

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ

Институт математики

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**XIV БЕЛОРУССКАЯ  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
КОНФЕРЕНЦИЯ,  
посвященная 65-летию  
Института математики НАН Беларуси**

Материалы Международной  
научной конференции

**В трех частях**

**Часть 2**

Обыкновенные дифференциальные уравнения

---

Уравнения с частными производными  
и математическое моделирование

---

Теория вероятностей и математическая статистика

*Минск, 28 октября – 1 ноября 2024 года*

Минск  
«Беларуская навука»  
2024

УДК 51  
ББК 22.1  
Ч-54

Составитель

кандидат физико-математических наук Т. С. Бусел

**Ч-54 XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси** : материалы Международной научной конференции, Минск, 28 октября – 1 ноября 2024 г. В трех частях. Часть 2. – Минск : Беларуская навука, 2024. – 162 с.

ISBN 978-985-08-3223-8.

Вторая часть сборника материалов Международной научной конференции «XIV Белорусская математическая конференция» включает доклады по следующим направлениям: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными и математическое моделирование, теория вероятностей и математическая статистика.

Для научных работников, преподавателей и студентов, а также всех, кто интересуется математикой.

УДК 51  
ББК 22.1

ISBN 978-985-08-3223-8 (ч. 2)  
ISBN 978-985-08-3221-4

© ГНУ «Институт математики НАН Беларуси», 2024  
© Оформление. РУП «Издательский дом «Беларуская навука», 2024

# СОДЕРЖАНИЕ

## СЕКЦИЯ «ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

<b>Амелькин В.В., Тыщенко В.Ю.</b> Компактные интегральные гиперповерхности многомерной однородной системы Дарбу .....	7
<b>Андреева Т.К., Мартынов И.П., Пронько В.А.</b> Об одной системе дифференциальных уравнений без подвижных критических особых точек .....	8
<b>Барабанов Е.А., Бекряева Е.Б.</b> Строение множеств значений нижних и верхних показателей Боля решений линейных дифференциальных систем с экспоненциальным расщеплением .....	10
<b>Башуров В.В.</b> О колеблемости решений одного дифференциального уравнения нейтрального типа .....	12
<b>Белокурский М.С.</b> Признак отсутствия периодических решений у квазипериодического уравнения Риккати с линейной отражающей функцией .....	13
<b>Бондарев А.А.</b> О реализуемости контрастных сочетаний радиальных свойств устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем .....	15
<b>Бондарев А.Н.</b> О многоточечной краевой задаче для нелинейного матричного уравнения Ляпунова .....	17
<b>Борухов В.Т., Кветко О.М.</b> О признаках фокуса для полиномиальных систем Льенара .....	19
<b>Быков В.В.</b> Условные показатели линейной системы .....	20
<b>Васьковский М.М., Стрюк П.П.</b> Теорема о существовании и единственности сильных решений задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения смешанного типа, управляемого дробными броуновскими движениями с индексами Херста $H > 1/4$ .....	22
<b>Ветохин А.Н.</b> К задаче Миллионщикова о минорантах показателей Ляпунова .....	24
<b>Войделевич А.С.</b> Линейные рекуррентные уравнения с непересекающимися выпуклыми многоугольными решениями .....	25
<b>Габидуллин Д.А.</b> Об условиях устойчивости некоторой нелинейной биологической модели развития эпидемий .....	26
<b>Гринь А.А., Кузьмич А.В.</b> О локализации предельного цикла на фазовой плоскости системы Рэлея .....	28
<b>Громак В.И.</b> О преобразованиях Беклунда стационарной иерархии второго уравнения Пенлеве .....	30
<b>Деменчук А.К.</b> Признак разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных периодических систем с левым верхним постоянным блоком матрицы коэффициентов .....	31
<b>Дубров Б.М.</b> Тривиализуемые ОДУ 4-го порядка .....	33
<b>Ежак С.С., Тельнова М.Ю.</b> Экстремальные оценки первого собственного значения задачи Штурма-Лиувилля с весовыми интегральными условиями на потенциал .....	35
<b>Елгондиев К.К.</b> Метода усреднения применительно к квазилинейному связанному уравнению Ван-дер Поля-Дюффинга .....	36
<b>Изобов Н.А., Ильин А.В.</b> Антиперроновский эффект смены характеристических показателей у дифференциальных систем .....	38
<b>Кашпар А.И.</b> Обобщение задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка .....	39
<b>Козлов А.А.</b> Об одном представлении матрицы Коши двумерной равномерно вполне управляемой системы с кусочно-равномерно непрерывными коэффициентами .....	41
<b>Конюх А.В., Фоминых Е.И.</b> Верхние сингулярные показатели линейных параметрических систем как функции параметра .....	42
<b>Коробко Е.В.</b> О необходимых условиях существования решений степенного вида дискретного аналога уравнения типа Эмдена-Фаулера второго порядка .....	44

<b>Кумко А.А., Мартынов И.П.</b> Рациональные решения дифференциальных уравнений как производящие функции для некоторых известных последовательностей . . . . .	46
<b>Лаптинский В.Н.</b> К экспоненциальной устойчивости нелинейных дифференциальных систем	48
<b>Леваков А.А.</b> Теорема существования слабых решений для стохастических дифференциально-разностных гибридных систем с непрерывными коэффициентами . . . . .	49
<b>Липницкий А.В.</b> О неустойчивости линейных дифференциальных систем с гладкой зависимостью от вещественного параметра . . . . .	51
<b>Макаров Е.К.</b> Признак приводимости предельно периодических систем класса Миллионщикова	53
<b>Маковецкая О.А.</b> Периодическая краевая задача для обобщения матричного уравнения Риккати с параметром . . . . .	55
<b>Маковецкий И.И.</b> Об одной краевой задаче с условиями интегрального типа для нелинейного матричного уравнения Ляпунова . . . . .	56
<b>Мироненко В.В.</b> Достаточные условия центра для одной системы дифференциальных уравнений	58
<b>Мироненко В.И.</b> Отражающая матрица и теорема Флоке . . . . .	58
<b>Мусафиров Э.В., Гринь А.А., Проневич А.Ф.</b> О допустимых возмущениях трехмерной автономной квадратичной системы со скрытыми колебаниями . . . . .	59
<b>Павлючик П.Б., Проневич А.Ф.</b> Кратность комплекснозначных полиномиальных частных интегралов неавтономных систем в полных дифференциалах . . . . .	61
<b>Попова С.Н., Фахразиева Э.А.</b> О задачах назначения спектра линейных гибридных систем . .	63
<b>Похачевский В.В.</b> О бэровской классификации слабых показателей колеблемости корней линейной системы . . . . .	65
<b>Роголев Д.В.</b> Периодическая краевая задача для системы матричных уравнений Риккати (левосторонняя регуляризация) . . . . .	66
<b>Руденок А.Е.</b> Изохронные центры обобщенной системы Куклеса . . . . .	68
<b>Руденок А.Е., Василевич М.Н.</b> О сильной изохронности грубого фокуса . . . . .	70
<b>Садовский А.П.</b> Метод решения проблемы центра и фокуса для аналитических систем в случае чисто мнимых собственных значений . . . . .	71
<b>Сидоренко И.Н.</b> О предельных циклах систем Лъенара с четырьмя особыми точками . . . . .	73
<b>Фирсов М.А., Васьковский М.М.</b> Существование и единственность слабых решений стохастических дифференциальных уравнений в частных производных, управляемых дробными броуновскими движениями с индексами Хёрста, большими $\frac{1}{4}$ . . . . .	74
<b>Цегельник В.В.</b> О решениях системы дифференциальных уравнений, ассоциированной с моделями нелинейной физики . . . . .	76
<b>Zhalykevich D.S.</b> Group classification of Newton's equations with one degree of freedom and a power dissipation force . . . . .	78

### **СЕКЦИЯ «УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»**

<b>Агаркова Н.Н., Васильев В.Б., Гебресласи Х.Ф.</b> Об одной задаче для эллиптического уравнения в трехмерном пространстве с плоским разрезом . . . . .	79
<b>Дайняк В.В., Латушкин К.В.</b> Краевые задачи для линейного дифференциального уравнения пятого порядка в трехмерном пространстве . . . . .	80
<b>Гермидер О.В., Гришин В.В., Попов В.Н.</b> Математическое моделирование прогиба нанопластины . . . . .	82
<b>Иванов А.В., Харук Н.В.</b> Варианты деформации функции Грина оператора Лапласа при регуляризации диаграмм Фейнмана . . . . .	84
<b>Ивашкевич А.В., Редьков В.М.</b> О решениях системы из 16-ти уравнений в частных производных, описывающей частицу Дирака-Кэлера в электрическом поле . . . . .	84

<b>Корзюк В.И., Ковнацкая О.А.</b> Задачи Гурса на плоскости для полулинейного гиперболического уравнения .....	86
<b>Ломовцев Ф.Е., Лысенко В.В.</b> Физико-геометрическая интерпретация классического решения вспомогательной смешанной задачи при нехарактеристических вторых производных на конце .....	88
<b>Миронов А.Н.</b> К задаче Дарбу для уравнения Бианки в общем случае .....	90
<b>Овсюк Е.М.</b> Частица со спином $1/2$ и двумя массовыми параметрами в кулоновском поле, волновые функции и спектр энергии .....	91
<b>Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.</b> Динамические многофакторные производственные функции для моделирования расширенно нейтрального по Хиксу научно-технического прогресса .....	93
<b>Рогозин С.В., Дубатовская М.В.</b> О новых типах обобщенных функций, представимых интегралом Меллина-Барнса .....	95
<b>Тахиров Ж.О.</b> О математической модели со свободной границей динамики системы опухоль-иммунитет .....	96
<b>Титаренко С.А.</b> Изоспектральность для лапласиана и булевы алгебры квантовых бильярдов .....	98
<b>Устилко Е.В., Ломовцев Ф.Е.</b> Критерий корректности смешанной задачи для уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических косых производных на концах .....	100
<b>Филиновский А.В.</b> Стабилизация решений нестационарных краевых задач .....	102
<b>Фролова М.В., Михайлов Е.А., Тихонов Ю.А.</b> Разрешимость одной эволюционной задачи магнитной гидродинамики и оценка скорости роста его решения .....	103
<b>Шумилова В.В.</b> Усреднение уравнений акустики для среды, состоящей из упругого материала и сжимаемой жидкости Максвелла .....	105
<b>Шушкевич Г.Ч.</b> Экранирование низкочастотного магнитного поля тонкостенным цилиндрическим экраном с эллипсоидальным включением .....	107
<b>Korzyuk V.I., Rudzko J.V.</b> Mixed problem from the theory of longitudinal impact on an elastic semi-infinite rod in the case of separation of the impacting body after the collision .....	109
<b>Korzyuk V.I., Rudzko J.V., Kolyachko V.V.</b> Classical solution of a problem of the longitudinal impact on a finite rod with a free end .....	111
<b>Kovalevsky A.A.</b> On some sharp conditions in the existence theory for nonlinear degenerate elliptic equations with $L_1$ -data .....	112
<b>Kurbanbaev O.</b> Boundary value problems for the Laplace equation with a diverging argument .....	114
<b>Rabinovich S., Malyutin V.</b> Direct solution of Maxwell's equations .....	115
<b>Rykhlov V.V., Shafarevich A.I.</b> Asymptotic spectral series of Shrödinger operator with delta-potential at the poles of surfaces of revolution .....	117
<b>Zhalukevich D.S.</b> Group classification of some second-order quasi-linear equations with two independent variables .....	118

## СЕКЦИЯ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

<b>Абдюшев М.Р.</b> Предельная теорема для распределения времени вырождения докритических ветвящихся процессов с частицами обоих полов с большой начальной популяцией .....	119
<b>Афанасьев В.И.</b> Предельная теорема о сходимости к локальному времени броуновского моста .....	120
<b>Бакай Г.А.</b> Об асимптотиках вероятностей больших уклонений для случайного блуждания в случайной среде с «печеньем» .....	122
<b>Баркетов М.С.</b> Параметрическое оценивание суммы объемов запросов по информации за прошлые этапы .....	123
<b>Бузин А.П.</b> Модифицированный критерий Хеллера-Горфина для проверки однородности .....	125
<b>Буялова У.И.</b> PQ-PQ критерии однородности двух выборок .....	126
<b>Волошко В.А., Харин Ю.С.</b> Малопараметрическая марковская модель дискретных временных рядов на основе достаточных статистик .....	128

<b>Дудин А.Н., Дудин С.А., Дудина О.С.</b> Системы с произвольным марковским описанием процесса совместного обслуживания запросов . . . . .	129
<b>Дудина О.С., Дудин А.Н.</b> Многолинейная система массового обслуживания с динамически изменяемым рейтингом и ценообразованием . . . . .	131
<b>Дудин С.А., Дудина О.С.</b> Моделирование работы пункта выдачи заказов двухфазной системой массового обслуживания . . . . .	132
<b>Егоров А.Д.</b> О вычислении математических ожиданий функционалов от решений линейных СДУ Скорохода . . . . .	134
<b>Жиянов А.П., Шкляев А.В.</b> Асимптотика времени вырождения двуполого критического ветвящегося процесса в случайной среде . . . . .	135
<b>Зуев Н.М., Лаппо П.М.</b> О построении портфеля инвестиций минимизирующего среднеквадратическое отклонение от функции выплат . . . . .	136
<b>Королевич В.В.</b> Метод наименьших квадратов расстояний от эмпирических точек до прямой регрессии, применяемый в математической статистике . . . . .	137
<b>Красногир Е.Г.</b> Пандемия COVID-19: изменение полной ожидаемой продолжительности жизни населения в 2020–2023 годах . . . . .	139
<b>Ладнев А.И.</b> Ветвящиеся процессы переменного типа . . . . .	141
<b>Лещинская М.А., Пчелинцев Е.А.</b> Эффективное оценивание в непараметрической регрессии с малыми шумами Орнштейна-Уленбека . . . . .	142
<b>Луценко М.М.</b> Теоретико-игровые методы построения оценок параметра дискретных случайных величин . . . . .	143
<b>Никифоров Н.И., Пергаменщиков С.М., Пчелинцев Е.А.</b> Эффективное оценивание функции регрессии в аддитивной модели . . . . .	145
<b>Русилко Т.В., Сальников Д.А.</b> О применении сети массового обслуживания с входящим ММРР-потокм в качестве модели сети передачи данных . . . . .	146
<b>Савелов М.П.</b> Предельные совместные распределения статистик критериев пакета NIST и их обобщения . . . . .	148
<b>Савинов Е.А.</b> Об одном методе идентификации гауссовской смеси большой размерности . . . . .	149
<b>Труш Н.Н.</b> Гетерогенная авторегрессионная модель реализованной волатильности . . . . .	150
<b>Харин А.Ю., Пашук П.А.</b> Последовательные статистические критерии в анализе стохастических данных: эффективность, робастность и применения . . . . .	152
<b>Харин Ю.С., Шибалко С.А.</b> Статистический анализ многомерных двоичных временных рядов на основе нейросетевой модели . . . . .	153
<b>Харламов В.В.</b> Асимптотика вероятности невырождения ветвящегося процесса в случайной среде при переходе из критической в докритическую область . . . . .	155
<b>Хиль Е.В.</b> Верхние оценки приближения статистики хи-квадрат предельным распределением . . . . .	156
<b>Цеховая Т.В.</b> Об оценках семивариограммы гауссовского случайного процесса . . . . .	157
<b>Ченцов А.М.</b> Оценка структурных параметров и эффектов воздействия в квантильных регрессиях с использованием метода двойного машинного обучения . . . . .	159
<b>Khartov A.A.</b> General criteria for belonging to the class of rational-infinitely divisible distributions . . . . .	161

## О ЗАДАЧАХ НАЗНАЧЕНИЯ СПЕКТРА ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

С.Н. Попова<sup>1</sup>, Э.А. Фахразиева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Удмуртский государственный университет, Университетская 1, 426034 Ижевск, Россия, udsu.popova.sn@gmail.com,

<sup>2</sup>Удмуртский государственный университет, Университетская 1, 426034 Ижевск, Россия, elmiraf12@mail.ru

Рассмотрим линейную однородную гибридную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k), \end{cases} \quad (1)$$

где  $t \in [k, k+1)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0 \doteq \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ , функция  $A_{11}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  ограничена, кусочно непрерывна, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывна справа в точках разрыва; функции  $A_{j2}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times n_2}$  ( $j = 1, 2$ ) и  $A_{21}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$  ограничены. Положим  $n \doteq n_1 + n_2$ . Систему (1) отождествим с матрицей  $A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $t \in [k, k+1)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Множество всех систем вида (1), удовлетворяющих поставленным условиям, обозначим  $\mathcal{M}_n$ . Метрика в этом множестве — равномерная на  $[0, +\infty)$ .

Под решением системы (1) понимаем функцию  $z = z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [k, k+1)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , такую, что  $x(t)$  и  $y(k)$  удовлетворяют системе (1) при  $t \in (k, k+1)$ , при этом функция  $x(t)$  непрерывна на  $[0, +\infty)$ .

Пусть  $X(t, s)$  — матрица Коши системы  $\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t)$ . Положим

$$X_A(k+1, k) = \begin{pmatrix} X(k+1, k) & \int_k^{k+1} X(k+1, s) ds \cdot A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$X_A(k, l) = X_A(k, k-1)X_A(k-1, k-2) \dots X_A(l+1, l), \quad k, l \in \mathbb{N}_0, k > l.$$

Тогда для произвольного решения  $z(\cdot)$  системы (1) имеет место равенство  $z(k) = X_A(k, l)z(l)$ ,  $k, l \in \mathbb{N}_0$ ,  $k > l$ . Будем называть матрицу  $X_A(k, l)$ ,  $k, l \in \mathbb{N}_0$ ,  $k > l$ , *матрицей (оператором) Коши* гибридной системы (1) в целочисленные моменты времени. Обозначим через  $\mathcal{M}_n^0$  подмножество множества  $\mathcal{M}_n$ , состоящее из систем вида (1), для которых последовательность  $(X_A(k+1, k))_{k \in \mathbb{N}_0}$  вполне ограничена [1].

**Определение 1.** Показателями Ляпунова системы  $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$  будем называть величины  $\lambda_i(A) \doteq \inf_{F \in \mathcal{G}^i} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \ln \|X_A|_F(k, 0)\|$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $\mathcal{G}^i$  — множество  $i$ -мерных линейных подпространств пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $X_A|_F$  — сужение оператора Коши системы  $A(\cdot)$  на подпространство  $F \subset \mathbb{R}^n$ . Полным спектром показателей Ляпунова системы  $A(\cdot)$  назовем набор  $\lambda(A) \doteq (\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A))$ .

Заметим, что  $\lambda_1(C) \leq \lambda_2(C) \leq \dots \leq \lambda_n(C)$  для любой системы  $C(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$ , поэтому полный спектр каждой такой системы принадлежит множеству  $\mathbb{R}_{\leq}^n$  всех упорядоченных по неубыванию

наборов  $n$  чисел. Метрику во множестве  $\mathbb{R}_{\leq}^n$  полагаем индуцированной нормой пространства  $\mathbb{R}^n$ . Итак, имеем отображение  $C \mapsto \lambda(C)$ , определенное на  $\mathcal{M}_n^0$  и действующее в  $\mathbb{R}_{\leq}^n$ .

**Определение 2.** Полный спектр показателей Ляпунова системы  $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$  называется *устойчивым*, если отображение  $C \mapsto \lambda(C)$  непрерывно в точке  $C \equiv A$ .

Определения 1 и 2 — это непосредственный перенос на гибридные системы соответствующих определений, известных как для систем с непрерывным временем [2–4], так и для систем с дискретным временем (см., например, [5]).

Рассмотрим также линейную управляемую гибридную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k) + B_{11}(t)u(t) + B_{12}(k)v(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k) + B_{21}(k)u(k) + B_{22}(k)v(k), \end{cases} \quad (2)$$

где  $t \in [k, k+1)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0 \doteq \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $v \in \mathbb{R}^{m_2}$ ; функция  $B_{11}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$  ограничена, кусочно непрерывна, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывна справа в точках разрыва; управление  $u: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$  кусочно непрерывно, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывно справа в точках разрыва; функции  $B_{j2}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times m_2}$  ( $j = 1, 2$ ) и  $B_{21}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times m_1}$  ограничены; управление  $v: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$  произвольно.

**Определение 3** (см. [6]). Система (2) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие  $\vartheta \in \mathbb{N}$  и  $L > 0$ , что для каждого  $\ell \in \mathbb{N}_0$  и любых  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^{n_2}$  найдутся допустимые управления  $u: [\ell, \ell + \vartheta) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $v: [\ell, \ell + \vartheta - 1] \cap \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$  такие, что решение  $(x(\cdot), y(\cdot))$  системы (2) с начальными условиями  $x(\ell) = x_0$ ,  $y(\ell) = y_0$  и с выбранными  $u(\cdot)$ ,  $v(\cdot)$  удовлетворяет равенствам  $x(\ell + \vartheta) = x_1$ ,  $y(\ell + \vartheta) = y_1$ , при этом  $\sup_{t \in [\ell, \ell + \vartheta)} \|u(t)\| \leq L \max\{\|x_1 - x_0\|, \|y_1 - y_0\|\}$ ,

$$\max_{k \in [\ell, \ell + \vartheta - 1] \cap \mathbb{N}_0} \|v(k)\| \leq L \max\{\|x_1 - x_0\|, \|y_1 - y_0\|\}.$$

Замкнем систему (2) линейной обратной связью  $u(t) = U(t)x(t)$ ,  $v(k) = V(k)y(k)$ , где функция  $U: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$  ограничена, кусочно непрерывна, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывна справа в точках разрыва; функция  $V: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$  ограничена. В итоге получим замкнутую систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_{11}(t) + B_{11}(t)U(t))x(t) + (A_{12}(k) + B_{12}(k)V(k))y(k), \\ y(k+1) = (A_{21}(k) + B_{21}(k)U(k))x(k) + (A_{22}(k) + B_{22}(k)V(k))y(k). \end{cases} \quad (3)$$

Если  $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$ , то эта система принадлежит множеству  $\mathcal{M}_n^0$  при достаточно малых  $\sup_{t \geq 0} \|U(t)\|$ ,  $\sup_{k \in \mathbb{N}_0} \|V(k)\|$ , поэтому для нее определен полный спектр показателей Ляпунова, который условно обозначим как  $\lambda(A + BW)$ . Здесь  $W(t) \doteq (U(t), V(k))$ ,  $t \in [k, k+1)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Функцию  $W(\cdot)$  называем *допустимым матричным управлением*, если для  $U(\cdot)$  и  $V(\cdot)$  выполнены описанные выше условия.

**Определение 4.** Пусть  $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$ . Полный спектр показателей Ляпунова системы (3) называется *пропорционально локально управляемым*, если найдутся такие  $\delta > 0$  и  $\ell > 0$ , что для каждого набора чисел  $\mu \in \mathcal{O}_\delta(\lambda(A)) \subset \mathbb{R}_{\leq}^n$  найдется допустимое матричное управление  $W(\cdot)$  такое, что  $\lambda(A + BW) = \mu$ , при этом  $\sup_{t \geq 0} \|W(t)\| \leq \ell \|\mu - \lambda(A)\|$ .

**Теорема.** Если система  $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$  обладает устойчивым полным спектром показателей Ляпунова, а система (2) равномерно вполне управляема, то полный спектр системы (3) пропорционально локально управляем.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

#### Литература

1. Демидович В. Б. *Об одном признаке устойчивости разностных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 7. С. 1247–1255.
2. Ляпунов А. М. *Собр. соч.: В 6 т. Т. 2. Общая задача об устойчивости движения*. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956.
3. Миллионщиков В. М. *Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I* // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 8. С. 1408–1416.

4. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова*. Мн.: Издательство БГУ, 2006.
5. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. *Proportional local assignability of Lyapunov spectrum of linear discrete time-varying systems* // SIAM J. Control. Optim. 2019. Vol. 57, No 2. P. 1355–1377.
6. Попова С. Н., Фахразиева Э. А. *Равномерная локальная достижимость линейных управляемых гибридных систем* // «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024). Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского. Екатеринбург, 9–13 сентября 2024 г. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, ООО «Издательство УМЦ УПИ», 2024. С. 253–256.

Научное издание

**XIV БЕЛОРУССКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ,  
ПОСВЯЩЕННАЯ 65-ЛЕТИЮ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ**

**Материалы Международной научной конференции**

В трех частях

*Часть 2*

С о с т а в и т е л ь:

**Бусел Татьяна Сергеевна**

*Материалы публикуются в авторской редакции*

Компьютерная верстка *И. В. Близнец*

Подписано в печать 23.10.2024. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Бумага офсетная. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 19,07. Уч.-изд. л. 16,9. Тираж 90 экз. Заказ 219.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельства о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013, № 2/196 от 05.04.2017.

Ул. Ф. Скорины, 40, 220084, г. Минск.