А. И. Мачтакова, Н. Н. Петров (УдГУ, Ижевск, Россия) “Задача группового преследования в линейных нестационарных дифференциальных играх с дробными производными” (25.03.2024).

DOI: 10.31857/S0374064124080165, EDN: KBFLEA

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающего E, описываемая системой

$$D^{(\alpha)} z_i = A_i(t) z_i + u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0, \quad u_i \in U_i, \quad v \in V. \tag{1}$$

Здесь $D^{(\alpha)}$ — производная по Капуто порядка α, $\alpha \in (0,1)$, $A_i(t)$ — непрерывные матричные функции порядка $k \times k$, $z_i, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, U_i, V — компакты в $\mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$. Заданы терминальные множества $M_i^* = M_i + M_i^0$, где M_i — линейные подпространства пространства $\mathbb{R}^k$, M_i^0 — выпуклые компакты из L_i — ортогонального дополнения к M_i в $\mathbb{R}^k$. Считаем, что $z_i^0 \notin M_i^*$ для всех $i \in I$.

Определение 1. Будем говорить, что задана *квазистратегия* $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение U_i^0, ставящее в соответствие начальным позициям $z^0 = z_i^0$, $i \in I$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в U_i.

Обозначим данную игру $G(n, z^0)$.

Определение 2. В игре $G(n,z^0)$ происходит *поимка*, если существуют момент $T>0$ и квазистратегии $\mathcal{U}_1,\ \ldots,\ \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1,\ \ldots,\ P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(t)\in V$, $t\in[t_0,T]$, существуют момент $\tau\in[t_0,T]$ и номер $p\in I$, для которых $z_p(\tau)\in M_p$.

Введём следующие обозначения [1]: E — единичная матрица порядка $k\times k$; $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{co} A$ — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A; $\pi_i\colon \mathbb{R}^k\to L_i$ — оператор ортогонального проектирования;

$$\Gamma(\beta)=\int\limits_0^{+\infty} s^{\beta-1}e^{-s}\,ds;\quad {}_\tau J_t f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)\,ds;$$

$$G_i^0(t,\tau)=\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}E,\quad G_i^{l+1}(t,\tau)={}_\tau J_t(A_i(t)G_i^l(t,\tau)),\quad l=0,1,\ldots;\quad \Phi_i(t,\tau)=\sum_{l=0}^{+\infty}G_i^l(t,\tau);$$

$$\tilde G_i^0(t,\tau)=E,\quad \tilde G_i^{l+1}(t,\tau)={}_\tau J_t(A_i(t)\tilde G_i^l(t,\tau)),\quad l=0,1,\ldots;\quad \Psi_i(t,\tau)=\sum_{l=0}^{+\infty}\tilde G_i^l(t,\tau);$$

$$W_i(t,\tau,v)=\pi_i\Phi_i(t,\tau)\big(U_i-v\big);\quad W_i(t,\tau)=\bigcap_{v\in V}W_i(t,\tau,v).$$

Предположение. *Для всех $i\in I$, $t\geqslant t_0$, $\tau\in[t_0,t]$ выполнено условие $W_i(t,\tau)\neq\varnothing$.*

Из теоремы об измеримом выборе [2, теорема 8.1.3] следует, что для каждого $i\in I$ при любом $t\geqslant t_0$ существует хотя бы один измеримый селектор $\gamma_i(t,\tau)\in W_i(t,\tau)$ для всех $t\geqslant t_0$, $\tau\in[t_0,t]$. Выберем произвольные измеримые селекторы $\gamma_i(t,\tau)$, зафиксируем их и обозначим

$$\xi_i(t)=\pi_i\Psi_i(t,t_0)z_i^0+\int\limits_{t_0}^t\gamma_i(t,\tau)\,d\tau.$$

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение и существуют $T>t_0$, $l\in I$ такие, что $\xi_l(T)\in M_l^0$. Тогда в игре $G(n,z^0)$ происходит поимка.*

В дальнейшем будем считать, что $\xi_i(t)\notin M_i^0$ для всех $i\in I$, $t\geqslant t_0$.

Определим далее

$$\lambda_i(t,\tau,v)=\sup\big\{\lambda\geqslant 0\colon \lambda(M_i^0-\xi_i(t))\cap\big(W_i(t,\tau,v)-\gamma_i(t,\tau)\big)\neq\varnothing\big\},\quad \delta(t,\tau)=\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda_i(t,\tau,v).$$

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение и $\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^t\delta(t,s)\,ds=+\infty$. Тогда в игре $G(n,z^0)$ происходит поимка.*

Пример. Рассмотрим игру $G(2,z^0)$, в которой система (1) имеет вид

$$D^{(\alpha)}z_{i1}=t\cdot z_{i2},\quad D^{(\alpha)}z_{i2}=u_i-v,\quad z_i(0)=z_i^0.$$

Здесь $I=\{1,2\}$, $z_i=(z_{i1},z_{i2})\in\mathbb{R}^2$, $U_i=V=[-1,1]$, $M_i^*=\{(z_{i1},z_{i2})\in\mathbb{R}^2\colon z_{i1}=0\}$, $z_1^0=(-1,-1)$, $z_2^0=(1,1)$. Обозначим

$$p(t,\tau)=\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\quad q(t,\tau)=\frac{\alpha(t-\tau)^{2\alpha-1}(t+\tau)}{\Gamma(2\alpha+1)},\quad r(t,\tau)=\frac{(t-\tau)^{\alpha}(t+\alpha\tau)}{\Gamma(\alpha+2)},\quad f(t)=1+\frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}.$$

Тогда [1]

$$\Psi_i(t,\tau)=\begin{pmatrix}1 & r(t,\tau)\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \Phi_i(t,\tau)=\begin{pmatrix}p(t,\tau) & q(t,\tau)\\ 0 & p(t,\tau)\end{pmatrix},\quad \pi_i=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Поэтому $M_i^0 = \{0\}$,

$$W_i(t,\tau,v) = q(t,\tau)(V - v), \quad W_i(t,\tau) = \{0\}, \quad \gamma_i(t,\tau) = 0,$$

$$\xi_1(t) = \pi_1\Psi_1(t,0)z_1^0 = -f(t), \quad \xi_2(t) = \pi_2\Psi_2(t,0)z_2^0 = f(t),$$

$$\lambda_1(t,\tau,v) = \frac{q(t,\tau)(1-v)}{f(t)}, \quad \lambda_2(t,\tau,v) = \frac{q(t,\tau)(1+v)}{f(t)}, \quad \delta(t,\tau) = \frac{q(t,\tau)}{f(t)}.$$

Так как $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \delta(t,s)\,ds = +\infty$, то выполнены все условия теоремы 2, и, значит, в игре $G(2,z^0)$ происходит поимка.

Теорема 3. *Пусть в системе (1)* $t_0 = 0$, *для всех* $i \in I$ $A_i(t) = a_i E$ *при* $t \geqslant 0$, $M_i^* = \{0\}$, $U_i = V = \{v\colon \|v\| \leqslant 1\}$, $a_i \leqslant 0$ *и* $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z_i^0, i \in I\}$. *Тогда в игре* $G(n,z^0)$ *происходит поимка.*

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № FEWS-2024-0009.

Литература. 1. Matychyn, I. Game-theoretical problems for fractional-order nonstationary systems / I. Matychyn, V. Onyshchenko // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2023. — V. 26. — P. 1031–1051. 2. Aubin, J.P. Set-Valued Analysis / J.P. Aubin, H. Frankowska. — Boston : Birkhauser, 1990. — 461 p.