



Институт математики  
и механики  
им. Н.Н. Красовского

## **«Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024)**

Материалы Международной конференции, посвященной  
100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского

Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.

## **“Dynamic Systems: Stability, Control, Differential Games” (SCDG2024)**

Proceedings of the International Conference  
devoted to the 100th anniversary  
of Academician N.N. Krasovskii

Yekaterinburg, Russia, 9–13 September 2024

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского  
Уральского отделения Российской академии наук

**«Динамические системы: устойчивость,  
управление, дифференциальные игры»  
(SCDG2024)**

Материалы Международной конференции,  
посвященной 100-летию со дня рождения академика  
Н.Н. Красовского

Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.

**“Dynamic Systems: Stability, Control,  
Differential Games” (SCDG2024)**

Proceedings of the International Conference  
devoted to the 100th anniversary of Academician  
N.N. Krasovskii

Yekaterinburg, Russia, 9–13 September 2024

Екатеринбург  
2024

УДК 517.977

ББК 22.161.8

У81

**«Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024)**: Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, (Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.). — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, ООО «Издательство УМЦ УПИ», 2024. — 521 с.

Редакторы: В.И. Максимов, А.М. Тарасьев, Т.Ф. Филиппова

Конференция организована в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

---

UDC 517.977

LBC 22.161.8

**“Dynamic Systems: Stability, Control, Differential Games” (SCDG2024)**: Proceedings of the International Conference devoted to the 100th anniversary of Academician N.N. Krasovskii, Yekaterinburg, Russia, 9–13 September 2024.

Editors: T.F. Filippova, V.I. Maksimov, A.M. Tarasyev

Published by: Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS), Yekaterinburg, Russia

The Conference is organized as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2024-1377).

---

ISBN 978-5-8295-0908-8

© ИММ УрО РАН / IMM UB RAS 2024

**Международная конференция «Динамические системы:  
устойчивость, управление, дифференциальные игры»  
(SCDG2024),  
посвященная 100-летию со дня рождения  
академика Н.Н. Красовского  
Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г.,  
<http://scdg2024.ufran.ru>**

**Программный комитет**

**Сопредседатели программного комитета:**

Бердышев В.И. (Екатеринбург)  
Куржанский А.Б. (Москва)  
Осипов Ю.С. (Москва)

**Заместители председателей программного комитета:**

Ушаков В.Н. (Екатеринбург)  
Ченцов А.Г. (Екатеринбург)

**Члены программного комитета:**

Асеев С.М. (Москва)	Петров Н.Н. (Ижевск)
Васин В.В. (Екатеринбург)	Петросян Л.А. (Санкт-Петербург)
Григоренко Н.Л. (Москва)	Субботина Н.Н. (Екатеринбург)
Зеликин М.И. (Москва)	Толстоногов А.А. (Иркутск)
Никольский М.С. (Москва)	Черноусько Ф.Л. (Москва)

**Организационный комитет**

**Председатель организационного комитета:**

Лукоянов Н.Ю. (Екатеринбург)

**Заместители председателя организационного комитета:**

Максимов В.И. (Екатеринбург)  
Тарасьев А.М. (Екатеринбург)  
Филиппова Т.Ф. (Екатеринбург)

**Секретари организационного комитета:**

Дигас Б.В. (Екатеринбург)  
Усова А.А. (Екатеринбург)

**Члены организационного комитета:**

Гомоюнов М.И. (Екатеринбург)	Матвийчук О.Г. (Екатеринбург)
Гусев М.И. (Екатеринбург)	Пименов В.Г. (Екатеринбург)
Завалищин Д.С. (Екатеринбург)	Сесекин А.Н. (Екатеринбург)
Зыков И.В. (Екатеринбург)	Сурков П.Г. (Екатеринбург)
Кандоба И.Н. (Екатеринбург)	Успенский А.А. (Екатеринбург)
Костоусов В.Б. (Екатеринбург)	Хлопин Д.В. (Екатеринбург)
Макаров А.В. (Екатеринбург)	

# Содержание

Николай Николаевич Красовский ( <i>К столетию со дня рождения</i> )	16
<i>Ю.В. Авербух.</i> Стохастический поводырь: работы Н.Н. Красовского и современное состояние . . . . .	22
<i>А.А. Азамов.</i> Комбинаторика дифференциальных уравнений и приближенное решение задачи Коши высокого порядка точности . . . . .	25
<i>Б.И. Ананьев.</i> Оценивание многошаговых динамических систем с неточными ограничениями на помехи . . . . .	29
<i>Е.Д. Антипина.</i> О решении задачи идентификации входного сигнала . . . . .	33
<i>Л.А. Артемьева, А.А. Дряженков, М.М. Потапов.</i> Модификации регуляризованного двухэтапного экстраградиентного метода в задачах квадратичной минимизации с неточно заданными входными данными . . . . .	35
<i>С.М. Асеев.</i> Об ослаблении фазовых ограничений в задачах оптимального управления . . . . .	38
<i>А.Л. Багно, А.М. Тарасьев.</i> Построение функции цены и оптимального управления в тестовой модели экономического роста . . . . .	40
<i>В.Р. Барсегян.</i> Об управляемости линейных систем переменной структуры с динамическим регулятором . . . . .	45
<i>В.Р. Барсегян, С.В. Солодуша.</i> Задачи оптимального граничного управления колебаниями струны с промежуточными условиями при минимизации граничной энергии . . . . .	49
<i>И.А. Башкирцева.</i> Стохастическая генерация сложных колебаний в популяционной динамике . . . . .	53
<i>Л.А. Бекларян, А.Л. Бекларян.</i> Дуализм в теории солитонных решений . . . . .	56
<i>А.В. Беллев.</i> Стохастическая динамика модели связанных популяций с миграцией . . . . .	59
<i>Л.М. Берлин, А.А. Галеев.</i> Необходимые условия экстремума в задаче быстрогодействия для группы несинхронных осцилляторов . . . . .	63
<i>А.И. Благодатских.</i> Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе . . . . .	67
<i>С.А. Бутерин.</i> Интегро-дифференциальная система управления на временном графе . . . . .	71

<i>А.М. Волков.</i> Построение стабилизирующих стратегий для решения нелокального уравнения неразрывности . . . . .	75
<i>А.И. Глухов, М.А. Шишленин.</i> Игры среднего поля в динамике социальных протестов: математическое моделирование и управление . . . . .	79
<i>С.О. Горчинский.</i> Дифференциальная теория Галуа и ее обобщение . . . . .	84
<i>Б.Г. Гребенщиков, С.А. Загребина, А.Б. Ложников.</i> Устойчивость и стабилизация некоторых систем с неограниченным запаздыванием . . . . .	85
<i>Н.Л. Григоренко, Е.Д. Евдокимов.</i> К задаче избежания столкновения с недетерминированным препятствием . . . . .	88
<i>А.В. Губер, М.А. Шишленин.</i> Сравнительный анализ численных методов решения обратной задачи определения источника акустических волн . . . . .	93
<i>М.И. Гусев.</i> О некоторых свойствах множеств достижимости нелинейных систем с интегральными ограничениями . . . . .	95
<i>Д.Б. Давлетов, А.А. Ершов, В.Н. Ушаков.</i> О соотношении между $\alpha$ -множествами и слабо выпуклыми множествами . . . . .	99
<i>А.А. Давыдов.</i> Стационарные состояния нелокальной КПП-модели и их оптимизация . . . . .	103
<i>А.Р. Данилин, О.О. Коврижных.</i> Асимптотика решений задач оптимального терминального управления линейной автономной системой с малыми параметрами . . . . .	104
<i>Ю.Ф. Долгий.</i> Квадратичные функционалы Ляпунова — Красовского для линейных автономных систем с последствием . . . . .	107
<i>В.А. Дыхта.</i> Метод штрафных оценок и позиционный принцип минимума в задаче оптимального управления с терминальными ограничениями . . . . .	111
<i>А.В. Егитов, Д.Л. Ткачев, Э.А. Бибердорф.</i> Устойчивость МГД течений полимерной жидкости в цилиндрическом канале (обобщение модели Виноградова — Покровского) . . . . .	115
<i>А.В. Егоров.</i> Новое представление матрицы Ляпунова для систем с запаздыванием . . . . .	118
<i>В.А. Зайцев, И.Г. Ким.</i> Управление матричным спектром блочных матричных систем обратной связью по выходу . . . . .	123
<i>М.В. Зайцева, П.А. Точилин.</i> О восстановлении коэффициентов расщепления при моделировании потоков людей в помещении . . . . .	126

<i>А.А. Замышляева, Е.В. Бычков.</i> О задаче оптимального управления для одной математической модели гидродинамики . . .	130
<i>Т.Т. Ибайдурраев.</i> Модельная дифференциальная игра с пополняемыми ресурсами управлений . . . . .	133
<i>Д.Н. Ибрагимов.</i> О решении задачи быстродействия для линейной системы с дискретным временем и суммарным ограничением на векторное управление . . . . .	137
<i>А.В. Ивановичи.</i> Оптимальные низкоэнергетические межпланетные перелёты с малой тягой, использующие движение по инвариантным многообразиям точек либрации . . . . .	141
<i>А.Н. Игнатов.</i> О влиянии скоростного режима грузового поезда на интегральный риск движения на примере одного набора данных . . . . .	145
<i>Н.А. Изобов, А.В. Ильин.</i> Антиперроновский эффект смены положительных характеристических показателей линейного приближения на отрицательные у дифференциальных систем с малыми возмущениями . . . . .	149
<i>С.И. Кабанихин, М.А. Шихленин.</i> Методы регуляризации нелинейных обратных задач . . . . .	152
<i>А.Л. Казаков, А.А. Лемперт.</i> Точные решения одной квазилинейной параболической системы . . . . .	155
<i>А.И. Калинин, Л.И. Лавринович.</i> Асимптотика решения задачи оптимизации трехтемповой сингулярно возмущенной линейной системы с интегральным квадратичным критерием качества . . . . .	159
<i>И.И. Калинин.</i> Мультиагентные системы в моделировании функционирования орбитальной группировки ДЗЗ . . . . .	162
<i>А.К. Керимбеков, А.К. Батов, Ж.К. Асанова.</i> О разрешимости задачи синтеза распределенного управления при нелинейной оптимизации упругих колебаний . . . . .	165
<i>А.В. Ким.</i> Дифференциальные уравнения с обыкновенными и инвариантными производными . . . . .	169
<i>Ю.Н. Киселёв, С.Н. Авакумов, М.В. Орлов, С.М. Орлов.</i> Исследование особых режимов в моделях экономического роста . . . . .	171
<i>А.П. Колниченко.</i> Тьюринговские структуры в пространственно-распределенных моделях: мультистабильность и стохастические переходы . . . . .	174
<i>Е.А. Колпакова.</i> О дифференциальной игре с функционалом, зависящим от момента выхода на границу . . . . .	178

<i>Е.К. Костоусова.</i> О полиэдральных методах решения задач терминального сближения и уклонения в линейных многошаговых системах с фазовыми ограничениями . . . . .	182
<i>А.Я. Красинский.</i> О комплексном применении аналитической механики несвободных систем, нелинейной теории устойчивости и метода Н.Н. Красовского к одному классу задач стабилизации с нулевыми корнями . . . . .	186
<i>Н.А. Красовский, А.М. Тарасьев.</i> Равновесные траектории в координационных играх со среднеинтегральными выигрышами	189
<i>Е.А. Крупенников.</i> О построении слабых аппроксимаций решения задачи реконструкции управлений при невыпуклых ограничениях . . . . .	193
<i>Е.А. Крупенников, Н.Г. Новоселова.</i> Численное исследование модели химиотерапии злокачественной опухоли, растущей по обобщенному логистическому закону, и ее приложений . . .	197
<i>Е.Т. Ларин, В.И. Максимов.</i> Об устойчивом решении задачи отслеживания входа . . . . .	201
<i>Н.Д. Ливанов, И.В. Изместьев.</i> Численное решение задачи управления гиперболической системой при наличии неопределенности . . . . .	205
<i>Н.А. Мамадалиев.</i> Задача преследования для дифференциально-разностных игр нейтрального типа с интегральными ограничениями на управления игроков . . . . .	208
<i>Н.А. Манакова, Н.Г. Николаева, К.В. Перевозчикова.</i> Исследование задачи Шоултера — Сидорова для стохастической модели нелинейной диффузии . . . . .	212
<i>В.П. Матвеевко.</i> Сингулярные решения теории упругости: аналитические и численные результаты, практические приложения . . . . .	216
<i>А.И. Мачтакова.</i> О преследовании группы скоординированных убегающих в дифференциальной игре с дробными по Капуто производными . . . . .	217
<i>А.П. Маштаков.</i> Модель зрительного восприятия контуров с учетом их ориентации и толщины . . . . .	220
<i>Е.С. Можегова, Н.Н. Петров.</i> О некоторых задачах группового преследования во временных шкалах . . . . .	223
<i>Х.Я. Мустапокулов.</i> Дифференциальные игры с импульсными управлениями . . . . .	227

<i>Д.А. Новиков.</i> Численное решение задачи управления с фазовыми ограничениями . . . . .	230
<i>И.О. Осипов.</i> О свойстве выпуклости множеств достижимости квазилинейных систем . . . . .	234
<i>А.В. Паршиков.</i> Поиск управления для одной задачи оптимального полета в режиме следования рельефу местности . . . . .	238
<i>В.С. Пацко, Г.И. Трубников, А.А. Федотов.</i> Машина Дубинса с интегральным ограничением на управление: двумерное множество достижимости . . . . .	242
<i>Л.А. Петросян.</i> Кооперация в неантагонистических дифференциальных играх на сетях с переменной сетевой структурой . . . . .	246
<i>В.Г. Пименов.</i> Компактная схема для решения супердиффузионного уравнения с несколькими переменными запаздываниями . . . . .	247
<i>М.В. Плеханова, Е.М. Ижбердеева.</i> Модификация системы уравнений Скотт-Блэра . . . . .	251
<i>С.Н. Попова, Э.А. Фалхразиева.</i> Равномерная локальная достижимость линейных управляемых гибридных систем . . . . .	253
<i>Е.Ю. Просвиряков.</i> Точные решения уравнений Навье — Стокса для ньютоновских и неклассических жидкостей . . . . .	256
<i>А.С. Родиц, Н.Н. Субботина.</i> Обобщенная формула Хопфа для функции цены в позиционной дифференциальной игре с $\varepsilon$ -поимкой . . . . .	259
<i>В.Л. Розенберг.</i> Реконструкция возмущений в стохастических дифференциальных уравнениях: различные информационные условия . . . . .	263
<i>Л.Б. Рязико.</i> Мемристивная модель нейрона: мультистабильность и переходы порядок-хаос . . . . .	266
<i>Ю.Л. Сачков.</i> Сублоренцевы задачи на распределении Мартинге . . . . .	269
<i>Е.Ф. Сачкова, Ю.Л. Сачков.</i> Оптимальные траектории в $\alpha$ -плоскости Грушина . . . . .	272
<i>О.Н. Самсонок.</i> Оптимальное управление ВV-процессом выметания . . . . .	274
<i>И.А. Самыловский, М.А. Бармин.</i> Оптимальный синтез в задаче о приведении двойного интегратора на отрезок . . . . .	277
<i>А.Н. Сесекин, А.Д. Кандрица.</i> Устойчивость по Хайерсу — Уламу — Рассиасу нелинейных дифференциальных уравнений с разрывными траекториями и запаздыванием . . . . .	279

<i>А.С. Скорынин, В.Е. Федоров.</i> Аналитическое разрешающее семейство операторов для линейных уравнений с регулярной производной Хилфера . . . . .	283
<i>А.Л. Скубачевский.</i> Об успокоении нестационарной системы управления с последствием нейтрального типа . . . . .	285
<i>С.В. Солодуша.</i> Об одной экстремальной задаче, связанной с полиномами Вольтерра . . . . .	288
<i>А.Х. Сташ.</i> О свойствах показателей колеблемости нелинейной системы и системы ее первого приближения . . . . .	292
<i>А.С. Стрекаловский.</i> Локальный поиск в невыпуклых задачах оптимального управления . . . . .	295
<i>Н.Н. Субботина.</i> О связи задач реконструкции управлений при выпуклых и невыпуклых ограничениях . . . . .	300
<i>О.А. Султанов.</i> Устойчивость гамильтоновых систем относительно затухающих стохастических возмущений . . . . .	304
<i>П.Г. Сурков.</i> О задаче онлайн моделирования траектории системы дробного порядка с запаздыванием . . . . .	308
<i>П.С. Сурнин.</i> Обратная задача для системы нелинейных уравнений реакции-диффузии в случае моделирования динамики планктонного сообщества озера Байкал . . . . .	311
<i>Е.В. Табаринцева.</i> О решении граничной обратной задачи с финальным переопределением . . . . .	313
<i>И.А. Тайманов.</i> Динамические системы на центральных расширениях алгебр Ли и симплектические нильмногообразия . . . . .	317
<i>Г.А. Тимофеева, Д.С. Завалицин.</i> Анализ стратегий грузоперевозчиков в рамках модели игры с несколькими критериями . . . . .	318
<i>А.А. Толстоногов.</i> Связанная система, состоящая из эволюционного включения с максимально монотонными операторами и ргох-регулярного процесса выметания . . . . .	321
<i>П.А. Точилин, М.В. Паршиков.</i> Алгоритм поиска субоптимального решения задачи быстрогодействия при помощи случайных деревьев, при фазовых ограничениях по части переменных . . . . .	322
<i>П.А. Точилин, И.А. Чистяков.</i> Построение кусочно-кубических оценок функции цены для приближённого решения задачи целевого управления . . . . .	327
<i>Д.В. Трещев.</i> О бесконечномерной теории Флоке . . . . .	330

<i>Г.И. Трубников.</i> Аналитика эллиптических функций при построении двумерного множества достижимости машины Дубинса с интегральным ограничением на управление . . . . .	331
<i>Г.А. Угольниковый, А.В. Королев.</i> Дифференциально-игровые модели олигополии Курно с дополнительными эффектами . . . . .	335
<i>А.А. Усова, А.М. Тарасьев.</i> Интерпретация фазовых ограничений в модели роста в терминах теории надежности . . . . .	340
<i>А.А. Успенский, П.Д. Лебедев.</i> Альфа-множества и их оболочки при построении решений плоских задач управления по быстродействию с невыпуклой целью . . . . .	344
<i>В.Н. Ушаков, А.А. Ершов, А.Р. Матвийчук, О.А. Кувшинов, П.А. Васев, А.В. Ушаков.</i> Метод унификации Н.Н. Красовского: применение к решению игровых задач сближения . . . . .	348
<i>В.Е. Федоров, Н.М. Скрипка.</i> Один класс эволюционных уравнений с производной Лиувилля . . . . .	351
<i>Т.Ф. Филиппова, О.Г. Матвийчук.</i> Неравенства Гамильтона — Якоби — Беллмана в задачах оценивания состояний нелинейной управляемой системы с неопределенностью . . . . .	353
<i>И.А. Финогенов.</i> О скользящих режимах функционально-дифференциальных уравнений . . . . .	355
<i>Е.Н. Хайлов, Э.В. Григорьева.</i> Параметризация множества достижимости билинейной управляемой системы в адаптивной терапии ракового заболевания . . . . .	359
<i>О.В. Хамисов.</i> Оптимизация терминального функционала методами нелинейных опорных функций . . . . .	363
<i>М.В. Хлебников.</i> Синтез гарантирующего фильтра как задача оптимизации . . . . .	365
<i>Д.В. Хлопин.</i> Об одном методе построения единственной сопряженной траектории для оптимального на бесконечности управления . . . . .	368
<i>М.Ю. Христиченко, Ю.М. Нечепуренко, Д.С. Гребенников, Г.А. Бочаров.</i> Технология численного бифуркационного анализа дифференциальных уравнений с запаздыванием с приложением к моделям инфекционных заболеваний . . . . .	372
<i>Л.Ю. Циовкина.</i> Об алгебро-комбинаторных конструкциях равноугольных жестких фреймов . . . . .	377
<i>А.Г. Ченцов.</i> Маршрутные процессы в задачах последовательного обхода множеств . . . . .	380

<i>А.В. Чернов.</i> О глобальной управляемости полулинейного эволюционного уравнения с ограниченным управлением и фиксированным временем . . . . .	383
<i>Ф.Л. Черноусько.</i> Динамика и оптимизация мобильных систем с управляемой конфигурацией . . . . .	387
<i>С.В. Чистяков.</i> Истоки метода программных итераций в теории дифференциальных игр . . . . .	389
<i>И.А. Чупин.</i> Нахождение точек переключения релейного управления для манипуляционных роботов . . . . .	393
<i>Л.Г. Шагалова.</i> Конструкция обобщенного решения для уравнения Гамильтона — Якоби с экспоненциальной зависимостью от импульса . . . . .	397
<i>М.В. Шамолин.</i> Тензорные инварианты динамических систем с диссипацией . . . . .	401
<i>А.И. Шафаревич.</i> Геометрические асимптотики решений строго гиперболических систем с резко меняющимися коэффициентами . . . . .	404
<i>Д.Е. Шафранов.</i> О численном решении одного линейного стохастического уравнения теории фильтрации в пространствах дифференциальных форм, заданных на торе . . . . .	405
<i>В.И. Ширяев, Е.О. Подивилова, А.А. Брагина, В.П. Щербаков.</i> Об управлении динамической системой прямым методом Ляпунова в условиях неполноты информации . . . . .	409
<i>М.А. Шчиленин, С.И. Кабанихин, Н.С. Новиков.</i> Прямые и итерационные методы решения обратных задач медицинской томографии . . . . .	412
<i>А.Ф. Шориков.</i> Оптимизация адаптивного управления прогнозированием состояния фазового вектора линейной дискретной управляемой динамической системы . . . . .	414
<i>К.А. Щелчков.</i> Об одной задаче управления нелинейной системой второго порядка в условиях воздействия помехи . . . . .	418
<i>С.В. Щербаков, А.В. Ким.</i> Анализ регуляторов в задаче стабилизации ВИЧ-моделей с запаздыванием . . . . .	421
<i>М.Г. Юмагулов.</i> Об устойчивости точек равновесия системы «реакция-диффузия» . . . . .	423
<i>П.А. Юровских.</i> О наихудших возмущениях в задаче гарантированного оценивания с выпуклыми ограничениями . . . . .	427

<i>M.R. Akhloumadi, S. Kafle, D.S. Ivanov, S.V. Sokolov.</i> Investigation of the Controlled Motion of a Solar Sail Spacecraft to Approach an Interstellar Asteroid . . . . .	430
<i>M.A. Bekimov, M.B. Ruziboev, I.Z. Zaynabiddinov.</i> Pursuit Evasion Differential Games in $\ell^p$ on a Finite Time Interval . . . . .	433
<i>Yu.E. Danik, M.G. Dmitriev.</i> An Algorithm for Constructing a Symbolic Family of Feedback Laws in nonlinear Control Systems Using Asymptotic Approximations and the SDRE Approach . .	437
<i>W.Q. Dong.</i> Feedback Stabilization of Quasi-One-Sided Lipschitz Nonlinear Discrete-Time Systems with Reduced-Order Observer	441
<i>A. Yu. Gornov, T.S. Zarodnyuk, A.S. Anikin, P.S. Sorokovikov.</i> Non-local Methods for Solving Optimal Control Problems . . . . .	445
<i>V.V. Gorokhovik.</i> Abstract Convexity and Subdifferentiability of Functions with Respect to the Set of Lipschitz Classically Concave Functions . . . . .	449
<i>A.L. Grinikh.</i> $N$ -Person Prisoner's Dilemma with Imperfect Information on a Hypergraph . . . . .	453
<i>G.D. Hu.</i> Stability and Stabilization of Linear Delay Systems . . . .	455
<i>A. Huseyin, N. Huseyin, Kh.G. Guseinov.</i> Continuity of $L_p$ Balls and Application to the Nonlinear Control System . . . . .	459
<i>I.V. Izmest'ev.</i> The Problem of Controlling the Process of Cleaning a Reservoir From Impurity: Numerical Solution . . . . .	463
<i>O.O. Khamisov.</i> Distributed Hierarchical Control for Transmission Power Grids . . . . .	466
<i>Yu.S. Ledyayev.</i> Dynamic Optimization Problems with Probabilistic Constraints and Subgradients of Parametric Integrals of Non-smooth Functions . . . . .	470
<i>V.I. Maksimov.</i> A Singular Approach to the Problem of Tracking Input and Trajectory of Coupled ODE-Heat Equations . . . . .	471
<i>N.B. Melnikov, M.I. Ronzhina.</i> Chattering Control in Feedback Stabilization of Underactuated Systems with Two Degrees of Freedom . . . . .	474
<i>A.V. Mikhailov, S.S. Kumkov.</i> Geometric Procedure for Solving Linear Differential Games with High-Dimensional State Vector . .	478

## Равномерная локальная достижимость линейных управляемых гибридных систем

С.Н. Попова<sup>1</sup>, Э.А. Фахразиева<sup>2</sup>

<sup>1</sup> УдГУ, Ижевск, Россия, udsu.popova.sn@gmail.com

<sup>2</sup> УдГУ, Ижевск, Россия, elmiraf12@mail.ru

**Аннотация:** Введено понятие равномерной локальной достижимости гибридной дискретно-непрерывной линейной управляемой системы. Это свойство обеспечивает возможность произвольного назначения матрицы Коши системы, замкнутой линейной обратной связью, в малую окрестность матрицы Коши свободной системы на произвольных отрезках фиксированной длины, при этом имеется липшицева оценка нормы матрицы обратной связи относительно требуемого отклонения матрицы Коши. Доказано, что если открытая система равномерно вполне управляема, то соответствующая замкнутая система равномерно локально достижима.

**Ключевые слова:** гибридная дискретно-непрерывная система, управляемость, достижимость.

Рассмотрим линейную управляемую гибридную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k) + B_{11}(t)u(t) + B_{12}(k)v(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k) + B_{21}(k)u(k) + B_{22}(k)v(k), \end{cases} \quad (1)$$

где  $t \in [k, k+1)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0 \doteq \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $v \in \mathbb{R}^{m_2}$ ; функции  $A_{11}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  и  $B_{11}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$  кусочно непрерывны, могут иметь лишь разрывы первого рода и непрерывны справа в точках разрыва; управление  $u: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$  кусочно непрерывно, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывно справа в точках разрыва; функции  $A_{j2}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times n_2}$ ,  $B_{j2}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times m_2}$  ( $j = 1, 2$ ),  $A_{21}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$  и  $B_{21}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times m_1}$  произвольны; управление  $v: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$  произвольно.

Под решением системы (1) при выбранных управлениях  $u(\cdot)$  и  $v(\cdot)$  понимаем функцию

$$z = z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

такую, что  $x(t)$  и  $y(k)$  удовлетворяют системе (1) при  $t \in (k, k+1)$ , при этом функция  $x(t)$  непрерывна на  $[0, +\infty)$ .

Выберем в системе (1) управления  $u(t) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{m_1}$  и  $v(k) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{m_2}$ , получим свободную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k). \end{cases} \quad (2)$$

Пусть  $X(t, s)$  — матрица Коши системы

$$\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t).$$

Положим

$$Z(k+1, k) = \begin{pmatrix} X(k+1, k) & \int_k^{k+1} X(k+1, s) ds \cdot A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$Z(k, l) = Z(k, k-1)Z(k-1, k-2) \dots Z(l+1, l), \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad k > l.$$

Тогда для произвольного решения  $z(\cdot)$  системы (2) имеет место равенство

$$z(k) = Z(k, l)z(l), \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad k > l.$$

Будем называть матрицу  $Z(k, l)$ ,  $k, l \in \mathbb{N}_0$ ,  $k > l$ , *матрицей Коши* гибридной системы (2) в целочисленные моменты времени.

Замкнем систему (1) линейной обратной связью

$$u(t) = U(t)x(t), \quad v(k) = V(k)y(k),$$

где функция  $U: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$  кусочно непрерывна, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывна справа в точках разрыва; функция  $V: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$  произвольна. В итоге получим замкнутую систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_{11}(t) + B_{11}(t)U(t))x(t) + (A_{12}(k) + B_{12}(k)V(k))y(k), \\ y(k+1) = (A_{21}(k) + B_{21}(k)U(k))x(k) + (A_{22}(k) + B_{22}(k)V(k))y(k). \end{cases} \quad (3)$$

Положим  $W(t) = (U(t), V(k))$ ,  $t \in [k, k+1)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Система (3) имеет вид (2), поэтому для нее также можно определить матрицу Коши в целочисленные моменты времени, которую мы будем обозначать  $Z_W(k, l)$ ,  $k, l \in \mathbb{N}_0$ ,  $k > l$ .

**Определение 1.** Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие  $\vartheta \in \mathbb{N}$  и  $L > 0$ , что для каждого  $\ell \in \mathbb{N}_0$  и любых  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^{n_2}$  найдутся допустимые управления  $u: [\ell, \ell + \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $v: [\ell, \ell + \vartheta - 1] \cap \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$  такие, что решение  $(x(\cdot), y(\cdot))$  системы (1) с начальными условиями  $x(\ell) = x_0$ ,  $y(\ell) = y_0$  и с выбранными  $u(\cdot)$ ,  $v(\cdot)$  удовлетворяет равенствам  $x(\ell + \vartheta) = x_1$ ,  $y(\ell + \vartheta) = y_1$ , при этом

$$\sup_{t \in [\ell, \ell + \vartheta]} \|u(t)\| \leq L \max\{\|x_1 - x_0\|, \|y_1 - y_0\|\},$$

$$\max_{k \in [\ell, \ell + \vartheta - 1] \cap \mathbb{N}_0} \|v(k)\| \leq L \max\{\|x_1 - x_0\|, \|y_1 - y_0\|\}.$$

Определение 1 — это перенос на гибридные системы известного определения равномерной полной управляемости, известного как для систем с непрерывным временем [3, 6], так и для систем с дискретным временем [1, 5].

**Определение 2.** Система (3) называется равномерно локально достижимой, если найдутся такие  $\vartheta \in \mathbb{N}$ ,  $L > 0$  и  $r > 0$ , что для любой матрицы  $H \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$ , удовлетворяющей неравенству  $\|H - E\| \leq r$  ( $E \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$  — единичная матрица), и любого  $\ell \in \mathbb{N}_0$  существует управление  $W(t) = (U(t), V(j))$ ,  $t \in [j, j+1)$ ,  $j \in \{\ell, \dots, \ell + \vartheta - 1\} \subset \mathbb{N}_0$ , такое, что

$$Z_W(\ell + \vartheta, \ell) = Z(\ell + \vartheta, \ell)H,$$

при этом

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [\ell, \ell + \vartheta)} \|U(t)\| &\leq L\|H - E\|, \\ \max_{k \in [\ell, \ell + \vartheta - 1] \cap \mathbb{N}_0} \|V(k)\| &\leq L\|H - E\|. \end{aligned}$$

Понятие равномерной локальной достижимости систем с непрерывным временем введено в [2]. Определение равномерной глобальной достижимости систем с дискретным временем предложено в [4].

**Теорема 1.** Если система (1) равномерно вполне управляема, то соответствующая замкнутая система (3) равномерно локально достижима.

Полученный результат предполагается применить для управления асимптотикой решений гибридных систем.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев В.А., Попова С.Н., Тонков Е.Л. О свойстве равномерной полной управляемости линейной управляемой системы с дискретным временем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2014. Вып. 4. С. 53–63.
2. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларуская навука, 2012. 407 с.
3. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения, 1979. Т. 15, № 10. С. 1804–1813.

4. *Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S., Zaitsev V.* Attainability, Lyapunov Reducibility, and Assignability of Lyapunov Invariants of Linear Discrete-Time Systems // IEEE Trans. Automat. Control (Early Access), 2024. DOI: 10.1109/TAC.2023.3348701
5. *Halanay A., Ionescu V.* Time-varying discrete linear systems: input-output operators. Riccati equations. Disturbance attenuation // Operator Theory: Advances and Applications. (ed.: I. Gohberg). Vol. 68. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1994.
6. *Kalman R.* Contribution to the theory of optimal control // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 1960. Vol. 5. No. 1. P. 102–119.

## Uniform Local Attainability of Linear Control Hybrid Systems

Svetlana N. Popova<sup>1</sup>, Elmira A. Fahrazieva<sup>2</sup>

<sup>1</sup> UdsU, Izhevsk, Russia, udsu.popova.sn@gmail.com

<sup>2</sup> UdsU, Izhevsk, Russia, elmiraf12@mail.ru

**Abstract:** The notion of uniform local attainability of a hybrid discrete-continuous linear control system is introduced. This property provides the possibility of arbitrary assignment of the transition matrix of the system closed by linear feedback to a small neighborhood of the transition matrix of the free system on arbitrary segments of fixed length. In this case, there is a Lipschitz estimate of the norm of the feedback matrix with respect to the required deviation of the transition matrix. It is proved that if the open-loop system is uniformly complete controllable, then the corresponding closed-loop system is uniformly locally attainable.

---

**Международная конференция  
«Динамические системы: устойчивость, управление,  
дифференциальные игры» (SCDG2024),  
посвященная 100-летию со дня рождения  
академика Н.Н. Красовского**

Материалы

TeX-редакторы: Б.В. Дигас, О.Г. Матвийчук

Подписано в печать 20.08.24    Формат 60×84/16  
Бумага офсетная    Печать офсетная    Усл. печ. л. 32,2

Заказ № 7909    Тираж 186 экз.

Отпечатано в типографии

ООО «Издательство УМЦ УПИ»

г. Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2

Тел.: (343) 362-91-16