

УДК 624.072.222

[https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-2\(41\)-79-86](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-2(41)-79-86)

EDN: MNYGBD

# ВАРИАТИВНОСТЬ ОЦЕНКИ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ НЕПРОФИЛЬНЫХ БАЛОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

А.В. КУЛАГИН, канд. техн. наук

ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» (УдГУ), Университетская ул., д. 1, г. Ижевск, 426034, Российская Федерация

## Аннотация

*Введение.* Традиционные пути повышения конструкционной прочности и жесткости балок в настоящее время практически исчерпаны, и оптимизация технологий производства и эксплуатации вероятнее всего находится на сочетании применения новых материалов и повышения их надежности как несущих элементов сложного геометрического профиля.

Несущие элементы строительных конструкций работают в условиях высоких нагрузок и, даже несмотря на их преимущественно статический характер, могут испытывать сложное объемное напряженно-деформированное состояние, что не всегда удается подтвердить эмпирическим и статистическим путями.

*Цель* настоящей статьи состоит в предложении одного подхода оценки прочности и жесткости балочных конструкций, работающих в условиях поперечного изгиба сложного геометрического профиля.

*Материалы и методы.* Для оценки прочности и жесткости непрофильных балочных конструкций используются классические энергетические приемы расчета прочности и жесткости Кастильяно, Максвелла – Мора или Верещагина (метод моментных площадей), начальных параметров, дифференциальных уравнений изогнутой оси балки.

*Результаты.* В ходе решения таких задач используются критерии подобия (сглаживания, согласования) Мизеса – Генки и Журкова, хорошо отражающие работу хрупкого или пластичного материала балки. И эти характеристики предлагается объединить в функции долговечности Журкова – Аррениуса.

*Выводы.* Приведенные в расчетах зависимости можно рекомендовать при проектировании в рамках улучшения изгибной статической и усталостной прочности, а также жесткости несущих элементов строительных конструкций.

**Ключевые слова:** прочность, жесткость, надежность, непрофильные статически определимые и неопределимые балочные конструкции, энергетические методы, критерии подобия

**Для цитирования:** Кулагин А.В. Вариативность оценки прочности и жесткости для непрофильных балочных конструкций. *Вестник НИЦ «Строительство»*. 2024;41(2):79–86. [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-2\(41\)-79-86](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-2(41)-79-86)

## Вклад автора

Автор берет на себя ответственность за все аспекты работы над статьей.

## Финансирование

Исследование не имело спонсорской поддержки.

## Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 19.03.2024

Поступила после рецензирования 08.04.2024

Принята к публикации 11.04.2024

# VARIABILITY OF STRENGTH AND STIFFNESS ASSESSMENT FOR NON-PROFILE BEAM STRUCTURES

A.V. KULAGIN, Cand. Sci. (Engineering)

*Udmurt State University (UdSU), Universitetskaya str., 1, Izhevsk, 426034, Russian Federation*

## Abstract

*Introduction.* Traditional ways to increase the structural strength and stiffness of beams are now almost exhausted, and optimization of production and operation technologies is mostly based on the use of new materials and increasing their reliability as bearing elements of a complex geometric profile. Bearing elements of building structures operate under high loads and, even despite their predominantly static nature, experience a complex volumetric stress and strain state, which can scarcely ever be confirmed empirically and statistically.

*Aim.* To propose an approach to assessing the strength and stiffness of beam structures operating under conditions of transverse bending of a complex geometric profile.

*Materials and methods.* Classical energy methods, including Castigliano, Maxwell–Mohr and Vereshchagin methods (moment area method), have been used to assess the strength and stiffness of non-profile beam structures, initial parameters, differential equations of the deflection curve.

*Results.* The similarity parameters (fitting criteria) of Mises–Hencky and Zhurkov reflect the behavior of a brittle or plastic beam material reasonably well. These characteristics are proposed to be combined in the Arrhenius–Zhurkov durability functions.

*Conclusions.* The dependencies given in the calculations can be recommended for improving the flexural static and fatigue strength, as well as the stiffness of the bearing elements of building structures.

**Keywords:** strength, stiffness, reliability, non-profile statistically determinate and indeterminate beam structures, energy methods, similarity parameters

**For citation:** Kulagin A.V. Variability of strength and stiffness assessment for non-profile beam structures. *Vestnik NIC Stroitel'stvo = Bulletin of Science and Research Center of Construction*. 2024;41(2):79–86. (In Russian). [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-2\[41\]-79-86](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2024-2[41]-79-86)

## Author contribution statement

The author takes responsibility for all aspects of the paper.

## Funding

No funding support was obtained for the research.

## Conflict of interest

The author declares no conflict of interest.

*Received 19.03.2024*

*Revised 08.04.2024*

*Accepted 11.04.2024*

## Задача № 1

**Условие задачи.** Две консольно-закрепленные балки нагружены силой  $P$ . Размеры балок  $H$ ,  $B$ ,  $l$ . Сравнить значения максимальных прогибов и напряжений.

**Решение.** В прямоугольной балке наибольшие напряжения возникают в сечении у заделки (рис. 1).

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{6Pl}{BH^2}$$

В треугольной балке (рис. 1) осевой момент сопротивления изгибу определится по формуле

$$W_{x\Delta} = \frac{B_z H^2}{6},$$

где переменная ширина сечения будет меняться по закону  $B_z = B \frac{z}{l}$ .

В сечении, находящемся на расстоянии  $z$  от силы  $P$ , напряжение найдется по формуле

$$\sigma_{\max\Delta} = \frac{Pz}{W_{x\Delta}} = \frac{6Pz}{B_z H^2}$$

Максимальный прогиб балки на свободном торце определяется с помощью интеграла Мора

$$\delta_{1p} = \int_0^l \frac{M_{xp} M_{x1}}{EI_x} dz = \int_0^l \frac{(Pz)(1z)12}{EBH^3} dz = \frac{Pl^3}{3EI_x}$$

где  $I_x = \frac{BH^3}{12}$  – осевой момент инерции сечения прямоугольной балки.

Максимальный прогиб треугольной балки определим с использованием тех же эпюр моментов, как и для балки прямоугольной (рис. 2)

$$\delta_{1p\Delta} = \int_0^l \frac{M_{xp} M_{x1}}{EI_x} dz = \int_0^l \frac{(Pz)(1z)12}{EBzH^3} dz = \frac{Pl^3}{2EI_x}$$

где  $I_{x\Delta} = \frac{BH^3}{12}$  – осевой момент инерции сечения треугольной балки.

Составим соотношение прогибов и напряжений:

$$\frac{\delta_{1p}}{\delta_{1p\Delta}} = \frac{\frac{Pl^3}{3EI_x}}{\frac{Pl^3}{2EI_x}} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\sigma_{\max\Delta}}{\sigma_{\max}} = \frac{\frac{6Pz}{B_z H^2}}{\frac{6Pl}{BH^2}} = \frac{B_z}{B} = \frac{z}{l}$$

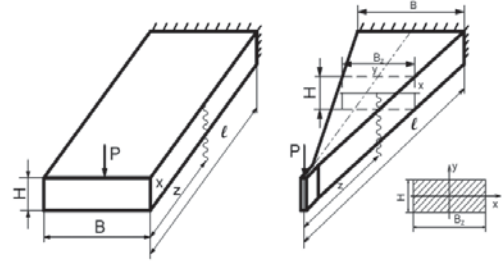


Рис. 1. Прямоугольная и треугольная балки, нагруженные силой  $P$   
 Fig. 1. Rectangular and triangular beams loaded with force  $P$

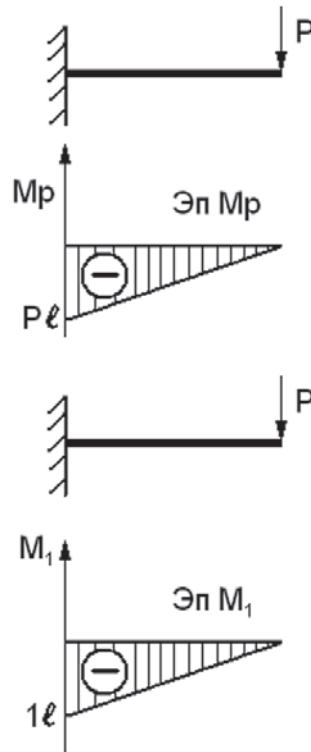


Рис. 2. Схема определения максимального прогиба с помощью интеграла Мора  
 Fig. 2. Scheme for determining the maximum deflection using the Mohr integral

### Задача № 2

**Условие задачи.** Конструкция состоит из балок одинаковой жесткости  $EI = const$ , нагружена силой  $P$ , длиной:  $AB = 3l$  и  $CD = 4l$ . Построить эпюры изгибающих моментов (рис. 3).

**Решение.** Задача статически неопределимая. Примем за неизвестное усилие  $X$  (рис. 4). Перемножим способом Верещагина эпюры изгибающих моментов для балки  $AB$  и для балки  $CD$ , получим перемещения общего для двух балок сечения  $B$ :

$$\delta_B^{(AB)} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} 2Pl \times 2l \times \frac{7}{3}l - \frac{1}{2} X(3l)^2 \times \frac{2}{3} 3l \right] = \frac{l^3}{EI} \left( \frac{14}{3}P - 9X \right);$$

$$\delta_B^{(CD)} = \frac{2}{EI} \frac{1}{2} Xl \times 2l \times \frac{2}{3}l = \frac{4Xl^3}{3EI}.$$

$$X = \frac{14}{31}P.$$

Эпюры изгибающих моментов с найденным значением  $X$  показаны на рис. 4.

### Задача № 3

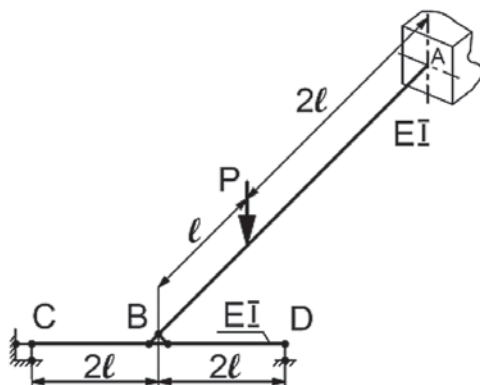
**Условие задачи.** Брус поперечного сечения  $2c \times 2c$  нагружен вертикальной силой  $P$  на свободном торце. Длина бруса  $l$ . По длине сечения бруса выполнены два отверстия с размерами  $\frac{c}{2} \times \frac{c}{2}$ . Определить максимальное напряжение в брусе (рис. 5).

**Решение.** Моменты инерции относительно главных осей  $x$  и  $y$  поперечного сечения бруса (рис. 5) определяются по формулам

$$I_x = \frac{(2c)^4}{12} - 2 \left[ \frac{(c/2)^4}{12} + \frac{c^2}{4} \left( \frac{c}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \frac{103}{96} c^4; \quad I_y = \frac{(2c)^4}{12} - 2 \frac{\left( \frac{c}{2} \right)^4}{12} = \frac{127}{96} c^4.$$

Изгибающие моменты в опасном сечении у заделки относительно этих осей

$$M_x = \frac{Pl\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}Pc; \quad M_y = 10\sqrt{2}Pc.$$



**Рис. 3.** Конструкция, состоящая из двух жестко соединенных балок одинаковой жесткости  
**Fig. 3.** Structure consisting of two rigidly connected beams of equal stiffness

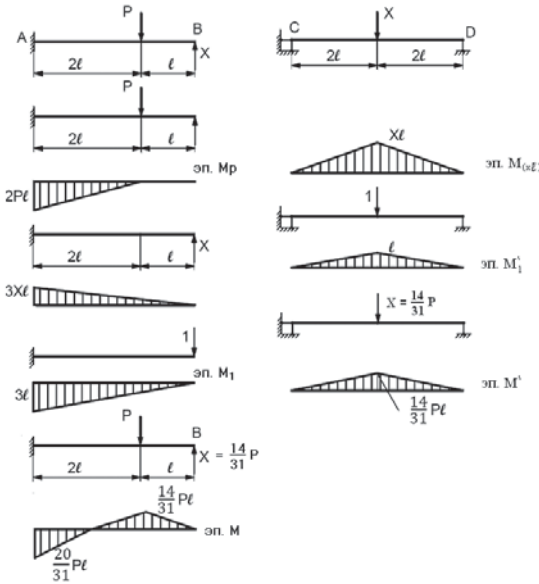


Рис. 4. Эпюры изгибающих моментов, построенные в соответствии с найденным значением X

Fig. 4. Diagrams of bending moments plotted according to the found value X

Уравнение нейтральной линии выглядит так

$$\frac{M_x}{I_x} y_o - \frac{M_y}{I_y} x_o = 0,$$

где  $x_o$  и  $y_o$  – координаты нейтральной линии сечения бруса.

Опасные точки будут в точках  $K_1$  и  $K_2$  от нейтральной линии (рис. 6). Напряжения  $\sigma_{K1}$  и  $\sigma_{K2}$  равны

$$\sigma_{K1} = \sigma_{K2} = \frac{M_x}{I_x} y_{K1} - \frac{M_y}{I_y} x_{K1} = \frac{10\sqrt{2}Pc \times 96c\sqrt{2}}{103c^4} = \frac{1920P}{103c^2},$$

где  $x_{K1}$  и  $y_{K1}$  расстояния наиболее удаленной точки  $K_1$  до нейтральной линии.

**Заключение.** Непрофильность рассмотренных балочных систем заключается в особенности исследования геометрии и приложения нагрузок при поперечном изгибе [1–15].

Вариативность перемещений и напряжений учитывается функцией долговечности Журкова – Аррениуса в виде температурно-временной зависимости [2, 3].

$$t^B = t_B^0 \exp \frac{U_0 - \gamma \sigma_{ЭКВ}}{kT},$$

где параметры  $t^B$  – текущее время процесса (подстановка напряжений или перемещений вместо  $t^B$ ) и  $t_B^0$  – константа среды, не зависящая от температуры, заменяются на начальные напряжения или перемещения;

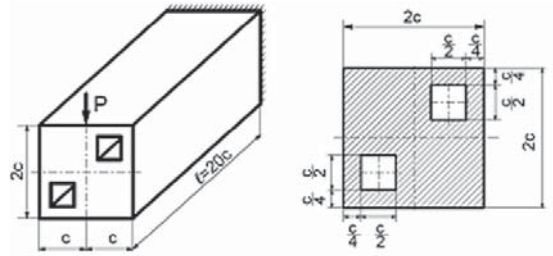


Рис. 5. Расчетная схема бруса с двумя кососимметричными квадратными отверстиями  
Fig. 5. Design diagram of a beam with two antisymmetric square holes

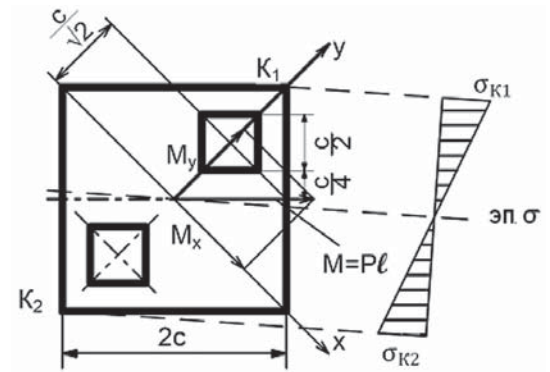


Рис. 6. Наиболее опасные точки и эпюра нормальных напряжений

Fig. 6. The most dangerous points and normal stress distribution diagram

$U_0 - \gamma \sigma_{\text{экв}}$  – энергия активации процесса разрушения балки;  
 $k$  – постоянная Больцмана;  
 $T$  – температура окружающей среды;  
 $\gamma$  – показатель локальных повреждений балки.

Основная характеристика работы непрофильной балки по критерию Мизеса – Генки, согласно теории удельной энергии формоизменения, представляет собой эквивалентное (опасное) напряжение

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – наибольшее растягивающее, среднее и наибольшее сжимающее главные напряжения.

Представленные расчеты рекомендуется использовать при проектировании колонн и стен к модульным разбивочным осям, сквозным ригелям рам, подкрановым траверсам и фермам.

Основная характеристика работы непрофильной балки по критерию Мизеса – Генки (теория удельной энергии формоизменения) эквивалентное (опасное) напряжение

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – наибольшее растягивающее, среднее и наибольшее сжимающее главные напряжения.

Представленные расчеты рекомендуется использовать при проектировании колонн и стен к модульным разбивочным осям, сквозным ригелям рам, подкрановым траверсам и фермам.

## Список литературы

1. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. Санкт Петербург: Издательство «Лань»; 2002.
2. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Основы механики сплошных сред. Т. 1. Прикладная механика сплошных сред. Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана; 2006.
3. Селиванов В.В. Механика разрушения деформируемого тела. Т. 2. Прикладная механика сплошных сред. Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана; 1999.
4. Ананьин М.Ю. Основы архитектуры и строительных конструкций. Термины и определения. Екатеринбург: Издательство Уральского Федерального университета; 2016.
5. Зайцев Ю.В., Окольников Г.Э., Доркин В.В. Механика разрушения для строителей. Москва: ИНФРА-М; 2018.
6. Келлер И.Э., Петухов Д.С. Критерии прочности и пластичности. Пермь: Издательство Пермского национального исследовательского политехнического университета; 2020.
7. Порошин В.Б. Конструкционная прочность. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ; 2019.
8. Атапин В.Г. Сопротивление материалов. Москва: Издательство Юрайт; 2020.
9. Альбакасов А.И., Кудина Л.И., Гаврилов А.А. Строительная механика. Часть I. Статически определимые системы. Оренбург: Издательство Оренбургского государственного университета; 2018.
10. Холодарь Б.Г. Изгиб стержня с произвольной диаграммой деформирования материала. В: Сборник научных статей кафедры «Сопротивление материалов и теоретическая механика». Брест: Издательство Брестского политехнического института; 1994, с. 45–50.
11. Рочняк О.А., Гашко В.И. К вопросу о механизме сопротивления предварительно напряженных железобетонных балок, работающих с двузначной эпюрой изгибающих моментов, действию изгиба с поперечной силой. В: Сборник научных статей кафедры «Сопротивление материалов и теоретическая механика». Брест: Издательство Брестского политехнического института; 1994, с. 121–125.

12. Davidson D.L., Lankford J. Fatigue crack growth in metals and alloys: mechanisms and micromechanics. *International Materials Reviews*. 1992;37(2):45–76. <https://doi.org/10.1179/imr.1992.37.1.45>
13. Дородов П.В., Кулагин А.В. О запасе прочности и оценке надежности узлов металлоконструкций. *Инженерный вестник Дона* [интернет]. 2012;(2):420–423. Режим доступа: [http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/2012\\_2\\_66.pdf\\_810.pdf](http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/2012_2_66.pdf_810.pdf) [дата доступа 01.06.2024].
14. Звездов А.И., Ведяков И.И., Соловьев Д.В. Развитие нормативных подходов по анализу риска прогрессирующего обрушения. *Промышленное и гражданское строительство*. 2023;(10):34–40. <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2023.10.34-40>
15. Федорова Н.В., Савин С.Ю. Анализ особенностей сопротивления прогрессирующему обрушению конструктивных систем зданий и сооружений при внезапных структурных перестройках: аналитический обзор научных исследований. *Строительство и реконструкция*. 2021;(3):76–108. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2021-95-3-76-108>

## References

1. Timoshenko S.P., Gere J. *Mechanics of materials: textbook for universities*. St. Petersburg: Lan Publ.; 2002. (In Russian).
2. Babkin A.V., Selivanov V.V. *Fundamentals of continuum mechanics. Vol. 1. Applied continuum mechanics*. Moscow: Publishing house of Bauman Moscow State Technical University; 2006. (In Russian).
3. Selivanov V.V. *Mechanics of fracture of a deformable body. Vol. 2. Applied continuum mechanics*. Moscow: Publishing house of Bauman Moscow State Technical University; 1999. (In Russian).
4. Ananyin M.Yu. *Fundamentals of architecture and building structures. Terms and definitions*. Ekaterinburg: Publishing House of the Ural Federal University; 2016. (In Russian).
5. Zaitsev Yu.V., Okolnikova G.E., Dorkin V.V. *Fracture mechanics for builders*. Moscow: INFRA-M Publ.; 2018. (In Russian).
6. Keller I.E., Petukhov D.S. *Criteria of strength and ductility*. Perm: Publishing house of Perm National Research Polytechnic University; 2020. (In Russian).
7. Poroshin V.B. *Structural strength*. Chelyabinsk: Publishing center of South Ural State University; 2019. (In Russian).
8. Atapin V.G. *Strength of materials: textbook and workshop for universities*. Moscow: Yurayt Publishing House; 2020. (In Russian).
9. Albasov A.I., Kudina L.I., Gavrilov A.A. *Structural mechanics. Part I. Statically determinate systems*. Orenburg: Orenburg State University Publishing House; 2018. (In Russian).
10. Kholodar B.G. Bending of a rod with an arbitrary deformation diagram material. In: *Collection of scientific articles of the department "Strength of Materials and Theoretical Mechanics"*. Brest: Publishing house of the Brest Polytechnic Institute; 1994, pp. 45–50. (In Russian).
11. Rochnyak O.A., Gashko V.I. On the issue of the mechanism of resistance of prestressed reinforced concrete beams, working with a two-digit diagram of bending moments, to the action of bending with transverse force. In: *Collection of scientific articles of the department "Strength of Materials" and theoretical mechanics*. Brest: Publishing house of the Brest Polytechnic Institute; 1994, pp. 121–125. (In Russian).
12. Davidson D.L., Lankford J. Fatigue crack growth in metals and alloys: mechanisms and micromechanics. *International Materials Reviews*. 1992;37(2):45–76. <https://doi.org/10.1179/imr.1992.37.1.45>
13. Dorodov P.V., Kulagin A.V. On the safety factor and reliability assessment of metal structures assemblies. *Engineering journal of Don* [internet]. 2012;(2):420–423. Available at: [http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/2012\\_2\\_66.pdf\\_810.pdf](http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/2012_2_66.pdf_810.pdf) [access date: 01 June 2024]. (In Russian).
14. Zvezdov A.I., Vedyakov I.I., Solovyov D.V. Development of regulatory approaches to the risk analysis of progressive collapse. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo = Industrial and Civil Engineering*. 2023;(10):34–40. (In Russian). <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2023.10.34-40>
15. Fedorova N.V., Savin S.Yu. Progressive collapse resistance of facilities experienced to localized structural damage – an analytical review. *Building and Reconstruction*. 2021;(3):76–108. (In Russian). <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2021-95-3-76-108>

### **Информация об авторе / Information about the author**

**Андрей Владимирович Кулагин**, канд. техн. наук, доцент кафедры «Защита в чрезвычайных ситуациях и управление рисками», Институт гражданской защиты, ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» (УдГУ), Ижевск  
e-mail: rekfuby2@rambler.ru

**Andrey V. Kulagin**, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor of the Department of Protection in Emergency Situations and Risk Management, Institute of Civil Protection, Udmurt State University (UdSU), Izhevsk  
e-mail: rekfuby2@rambler.ru