Министерство науки и высшего образования РоссийскойФедерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт экономики и управления
Кафедра математического анализа
Кафедра государственной службы и управления персоналом

Е.Х. Бадаш, А.А. Мухин

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Учебно-методическое пособие

2-е издание, переработанное и дополненное

Ижевск
2024

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73
Б15

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: канд. экон. наук, профессор, зав. каф. экономической кибернетики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный аграрный университет» **Акмаров П.Б.**

Бадаш Е.Х.

Б15 Решение систем линейных алгебраических уравнений : учеб.-метод. пособие : [Электрон. ресурс]. / Е.Х. Бадаш, А.А. Мухин. – 2-е изд., перераб. и доп. – Ижевск : Удмуртский университет, 2024. – 48 с.

В учебно-методическом пособии рассмотрены основные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Пособие содержит большое количество примеров с подробным решением и методическими указаниями.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов очной, заочной и очно-заочной форм обучения ИЭиУ, а также для студентов других институтов, изучающих раздел линейная алгебра в курсе высшей математики.

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73

Содержание

Введение..4

1. Ранг матрицы 5

2. Системы линейных уравнений...10

3. Метод Крамера .... .13

4. Обратная матрица. 17

5. Решение системы с помощью обратной матрицы 20

6. Метод Гаусса. .... .24

7. Решение системы методом Гаусса .... .26

8. Вычисление определителей 4-го порядка. 34

9. Задачи для самостоятельного решения. 45

Список литературы..48

Введение

Данное учебно-методическое пособие отражает многолетний опыт проведения занятий и организации самостоятельной работы по математике (высшей математике) у студентов Института экономики и управления в Удмуртском государственном университете.

Тема «Решение систем линейных алгебраических уравнений» входит в раздел линейная алгебра, изучаемый в курсе высшей математики (математики).

Настоящее пособие представляет собой систематизированное и доступное изложения материала по основным методам решения систем линейных алгебраических уравнений. Предложенный материал предполагается использовать для самостоятельной работы студентов. Учебно-методическое пособие состоит из 9 разделов. Каждый раздел (за исключением 9-го) содержит необходимый теоретический материал и примеры с подробным решением.

Целью освоения темы «Решение систем линейных алгебраических уравнений» является овладение основами линейной алгебры, приобретение навыков использования универсального понятийного аппарата и широкого арсенала технических приемов этого раздела при дальнейшем изучении профильных дисциплин, построении математических моделей различных экономических закономерностей и процессов, описании динамики социально-экономических систем и прогнозировании развития экономики.

Достижение этих целей позволяет сформировать следующие компетенции обучающегося:

УК – Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

ПК – Способен участвовать в формулировке и решении управленческих задач и разработке стратегии организации в условиях конкурентной среды.

Указанные компетенции способствуют социальной мобильности будущего выпускника, его устойчивости на рынке труда и успешной работе в самых разнообразных сферах (стратегическое планирование, аналитическая поддержка процессов принятия решений для управления предприятием и проч.).

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов института экономики и управления, изучающих линейную алгебру в курсе математики. Но оно также может быть использовано для самостоятельной работы студентов на тех направлениях подготовки, где дисциплины «Высшая математика» или «Математика» включены в учебный план.

1. Ранг матрицы

1. Пусть A – произвольная $m \times n$ матрица. Если вычеркнуть из нее несколько строк и столбцов так, чтобы оставшиеся элементы образовали квадратную матрицу некоторого порядка r, то определитель этой матрицы называется минором r-го порядка матрицы. Например, пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Определители

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

и т. д. будут минорами второго и третьего порядков матрицы A.

Элементы матрицы можно считать ее минорами первого порядка.

Ранг матрицы равен наибольшему порядку отличных от нуля миноров этой матрицы.

Так, если все миноры порядка $p+1$ равны нулю (очевидно, при этом равны нулю и все миноры более высоких порядков) и имеется, по крайней мере, один минор порядка p, отличный от нуля, то ранг матрицы равен p (rang A =p или rg A=p).

Пусть, например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все миноры четвертого порядка этой матрицы равны нулю (так как четвертая строка есть сумма второй и третьей), а определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

значит, rang A=3.

Очевидно, ранг матрицы размерности $m \times n$ матрицы не превосходит наименьшее из чисел m и n.

2. Рассмотрим трапециевидную матрицу размерности $m \times n$, то есть матрицу, содержащую m строк и n столбцов, где m ≤ n.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1m} & a_{1m+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2m} & a_{2m+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{mm+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Так как ее минор порядка m

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

равен 1 (определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов), то ранг этой матрицы равен m.

Матрица вида (1.1) называется ступенчатой

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots\ldots & 0 & \alpha_{1k} & \alpha_{1k+1} & .. & \ldots.. & \ldots\ldots & .. & .. & .. & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \alpha_{2l} & \alpha_{2l+1} & .. & .. & .. & \ldots & \alpha_{2n} \\ .. & \ldots\ldots & .. & .. & \ldots\ldots & .. & \ldots.. & \ldots\ldots & .. & .. & .. & \ldots & \ldots.. \\ .. & \ldots\ldots & .. & .. & \ldots\ldots & .. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ddots & & & & \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \ldots.. & \ldots\ldots & 0 & \alpha_{rs} & \alpha_{rs+1} & \ldots & \alpha_{rn} \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \ldots.. & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ .. & \ldots\ldots & .. & .. & \ldots\ldots & .. & \ldots.. & \ldots\ldots & .. & .. & .. & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \ldots.. & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

Замечание. Число ненулевых строк ступенчатой матрицы равно ее рангу.

3. Следующие преобразования матрицы A называются элементарными:

1) перестановка двух строк или столбцов;

2) умножение строки или столбца на произвольное, отличное от нуля число;

3) удаление строки (столбца), являющейся линейной комбинацией других строк, (столбцов), в частности удаление нулевой строки (столбца);

4) прибавление к одной строке (столбцу) линейной комбинации других строк (столбцов).

Очевидно, что элементарные преобразования 1) – 3) не изменяют ранга матрицы. Преобразование 4) также не изменяет ранга, так как оно не изменяет величины миноров матрицы.

Матрицы, имеющие одинаковые ранги, называются эквивалентными. Если матрица A эквивалентна матрице B, то пишут $A \sim B$.

С помощью элементарных преобразований можно преобразовать исходную матрицу в эквивалентную ей трапециевидную или ступенчатую матрицу и, таким образом, вычислить ее ранг.

Пример 1. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & -5 & -6 & -6 \\ 2 & -1 & 5 & 14 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 13 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Прибавим ко второй строке первую строку, умноженную на 3, к третьей строке – первую строку, умноженную на (-2), к четвертой строке прибавим первую строку, умноженную на -1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & -5 & -6 & -6 \\ 2 & -1 & 5 & 14 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 13 & 5 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \mathrm{I}\times 3+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\times(\text{-}2)+\mathrm{III} \\ \mathrm{I}\times(\text{-}1)+\mathrm{IV} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \mathrm{II}:2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

Разделим все элементы второй строки на 2:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \mathrm{II}\times(\text{-}1)+\mathrm{III} \\ \mathrm{II}\times(\text{-}2)+\mathrm{IV} \end{matrix} \sim$$

Умножим вторую строку на -1 и прибавим к третьей, и, умножив вторую строку на -2, сложим её с четвертой строкой:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

Удалим одну из двух одинаковых строк:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III}:(\text{-}3) \end{matrix} \sim$$

Разделим все элементы третьей строки на -3:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

Получили трапециевидную матрицу. Так как её минор 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то ранг этой матрицы равен 3 (rang A=3).

Пример 2. Найти ранг матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 7 \\ 8 & 16 & 11 & 19 \end{pmatrix}.$$

Решение. Разделим все элементы первой строки на 2, получим:

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ 3 & 6 & 4 & 7 \\ 8 & 16 & 11 & 19 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{I} \times (\text{-}3) + \mathrm{II}. \\ \mathrm{I} \times (\text{-}8) + \mathrm{III}. \end{matrix} \sim$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на -3, к третьей строке – первую, умноженную на -8:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} \times (\text{-}2) \\ \mathrm{III} \times (\text{-}1) \end{matrix} \sim$$

Умножим вторую строку на -2, а третью на -1:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Удалим одну из двух одинаковых строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

Получили ступенчатую матрицу, число её ненулевых строк равно двум, поэтому ранг матрицы B равен двум (rang B=2).

Пример 3. Найти ранг матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поменяем местами первую и вторую строку в матрице С, а затем все элементы первой строки умножим на (-1).

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{I}\cdot(-1) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Умножим первую строку на (-3) и прибавим к третьей, и, умножив первую строку на (-2), сложим её с пятой строкой.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{I}\cdot(-3)+\mathrm{III} \\ \\ \mathrm{I}\cdot(-2)+\mathrm{V} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \sim$$

Разделим все элементы второй строки на 2, разделим элементы третьей строки на (-11), элементы четвёртой строки разделим на 5, а пятой – на (-5).

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II}:2 \\ \mathrm{III}:(-11) \\ \mathrm{IV}:5 \\ \mathrm{V}:(-5) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

В итоге, получилась матрица, содержащая четыре одинаковые строки. Из этих четырех строк оставляем только одну, остальные три удаляем.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

В результате применения элементарных преобразований получили трапециевидную матрицу, содержащую **две** строки. Поэтому ранг исходной матрицы С равен двум (rang C=2).

2. Системы линейных уравнений

1. Рассмотрим произвольную систему m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.1}$$

Первый индекс коэффициентов системы означает номер уравнения, второй – номер неизвестного. Числа m (число уравнений) и n (число неизвестных) между собой, вообще говоря, никак не связаны, т. е. возможно любое из соотношений

$$m < n \qquad m = n \qquad m > n\,.$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов системы (2.1), называется матрицей этой системы, а матрица

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} -$$

расширенной матрицей системы (2.1).

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*. Система, не имеющая решений, называется *несовместной*.

Систему (2.1) можно записать в векторной форме. Для этого надо ввести m-мерные векторы-столбцы коэффициентов и правой части

$$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \ldots,\ \overline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях система (2.1) запишется в виде одного векторного уравнения:

$$\bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 x_2 + \ldots + \bar{a}_n x_n = \bar{b}, \qquad (2.2)$$

а матрицы A и A_p можно записать как системы столбцов:

$$A = (\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_n), \qquad A_p = (\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_n,\ \bar{b}).$$

Из уравнения (2.2) видно, что решить систему – значит представить вектор $\bar{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_n$ (т. е. найти коэффициенты этой комбинации).

2. Вопрос о совместности системы решается следующей теоремой.

Теорема Кронекера-Капелли. Система (2.1) тогда и только тогда совместна, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы, т. е. когда rang A_P = rang A.

Отметим, что теорема Кронекера-Капелли только устанавливает существование или отсутствие решений, но ничего не говорит об их нахождении.

Пусть система (2.1) совместна. Здесь может представиться несколько случаев.

А. $rg\,A = n$. Если $m > n$, то имеется только n независимых уравнений, а остальные $m - n$ уравнений являются следствиями этих независимых уравнений. Отбросим $m - n$ лишних уравнений таким образом, чтобы матрица оставшейся системы имела ранг n. Не ограничивая общности, можно считать, что уже с самого начала $m = n = rg\,A$.

Матрица A в этом случае квадратная и $\det A = \Delta \neq 0$ (так как столбцы матрицы линейно независимы). Векторы $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_n$ образуют базис, и вектор $\bar{b}$ единственным образом представляется в виде их линейной комбинации. В этом случае система имеет единственное решение.

Обозначим через $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_n$ определители, полученные из определителя Δ заменой соответственно первого, второго, …, n-го столбца столбцом $\bar{b}$. Ещё раз обратим внимание, что определитель Δ – это определитель матрицы А. Решение системы может быть найдено по **формулам Крамера**

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Б. $rg\,A = r < n$. В этом случае матрица A содержит только r линейно независимых строк и столбцов. Будем считать, что это первые r строк и столбцов, так как в противном случае можно было бы переставить уравнения и перенумеровать неизвестные. Удалим лишние $m-n$ уравнений, которые являются линейными комбинациями оставшихся, и перенесем в правую часть $n-r$ неизвестных x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n. Эти неизвестные называются свободными. Система будет иметь вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Этим мы свели случай Б к случаю А. Придавая свободным неизвестным x_{r+1}, ..., x_n произвольные значения, найдем x_1, x_2, ..., x_r по формулам Крамера.

3. Метод Крамера

Постановка задачи.

Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными, методом Крамера.

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = b_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = b_2, \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

План решения. Если определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то система имеет решение и притом только одно. Это решение определяется формулами Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{3.1}$$

где Δ_i - определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой i-ого столбца столбцом свободных членов.

1. Вычисляем определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

и убеждаемся, что он не равен нулю. Следовательно, система уравнений имеет единственное решение.

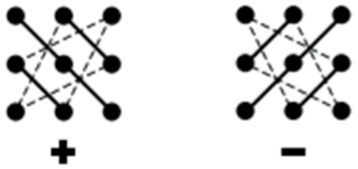
2. Вычисляем определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ b_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ b_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & b_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & b_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & b_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & b_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & b_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & b_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

3. По формулам Крамера (3.1) находим решение системы уравнений

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Прежде, чем решать пример, вспомним правило «треугольников» с помощью, которого можно вычислять определители третьего порядка.



Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8, \end{cases}$$

методом Крамера.

Решение.

Выпишем матрицу системы A и столбец свободных членов b.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к реализации метода Крамера.

1. Вычисляем определитель матрицы системы по правилу «треугольников».

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 7 - 1 \cdot (-5) \cdot 2 -$$
$$-1 \cdot 3 \cdot 7 - 2 \cdot 3 \cdot (-1) = 33.$$

Так как он не равен нулю, то система уравнений имеет единственное решение.

2. Вычисляем определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Определитель Δ_1 получается из определителя Δ заменой первого столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-5) \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot 8 + 1 \cdot 1 \cdot 7 - 1 \cdot (-5) \cdot 8 -$$
$$-2 \cdot 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 33.$$

Значение определителей Δ_2, Δ_3 найдите самостоятельно, используя правило «треугольников». Определитель Δ_2 получается из определителя Δ заменой второго столбца на столбец свободных членов, а определитель Δ_3 – заменой третьего столбца на столбец свободных членов

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 33.$$

3. По формулам Крамера (3.1) находим решение системы уравнений

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \qquad x_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 21, \\ 4x_1 + 8x_2 + x_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 33, \end{cases}$$

методом Крамера.

Выпишем матрицу системы A и столбец свободных членов b.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 21 \\ 18 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

1. Вычисляем определитель матрицы системы Δ по правилу «треугольников».

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 \cdot 4 + 6 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 8 \cdot 3 - 6 \cdot 4 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 5\,.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -63 \neq 0\,.$$

2. Вычисляем определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Определитель Δ_1 получается из определителя Δ заменой первого столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & 6 & 3 \\ 18 & 8 & 1 \\ 33 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 21 \cdot 8 \cdot 4 + 6 \cdot 1 \cdot 33 + 3 \cdot 18 \cdot 5 - 3 \cdot 8 \cdot 33 - 6 \cdot 18 \cdot 4 -$$

$$-21 \cdot 5 \cdot 1 = -189\,.$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ заменой второго столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 21 & 3 \\ 4 & 18 & 1 \\ 3 & 33 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 18 \cdot 4 + 21 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 33 - 3 \cdot 18 \cdot 3 - 21 \cdot 4 \cdot 4 -$$

$$-1 \cdot 1 \cdot 33 = 0\,.$$

Обратим внимание, что определитель Δ_2 равен нулю, но это не противоречит требованиям метода Крамера. Потому что, согласно условиям метода Крамера **только** определитель матрицы системы Δ **должен быть отличен от нуля**. Все остальные определители могут принимать любые значения, включая и ноль.

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ заменой третьего столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 4 & 8 & 18 \\ 3 & 5 & 33 \end{vmatrix} = -378\,.$$

Используя правило «треугольников», проверьте полученный результат.

3. По формулам Крамера (3.1) находим решение системы уравнений

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-189}{-63} = 3\,; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-63} = 0\,; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-378}{-63} = 6\,.$$

Ответ: $x_1 = 3,\ x_2 = 0\,,\ x_3 = 6\,.$

4. Обратная матрица

Постановка задачи. Задана квадратная матрица третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Установить существование и найти обратную матрицу A^{-1}.

Матрица A^{-1} называется обратной квадратной матрице A, если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица.

Если $\det A \neq 0$ (матрица A – невырожденная), то матрица A имеет обратную, если $\det A = 0$, то матрица A не имеет обратной.

Вспомним определение алгебраического дополнения для элементов квадратной матрицы размерности 3×3. Выберем произвольный элемент a_{ij} и вычеркнем строку и столбец, на пересечении которых он находится, то есть i-ую строку и j-ый столбец. Из оставшихся элементов, не меняя их расположения, составляем определитель второго порядка, который называется минором элемента a_{ij} и обозначается M_{ij}. Алгебраическим дополнением данного элемента называется его минор, взятый со знаком, который определяется по правилу $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Сформулируем алгоритм нахождения обратной матрицы.

1. Вычисляем определитель матрицы $\det A$. Если $\det A \neq 0$, то матрица A имеет обратную.

2. Вычисляем алгебраические дополнения для всех элементов матрицы A.

3. Составляем матрицу из алгебраических дополнений

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

4. Транспонируем матрицу из алгебраических дополнений. Построенная таким образом матрица есть матрица, присоединенная к матрице A. Присоединенная матрица обозначается $\widetilde{\mathrm{A}}$.

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

5. Разделив матрицу $\widetilde{A}$ на определитель detA, получаем искомую обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Данная запись, означает, что каждый элемент присоединенной матрицы $\widetilde{A}$ делится на определитель det A.

Пример. Задана квадратная матрица третьего порядка

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Установить существование и найти обратную матрицу A^{-1}.

Решение.

1. Вычисляем определитель матрицы $\det A$. Для вычисления определителя воспользуемся теоремой разложения по элементам первой строки. Подробно об этой теореме рассказывается в разделе 9. Но этот определитель можно вычислить и по правилу «треугольников». Именно так было сделано в предыдущем 3-ем разделе. Эти расчёты можно посмотреть.

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot(-16)-2\cdot(-9)+1\cdot 31=33.$$

Так как $\det A\neq 0$, то матрица A имеет обратную.

2. Вычисляем алгебраические дополнения для всех элементов матрицы.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}=(-5)\cdot(-1)-3\cdot 7=-16;$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(3\cdot(-1)-3\cdot 2)=9;$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=3\cdot 7-(-5)\cdot 2=31;$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 \cdot (-1) - 1 \cdot 7) = 9;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = -3;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (1 \cdot 7 - 2 \cdot 2) = -3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-5) = 11;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (1 \cdot 3 - 1 \cdot 3) = 0;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - 2 \cdot 3 = -11.$$

3. Составляем матрицу из алгебраических дополнений

$$\begin{pmatrix} -16 & 9 & 31 \\ 9 & -3 & -3 \\ 11 & 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

4. Транспонируем матрицу, составленную из алгебраических дополнений и, получаем присоединенную матрицу $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}.$$

5. Разделив матрицу $\tilde{A}$ на определитель detA=33, получаем искомую обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{33} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}.$$

5. Решение системы с помощью обратной матрицы

Пусть дана неоднородная система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{5.1}$$

Обозначим матрицу системы через A, матрицу-столбец из неизвестных через $\vec{x}$ и матрицу-столбец из свободных членов через $\vec{b}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Согласно правила умножения матриц имеем:

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Используя определение равенства матриц, систему (5.1) можно записать в векторно-матричной форме

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}. \tag{5.2}$$

Пусть определитель матрицы системы отличен от нуля $\det A \neq 0$, тогда матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}. Умножим обе части уравнения (5.2) слева на A^{-1}.

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b},$$

$$E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b},$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}. \tag{5.3}$$

Чтобы найти решение системы, надо найти обратную матрицу к матрице A и, умножить A^{-1} справа на матрицу-столбец свободных членов $\vec{b}$.

Пример 1. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Выпишем матрицу системы A, столбец свободных членов $\vec{b}$ и вектор столбец, составленный из неизвестных $\vec{x}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычисляем определитель матрицы системы $\det A$. Используем для этого правило «треугольников».

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot (-1) -$$
$$-1 \cdot 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot (-1) = 14.$$

Так как $\det A \neq 0$, то матрица A имеет обратную.

3. Вычисляем алгебраические дополнения для всех элементов матрицы A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (3 \cdot 1 - (-2) \cdot 2) = -7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = -5;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot ((-3) \cdot 1 - 1 \cdot (-1)) = 2;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 \cdot (-1) - (-3) \cdot 2) = -4;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = 5;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3) = 7;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 = 11.$$

4. Составляем матрицу из алгебраических дополнений.

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & -5 \\ 2 & 0 & -4 \\ 5 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

5. Транспонируем матрицу, составленную из алгебраических дополнений и, получаем присоединенную матрицу $\widetilde{A}$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -7 & 0 & 7 \\ -5 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

6. Разделив матрицу $\widetilde{A}$ на определитель detA=14, получаем искомую обратную матрицу.

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -7 & 0 & 7 \\ -5 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

7. Найдём неизвестные с помощью формулы (5.3) $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -7 & 0 & 7 \\ -5 & -4 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \\ (-7) \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \\ (-5) \cdot 6 + (-4) \cdot 2 + 11 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -35 \\ -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ -\frac{35}{14} \\ -\frac{27}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{27}{14} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{27}{14} \end{pmatrix}$.

Ответ: $x_1 = \frac{3}{14}$, $x_2 = -\frac{5}{2}$, $x_3 = -\frac{27}{14}$.

Пример 2. Решить с помощью обратной матрицы систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x - 5y + 3z = 2, \\ 2x + 7y - z = 19. \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица A^{-1} для матрицы систем A была найдена в предыдущем разделе, воспользуемся этим результатом:

$$A^{-1}=\frac{1}{33}\cdot\begin{pmatrix}-16 & 9 & 11\\ 9 & -3 & 0\\ 31 & -3 & -11\end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно равенству (5.3) имеем:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{33} & \frac{9}{33} & \frac{11}{33}\\ \frac{9}{33} & -\frac{3}{33} & 0\\ \frac{31}{33} & -\frac{3}{33} & -\frac{11}{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\2\\19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{33}\cdot 8+\frac{9}{33}\cdot 2+\frac{11}{33}\cdot 19\\ \frac{9}{33}\cdot 8-\frac{3}{33}\cdot 2+0\\ \frac{31}{33}\cdot 8-\frac{3}{33}\cdot 2-\frac{11}{33}\cdot 19\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{-128+18+209}{33}\\ \frac{72-6}{33}\\ \frac{248-6-209}{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

Ответ: x = 3, y = 2, z = 1.

6. Метод Гаусса

Формулы Крамера для решения линейной системы имеют в основном теоретическое значение, так как при большом количестве неизвестных приходится иметь дело с вычислением определителей высокого порядка. Поэтому на практике обычно пользуются другими методами, наиболее распространенный из которых – метод Гаусса.

Весьма ценным является также то, что метод Гаусса позволяет исследовать систему, т. е., если система несовместна или неопределенна, то это обнаруживается в процессе вычислений.

Рассмотрим метод Гаусса на примере системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right).$$

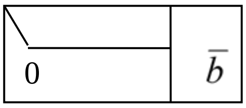
При помощи элементарных преобразований строк приведем расширенную матрицу к трапециевидной форме. При этом некоторые строки могут стать нулевыми, это значит, что соответствующие уравнения являются линейными комбинациями остальных и никакой дополнительной информации не несут. Нулевые строки мы не будем записывать в преобразованную матрицу.

По свойству трапециевидной матрицы ранг расширенной (преобразованной) матрицы равен числу ее строк. Отсюда получаются следующие результаты.

А. если матрица системы содержит меньше ненулевых строк, чем расширенная, то ее ранг меньше и по теореме Кронекера-Капелли она несовместна, например,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right), \quad rg\, A = 2, \qquad rg\, A_p = 3.$$

Условно это можно изобразить так:

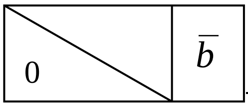


– несовместна.

Б. Если обе матрицы содержат одинаковое число ненулевых строк, то их ранги равны и система совместна, причем, если основная матрица является треугольной, то $rg\,A = n$, и система имеет единственное решение. Например,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right), \quad rg\,A = 3, \quad rg\,A_p = 3.$$

Условно это можно изобразить так:

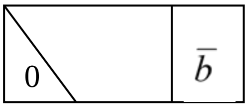


– единственное решение.

Если же матрица системы является трапециевидной, то $rg\,A < n$ и система неопределенная (то есть имеет бесконечное множество решений):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

или условно



– неопределенна.

7. Решение системы методом Гаусса

Решить линейную систему – это значит:

1. выяснить, является ли система совместной или несовместной;
2. если система совместна, то найти множество ее решений.

Укажем способ решения линейной системы, состоящий в следующем: с помощью элементарных преобразований, заданная система приводится к системе простого вида, для которой ответить на поставленные вопросы уже нетрудно.

Пример 1. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы,

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) I \times (\text{-}2) + \mathrm{II},$$

и приведем ее при помощи элементарных преобразований строк к ступенчатой матрице.

1-й шаг. Чтобы получить элемент a_{11} равным 1, умножим первую строку на (-2) и прибавим ко второй строке.

Тогда расширенная матрица A_p примет вид:

$$A_p \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right).$$

Меняем местами первую и вторую строки:

$$A_p \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{I} \times (\text{-}3) + \mathrm{II} \\ \mathrm{I} \times (\text{-}5) + \mathrm{III} \end{array}.$$

2-й шаг. Умножаем первую строку на (-3) и складываем со второй, а затем, умножив первую строку на (-5), прибавляем её к третьей строке:

$$A_p \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{II} \times (\text{-}1) + \mathrm{III} \end{array}.$$

3-й шаг. Умножим вторую строку на (-1) и прибавим к третьей. Получим, что

$$A_p \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Расширенную матрицу системы привели к ступенчатому виду, который содержит три ненулевых строки, следовательно, rang A_p=3. Матрица системы А (преобразованная) содержит нулевую строку, которая может быть удалена и, матрица системы примет вид

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & -5 \\ 0 & -23 & 11 & 19 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица содержит только две ненулевые строки, поэтому rang A = 2.

Итак, система несовместна, так как ранг матрицы системы равен двум ($rang\ A=2$), и неравен рангу расширенной матрицы $rang\ A_p = 3$.

Ответ: система не имеет решений.

Пример 2. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы:

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array}\right)$$

Прямой ход.

1-й шаг. Переставим первую и четвертую строки. Тогда элемент a_{11} будет равен 1.

$$A_p = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array}\right)$$

2-й шаг.

$$A_p \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{I}\times(\text{-}4)+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\times(\text{-}2)+\mathrm{III} \\ \mathrm{I}\times(-2)+\mathrm{IV} \end{array}.$$

Прибавляя затем ко второй, третьей и четвертой строкам первую строку, умноженную соответственно на (-4), (-2) и (-2), получаем:

$$A_p \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array}\right)$$

3-й шаг. Во избежание громоздких вычислений умножим третью строку на (-2) и прибавим ко второй строке, а затем, умножим четвертую строку на (-1) и сложим с третьей:

$$\mathrm{A_p} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{III}\times(\text{-}2)+\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}\times(\text{-}1)+\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{III}\times(\text{-}1)+\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array}$$

Затем у полученной матрицы третью строку умножим на (-1) и прибавим ко второй:

$$A_p \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}\times(\text{-}1) \\ \\ \\ \end{array}.$$

3-й шаг. Умножим вторую строку на (-1):

$$A_p \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array}\right).$$

Вторую строку умножаем на 2 и прибавляем к третьей, затем умножаем её же на 11 и складываем с четвертой строкой:

$$A_p \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{II}\times 2+\mathrm{III} \\ \mathrm{II}\times 11+\mathrm{IV} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 28 & 28 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}:7 \\ \mathrm{IV}:28 \end{array}.$$

4-й шаг. Разделим все элементы третьей строки на 7, а четвертой на 28, получим:

$$A_p \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

5-й шаг. Удалим одну из двух одинаковых строк:

$$A_p \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

В итоге привели расширенную матрицу к трапециевидному виду. По свойству трапециевидной матрицы ранг матрицы равен числу ее строк. Поэтому rang $A_p = 3$. Матрица системы A приведена к треугольному виду и её определитель третьего порядка равен $1 \neq 0$, следовательно, rang A = 3.

Система совместна, так как $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_p = 3$, и имеет единственное решение, так как ранг матрицы равен числу неизвестных.

Таким образом, исходная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12, \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 4, \\ \qquad\qquad x_3 = 1. \end{cases}$$

Обратный ход.

Из третьего уравнения сразу видим, что $x_3 = 1$. Подставив это значение x_3 во второе уравнение, получаем $x_2 + 2 = 4$, откуда $x_2 = 2$. После подстановки найденных значений для x_3 и x_2 в первое уравнение получаем $x_1 + 16 - 7 = 12$, откуда $x_1 = 3$.

Ответ: $x_1 = 3;\ x_2 = 2;\ x_3 = 1.$

Пример 3. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы:

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right),$$

и приведем ее при помощи элементарных преобразований строк к ступенчатой матрице.

1-й шаг. Прибавляем ко второй и третьей строке первую строку, умноженную на (-2) и (-3) соответственно:

$$A_p=\left(\begin{array}{cccc|c}3&-2&5&4&2\\6&-4&4&3&3\\9&-6&3&2&4\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \mathrm{I}\times(\text{-}2)+\mathrm{II}\\ \mathrm{I}\times(\text{-}3)+\mathrm{III}\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3&-2&5&4&2\\0&0&-6&-5&-1\\0&0&-12&-10&-2\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \mathrm{II}\times(\text{-}2)+\mathrm{III}\end{array}.$$

2-й шаг. Прибавляем к третьей строке умноженную на (-2) вторую строку

$$A_p\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3&-2&5&4&2\\0&0&-6&-5&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

3-й шаг. Удаляем нулевую строку и умножаем вторую строку на (-1):

$$A_p\sim\left(\begin{array}{cccc|c}3&-2&5&4&2\\0&0&6&5&1\end{array}\right).$$

В итоге, матрица системы А и расширенная матрица приведены к ступенчатому виду, содержащему две ненулевые строки. Следовательно, rang A = rang A $_p$= 2. Система совместна ($\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}A_p=2$) и имеет бесконечное множество решений, так как ранг матрицы меньше числа неизвестных ($\operatorname{rang}A<4$).

Исходная система эквивалентна системе следующего вида

$$\begin{cases}\underline{3x_1}-2x_2+5x_3+4x_4=2,\\ \qquad\qquad\quad \underline{6x_3}+5x_4=1.\end{cases}$$

Найдем общее решение системы. Так как система имеет бесконечное множество решений, то среди неизвестных системы имеются свободные неизвестные. Их число равно числу неизвестных в системе минус ранг матрицы (т. е. 4 – 2 = 2). Остальные неизвестные являются базисными, их число совпадает с рангом матрицы. Номера базисных неизвестных совпадают с номерами столбцов матрицы А, в которых находятся первые отличные от нуля элементы строк. Таким образом, в данной системе неизвестные x_1 и x_3 являются базисными, а x_2 и x_4 – свободными. Придадим свободным неизвестным x_2 и x_4 произвольные значения α и β соответственно и, перенося соответствующие слагаемые в правые части уравнений, получим

$$\begin{cases}3x_1+5x_3=2+2\alpha-4\beta,\\ \qquad 6x_3=1-5\beta.\end{cases}$$

Из последнего уравнения находим

$$x_3 = \frac{1}{6}(1-5\beta), \qquad \beta \text{ – произвольное число.}$$

Подставляя выражение для x_3 в первое уравнение, получим, что

$$x_1 = \frac{1}{18}(7+12\alpha+\beta), \qquad \alpha,\ \beta \text{ – произвольные числа.}$$

Ответ: Общее решение системы имеет вид

$$x_1 = \frac{1}{18}(7+12\alpha+\beta), \qquad x_2 = \alpha, \qquad x_3 = \frac{1}{6}(1-5\beta), \qquad x_4 = \beta,$$

где α и β - произвольные числа.

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы

$$A_p \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{array}\right).$$

1-й шаг. Во избежание работы с дробями поменяем местами первую и третью строки:

$$A_p \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \end{array}\right).$$

2-й шаг. Умножаем первую строку на (-2) и прибавляем ко второй, затем умноженную первую строку на (-3) складываем с третьей строкой:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{I}\times(\text{-}2)+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\times(\text{-}3)+\mathrm{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -24 & 21 \\ 0 & 0 & -4 & -36 & 28 \end{array}\right).$$

3-й шаг. Разделим вторую строку на (-3), а третью строку на (-4):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -24 & 21 \\ 0 & 0 & -4 & -36 & 28 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}:(\text{-}3) \\ \mathrm{III}:(\text{-}4) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -7 \end{array}\right).$$

4-й шаг. Умножим вторую строку на (-1) и прибавим к третьей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{II}\times(-1)+\mathrm{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

В итоге, расширенная матрица A_p и матрица системы A приведены к ступенчатому виду, содержащему три ненулевых строки. Поэтому rang A= = rang A_p=3 и система является совместной. Так как ранги матриц меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

Исходная система эквивалентна системе следующего вида

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8, \\ x_3 + 8x_4 = -7, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Данная система имеет одну свободную неизвестную (число неизвестных минус ранг матрицы A). В качестве этой неизвестной можно выбрать – x_2, так как неизвестные x_1, x_3, x_4 являются базисными (см. пример 3). Придадим свободной неизвестной x_2 произвольное значение α и, перенося соответствующее слагаемое в правую часть первого уравнения, получим

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_3 + 14x_4 = -8 + \alpha, \\ x_3 + 8x_4 = -7, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения, очевидно, что x_4=0. Подставляя значение x_4 во второе уравнение, получим, что x_3= -7. После подстановки найденных значений x_3 и x_4в первое уравнение получим, $3x_1 - 21 + 0 = -8 + \alpha$, откуда $x_1 = \frac{13}{3} + \frac{\alpha}{3}$, α – произвольное число.

Ответ: Общее решение системы имеет вид

$x_1 = \frac{13}{3} + \frac{\alpha}{3}$, $x_2 = \alpha$, x_3= - 7, x_4=0, где α – произвольное число.

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

1-й шаг. Умножим первую строку матрицы на (-2) и сложим со второй строкой. Затем, умножив первую строку на (-1), прибавим её к третьей и четвертой строкам:

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{I}\times(\text{-}2)+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\times(\text{-}1)+\mathrm{III} \\ \mathrm{I}\times(\text{-}1)+\mathrm{IV} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

2-й шаг. Умножим четвертую строку на (-1), в итоге в матрице получатся две одинаковые строки, удалим одну из них:

$$\mathrm{A}_\mathrm{p} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mathrm{IV}\times(\text{-}1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \end{array}\right).$$

3-й шаг. Прибавим вторую строку к третьей и получим:

$$A_p \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{II}+\mathrm{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Расширенная матрица системы, приведена к ступенчатому виду, содержащему три ненулевые строки. Следовательно, rang A_p =3.

Выпишем преобразованную матрицу системы А.

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица содержит нулевую строку, удалим ее:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица содержит только две ненулевые строки, поэтому ранг матрицы А равен двум – rang A = 2.

Так как $rang\ A \neq rang\ A_p$, то исходная система уравнений несовместна, т. е. система **не имеет решения**.

8. Вычисление определителей 4-го порядка

Основной способ, который будем использовать для вычисления определителей 4-го порядка – это применение теоремы разложения.

Теорема разложения. Определитель равен сумме произведений элементов любого ряда на их алгебраические дополнения.

Вспомним, что рядом в определителе называют как строку, так и столбец. Сформулируем определение алгебраического дополнения для элементов определителя четвёртого порядка (в разделе 3 это было сделано для третьего порядка). Выберем произвольный элемент a_{ij} и вычеркнем строку и столбец, на пересечении которых он находится, то есть i-ую строку и j-ый столбец. Из оставшихся элементов, не меняя их расположения, составляем определитель третьего порядка, который называется минором элемента a_{ij} и обозначается M_{ij}. Алгебраическим дополнением данного элемента называется его минор, взятый со знаком, который определяется по правилу $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Запишем, как теорема разложения может выглядеть в общем виде.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{24} \cdot A_{24}\ .$$

Здесь записана теорема разложения определителя четвёртого порядка по элементам второй строки. Аналогично можно записать разложение и по элементам других строк. А теперь запишем теорему разложения по элементам какого-либо столбца, например третьего.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43}\ .$$

Хорошо видно, чтобы вычислить определитель четвёртого порядка, необходимо сосчитать четыре определителя третьего порядка. Это большой объём работы. Уменьшить объём вычислений можно, применив к определителю некоторые его свойства. Одно из них звучит так: определитель не изменит своей величины, если к любому ряду прибавить линейную комбинацию, составленную из параллельных рядов. Этим свойством будем пользоваться в более простой формулировке. Определитель не изменит своей величины, если к элементам какой-либо строки прибавить элементы параллельной строки, умноженные на одно и то же число. Рассмотрим, как реализуется это свойство на конкретном примере.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 7 & -9 & 5 \\ 1 & 2 & -6 & 4 \\ -1 & 4 & 7 & -3 \end{vmatrix} \qquad (*)$$

Выполним в этом определителе следующее действие: все элементы первой строки умножим на (-2) и прибавим их к элементам второй строки. Посмотрим, как изменится определитель.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2+1\cdot(-2) & 7+2\cdot(-2) & -9+(-5)\cdot(-2) & 5+2\cdot(-2) \\ 1 & 2 & -6 & 4 \\ -1 & 4 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -6 & 4 \\ -1 & 4 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

В полученном определителе изменились элементы второй строки. Но согласно выше сформулированному свойству величина полученного определителя такая же, как и определителя (*).

Выполним ещё одно такое же действие: все элементы первой строки умножим на (-1) и прибавим их к элементам третьей строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1+1\cdot(-1) & 2+2\cdot(-1) & -6+(-5)\cdot(-1) & 4+2\cdot(-1) \\ -1 & 4 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

Сейчас изменились элементы третьей строки, но величина определителя осталась прежней, такой же как у определителя (*).

Давайте разберёмся, что же все-таки мы делали и с какой целью. Во-первых, больше не будем расписывать так подробно действия умножения и сложения, как это было сделано выше во второй и третьей строках. Такая запись очень сильно увеличивает «габариты» определителя. Эти действия будем выполнять в уме или на черновике.

Во-вторых, что мы делали более или менее понятно. Мы выбирали строку, в данном случае первую, все её элементы умножали на определенное число и складывали их с элементами параллельной строки. Почему при сложении со второй строкой элементы первой строки умножали на (-2), а во втором случае умножали на (-1)? Эти числа были выбраны неслучайно. После этих действий в первом столбце появилось два нулевых элемента. Это нули во второй и третьей строках. Получение этих нулей и являлось целью выполненных преобразований. Можно аналогично получить нулевой элемент и в четвертой строке первого столбца. Сделаем это позже. То есть числа (-2) и (-1) подбирались так чтобы, умножив на них первую строку и сложив её с другими строками, получались нулевые элементы.

Для чего нужны эти нулевые элементы или просто нули? Чем больше нулей будут содержать столбец или строка определителя, тем проще будет применять теорему разложения. Эта теорема необходима для вычисления определителей четвертого порядка.

В какой строке или столбце нужно получать нули? Какую строку и на какое число умножать с целью последующего сложения? На эти вопросы будем отвечать, разбирая решения следующих примеров.

Вернемся к определителю (*) и доведём его вычисление до конца. Это и будет первым примером.

Пример 1. Вычислить величину определителя.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 7 & -9 & 5 \\ 1 & 2 & -6 & 4 \\ -1 & 4 & 7 & -3 \end{vmatrix}.$$

Как уже было сказано, чтобы было удобнее применять теорему разложения, нужно в определителе получить нулевые элементы. Мы будем получать эти нулевые элементы в каком-либо **столбце**. Выберем этот столбец. Легче получать нули в столбце, где присутствуют элементы равные единице. В этом определителе таким столбцом является – первый столбец. Здесь у него два элемента равны единице: в первой строке и в третьей. Выберем единицу, расположенную в первой строке и в первом столбце. Так удобнее для расчетов. Эту единицу, как и всю первую строку, оставим без изменения, а все остальные элементы первого столбца сделаем нулевыми. Для этого повторим выполненные ранее действия. Элементы первой строки поочередно будем умножать на нужное число и складывать с элементами параллельных строк. Число, на которое будем умножать первую строку, подбирается так, чтобы после сложения с соответствующей строкой, в первом столбце появлялся нулевой элемент.

Повторим действия, которые уже выполняли, и добавим действие для четвертой строки.

1. Умножим первую строку на (-2) и прибавим ко второй строке. Почему умножаем на (-2)? Потому что, вместо элемента 2, расположенного во второй строке и первом столбце, нужно получить ноль. Умножаем элемент равный 1 первой строки на (-2) складываем с элементом равным 2 во второй строке и получаем 0, то есть $2 + 1 \cdot (-2) = 0$.

2. Умножим первую строку на (-1) и прибавим к третьей строке. Почему умножаем на (-1)? Потому что, вместо элемента 1, расположенного в третьей строке и первом столбце, нужно получить ноль. Умножаем элемент равный 1 первой строки на (-1) складываем с элементом равным 1 в третьей строке и получаем 0, то есть $1 + 1 \cdot (-1) = 0$.

3. Преобразуем четвертую строку. Здесь можно первую строку ни на что не умножать. А просто сложить элементы первой и четвертой строк. Потому что, вместо элемента (-1), расположенного в четвертой строке и первом столбце, нужно получить ноль. Складываем элемент равный 1 первой строки с элементом равным (-1) в четвёртой строке и получаем 0, то есть $(-1) + 1 = 0$.

Запишем, как должно быть оформлено такое решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 7 & -9 & 5 \\ 1 & 2 & -6 & 4 \\ -1 & 4 & 7 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{I} \cdot (-2) + \mathrm{II} \\ \mathrm{I} \cdot (-1) + \mathrm{III} \\ \mathrm{I} + \mathrm{IV} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Сейчас к полученному определителю можно применить теорему разложения. Запишем разложение определителя по элементам первого столбца, так как в первом столбце только один элемент отличный от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & -1 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + a_{41} \cdot A_{41}.$$

Элементы a_{21}, a_{31}, a_{41} равны нулю, то есть $a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0$, а элемент $a_{11} = 1$. Поэтому теорему разложения можно переписать так:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = A_{11}.$$

И так, чтобы вычислить исходный определитель, достаточно найти алгебраическое дополнение A_{11}. Находим его по формуле $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11}$. Для вычисления минора M_{11} вычеркиваем из преобразованного определителя первую строку и первый столбец. Из оставшихся элементов, не меняя их расположения, составляем определитель третьего порядка, который вычисляем по правилу «треугольников».

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 6 + 1 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 6 - 1 \cdot 0 \cdot (-1) -$$

$$-3 \cdot 2 \cdot 2 = 9.$$

Соберём вместе основные этапы решения.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 7 & -9 & 5 \\ 1 & 2 & -6 & 4 \\ -1 & 4 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} = (-1)^{1+1 \cdot} M_{11} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9.$$

Ответ: Величина определителя равна 9.

Пример 2. Вычислить величину определителя.

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Начнём с получения нулевых элементов. В этом определителе целесообразно нули получать в четвертом столбце. Потому что там уже есть один нулевой элемент и остается получить только два нуля. Для получения нулей используем 1, которая расположена в четвертом столбце и второй строке. Поэтому вторая строка останется без изменений, все её элементы будем умножать на подобранные нами числа. И ещё третья строка останется без изменений, потому что у неё в четвертом столбце уже есть нулевой элемент и менять его не надо.

1. Умножим все элементы второй строки на (-4) и сложим с элементами первой строки. Почему умножаем на (-4)? Чтобы получить ноль в первой строке и четвертом столбце вместо 4, нужно к 4 прибавить число (-4), а если точнее, то прибавить следует $1 \cdot (-4)$.
2. Умножим все элементы второй строки на (-6) и сложим с элементами четвёртой строки. В этом случае получим ноль в четвертом столбце и четвертой строке. То есть $6 + 1 \cdot (-6)$.

Остальные элементы в первой и четвёртой строках будут пересчитываться так же, как было показано в начале этого раздела.

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathrm{II} \cdot (-4) + \mathrm{I} \\ \\ \\ \mathrm{II} \cdot (-6) + \mathrm{IV} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 22 & 0 \end{vmatrix}.$$

Применяем теорему разложения по элементам четвертого столбца, так как у него больше всего нулей.

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 22 & 0 \end{vmatrix} = a_{14} \cdot A_{14} + a_{24} \cdot A_{24} + a_{34} \cdot A_{34} + a_{44} \cdot A_{44} =$$

$$= 0 \cdot A_{14} + 1 \cdot A_{24} + 0 \cdot A_{34} + 0 \cdot A_{44} = A_{24} = (-1)^{2+4} \cdot M_{24} = M_{24}$$

Вычислим минор M_{24}, для этого вычеркнем из преобразованного определителя вторую строку и четвёртый столбец. Из оставшихся элементов, не меняя их расположения, составляем определитель третьего порядка, который вычисляем по правилу «треугольников».

$$M_{24} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 10 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 22 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot (-2) \cdot 22 + (-2) \cdot 1 \cdot 0 + 10 \cdot 4 \cdot (-8) - 10 \cdot (-2) \cdot 0 - (-2) \cdot 4 \cdot 22 -$$
$$-0 \cdot 1 \cdot (-8) = -144.$$

Собираем всё решение вместе.

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathrm{II} \cdot (-4) + \mathrm{I} \\ \\ \\ \mathrm{II} \cdot (-6) + \mathrm{IV} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 22 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot A_{14} + 1 \cdot A_{24} + 0 \cdot A_{34} + 0 \cdot A_{44} = A_{24} = (-1)^{2+4} \cdot M_{24} = M_{24} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 10 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 22 \end{vmatrix} = -144.$$

Ответ: Величина определителя равна -144.

Пример 3. Вычислить величину определителя.

$$\begin{vmatrix} 13 & 19 & 9 & 6 \\ 2 & 8 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \\ 6 & 17 & 3 & 11 \end{vmatrix}.$$

Обычно нулевые элементы удобно получать в столбцах, где имеются единицы. Но в этом определителе нет ни одного элемента равного одному. Поэтому придётся внимательно присмотреться к столбцам определителя, чтобы определить, в каком из них проще будет получить нули. В данном примере легче будет получить нули или в первом столбце, или в третьем. Выберем третий столбец. А элемент, который будет «помогать» получать нули, расположен во второй строке и третьем столбце, и равен 2. Этот элемент, а значит и вся вторая строка останутся без изменения. Остальные элементы третьего столбца должны стать нулевыми.

1. Умножим вторую строку на (-4,5) и прибавим к первой строке. Почему умножаем на (-4,5)? Потому что, вместо элемента 9, расположенного в первой строке и третьем столбце, нужно получить ноль. Умножаем элемент равный 2 второй строки на (-4,5), складываем с элементом равным 9 в первой строке и получаем 0, то есть $9 + 2 \cdot (-4{,}5) = 0$.

2. Умножим вторую строку на (-1) и прибавим к третьей строке. Почему умножаем на (-1)? Потому что, вместо элемента 2, расположенного в третьей строке и третьем столбце, нужно получить ноль. Умножаем элемент равный 2 второй строки на (-1) и складываем с элементом равным 2 в третьей строке, в итоге получается 0, то есть $2 + 2 \cdot (-1) = 0$.

3. Преобразуем четвертую строку. Умножим все элементы второй строки на (-1,5) и сложим с элементами четвёртой строки. В этом случае получим ноль в четвертой строке и третьем столбце. То есть $3 + 2 \cdot (-1{,}5) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 13 & 19 & 9 & 6 \\ 2 & 8 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \\ 6 & 17 & 3 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathrm{II} \cdot (-4{,}5) + \mathrm{I} \\ = \\ \mathrm{II} \cdot (-1) + \mathrm{III} \\ \mathrm{II} \cdot (-1{,}5) + \mathrm{IV} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4 & -17 & 0 & -21 \\ 2 & 8 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Применяем теорему разложения по элементам третьего столбца, так как у него только один ненулевой элемент, а три элемента равны 0.

$$\begin{vmatrix} 4 & -17 & 0 & -21 \\ 2 & 8 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} =$$

$$= 0 \cdot A_{13} + 2 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43} = 2 \cdot A_{23} = 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot M_{23} =$$

$$= -2 \cdot M_{23}.$$

Вычислим минор M_{23}, для этого вычеркнем из преобразованного определителя вторую строку и третий столбец. Из оставшихся элементов, не меняя их расположения, составляем определитель третьего порядка, который вычисляем по правилу «треугольников».

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & -17 & -21 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) \cdot 2 + (-17) \cdot (-3) \cdot 3 + (-21) \cdot 1 \cdot 5 -$$

$$-(-21)\cdot(-2)\cdot 3-(-17)\cdot 1\cdot 2-4\cdot 5\cdot(-3)=0.$$

Собираем всё решение вместе.

$$\begin{vmatrix} 13 & 19 & 9 & 6 \\ 2 & 8 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \\ 6 & 17 & 3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \mathrm{II}\cdot(-4{,}5)+\mathrm{I} \\ \\ \mathrm{II}\cdot(-1)+\mathrm{III} \\ \mathrm{II}\cdot(-1{,}5)+\mathrm{IV} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4 & -17 & 0 & -21 \\ 2 & 8 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\cdot A_{13} + 2\cdot A_{23} + 0\cdot A_{33} + 0\cdot A_{43} = 2\cdot A_{23} = 2\cdot(-1)^{2+3}\cdot M_{23} =$$

$$= -2\cdot M_{23} = -2\cdot \begin{vmatrix} 4 & -17 & -21 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot 0 = 0.$$

Ответ: Величина определителя равна 0.

Решим ещё один пример, который несколько выходит за рамки данного раздела. Вычислим определитель пятого порядка. Способ вычисления определителя пятого порядка такой же, как и для четвёртого порядка. Получаем нулевые элементы в каком-либо столбце и применяем теорему разложения.

Пример 4. Вычислить величину определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -6 & 7 & -3 & 8 \\ -2 & 5 & -9 & 3 & -2 \\ -4 & -5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Получим нули в первом столбце. Потому что там уже один нулевой элемент есть и ещё, в первом столбце и в первой строке расположен элемент равный 1, с его помощью легко будет получать нули. И так, первая и вторая строки останутся без изменения, а третья, четвертая и пятая строки изменятся таким образом, чтобы в первом столбце указанных строк появились нулевые элементы. Для этого выполним следующие действия:

1. Первую строку ни на что умножать не будем, а просто сложим первую и третью строки. В результате такого действия к элементу (-1), расположенному в третьей строке и первом столбце прибавиться элемент равный 1, то есть (-1) +1=0. В итоге в третьей строке и первом столбце получится нулевой элемент.

2. Умножим первую строку на (+2) и прибавим к четвертой строке. Почему умножаем на (+2)? Потому что, вместо элемента (-2), расположенного в четвёртой строке и первом столбце, нужно получить ноль. Умножаем элемент

равный 1 первой строки на (+2), складываем с элементом равным (-2) в четвертой строке и получаем 0, то есть $-2+1\cdot 2=0$.

3. Преобразуем пятую строку. Умножим все элементы первой строки на 4 и сложим с элементами пятой строки. В этом случае получим ноль в пятой строке и четвёртом столбце. То есть $-4+1\cdot 4=0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -6 & 7 & -3 & 8 \\ -2 & 5 & -9 & 3 & -2 \\ -4 & -5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{I}+\mathrm{III} \\ \mathrm{I}\cdot 2+\mathrm{IV} \\ \mathrm{I}\cdot 4+\mathrm{V} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & -3 & 12 & 4 & 17 \\ 0 & 11 & 1 & 17 & 16 \\ 0 & 7 & 22 & 27 & 39 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по элементам первого столбца.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & -3 & 12 & 4 & 17 \\ 0 & 11 & 1 & 17 & 16 \\ 0 & 7 & 22 & 27 & 39 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}+a_{41}A_{41}+$$

$$+a_{51}A_{51}=1\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+0\cdot A_{31}+0\cdot A_{41}+0\cdot A_{51}=A_{11}=$$

$$=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=M_{11}.$$

Получается, чтобы вычислить данный определитель пятого порядка необходимо найти минор M_{11}.Выпишем данный минор. Вычеркнем из уже преобразованного определителя первую строку и первый столбец, из оставшихся элементов, не меняя их расположения, составляем определитель четвертого порядка.

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -3 & 12 & 4 & 17 \\ 11 & 1 & 17 & 16 \\ 7 & 22 & 27 & 39 \end{vmatrix}.$$

Так как минор M_{11} представляет собой определитель четвёртого порядка, будем его вычислять так же, как и определители из предыдущих примеров.

Нулевые элементы удобнее будет получить во втором столбце, поскольку только в этом столбце присутствует элемент равный 1. То есть в первой, второй и четвёртой строках второго столбца нужно получить нули.

1. Умножим третью строку на (-4) и прибавим к первой строке. Почему умножаем на (-4)? Потому что, вместо элемента 4, расположенного в первой строке и втором столбце, нужно получить ноль. Умножаем элемент равный 1 третьей строки на (-4), складываем с элементом равным 4 в первой строке и получаем 0, то есть $4+1\cdot(-4)=0$.

2. Умножим третью строку на (-12) и прибавим ко второй строке. Почему умножаем на (-12)? Потому что, вместо элемента 12, расположенного во второй строке и втором столбце, нужно получить ноль. Умножаем элемент равный 1 третьей строки на (-12), складываем с элементом равным 12 во второй строке, в итоге получаем 0, то есть $12 + 1 \cdot (-12) = 0$.

3. Преобразуем четвертую строку. Умножим все элементы третьей строки на (-22) и сложим с элементами четвёртой строки. В этом случае получим ноль в четвертой строке и втором столбце. То есть $22 + 1 \cdot (-22) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -3 & 12 & 4 & 17 \\ 11 & 1 & 17 & 16 \\ 7 & 22 & 27 & 39 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathrm{III} \cdot (-4) + \mathrm{I} \\ = \; \mathrm{III} \cdot (-12) + \mathrm{II} \; = \\ \\ \mathrm{III} \cdot (-22) + \mathrm{IV} \end{matrix} \begin{vmatrix} -42 & 0 & -62 & -56 \\ -135 & 0 & -200 & -175 \\ 11 & 1 & 17 & 16 \\ -235 & 0 & -347 & -313 \end{vmatrix}$$

Разложим полученный определитель по элементам второго столбца.

$$\begin{vmatrix} -42 & 0 & -62 & -56 \\ -135 & 0 & -200 & -175 \\ 11 & 1 & 17 & 16 \\ -235 & 0 & -347 & -313 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42} =$$

$$= 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{42} = A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -1 \cdot M_{32}.$$

Вычислим минор M_{32}. Для этого из определителя четвертого порядка вычёркиваем третью строку и второй столбец. Из оставшихся элементов, не меняя их расположения, составляем определитель третьего порядка, который вычисляем по правилу «треугольников».

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -42 & -62 & -56 \\ -135 & -200 & -175 \\ -235 & -347 & -313 \end{vmatrix}$$

$$= (-42) \cdot (-200) \cdot (-313) + (-62) \cdot (-175) \cdot (-235) +$$

$$+(-56) \cdot (-135) \cdot (-347) - (-56) \cdot (-200) \cdot (-235) - (-62) \cdot (-135) \cdot$$

$$\cdot (-313) - -(-42) \cdot (-175) \cdot (-347) = -10.$$

Но не забываем, что минор M_{32} умножался на коэффициент (-1). Поэтому определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} -42 & 0 & -62 & -56 \\ -135 & 0 & -200 & -175 \\ 11 & 1 & 17 & 16 \\ -235 & 0 & -347 & -313 \end{vmatrix} = 10.$

Соберём всё решение вместе.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -6 & 7 & -3 & 8 \\ -2 & 5 & -9 & 3 & -2 \\ -4 & -5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & -3 & 12 & 4 & 17 \\ 0 & 11 & 1 & 17 & 16 \\ 0 & 7 & 22 & 27 & 39 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -3 & 12 & 4 & 17 \\ 11 & 1 & 17 & 16 \\ 7 & 22 & 27 & 39 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -42 & 0 & -62 & -56 \\ -135 & 0 & -200 & -175 \\ 11 & 1 & 17 & 16 \\ -235 & 0 & -347 & -313 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} -42 & -62 & -56 \\ -135 & -200 & -175 \\ -235 & -347 & -313 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-10) = 10\,.$$

Ответ: Величина определителя равна 10.

9. Задачи для самостоятельного решения

Решить системы уравнений с помощью обратной матрицы и по методу Крамера.

1. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_2 - 2x_1 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3.$

2. $$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ 3x_2 + 4x_3 = -6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = -2; x_3 = 0.$

3. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13, \\ -2x_1 + x_2 = -6. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 3; x_2 = 0; x_3 = -2.$

4. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ x_3 = 5.$

Решить системы уравнений методом Гаусса.

1. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 = -4, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = -7. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = -\frac{2}{3};\ x_3 = 2;\ x_4 = -3.$

2. $\begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ 6x_2 + x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$

Ответ: Система несовместна.

3. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 6 - 26\alpha + 17\beta;\ x_2 = -1 + 7\alpha - 5\beta;\ x_3 = \alpha;\ x_4 = \beta.$

4. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = -1;\ x_2 = 3;\ x_3 = -2;\ x_4 = 2.$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = -\frac{6}{7} + \frac{8}{7}\alpha;\ x_2 = \frac{1}{7} - \frac{13}{7}\alpha;\ x_3 = \frac{15}{7} - \frac{6}{7}\alpha;\ x_4 = \alpha.$

6. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

Ответ: Система несовместна.

Вычислить величину определителей

1. $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Ответ: 16.

2. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Ответ: 54.

3. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Ответ: 160.

4. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Ответ: –27.

Список литературы

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова [и др.]. – 7-е изд., испр. – Москва : Мир и Образование, 2023. – 816 с.: ил.
2. Кремер, Н.Ш. Линейная алгебра: учебник и практикум для вузов / Н.Ш. Кремер, Н.М. Фридман, И.М. Тришин; под ред. Н. Ш. Кремера – 3-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2024. – 422 с.
3. Малугин, В.А. Линейная алгебра для экономистов : учеб., практикум и сб. задач : для вузов / В. А. Малугин, Я. А. Рощина. – Москва : Юрайт, 2024. – 478 с.
4. Решение систем линейных алгебраических уравнений: метод. указ. для самостоят. работы студентов / ГОУВПО «УдГУ», Ин-т экономики и упр., Каф. высшей. математики и информатики ; сост. Е.Х. Бадаш. – Ижевск, 2009. – 33, [1] с.
5. Шипачев, В.С. Высшая математика: учебное пособие для вузов / В.С. Шипачев. – 8-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2024. – 447 с.

Учебное издание

Бадаш Елена Хаимовна
Мухин Алексей Арьевич

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел. + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru