С. Н. Попова, Э. А. Фахразиева (УдГУ, Ижевск, Россия) “О свойстве локальной достижимости линейных управляемых гибридных систем” (08.04.2024).

DOI: 10.31857/S0374064124080178, EDN: KBDKDZ

Рассмотрим линейную управляемую гибридную систему

$$\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k) + B_{11}(t)u(t) + B_{12}(k)v(k),$$
$$y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k) + B_{21}(k)u(k) + B_{22}(k)v(k), \tag{1}$$

где $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u \in \mathbb{R}^{m_1}$, $v \in \mathbb{R}^{m_2}$; функции $A_{11}\colon [0, +\infty) \to \to \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ и $B_{11}\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$ кусочно-непрерывны, могут иметь лишь разрывы первого рода и непрерывны справа в точках разрыва; управление $u\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{m_1}$ кусочно-непрерывно, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывно справа в точках разрыва; функции $A_{j2}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n_j \times n_2}$, $B_{j2}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n_j \times m_2}$ $(j = 1, 2)$ и $B_{21}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n_2 \times m_1}$ произвольны; управление $v\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{m_2}$ произвольно.

Под *решением системы* (1) при выбранных управлениях $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ понимаем функцию

$$z = z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

такую, что $x(t)$ и $y(k)$ удовлетворяют системе (1) при $t \in (k, k+1)$, при этом функция $x(t)$ непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$.

Выберем в системе (1) управления $u(t) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $v(t) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{m_2}$ и получим свободную систему

$$\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k), \quad y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k). \tag{2}$$

Пусть $X(t, s)$ — матрица Коши системы

$$\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t).$$

Положим

$$Z(k+1,k)=\begin{pmatrix} X(k+1,k) & \int_k^{k+1} X(k+1,s)\,ds\,A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{pmatrix}, \quad k\in\mathbb{N}_0,$$

$$Z(k,l)=Z(k,k-1)Z(k-1,k-2)\ldots Z(l+1,l)=\prod_{j=l}^{k-1} Z(j+1,j), \quad k,l\in\mathbb{N}_0, \quad k>l.$$

Тогда для произвольного решения $z(\cdot)$ системы (2) справедливо равенство

$$z(k)=Z(k,l)z(l), \quad k,l\in\mathbb{N}_0, \quad k>l.$$

Будем называть матрицу $Z(k,l)$, $k,l\in\mathbb{N}_0$, $k>l$, *матрицей Коши* гибридной системы (2) в целочисленные моменты времени.

Замкнем систему (1) линейной обратной связью

$$u(t)=U(t)x(t), \quad v(k)=V(k)y(k),$$

где функция $U\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}^{m_1\times n_1}$ кусочно-непрерывна, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывна справа в точках разрыва; функция $V\colon \mathbb{N}_0\to\mathbb{R}^{m_2\times n_2}$ произвольна. В итоге получим замкнутую систему

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=\big(A_{11}(t)+B_{11}(t)U(t)\big)x(t)+\big(A_{12}(k)+B_{12}(k)V(k)\big)y(k),\\ y(k+1)=\big(A_{21}(k)+B_{21}(k)U(k)\big)x(k)+\big(A_{22}(k)+B_{22}(k)V(k)\big)y(k).\end{gathered} \tag{3}$$

Положим $W(t)=(U(t),V(k))$, $t\in[k,k+1)$, $k\in\mathbb{N}_0$. Система (3) имеет вид (2), поэтому для неё также можно определить матрицу Коши в целочисленные моменты времени, которую будем обозначать $Z_W(k,l)$, $k,l\in\mathbb{N}_0$, $k>l$.

Определение 1. Пусть $k,l\in\mathbb{N}_0$, $k>l$. Система (3) называется *локально достижимой на отрезке* $[l,k]$, если найдётся такое $r>0$, что для любой матрицы $H\in\mathbb{R}^{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}$, удовлетворяющей неравенству $\|H-E\|\leqslant r$ ($E\in\mathbb{R}^{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}$ — единичная матрица), существует управление $W(t)=(U(t),V(j))$, $t\in[j,j+1)$, $j\in\{l,\ldots,k-1\}\subset\mathbb{N}_0$, такое, что $Z_W(k,l)=Z(k,l)H$.

Определение 2 [1]. Пусть $k,l\in\mathbb{N}_0$, $k>l$. Система (1) называется *вполне управляемой на отрезке* $[l,k]$, если для любых $x_0,x_1\in\mathbb{R}^{n_1}$ и $y_0,y_1\in\mathbb{R}^{n_2}$ найдутся допустимые управления $u\colon [l,k)\to\mathbb{R}^{m_1}$ и $v\colon [l,k-1]\cap\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}^{m_2}$ такие, что решение $(x(\cdot),y(\cdot))$ системы (1) с начальными условиями $x(l)=x_0$, $y(l)=y_0$ и с выбранными $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ удовлетворяет равенствам $x(k)=x_1$, $y(k)=y_1$.

Теорема. *Пусть $k,l\in\mathbb{N}_0$, $k>l$. Если система (1) вполне управляема на отрезке $[l,k]$, то соответствующая замкнутая система (3) локально достижима на этом отрезке.*

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № FEWS-2024-0009.

Литература. 1. Марченко, В.М. Гибридные дискретно-непрерывные системы. II. Управляемость и достижимость / В.М. Марченко // Дифференц. уравнения. — 2013. — Т. 49, № 1. — С. 111–122.