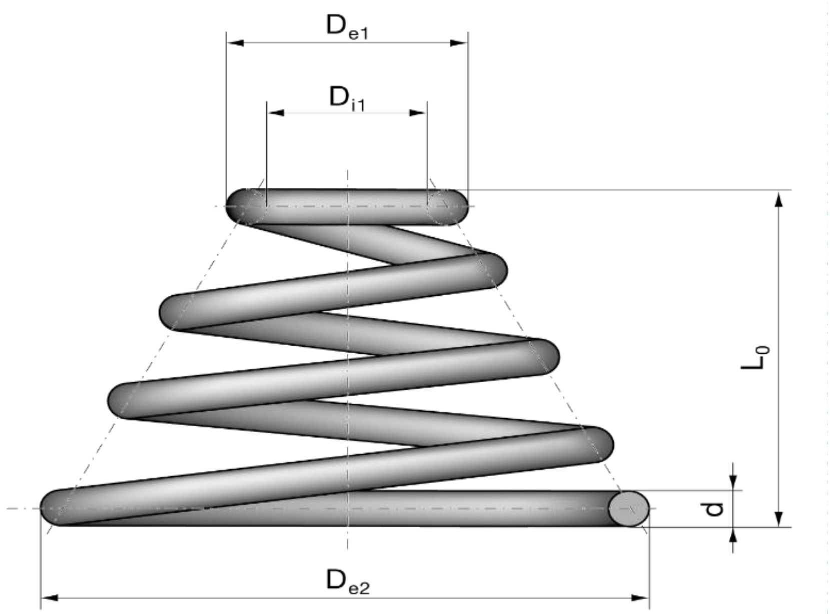



Рис. 24. Винтовая пружина с геометрическими размерами (Интернет-ресурс)

Работа упругой силы находится из уравнения

$$A = -\frac{c}{2}(\lambda^2 - \lambda_0^2),$$

где $\lambda$ – растяжение пружины в данный интервал времени, а $\lambda_0$ – растяжение пружины в начальный интервал времени.

## 3.5. МОЩНОСТЬ

Мощностью называется работа, совершаемая силой в единицу времени

$$N = \frac{\delta A}{dt}.$$

Мощность силы, которая приложена к материальной точке, равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости точки положения силы

$$N = \bar{F}\bar{V} = Xx + Yy + Zz \ [\tfrac{\text{Дж}}{\text{с}}]=[\text{Вт}];\ [1\ \text{л.с.}=736\ \text{Вт}].$$

### Примеры с решениями

**Пример 8.** Один конец пружины жестко закреплен в точке $A$, а на другом конце подвешен груз $B$. Из состояния покоя груз $B$ получил начальную скорость $\bar{V}_0$, направленную вертикально вниз и его путь в этом направлении увеличился на величину $h$.

Определить работу сил, приложенных к грузу на пути $h$, если жесткость пружины равна $c$. (Рисунок 25).

**Решение.** Проанализируем движение груза $B$. На него действуют вес $\bar{F} = \bar{G}$ и упругая сила пружины $\bar{F}_\lambda$.

Работа сил на перемещении $h$ составляет

$$A = Gh - \frac{c}{2}(\lambda^2 - \lambda_0^2). \tag{30}$$

В начальный интервал времени и в положении статического равновесия груза, вес груза $\bar{G}$ уравновешивается упругой силой пружины, растянутой на величину, то есть

$$G = c\lambda_{\text{ст}}.$$

Исходя из рисунка 25, имеем $\lambda = +h$ и учитывая, что в начальный интервал времени $\lambda_0 = \lambda_{\text{ст}}$, подставляем эти величины в уравнение (30) и получим

$$A = -\frac{ch^2}{2}.$$

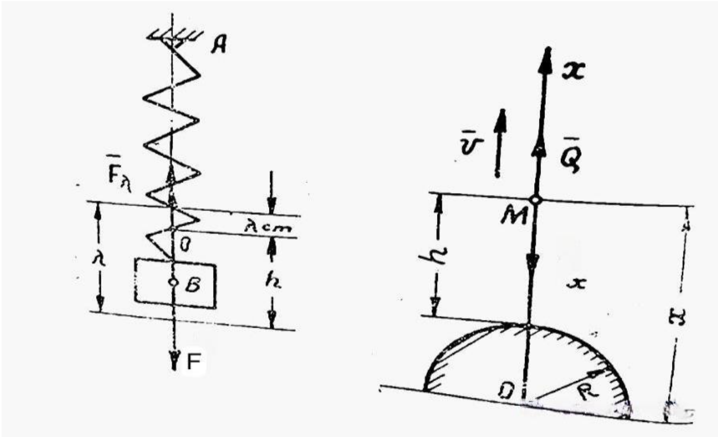



Рис. 25. Работа сил, приложенных к грузу, закрепленному на пружине

**Пример 9.** Вычислить мощность турбогенераторов на станции трамвайной сети, если число вагонов на линии $n$=45, масса каждого вагона $m$=10 т, сопротивление трения равно $f$=0,02 веса вагона, средняя скорость вагона $V$=3,3 м/с и потери в сети 5%.

**Решение.** Мощность, развиваемая одним вагоном

$$N = f \cdot mg \cdot v = 0{,}02 \cdot mg \cdot v,$$

а мощность для n вагонов

$$N_n = n \cdot N = 0{,}02 \cdot mg \cdot v \cdot n = 0{,}95 \cdot N_{\text{Т}},$$

где $N_{\text{Т}}$ – общая мощность турбогенераторов, которая определится так:

$$N_{\text{Т}} = \frac{0{,}02 \cdot 10^4 \cdot 9{,}8 \cdot 45 \cdot 3{,}3}{0{,}95} = 306{,}38\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}.$$

## Задания для самостоятельного решения задачи на действие работ сил тяжести, упругости

1. Груз весом $G$=450 Н совершает равномерное движение по наклонной плоскости с горизонтом $\alpha$=30° на высоту $h$=6,5 м. Вычислить работу силы тяжести, если коэффициент трения при движении $f$=0,2 и если к грузу приложена сила $\bar{F}$, действующая параллельно наклонной плоскости $AB$ (Рисунок 26).

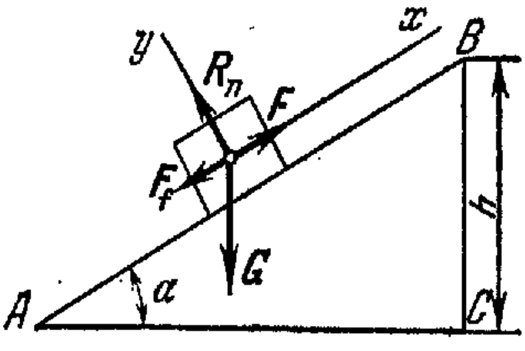



Рис. 26. Схема равномерного движения груза по наклонной плоскости (Интернет-ресурс)

2. Груз массы $m$=12 кг движется с поверхности Земли под углом $\alpha$=30° к горизонту с начальной скоростью $V_0$=0,5 м/с. Найти работу $A$ силы тяжести при перемещении груза: 1) от начала движения до максимальной высоты подъема; 2) от начала движения до точки падения груза на поверхность.

3. Однородный стержень весом $G=mg$ и длиной $l$ из вертикального положения падает на горизонтальную плоскость. Определить работу силы тяжести.

4. Один конец пружины закреплен. К другому концу приложена растягивающая сила, действующая вдоль оси симметрии пружины. Когда величина упругой деформации достигла величины $\lambda_{ст}$, внешняя сила перестает действовать. Найти работу $A_{упр}$ упругой силы по мере возвращения пружины в состояние равновесия из положения, когда ее деформация была равна $\lambda_{ст}$ до положения, когда ее деформация растяжения стала $\lambda_{ст}+h$. Жесткость пружины равна $c$.

5. В воде с глубины 7 м поднимают на поверхность груз объемом 0,7 м$^3$. Плотность камня 2500 кг/м3. Найти работу, проведенную на перемещение груза.

6. Сравнить величину работы силы тяжести свободно падающего груза за первую и вторую половины времени падения.

7. Трактор равномерно тянет плуг с силой в 12 кН. За 15 мин он проходит путь 1500 м. Определить мощность, развиваемую трактором (рисунок 27**).**

Рис. 27. Работа трактора для обеспечения мощности (Интернет-ресурс)

**Дополнительные задания для студентов ВО**

8. Один конец пружины закреплен. К другому концу приложена растягивающая сила, действующая вдоль оси симметрии пружины. Значение силы пропорциональна деформации пружины, жесткость пружины равна $c$. Найти работу $A$ этой силы при растяжении пружины для случаев: а) растяжение пружины происходит из недеформированного состояния, до состояния, когда деформация равна $\lambda_{ст}$; б) растяжение пружины происходит из уже деформированного до величины $\lambda_{ст}$ состояния, до состояния, при котором величина общей деформации

пружины равна $\lambda_{ст} + h$. Найти дополнительно работу упругой силы при тех же условиях.

9. Сила 30 Н требуется для растяжения из состояния покоя пружины на 10 мм. Какую работу надо совершить для сжатия этой пружины на 200 мм?

10. Шлифовальный круг диаметра 0,65 м делает 150 об/мин. Потребляемая мощность составляет 1,25 кВт. Коэффициент трения шлифовального круга о деталь равен 0,2. Какое силовое воздействие оказывает шлифовальный круг прижимает обрабатываемую деталь?

11. Лыжник пробегает дистанцию в 30 км по горизонтальному пути центр тяжести лыжника совершал гармонические колебания с амплитудой 12 см и с периодом $T$=4 с, масса лыжника 78 кг, а коэффициент трения лыж о снег $f$=0,05. Определить работу лыжника на марше, если всю дистанцию он прошел за 1 час 50 мин, а также среднюю мощность лыжника. Примечание. Считать, что работа торможения при опускании центра тяжести лыжника составляет 0,5 работы при подъеме центра тяжести на ту же высоту.

12. Поезд массой 600 тонн равномерно движется со скоростью 36 км/ч. Определить развиваемую тепловозом мощность, если сила трения составляет 0,002 веса поезда (Рисунок 28).

Рис. 28. Равномерно движущийся тепловоз (Интернет-ресурс)

# ТЕМА 4. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Кинетическая энергия материальной точки – это скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости

$$K = \frac{mV^2}{2}. \quad (31)$$

Размерность кинетической энергии такая же, как и для работы силы.

## 4.1. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Производная кинетической энергии материальной точки по времени равна мощности действующих на точку всех сил

$$\frac{dK}{dt} = N. \quad (32)$$

## 4.2. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В КОНЕЧНОЙ ФОРМЕ

Изменение кинетической энергии материальной точки на конечном пути равно работе

$$K - K_0 = A. \quad (33)$$

Теорему об изменении кинетической энергии материальной точки целесообразнее применять в задачах, в которых сила, приложенная к точке или постоянная $\bar{F}=const$, или зависит от положения точки $F=f\,(x, y, z)$.

### Примеры с решениями

**Пример 10.** Электровоз весом $\bar{F} = \bar{G}$ движется из состояния покоя по горизонтальному участку пути с постоянным ускорением $\bar{a}$, после чего, достигнув максимальной скорости $V_{\max}$ продолжает путь равномерно.

Определить мощность, развиваемую электровозом, если сила сопротивления движению изменяется по закону $R_c=kG$, где коэффициент $k=const$. (Рисунок 29).

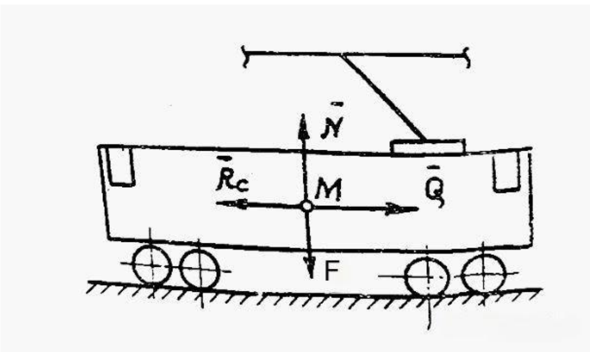



Рис. 29. Электровоз, движущийся по горизонтальному участку пути

**Решение.** Рассмотрим движущийся электровоз и примем его за материальную точку, предполагая, что вся масса сосредоточена в точке $M$.

На точку $M$ действуют силы: вес $\bar{G}$, сила тяги $\overline{Q}$, реакция рельс $\overline{N}$ и сила сопротивлению движению $\bar{R}_c$.

Напишем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии точки в следующем виде (32)

$$\frac{dK}{dt} = N + N_c,$$

где $N$ – мощность электровоза, равная мощности силы тяги $\overline{Q}$;

$N_c$ – мощность силы сопротивления (нормальная реакция $\overline{N}$ и вес $\bar{G}$ работы не создают, следовательно, мощность этих сил равно нулю).

Кинетическая энергия находится из равенства (31)

$$K = \frac{mV^2}{2}.$$

Дифференцируем $K$ по $t$ и имеем:

$$\frac{dK}{dt} = mV \cdot \frac{dV}{dt};$$

$$\frac{dK}{dt} = mVa,$$

где $a = \frac{dV}{dt}$ – ускорение электровоза.

Согласно равенству (29) мощность силы сопротивления

$$N_c = \bar{R}_c\bar{V} = -R_cV = -kGV.$$

Подставим $N_c$ в уравнение (33), тогда

$$mVa = N - kGV,$$

из этого следует, что

$$N = GV\left(\frac{a}{g} + k\right)\frac{\text{н·м}}{\text{с}}. \qquad (34)$$

$$N = \frac{GV}{75}\left(\frac{a}{g} + k\right) \text{ л. с.}$$

Так как электровоз из состояния покоя совершает равноускоренное движение, то $V=at$ и, следовательно, последнее тождество можно представить так:

$$N = \frac{GV}{75}\left(\frac{a}{g} + k\right)at \text{ л. с,}$$

и при равноускоренном движении электровоза мощность его возрастает пропорционально времени.

В интервале равномерного движения

$$V=V_{max}, \text{ при } a=0.$$

Тогда из равенства (34) получаем

$$N = \frac{GV_{max}}{75}k \text{ л.с.}$$

**Пример 11.** Груз весом $F$=2000 н, падая с высоты $h$=1м на середину балки из состояния покоя, вызывает прогиб балки $\lambda$=0,05 м. Определить жесткость $c$ балки. Найти также скорость груза, когда прогиб балки составляет $\lambda_1$=0,04 м. Массой балки пренебречь. (Рисунок 30).

**Решение.** Рассмотрим движение груза. При падении на него действует вес $\bar{G}$ (Рисунок 30 а), а с момента падения на балку к весу $\bar{G}$ добавляется и сила упругости $\bar{F}_\lambda$ (Рисунок 30 б). Составим уравнение, которое выражает теорему об изменении кинетической энергии груза на пути от начального положения момента до достижения наибольшего прогиба балки (33)

$$K\text{-}K_0=A.$$

В конечный момент времени кинетическая энергия груза $K=0$, так как груз остановился. В начальный момент времени кинетическая энергия груза $K_0$=0, потому что груз падает из состояния покоя.

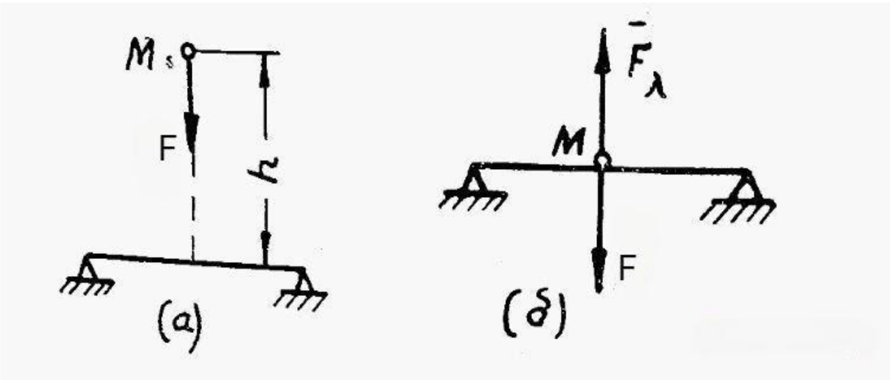



Рис.30. Две схемы падения груза весом $\bar{F} = \bar{G}$ на середину балки

Работу совершает сила тяжести $\bar{G}$ на пути $h$+$\lambda$ и сила упругости $\bar{F}_\lambda$ балки на пути $\lambda$. Таким образом, уравнение работы

$$A = G(h+\lambda\,) - \frac{c}{2}(\lambda^2 - \lambda_0^2).$$

По причине того, что груз падает на недеформированную балку $\lambda_0$=0. Подставляя в равенство (33), имеем

$$0 = G(h+\lambda) - \frac{c}{2}\lambda^2.$$

Решая это уравнение относительно коэффициента $c$, определяем

$$\frac{\text{c}}{2} = \frac{2G(h+\lambda)}{\lambda^2} = \frac{2\cdot 2000(1+0{,}05)}{1^2} = 1680000\,\frac{\text{н}}{\text{м}}.$$

Составим уравнение, которое выражает теорему изменения кинетической энергии груза на пути от начального положения до времени, когда балка будет иметь прогиб $\lambda$=0.04 м (33)

$$K\text{-}K_0=A.$$

Кинетическая энергия груза в последний интервал времени

$$K = \frac{mV^2}{2} = \frac{GV^2}{2g}.$$

Кинетическая энергия груза в начальный интервал времени $K_1$=0.

Работу совершают сила тяжести $\bar{G}$ на пути $h+\lambda_1$ и сила упругости $\bar{F}_\lambda$ балки на пути $\lambda_1$.

$$A = G(h+\lambda_1) - \frac{c}{2}\left({\lambda_1}^2 - \lambda_0^2\right).$$

По-прежнему, $\lambda_0$=0. Подставим в равенство (33)

$$\frac{GV^2}{2g} = G(h+\lambda_1) - \frac{c}{2}\lambda_1^2.$$

Решая это уравнение, находим искомую скорость

$$V = \sqrt{2g(h+\lambda_1) - \frac{gc\lambda_1^2}{G}} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81(1+0{,}04) - \frac{9{,}81 \cdot 1680000 \cdot 0{,}04^2}{2000}}$$
$$= 2{,}68\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

## Задания для самостоятельного решения теоремы об изменении кинетической энергии для материальной точки

1. Тепловоз идет со скоростью 67 км/ч, его мощность составляет 370 кВт. Сила трения равна 0,004 от веса поезда. Определить вес и кинетическую энергию состава (Рисунок 28).

2. Снаряд массы $m$ выбрасывается устройством пружинного типа из канала под углом $\alpha$ к горизонту. Длина нерастянутой пружины жесткостью $c$ равна длине канала $l_0$. Перед выстрелом пружина сжата на величину $d$. Вычислить скорость снаряда в момент вылета из канала и максимальную высоту полета.

3. Материальная точка массы $m$ прикреплена тросом длиной $l$ к неподвижной точке $O$ отводится на угол $\alpha$ от положения равновесия $OM$ и совершает путь без начальной скорости от точки $M_0$. Определить скорость $V_1$ рассматриваемой точки при прохождения ее через положение равновесия (Рисунок 31).

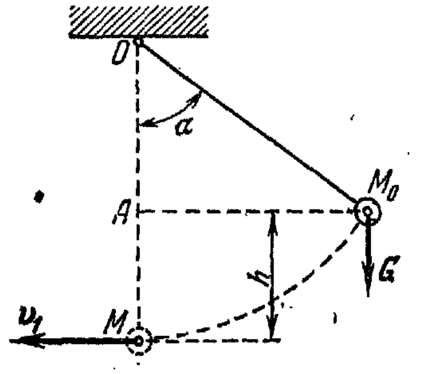



Рис.31. Схема движения материальной точка массы *m*, прикрепленной тросом длиной *l* к неподвижной точке *O*

4. Какой путь проедет велосипедист, не вращая педалями до остановки, если в начале пути его скорость составляла 10,7 км/ч? Общая масса велосипеда и велосипедиста равна 88 кг. Масса каждого из колес равна 5 кг; массу каждого из колес считать равномерно распределенной по окружности радиуса 55 см. Коэффициент трения качения колес о землю равен 0,5 см.

5. Однородная нить длины $2a$, висевшая на гладком штифте и находившаяся в покое, приобретает начальную скорость $v_0$. Определить скорость нити в то время, когда она соскользнет со штифта. (Рисунок 32).

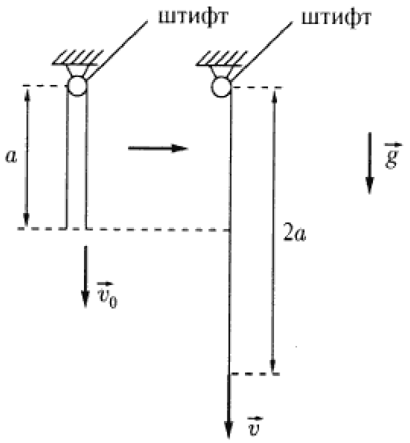



Рис. 32. Движение однородной нити

**Дополнительные задания для студентов ВО**

6. Железнодорожный состав, состоящий из 45 вагонов весом в 850 кН, которые двигаются по уклону $tg\alpha = 0{,}002$. Сопротивление движению состава составляет 4 Н на 1 кН веса. На участке пути 800 м скорость поезда изменяется от 19 км/ч до 38 км/ч. Определить силу тяги тепловоза (Рисунок 33).

Рис. 33. Железнодорожный состав на пути. Фото энциклопедия железнодорожного транспорта (Интернет-ресурс)

7. Электродвигатель, мощность которого $N$=2,21 кВт приводит в движение токарный станок. Считая, что к резцу станка передается 0,8 мощности двигателя, определить вертикальную проекцию усилия резания, если в шпинделе станка для обработки закреплена деталь диаметра d=200 мм, а сам шпиндель вращается со скоростью $n$=92 об/мин (Рисунок 34). Какова мощность электродвигателя, который необходимо поставить на лебедку, чтобы она могла поднимать грузоподъемное устройство со строительными материалами общей массой $m$=1200 кг на высоту 20 м за 60 с. Коэффициент полезного действия лебедки $\eta$=0,72 $N = N_{пол}/\eta$.

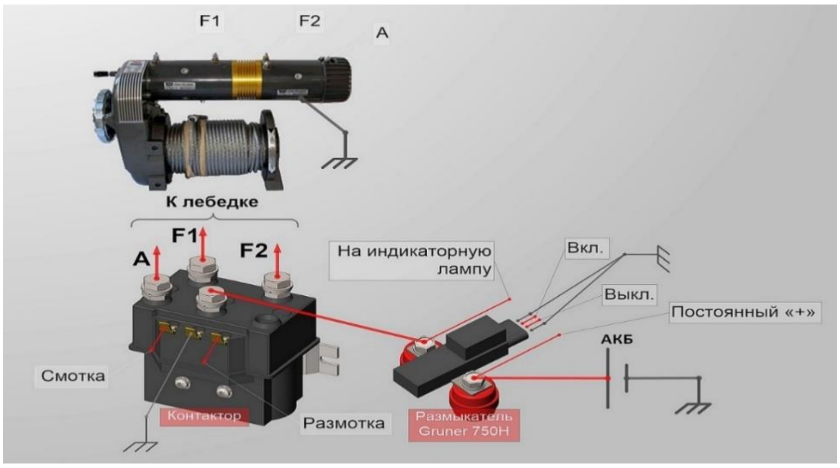



Рис. 34. Типовая схема передачи мощности электродвигателя
на лебедку токарного станка (Интернет-ресурс)

8. При разгоне буксир водоизмещением $D_1$, набрав скорость $V_0$, натянул буксирный трос, связанный с первоначально неподвижной баржей водоизмещением $D_2$. Найти общую скорость $V$ состава буксир – баржа, считая, что силы сопротивления воды его движению и сила сопротивления гребных винтов уравновешиваются.

9. Горизонтально-ковочная машина весом G=1,8 т падает с высоты h=100 см на заготовку за время t=0,01с и производит штамповку детали (Рисунок 35). Вычислить силу давления молота на заготовку.

Рис. 35. Схема работы оператора горизонтально-ковочной машины
(Интернет-ресурс)

10. Однородная нить длины $L$, часть которой лежит на гладком горизонтальном столе, движется под влиянием силы тяжести другой части, которая свешивается со стола. Определить промежуток времени $T$, по истечении которого нить покинет стол, если известно, что в начальный момент длина свешивающейся части равна $l$, начальная скорость равна нулю, а ускорение свободного падения $\bar{g}$. (Рисунок 36).

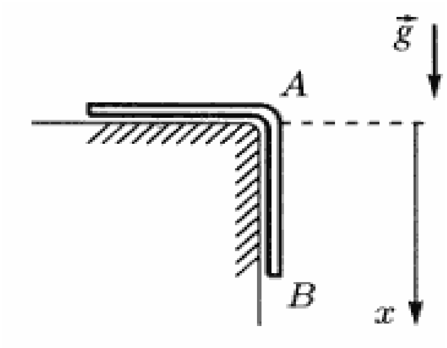



Рис.36. Схема движения нити в 2-х плоскостях (Интернет-ресурс)

Дополнительно отметим, что эта система с односторонней связью, то есть решение задачи существенно упрощается и можно утверждать, что в процессе «сползания» нити со стола всегда существует интервал времени $t<T(t)$, когда реакция стола в точке $A$ равна нулю и далее становится отрицательной. Дальнейшее движение становится не только вертикальным и прямолинейным к точке $B$, но и совершает изгибно-сдвиговые колебания в вертикальной плоскости расположения нити $AB$, исследуемых в теории ударного нагружения. Чтобы сохранить корректность условия и решения задачи необходимо рассмотреть движения до точки $A$ в горизонтальной плоскости и на участке $AB$ в горизонтальной плоскости.

# ТЕМА 5. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ВЫБОР СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

## 5.1. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Векторная величина, равная по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленная противоположно вектору ускорения называется силой инерции материальной точки (Рисунок 37).

$$\bar{F}_{\text{ин}} = -m\bar{a}.$$

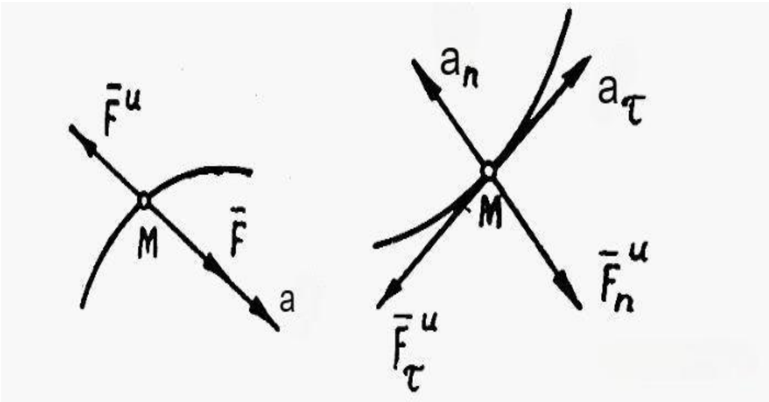



Рис. 37. Принцип Даламбера для материальной точки
в координатных и естественных осях

Спроецируем силы инерции на координатные оси:

$$F_{x\text{ин}} = -m\ddot{x};$$
$$F_{y\text{ин}} = -m\ddot{y};$$
$$F_{z\text{ин}} = -m\ddot{z}.$$

Спроецируем силы инерции на естественные оси:

$$F_{\tau\text{ин}} = -m\ddot{s};$$
$$F_{V\text{ин}} = -\frac{V^2}{r};$$
$$F_{b\text{ин}} = 0.$$

Принцип Даламбера для материальной точки можно сформулировать следующим образом.

Если фактически действующие на материальную точку заданные силы$\bar{F}$ $\bar{F}$ и реакции связей $\bar{N}$ дополнены действием силы инерции $\bar{F}_{\text{ин}}$, то для любого случая движения получаем систему уравновешивающих сил (Рисунок 38 а).

$$\bar{F} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{ин}} = 0. \qquad (35)$$

Векторное уравнение (35) рассматривают как основное уравнение динамики точки в форме уравнения равновесия.

Исходя из свойства сходящихся сил, многоугольник уравновешенных сил должен быть замкнутым (Рисунок 38 б), а алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую координатную или естественную ось должна быть равна нулю.

Когда точка свободная, то в уравнении (35), необходимо положить $\bar{N} = 0$.

В динамике материальной точки принцип Даламбера используется для определения динамических реакций связей.

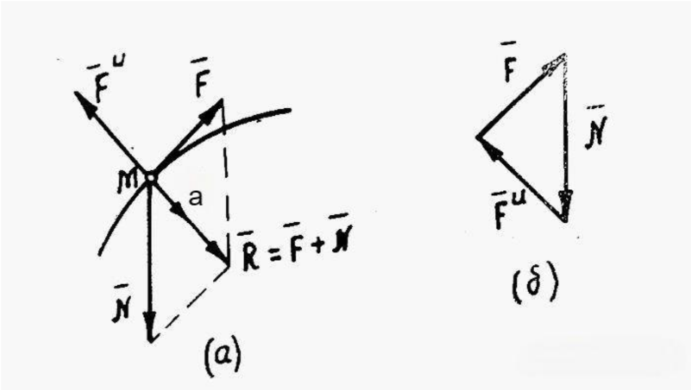



Рис. 38. Уравновешивающая система сил и силовой треугольник

## 5.2. ВЫБОР СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Решение одной и той же задачи динамики точки можно осуществить несколькими способами.

Правильный выбор уравнения, теоремы или принципа дает возможность получить сравнительно простое решение задачи.

Задачи динамики точки следует решать по следующей общей схеме:

1. установить вид движения материальной точки (прямолинейное или криволинейное);
2. выбрать оси координат. При прямолинейном движении точки одну из осей направить в сторону движения точки, а при криволинейном – ось направляется по касательной составляющей;
3. изобразить на схеме движущуюся точку в текущий интервал времени и установить действующие на точку заданные силы и реакции связей;
4. соответственно условиям задачи выбрать уравнение, теорему или принцип для решения задачи.

В случае применения принципа Даламбера на силовой диаграмме к заданным силам и реакциям связей следует добавить силы инерции точки.

### Примеры с решениями

**Пример 12.** Груз $A$ с массой $m$ из состояния покоя под действием веса $m\bar{g}$ перемещается вниз по шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha$. (Рисунок 39).

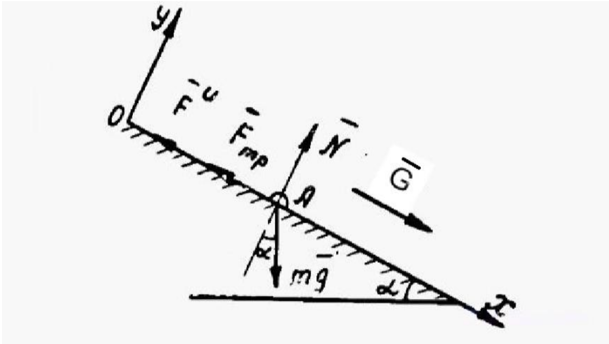



Рис. 39. Схема движения груза по шероховатой наклонной плоскости

Определить ускорение груза $\bar{a}$, если коэффициент трения скольжения равен *f*.

**Решение.** Принимаем тело за материальную точку. Движение тела и вектор ускорения $\bar{a}$ направим по наклонной плоскости вниз вправо. За ось $x$ примем прямую, вдоль которой движется тело.

На тело действуют силы: $\bar{G} = m\bar{g}$ – вес, $\bar{N}$ – нормальная реакция наклонной плоскости, $\bar{F}_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения.

К этим силам добавим силу инерции точки $\bar{F}_{\text{ин}}$, направляя ее противоположно вектору ускорения точки.

Используем принцип Даламбера (35)

$$m\bar{g}+\bar{F}_{\text{тр}} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{ин}} = 0 . \tag{36}$$

Спроецируем уравнение (36) на оси $x$ и $y$, и имея в виду, что $F_{x\text{ин}} = -ma$, составим уравнения:

$$\sum F_x = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} - ma = 0; \tag{37}$$

$$\sum F_y = N - mg\cos\alpha = 0. \tag{38}$$

Из уравнения (38) получаем

$$N = mg\cos\alpha.$$

Сила трения скольжения с применением зависимости закона Кулона

$$F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos\alpha.$$

Подставляем значение $F_{\text{тр}}$ в равенство (37) и получим

$$mg\,sin\,\alpha - fmg\,cos\,\alpha - ma = 0,$$

откуда

$$a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha). \tag{39}$$

Из равенства (39) делаем вывод, что движение груза по наклонной плоскости вниз из состояния покоя под действием собственного веса будет только тогда, когда соблюдаются неравенства

$$sin\,\alpha - f\,cos\,\alpha > 0,$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha > f.$$

**Пример 13.** Материальная точка с массой $m$ подвешена на нерастяжимой и невесомой нити длиной $l$ – математический маятник (Рисунок 40).

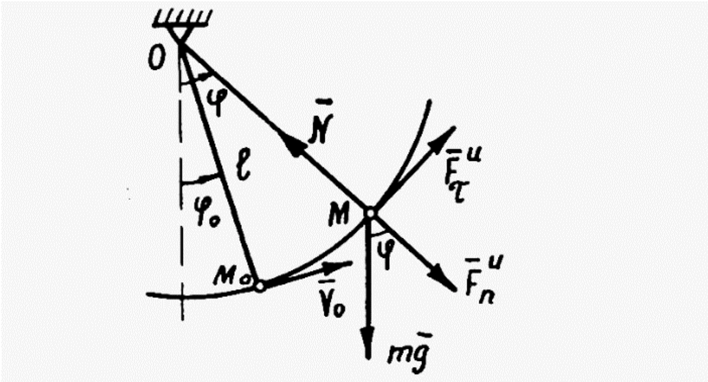



Рис. 40. Математический маятник

В начале движения нить отвели на угол $\varphi_0$ от положения равновесия, а точке $M$ сообщили начальную скорость $\bar{V}_0$, направленную вправо перпендикулярно нити. Точка $M$ совершает движение в вертикальной плоскости.

Определить натяжение нити в зависимости от угла $\varphi$, который он образует с вертикалью.

**Решение.** На точку $M$, отклоненную от вертикали на угол $\varphi$ , действует вес $\bar{G} = m\bar{g}$ и реакция нити $\overline{N}$.

Добавим к этим силам касательную $F_{\tau\text{ин}}$ и нормальную $F_{n\text{ин}}$ силы инерции точки.

Согласно принципу Даламбера

$$m\bar{g} + \overline{N} + (F_{\tau\text{ин}} + F_{n\text{ин}}) = 0.$$

Проецируя это уравнение на направление главной нормали к траектории движения точки и, имея в виду, что

$$F_{n\text{ин}} = -m\frac{V^2}{l},$$

получим

$$-mg\cos\varphi + N - m\frac{V^2}{l} = 0.$$

решим это уравнение относительно $\overline{N}$

$$N = mg\, cos\,\varphi + m\frac{V^2}{l}. \qquad (40)$$

При решении задач статики, в которых реакции связей зависят от заданных сил, реакции в динамике зависят не только от заданных сил $m\bar{g}$ , но и от параметров движения $m\frac{V^2}{l}$.

Определим скорость точки $M$, применив теорему об изменении кинетической энергии в конечной форме точки на пути $M_0M$ (33)

$$K\text{-}K_0=A.$$

Работу выполняет лишь сила тяжести. Тогда

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -mgh. \qquad (41)$$

Для высоты подъема $h$ (Рисунок 32) имеем

$$h = l\cos\varphi_0 - l\cos\varphi = l(cos\,\varphi_0 - cos\,\varphi).$$

Тогда из тождества (41) получим

$$mV^2 = mV_0^2 - 2mgl(cos\,\varphi_0 - cos\,\varphi).$$

Подставляя значение $mV^2$ в равенство (40), окончательно имеем

$$N = mg(3\cos\varphi - 2\,cos\,\varphi_0 + \frac{V_0^2}{lg}. \qquad (42)$$

Проанализируем формулу (42).

Пусть маятник в начале движения отведен из положения равновесия на $\varphi_0$= 90° и предоставлен самому себе, тогда $V_0=0$.

Значит из равенства (42) получим

$$N = 3mg\cos\varphi.$$

В самой нижней точке траектории натяжение нити при φ=0 составит

$$N = 3mg = 3G,$$

то есть в три раза превышает вес точки и динамическая реакция так же будет в три раза больше статической.

## Задания для самостоятельного решения задач динамики точки с применением принципа Даламбера

1. Кабина лифта движется вертикально вверх с ускорением $\bar{a}$. Вес кабины равен $\bar{Q}$. Определить давление человека весом $\bar{G}$ на пол кабины. (Рисунок 41).

2. Тело массы $m$=12 *кг* движется по шероховатой горизонтальной плоскости прямолинейно под действием постоянной силы *F=57H* из состояния покоя. Плоскость движения с горизонтом составляет угол $\alpha$=30°. Какую скорость приобретает тело, пройдя расстояние $s = 5\text{м}^2$. Коэффициент трения скольжения *f=0,2.*

Рис. 41. Конструкция лифтов для вертикального и горизонтального перемещений людей и грузов (Интернет-ресурс)

3. Вагон трамвая модели 71-631, укрепленный при помощи рессор на тележке, движется по закону

$$y = 0{,}005 \sin 8\pi t \text{ м.}$$

Масса вагона $M_1 = 18000$ *кг* (Рисунок 42), масса тележки с колесами варьируется в диапазоне $M = 3000$-$4900$ *кг* (Рисунок 43).

Определить максимальное и минимальное давление трамвая на рельсы для минимальной и максимальной массы тележки.

Рис. 42. Трамвайный вагон модели 71-631 (Интернет-ресурс)

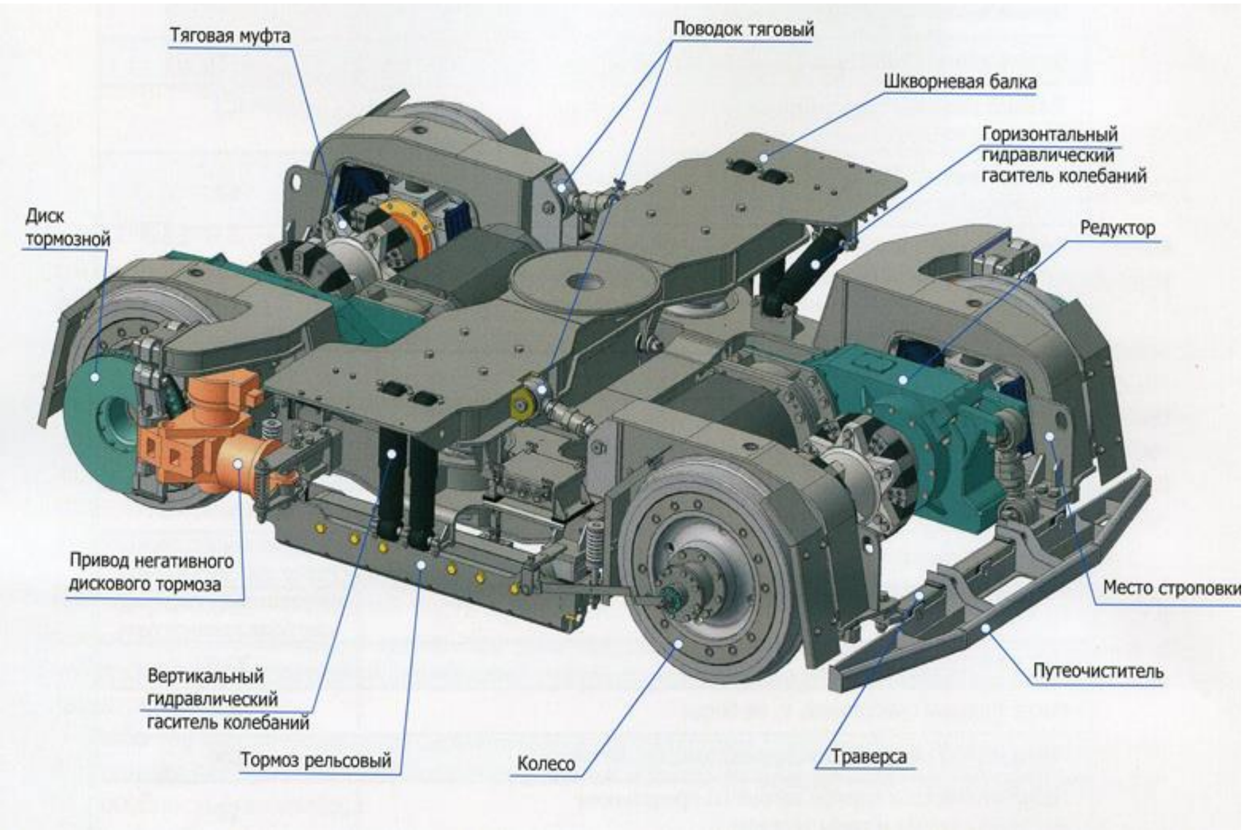



Рис. 43. Ходовая тележка типового трамвайного вагона (Интернет-ресурс)

4. Шарик массой $m$ из состояния покоя скатывается в отсутствии трения по параболе, уравнение которой $y=x^2$. Координаты начального положения шарика $x_0$=3 см, $y_0$=6,5 см (синяя парабола), $x_0$=4,5 см, $y_0$=8 см (красная парабола). (Рисунок 44). Определить давление шарика в нижней точке параболы для каждого из случаев движения.

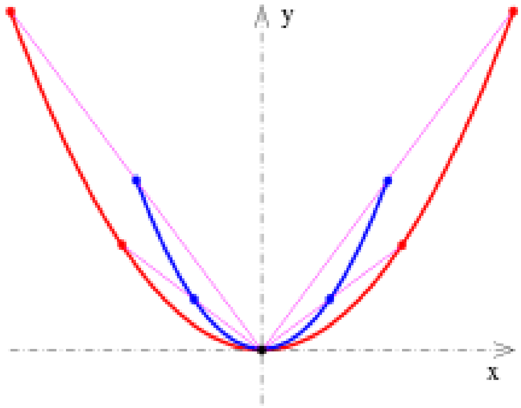



Рис. 44. Траектории движения шарика массой $m$ (Интернет-ресурс)

**Дополнительные задания для студентов ВО**

5. Найти реакции опор вала $A$ и $B$ при равномерном вращении с частотой 5000 об/мин. С валом жестко связаны сосредоточенные массы $m_1$ =0,15 кг, $m_2$ = 0,3 кг. Известны размеры $AC$= $CD$=$DB$ =0,45 м, $h$ = 0,01 м. Массой вала пренебрегаем (Рисунок 45).

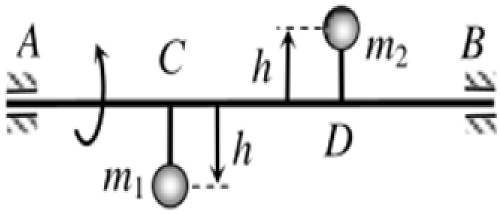



Рис. 45. Схема вращения вала с сосредоточенными массами (Интернет-ресурс)

6. График изменения скорости лифта при подъеме известен (Рисунок 46). Масса лифта с грузом $m$=2850 кг. Определить натяжение троса, на котором подвешен лифт на всех участках подъема.

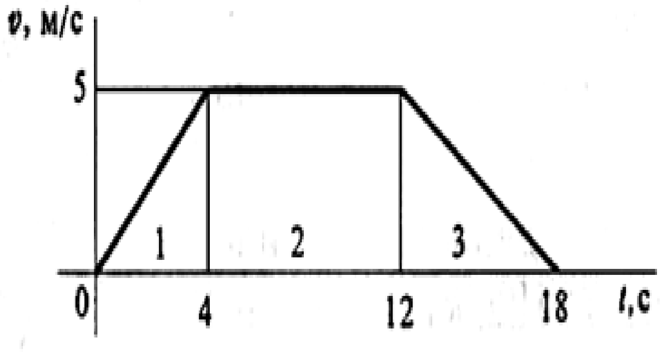



Рис. 46. График изменения скорости лифта при подъеме (Интернет-ресурс)

7. Груз массой 250 кг движется в равноускоренном режиме с помощью троса, перекинутого через блок, и в первые 7с проходит 12м (Рисунок 47). Вычислить силу натяжения троса**,** пренебрегая его массой.

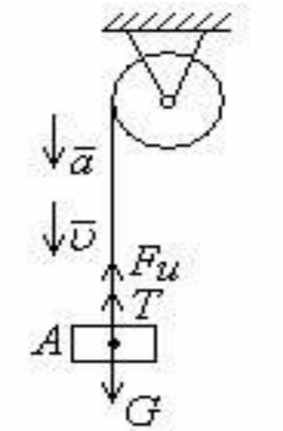



Рис. 47. Распределение сил при равноускоренном движении груза (Интернет-ресурс)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебно-методическое пособие «Упрощенный курс «Динамика» в дисциплинах «Техническая механика» СПО и «Механика» модуля «Инженерная подготовка в техносферной безопасности» ВО составлено на основе пяти последовательно представленных тем раздела «Динамика» теоретической механики. Пособие включает лекционный материал и задачи с примерами их решений. В конце каждой темы предлагаются задачи для самостоятельного решения и повышения уровня знаний студентов по разделу «Динамика». Пособие может оказаться полезным студентам ВО и СПО в ходе изучения дисциплин «Механика» или «Техническая механика», а также при подготовке к олимпиадам по сопротивлению материалов, теоретической механике и теории машин и механизмов различного уровня.

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике: учебноепособие для машиностроительных средних специальных учебных заведений / А.И. Аркуша. – Москва: Высшая школа, 2004. – 335с.

2. Атапин В.Г. Механика. Теоретическая механика: учебное пособие / В.Г. Атапин. – Новосибирск: Издательствово НГТУ, 2017. – 108 с. // ЭБС «Консультант студента»: сайт. – URL: https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778232297.html (дата обращения: 27.12.2022).

3. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие Том 2. Динамика/М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – Москва: Издательство: Лань, 2022 г. – 640 с. – URL: https://www.labirint.ru/books/848812/. (дата обращения: 01.03.2024).

4. Бертяев В.Д. Теоретическая механика. Краткий курс: учебник для вузов / В. Д. Бертяев, Л. А. Булатов, А. Г. Митяев, В. Б. Борисевич. – Москва: Издательство Юрайт, 2023 // Образовательная платформа Юрайт: сайт. – URL: https://urait.ru/bcode/517437 (дата обращения: 27.12.2022).

5. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: учебное пособие для вузов / Н.В. Бутенин. – Санкт- Петербург [и др.]: Лань, 2022 – 732 с.

6. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: в 2-х частях / Н.Н. Бухгольц. – Москва.: Издательство «Лань», 2011. – 816 с.

7. Вереина Л.И. Техническая механика: учебник для студентов учреждений СПО / Л.И. Вереина. – Москва: Издательский центр «Академия», 2015. – 224 с.

8. Денисов Ю.В. Теоретическая механика: учебник / Ю.В. Денисов, Н.А. Клинских. – Екатеринбург: УрФУ, 2013. – 474 с.

9. Диевский В.А. Теоретическая механика: учебник / В.А. Диевский. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 348 с.

10. Капранов В.Д. Практикум по теоретической механике. Часть III. Динамика: учебное пособие/В.Д. Капранов. – Москва: Редакционно-издательский отдел Всесоюзного заочного института текстильной и легкой промышленности, 1968. – 228 с.

11. Кирсанов М.Н. Теоретическая механика: сборник задач: учебное пособие / М.Н. Кирсанов. – Москва: Инфра-М, 2016. – 608 с.

12. Кирсанов М.Н. Решебник. Теоретическая механика / М.Н. Кирсанов. – Москва.: ФИЗМАТЛИТ, 2002 – 384 с.

13. Котов А.А. Основы технической механики: учебно-методическое пособие / А.А. Котов. – Москва, Вологда: Инфра-Инженерия, 2022. – 184 с.

14. Кулагин А.В. Упрощенный курс «Кинематика» для студентов технических специальностей УдГУ: учебно-методическое пособие / А.В. Кулагин. – Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2023. – 43с.

15. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие для вузов / И. В. Мещерский. – Санкт- Петербург [и др.]: Лань, 2012. – 448 с.

16. Мовнин М.С. Основы технической механики: учебник / М.С. Мовнин, А.Б. Израелит, А.Г. Рубашкин. – Санкт-Петербург: Политехника, 2016. – 289 с. – URL: http://www.iprbookshop.ru/58853.html (дата обращения: 2.10.2022).

17. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: учебник / Н. Н. Никитин. – Санкт- Петербург: Лань, 2010. – 718 с.

18. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С.М. Тарг. – Москва.: Высшая школа, 2010. – 416 с.

19. Хямяляйнен В.А. Теоретическая механика: учебное пособие / В. А. Хямяляйнен; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Кузбасский государственный технический университет. – Кемерово, 2020. – 227 с.

20. Эрдеди А.А., Эрдеди Н.А. Техническая механика6 учебник для СПО / А.А. Эрдеди, Н.А. Эрдеди. – Москва: «Академия», 2015. –528 с.

## СОДЕРЖАНИЕ


ПРЕДИСЛОВИЕ .......... 3

ВВЕДЕНИЕ .......... 7

ТЕМА 1. ДИНАМИКА. ДИНАМИКА ТОЧКИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ .......... 8

1.1. ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. (ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ ПО ЗАДАННОМУ ДВИЖЕНИЮ) .......... 9

Примеры с решениями .......... 10

Задания для самостоятельного решения первой задачи динамики точки .......... 12

Дополнительные задания для студентов ВО .......... 14

1.2. ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПО ЗАДАННЫМ СИЛАМ) .......... 15

Примеры с решениями .......... 16

Задания для самостоятельного решения второй задачи динамики точки .......... 18

Дополнительные задания для студентов ВО .......... 19

ТЕМА 2. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ .......... 21

2.1. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ .......... 21

Примеры с решениями .......... 22

Задания для самостоятельного решения задачи на применение теоремы об изменении количества движения точки .......... 25

Дополнительные задания для студентов ВО .......... 27

ТЕМА 3. РАБОТА И МОЩНОСТЬ .......... 29

3.1. РАБОТА ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ .......... 29

3.2. РАБОТА ПЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ .......... 30

3.3. РАБОТА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ .......... 31

3.4. РАБОТА УПРУГОЙ СИЛЫ .......... 31

3.5. МОЩНОСТЬ .......... 32

Примеры с решениями .......... 32

Задания для самостоятельного решения задачи на действие работ сил тяжести, упругости .......... 33

Дополнительные задания для студентов ВО .......... 34

ТЕМА 4. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ........ 36
4.1. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ ........ 36
4.2. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В КОНЕЧНОЙ ФОРМЕ ........ 36
Примеры с решениями ........ 36
Задания для самостоятельного решения теоремы об изменении кинетической энергии для материальной точки ........ 39
Дополнительные задания для студентов ВО ........ 40
ТЕМА 5. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ВЫБОР СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТОЧКИ ........ 43
5.1. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ........ 43
5.2. ВЫБОР СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТОЧКИ ........ 44
Примеры с решениями ........ 44
Задания для самостоятельного решения задач динамики точки с применением принципа Даламбера ........ 47
Дополнительные задания для студентов ВО ........ 49
ЗАКЛЮЧЕНИЕ ........ 51
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ........ 52

*Учебное издание*

**УПРОЩЕННЫЙ КУРС «ДИНАМИКА»**
**В ДИСЦИПЛИНАХ «ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»**
**И «МЕХАНИКА»**

Учебно-методическое пособие

Составитель:
Кулагин
Андрей Владимирович

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, д. 4Б, каб. 021
Тел.+7(3412) 916-364 mail:editorial@udsu.ru