Л.П. Сметанина,
О.В. Максимова

ПРОИЗВОДНЫЕ
DERIVATIVES

Ижевск
2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»

Институт математики, информационных технологий и физики

Кафедра математического анализа

Л.П. Сметанина, О.В. Максимова

ПРОИЗВОДНЫЕ
DERIVATIVES

Учебно-методическое пособие

Ижевск

2024

УДК 517.2 (075.8)
ББК 22.161.113
С502

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений ин-та математики, информационных технологий и физики ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» **Т.С. Быкова**

Сметанина Л.П., Максимова О.В.

С502 Производные (Derivatives) : учеб.-метод. пособие — Ижевск : Удмуртский университет, 2024. — 49 с.

В учебно-методическом пособии приведены основные теоретические сведения, изложена методика вычисления производной функции одной переменной, методы исследования функции с использованием производной, а также представлены тестовые и индивидуальные задания.

Данное пособие предназначено для иностранных студентов уровня бакалавриата всех направлений и всех форм обучения Института нефти и газа им. М.С.Гуцериева, Института экономики и управления, Института права и социального управления и безопасности в Удмуртском государственном университете.

УДК 517.2 (075.8)
ББК 22.161.113

Содержание

Введение

Данное методическое пособие подготовлено преподавателями кафедры математического анализа и отражает опыт при проведении занятий и организации самостоятельной работы российских и иностранных студентов Института нефти и газа им. М.С.Гуцириева и Института экономики и управления в Удмуртском государственном университете.

Пособие предназначено для методического обеспечения раздела «Дифференцирование» курса «Высшая математика», «Математика», «Математический анализ».

В пособии содержатся краткие теоретические сведения, изложены правила вычисления производных основных типов функций и способы применения производных. Изложение материала и формулировки примеров приведены на русском и английском языках.

Включенные в пособие тестовые вопросы и варианты для самостоятельной работы могут быть использованы на практических занятиях, а также как индивидуальные домашние задания.

Пособие предназначено обеспечить иностранных студентов наглядным вспомогательным материалом и индивидуальными заданиями при изучении курса «Высшая математика» и может быть использовано русскоязычными студентами нематематических направлений УдГУ.

1 Vocabulary - Словарь

Русский	English
прямая	line
уравнение	equation
бесконечность	infinity
величина, значение	value
числитель	numerator
знаменатель	denominator
предел	limit
приращение аргумента	increment of argument
приращение функции	increment of function
график функции в точке	graph of function at the point
возрастающая функция	increasing function
убывающая функция	decreasing funcrion
касательная	tangent
угловой коэффициент	slope
производная	derivative
взять производную	to take a derivative
дифференцировать выражение	to differentiate the expression
производная суммы	derivative of sum
производная произведения	derivative of product
производная частного	derivative of quotient
таблица производных	table of derivatives
производная сложной функции	derivative of composite function
найти дифференциал	to find the differential
производная второго порядка	derivative of the second order
производная n-го порядка	the n-th derivative
производная высшего порядка	higher order derivative

2 Основные понятия

2.1 Определение производной

Приращение аргумента — это разность значений аргумента, которая получается при переходе от точки x к точке x_1.

Приращение аргумента $\Delta x = x_1 - x$.

Точку $x_1 = x + \Delta x$ называют приращенной точкой.

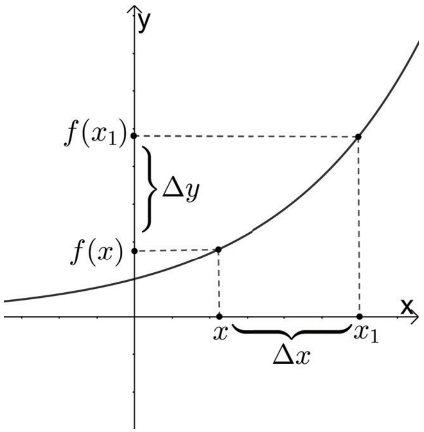
Приращение функции — это разность между значениями функции y_1 и y, полученными соответственно в приращенной точке x_1 и в исходной точке x.

Приращение функции

$$\Delta y = y_1 - y$$

или

$$\Delta y = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$



Если существует предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению аргумента Δx, когда $\Delta x \to 0$, то этот предел называется **производной функции** $y = f(x)$ в точке x и обозначается y', или $\dfrac{dy}{dx}$, или $f'(x)$.

Операция нахождения производной для функции называется **дифференцированием функции**.

2.2 Definition of the derivative

If x and x_1 are values of the argument, then $\Delta x = x_1 - x$ is called the **increment of the argument** x.

Let y be a function of x.

$$\Delta y = y_1 - y$$

or

$$\Delta y = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

is called the **increment of the function** y.

If ratio $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ approaches a limit as Δx approaches zero, that limit is called the **derivative** of y with respect to x.

It is represented by the notation

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \left(\text{or } f'(x), \text{ or } \frac{dy}{dx}\right).$$

2.3 Примеры - Examples

Example 1. Find the derivative of the function $y = x^3 - 3x + 2$ using the definition.

Let x receive an increment Δx.

The new value of x is $x + \Delta x$.

The new value y is $y + \Delta y$.

We get

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x) + 2 - (x^3 - 3x + 2) =$$
$$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x - 3\Delta x + 2 - x^3 + 3x - 2 =$$
$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 - 3\Delta x + (\Delta x)^3$$

and

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x - 3 + (\Delta x)^2.$$

As Δx approaches zero this ratio approaches the limit $y' = 3x^2 - 3$.

That is,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x - 3 + (\Delta x)^2) = 3x^2 - 3.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$, используя определение.

$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \left[\begin{array}{c} \text{домножаем и делим} \\ \text{на выражение,} \\ \text{сопряженное к числителю} \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x \cdot (\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Таким образом, $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Пример 3.

Найти по определению производную функции $y = \sin x$.

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x = \\ &= 2 \sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) = \\ &= 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \left[\sin\frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2},\ \Delta x \to 0\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \dfrac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Следовательно, $y' = \cos x$.

Example 4. Find the derivative of the function $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.

$$
\begin{aligned}
\Delta y &= \sec(x+\Delta x) - \sec x = \\
&= \frac{1}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x - \cos(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x} = \\
&= \frac{-2\sin\left(\dfrac{x+x+\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{x-x-\Delta x}{2}\right)}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x} = \\
&= \frac{-2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(-\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x} = \\
&= \frac{2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}.
\end{aligned}
$$

Therefore

$$
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x\cdot\Delta x} =
$$

$$
= \begin{bmatrix}\sin\dfrac{\Delta x}{2}\sim\dfrac{\Delta x}{2}, \\ \Delta x\to 0\end{bmatrix} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.
$$

The result of the calculations $y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$.

3 Правила дифференцирования

3.1 Таблица производных Table of derivatives of basic functions

1) $(C)' = 0,\ \ C = const$ — произвольное число (an arbitrary number);

2) $(x^k)' = k \cdot x^{k-1},\ \ k = const,\ \ k \neq 0;$

   2a) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ \ \sqrt{x} = x^{1/2};$

   2b) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2},\ \ \dfrac{1}{x} = x^{-1};$

   2c) $(x)' = 1,\ \ x = x^1;$

3) $(e^x)' = e^x$, $e = const \approx 2,73;$

4) $(a^x)' = a^x \ln a,\ \ a = const \neq 1,\ \ a > 0;$

5) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

6) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ \ a = const \neq 1,\ \ a > 0;$

7) $(\sin x)' = \cos x;$

8) $(\cos x)' = -\sin x;$

9) $(\operatorname{tg} x)' = (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

10) $(\operatorname{ctg} x)' = (\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$

12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$

13) $(\operatorname{arctg} x)' = (\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2};$

14) $(\operatorname{arcctg} x)' = (\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2};$

15) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$ где

$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус,
$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус.

3.2 Правила дифференцирования, связанные с арифметическими действиями Rules for finding a derivative for arithmetic operations

$u = u(x)$, $v = v(x)$ — функции, завиямщие от переменной x.

1) $(Cu)' = (C \cdot u(x))' = C \cdot u'$, $C = const$ — произвольное число;

2) $(u \pm v)' = (u(x) \pm v(x))' = u' \pm v'$;

3) $(uv)' = (u(x) \cdot v(x))' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

3.3 Примеры - Examples

Пример 1. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + \sqrt{9}$.

$$\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}, \qquad \frac{1}{x^3} = x^{-3},$$

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^3} + \sqrt{9}\right)' = (\sqrt[3]{x^2})' - \left(\frac{1}{x^3}\right)' + (\sqrt{9})' =$$

$$= \frac{2}{3}x^{-1/3} - (-3)x^{-4} + 0 = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{x^4}.$$

Пример 2. Вычислить производную функции $y = 2^x \cdot \operatorname{arctg} x$.

$$y' = (2^x \cdot \operatorname{arctg} x)' = (2^x)' \cdot \operatorname{arctg} x + 2^x \cdot (\operatorname{arctg} x)' =$$
$$= 2^x \ln 2 \cdot \operatorname{arctg} x + 2^x \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 3. Продифференцировать функцию $y = \dfrac{\cos x}{\ln x}$.

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\ln x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \ln x - \cos x \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} =$$
$$= \frac{-\sin x \cdot \ln x - \cos x \cdot \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}.$$

Example 4. Let $y = f(x) = \operatorname{tg} x$.

We shall show that $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ at every point, where $\cos x \neq 0$, that is in the domain of definition of the function $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$
$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Example 5. Calculate $f'(0)$ if $f(x) = e^x \cdot \arcsin x$.

$$f'(x) = (e^x \cdot \arcsin x)' = (e^x)' \cdot \arcsin x + e^x \cdot (\arcsin x)' =$$
$$= e^x \cdot \arcsin x + e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$f'(0) = e^0 \cdot \arcsin 0 + e^0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1.$$

4 Дифференциал первого порядка First-order differential

4.1 Дифференциал функции в точке Differencial of function

Говорят, что $y = f(x)$ **дифференцируема** в точке x, если ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad \text{где} \quad \alpha(\Delta x) \to 0, \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Главная линейная часть приращения $(A \cdot \Delta x)$ называется **дифференциалом** функции в точке x и обозначается символом d,

$$dy = A \cdot \Delta x.$$

Для дифференцируемой функции справедливо равенство

$$dy = y' \cdot dx, \quad \text{где} \quad dx = \Delta x.$$

We use the letter d for the operation of taking the differential.

Thus $d(u + v)$ — differential of $(u + v)$.

Let u, v be continuous functions of a single variable x, C— constant.

1) $dC = 0$;
2) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
3) $d(Cu) = C \cdot du$;
4) $d(uv) = d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du = udv + vdu$;
5) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Пример.

Найти дифференциал dy для функции $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 5x - \ln 6$.

$$y' = \left(\frac{1}{2}x^2 + 5x - \ln 6\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' + (5x)' - (\ln 6)' =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (x^2)' + 5 \cdot (x)' - 0 = \frac{1}{2} \cdot 2x + 5 \cdot 1 = x + 5,$$
$$dy = (x + 5) \cdot dx.$$

4.2 Приближенные вычисления с помощью дифференциала Applying the differential to approximate calculations

Из определений дифференцируемой функции и дифференциала функции в точке x следует

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Если Δx мало, то

$$\Delta y \approx dy.$$

Что соответствует

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot dx.$$

Откуда

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

Или для фиксированных значений $x = x_0, \;\; x + \Delta x = x_1$,

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0).$$

Пример 1. Найти приближенно значение $\sqrt[4]{80}$.

$$\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{81 - 1} = \sqrt[4]{81 \cdot \left(1 - \frac{1}{81}\right)} = 3 \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{1}{81}},$$

$$y = f(x) = 3\sqrt[4]{x}, \quad x_1 = 1 - \frac{1}{81}, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = -\frac{1}{81} \approx -0,0123,$$

$$f'(x) = (3\sqrt[4]{x})' = (3x^{1/4})' = \frac{3}{4}x^{-3/4} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}},$$

$$f'(x_0) = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{1^3}} = \frac{3}{4} = 0,75, \quad f(x_0) = 3\sqrt[4]{1} = 3,$$

$$\sqrt[4]{80} \approx 3 + 0,75 \cdot (-0,0123) = 2,991.$$

Пример 2.
Approximate the function $f(x) = x^2 - 4x + 3$ for $x = 1,03$.

$$x_1 = 1,03, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = 1,03 - 1 = 0,03,$$
$$f'(x) = (x^2 - 4x + 3)' = 2x - 4, \quad f'(x_0) = 2 \cdot 1 - 4 = -2,$$
$$f(x_0) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0,$$
$$f(1,03) \approx 0 + 2 \cdot 0,03 = 0,06.$$

Пример 3. Вычислить приближенно значение $\sin 31^\circ$.
Положим

$$y = f(x) = \sin x, \quad x_1 = 31^\circ, \quad x_0 = 30^\circ, \ \Delta x = x_1 - x_0 = 1^\circ.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}, \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6}.$$

Следовательно,

$$x_0 = \frac{\pi}{6}, \quad \Delta x = \frac{\pi}{180} \approx 0,0175, \quad \pi \approx 3,1415,$$
$$f'(x) = \cos x, \quad f'(x_0) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660, \quad f(x_0) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$
$$\sin 31^\circ \approx \frac{1}{2} + 0,8660 \cdot 0,0175 = 0,5156.$$

Example 4. Find $\tan 46^\circ$ to four decimals.

The value closest to 46°, for which $\tan x$ and its derivatives are known, is 45°. Therfore we let $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

$$f(x) = \tan x, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$
$$f'(x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2,$$
$$\Delta x = \frac{\pi}{180} \approx \frac{3,1415}{180} \approx 0,0175.$$

So $\tan 46^\circ \approx 1 + 2 \cdot \dfrac{\pi}{180} = 1,035.$

5 Методы дифференцирования
Methods for calculating the derivative

5.1 Производная сложной функции
The derivative of a composite function

Пусть y является функцией от z $(y = f(z))$, а z зависит от x $(z = \varphi(x))$. Пусть имеет смысл функция $y = f(\varphi(x))$. Тогда эта функция называется **сложной функцией** или **суперпозицией двух функций**.

Имеет место правило: **если** $\varphi(x)$ **дифференцируема в точке** x**, а** $y = f(z)$ **дифференцируема в соответствующей точке** z**, то**

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x.$$

Пример 1. Найти производную функции $y = \operatorname{tg}^4 x$.

Представим функцию $y = \operatorname{tg}^4 x$ в виде $y = z^4$, $z = \operatorname{tg} x$.

$$y'_z = (z^4)' = 4z^3, \quad z'_x = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Тогда $y'_x = 4z^3 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{4\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}$.

Правило распространяется на дифференцирование суперпозиции любого числа функций.

Пример 2. Продифференцировать $y = \arcsin \ln \sin x$.

$$y' = (\arcsin \ln \sin x)' = \Big(\arcsin\big(\ln(\sin x)\big)\Big)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (\ln \sin x)^2}} \cdot (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\ln \sin x)^2}} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (\ln \sin x)^2}} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x.$$

Example 3. Differentiate $y = \sqrt{1 - x^2}$.

$\sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{1/2}$

Let $y = z^{1/2}$, $z = 1 - x^2$.

Then $y'_z = \dfrac{1}{2} z^{-1/2} = \dfrac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}, \;\; z'_x = -2x$.

Since $y'_x = y'_z \cdot z'_x = \dfrac{1}{2}(1-x^2)^{1/2} \cdot (-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Пример 4. Найти y', если $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{3-x^2}}$.

Применим правило дифференцирования частного

$$y' = \frac{(x+1)' \cdot \sqrt{3-x^2} - (x+1) \cdot (\sqrt{3-x^2})'}{(\sqrt{3-x^2})^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{3-x^2} - (x+1) \cdot \frac{1}{2}(3-x^2)^{-1/2} \cdot (3-x^2)'}{3-x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3-x^2} - (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{3-x^2}} \cdot (-2x)}{3-x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3-x^2} + (x+1) \cdot \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}}{3-x^2} =$$

$$= \frac{3 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} + x}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}} = \frac{3+x}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}.$$

Example 5. Find the derivative of the following function $y = \sin^2(x \cos x^3)$.

Let's apply the rule of differentiation of a complex function and the rule of the derivative of the product

$$y' = 2\sin(x\cos x^3) \cdot \big(\sin(x\cos x^3)\big)' =$$
$$= 2\sin(x\cos x^3) \cdot \cos(x\cos x^3) \cdot (x\cos x^3)' =$$
$$= 2\sin(x\cos x^3) \cdot \cos(x\cos x^3) \cdot (1 \cdot \cos x^3 + x \cdot (\cos x^3)') =$$
$$= \sin(2x\cos x^3) \cdot (\cos x^3 - x \cdot \sin x^3 \cdot 3x^2).$$

Example 6. Find y' for $y = \arcsin 2x - \sqrt{1-4x^2}$.

Differentiate the function

$$y' = \big(\arcsin 2x - \sqrt{1-4x^2}\big)' = \big(\arcsin 2x\big)' - \big(\sqrt{1-4x^2}\big)' =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2x)' - \frac{1}{2\sqrt{1-4x^2}} \cdot (1-4x^2)' =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 - \frac{1}{2\sqrt{1-4x^2}} \cdot (-8x) = \frac{2+4x}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Пример 7. Вычислить производную функции $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{1-x^4}{1+x^4}}$. Используя свойства логарифма, упростим выражение

$$y = \frac{1}{4} \ln \frac{1-x^4}{1+x^4} = \frac{1}{4}\big(\ln(1-x^4) - \ln(1+x^4)\big).$$

Тогда производная функции

$$y' = \frac{1}{4}\Big(\big(\ln(1-x^4)\big)' - \big(\ln(1+x^4)\big)'\Big) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-x^4} \cdot \big(1-x^4\big)' - \frac{1}{1+x^4} \cdot \big(1+x^4\big)'\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{-4x^3}{1-x^4} - \frac{4x^3}{1+x^4}\right) = -x^3 \cdot \left(\frac{1}{1-x^4} + \frac{1}{1+x^4}\right) =$$
$$= \frac{-x^3 \cdot (1 + \cancel{x^4} + 1 - \cancel{x^4})}{1-x^8} = \frac{-2x^3}{1-x^8}.$$

5.2 Производные высших порядков Derivatives of higher orders

Производной второго порядка (или **второй производной**) от функции $y = f(x)$ называется производная от первой производной

$$y'' = (y')'.$$

Обозначается также $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ или $f''(x)$.

Производной n-го порядка называется производная от $(n-1)$-ой производной $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

The first derivative y' is a function of x. Its derivative with respect to x, written y'', is called **the second derivative** of y with respect to x. That is, $y'' = (y')'$.

Similarly, $y''' = (y'')'$, etc.

Пример 1. Найти y'' для $y = \operatorname{arctg} x$.

$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$,

$y'' = \left((1+x^2)^{-1}\right)' = (-1)(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

Example 2. Find all derivatives for $y = x^3$.

Differentiation with respect to x, gives

$y' = (x^3)' = 3x^2$,

$y'' = (3x^2)' = 6x$,

$y''' = (6x)' = 6$,

$y^{IV} = y^{(4)} = (6)' = 0$.

For $n \geqslant 4$ completed $y^{(n)} = 0$.

Example 3. Find the n-th derivative for function $y = x^n$.

$y' = nx^{n-1}$,

$y'' = n(n-1)x^{n-2}$,

$y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$.

If n is a positive integer, this process can be continued until ultimately $n-n$ is reached as the index of x.

$y^{(n)} = n!, \quad n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ (n-factorial).

Пример 4. Найти $y^{(n)}$ для функции $y = \sin x$.

$y' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$\ldots$

$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Доказательство методом математической индукции

База индукции.

При $n=1$ выполнено $y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
Шаг индукции.
При $n=k$ предполагаем, что $y^{(k)} = \sin\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.
Тогда для $n=k+1$ выполнено

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = \left(\sin\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin\left(x + (k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, равенство справедливо для любого n.
Example 5. Find the n-th derivative for function $y = a^x$.
Therefore $y' = a^x \ln a$.
$y'' = a^x (\ln a)^2$
and $y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$.

5.3 Логарифмическая производная The logarithmic derivative

Рассмотрим функцию вида (Consider an equation of the form) $y = \left(f(x)\right)^{g(x)}$.

Она называется **показательно-степенной**.

Logarithmic differentiation is a method to find the derivatives of some complicated functions, using logarithms.

Производная этой функции находится по алгоритму (We find the derivative using the following algorithm):

1. Логарифмируем обе части равенства (Logarithm both sides of the equality) $y = \left(f(x)\right)^{g(x)}$:

$$\ln y = \ln\left(\left(f(x)\right)^{g(x)}\right).$$

2. Показатель выносим за знак логарифма (The exponent of the logarithm argument is output as a multiplier before the logarithm):

$$\ln y = g(x)\cdot \ln\left(f(x)\right).$$

The basic properties of logarithms are applied.

For example,

$\log a^k = k \cdot \log a;$

$\log(a \cdot b) = \log a + \log b, \quad a > 0, \quad b > 0;$

$\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b, \quad a > 0, \quad b > 0.$

3. Находим производную от обеих частей (Finding the derivative of both parts of the equality):

$$\Big(\ln y\Big)' = \Big(g(x) \cdot \ln\big(f(x)\big)\Big)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)'.$$

4. Умножаем обе части на y (Multiply both parts by y):

$$y' = y \cdot \Big(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)'\Big).$$

5. Вместо y подставляем $\Big(f(x)\Big)^{g(x)}$:

$$y' = \Big(f(x)\Big)^{g(x)} \cdot \Big(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)'\Big).$$

Пример 1. Найти y' для функции $y = \big(\cos x\big)^{x^2+1}$.

Применим алгоритм логарифмического дифференцирования.

$$\ln y = \ln\big(\cos x\big)^{x^2+1} = (x^2+1) \cdot \ln\big(\cos x\big);$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2x \cdot \ln\cos x + (x^2+1) \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x);$$

$$y' = y \cdot \big(2x \cdot \ln\cos x - (x^2+1) \cdot \operatorname{tg} x\big);$$

$$y' = \big(\cos x\big)^{x^2+1} \cdot \big(2x \cdot \ln\cos x - (x^2+1) \cdot \operatorname{tg} x\big).$$

Пример 2. Продифференцировать функцию $y = \sin(x^x)$.

Производная сложной функции

$$y' = \cos(x^x) \cdot (x^x)'.$$

Пусть $z = x^x$. Согласно алгоритму

$$\begin{aligned}
&\ln z = \ln x^x = x \cdot \ln x;\\
&\frac{1}{z} \cdot z' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x};\\
&z' = z \cdot (\ln x + 1);\\
&z' = x^x \cdot (\ln x + 1).
\end{aligned}$$

Тогда $y' = \cos(x^x) \cdot (x^x) \cdot (\ln x + 1)$.

Пример 3. Вычислить производную функцию

$y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[5]{(x+2)^2} \cdot \sqrt{(x+5)^3}}$.

Дифференцирование дроби усложнено из-за вида ее знаменателя. Предварительно прологарифмируем обе части равенства

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(x-2) - \frac{2}{5}\ln(x+2) - \frac{3}{2}\ln(x+5).$$

Продифференцируем равенство

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2(x-2)} - \frac{2}{5(x+2)} - \frac{3}{2(x+5)};$$

$$y' = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[5]{(x+2)^2} \cdot \sqrt{(x+5)^3}} \cdot \left(\frac{1}{2x-4} - \frac{2}{5x+10} - \frac{3}{2x+10}\right).$$

Example 4. Find the value of y', if $y = 3x^{\operatorname{tg} x}$.

Let's find the derivative using the algorithm

$$\begin{gathered}
\ln y = \ln\left(3x^{\operatorname{tg} x}\right) = \ln 3 + \ln\left(x^{\operatorname{tg} x}\right) = \ln 3 + \operatorname{tg} x \cdot \ln x;\\
\frac{1}{y} \cdot y' = 0 + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x};\\
y' = y \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}\right);\\
y' = 3x^{\operatorname{tg} x} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}\right).
\end{gathered}$$

Example 5.

Find the derivative of the following function $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 \cdot (2x+5)}{3x-1}}$.

$$\ln y = \frac{1}{3}\big(2\ln x + \ln(2x+5) - \ln(3x-1)\big);$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2x+5} \cdot (2x+5)' - \frac{1}{3x-1} \cdot (3x-1)'\right);$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2 \cdot (2x+5)}{3x-1}} \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{2x+5} - \frac{3}{3x-1}\right).$$

5.4 Производная неявной функции
The derivative of an implicit function

Функция $y = f(x)$ называется **неявной**, если зависимость между x и y выражена уравнением $F(x; y) = 0$, не разрешенным относительно y.

If the dependent variable y in the function is not explicitly highlighted on either side of the equation, then the function is called **implicit**.

The standard form to represent the implicit function is as follows $F(x; y) = 0$.

Чтобы найти y', нужно продифференцировать уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию от x и полученное уравнение разрешить относительно y'.

To differentiate an implicit function, the following method is used: both terms of the implicit equation are differentiated by the variable x, while the other variables are considered as undefined functions of x. The resulting equation is solved to find the value of y'.

Пример 1. Найти производную y', если $e^y + xy = 1$.

Calculate derivative of the implicit function.

$$e^y \cdot y' + 1 \cdot y + x \cdot y' = 0;$$
$$y' \cdot \big(e^y + x\big) = -y;$$
$$y' = -\frac{y}{e^y + x}.$$

Пример 2.

Продифференцировать функцию $y^x = x^{\ln x}$ по переменной x.

Прологарифмируем равенство

$$\ln y^x = \ln x^{\ln x};$$
$$x \ln y = \ln x \cdot \ln x;$$
$$x \ln y = \ln^2 x.$$

Продифференцируем обе части равенства

$$1 \cdot \ln y + x \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x};$$
$$\frac{x}{y} \cdot y' = \frac{2 \ln x}{x} - \ln y;$$
$$y' = \frac{\dfrac{2 \ln x}{x} - \ln y}{\dfrac{x}{y}} = \frac{2y \ln x - xy \ln y}{x^2}.$$

Пример 3. Показать, что функция, заданная неявным уравнением $xy - \ln y = 1$ удовлетворяет равенству $y^2 + (xy - 1) \cdot y' = 0$.

Дифференцируем обе части первого уравнения, учитывая, что y — функция от x. Получаем следующие равенства:

$$1 \cdot y + x \cdot y' - \frac{1}{y} \cdot y' = 0;$$
$$y' \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right) = -y;$$

$$y' = \frac{-y}{x - \dfrac{1}{y}};$$

$$y' = -\frac{y^2}{xy-1};$$

$$y^2 + (xy-1) \cdot \frac{-y^2}{xy-1} \equiv 0.$$

Что и требовалось показать.

Example 4. Find derivative y', if $x^2 + xy - y^2 = 1$.

We can consider y as function of x determined by the equation.

Then

$$(x^2)' + (xy)' - (y^2)' = 0;$$
$$2x + y + xy' - 2yy' = 0;$$
$$y'(x - 2y) = -2x - y.$$

Consequently $y' = \dfrac{-2x-y}{x-2y}$.

5.5 Производная параметрически заданной функции The derivative of function represented parametrically

Функция задана параметрическими уравнениями, если функция y аргумента x задана системой равенств $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

The record, when the function $y(x)$ is defined using the third variable, is called **the parametric form**.

The relationship between x and y is expressed as $x = x(t)$, and $y = y(t)$ is a parametric representation of a function with parameter t.

Тогда производная этой функции по переменной x есть $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. It is a derivative of a function in parametric form.

Вторая производная

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Пример 1. Найти производную y'_x, если $\begin{cases} x = \dfrac{3}{t^3}, \\ y = 3t^4 + 5. \end{cases}$

$$x'_t = (3t^{-3})' = -\frac{9}{t^4}, \qquad y'_t = 12t^3;$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{12t^3}{-\dfrac{9}{t^4}} = -\frac{4}{3}t^7.$$

Example 2.

Let us find the second derivative y''_{xx}, assuming $x'_t \neq 0$ for $\begin{cases} y = e^t, \\ x = \ln t. \end{cases}$

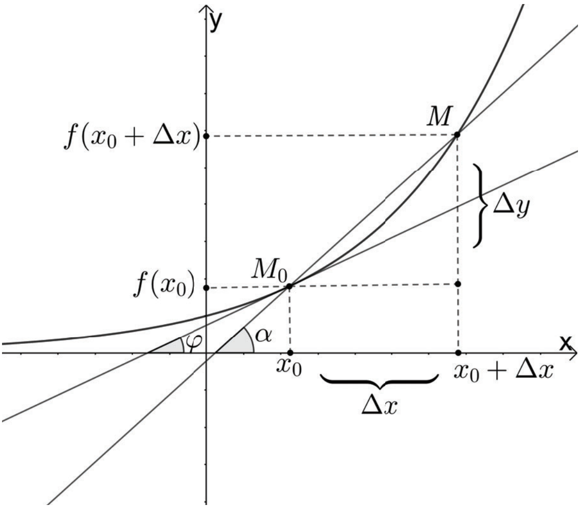
$$x'_t = \frac{1}{t}, \quad y'_t = e^t, \qquad x''_t = -\frac{1}{t^2}, \quad y''_{tt} = e^t.$$

$$\text{Then} \quad y''_{xx} = \frac{e^t \cdot \frac{1}{t} - e^t \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^3} = e^t \cdot (t^2 + t).$$

6 Приложения производной функции

6.1 Геометрическое приложение производной Geometrical Applications of the Derivative

Возьмем на графике функции $y = f(x)$ точки $M_0(x_0;\, f(x_0))$ и $M(x_0+\Delta x;\, f(x_0+\Delta x))$. Проведем прямую M_0M, которую называют **секущей графика функции**.



$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$ — тангенс угла наклона секущей M_0M к оси Ox.

Устремим Δx к 0, тогда получим в предельном положении секущей прямую, которую называют **касательной** к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

$f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi$ — тангенс угла наклона касательной к оси Ox.

Уравнение касательной в точке с абсциссой x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Прямая перпендикулярная касательной, проведенная в точке касания, называется **нормаль** к графику функции в заданной точке.

Уравнение нормали в точке с абсциссой x_0:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Tangent line and normal

Tangent to a graph of function $y = f(x)$ at point M_0 is the limiting position M_0M at $\Delta x \to 0$.

Let m_1 be the slope of a given curve at $P_1(x_1; y_1)$. It is shown in analytic geometry that a line through $(x_1; y_1)$ with slope m_1 is represented by the equation

$$y - y_1 = m_1 \cdot (x - x_1).$$

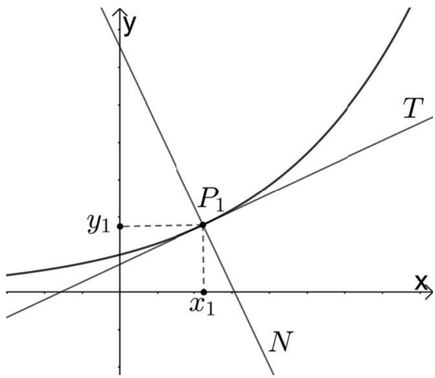
This equation then represents **the tangent** at $(x_1; y_1)$ where the slope of the curve is m_1.

The line P_1N perpendicular to the tangent at its point of contact is called **the normal** the curve at P_1.

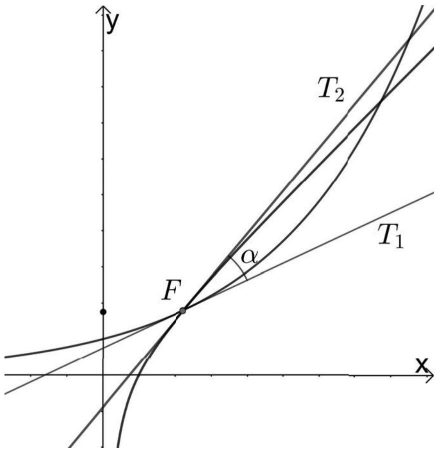
Since the slope of the tangent is m_1 the slope of a perpendicular line is $\frac{-1}{m_1}$ and so

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_1} \cdot (x - x_1)$$

is the equation of normal at $(x_1; y_1)$.



Угол между кривыми
Angle between two curves



Углом между кривыми в точке их пересечения называют угол, образованный касательными к этим кривым в рассмотренной точке.

By the angle between two curves at a point of intersection we mean the angle between their tangents at that point.

Let m_1 and m_2 be the slopes of two curves at a point of intersection. It is shown in analytic geometry that the angle α from a line with slope m_1 to one with slope m_2 satisfies the equation

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}.$$

The equation thus gives the angle α from a curve with slope m_1 to one with slope m_2, the angle being considered positive when measured in the counterclockwise direction.

Пример 1.

Составить уравнения касательных к кривой $y = e^{1-x^2}$ в точках ее пересечения с прямой $y = 1$.

Находим точки пересечения:

$$e^{1-x^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 - x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Производная функции

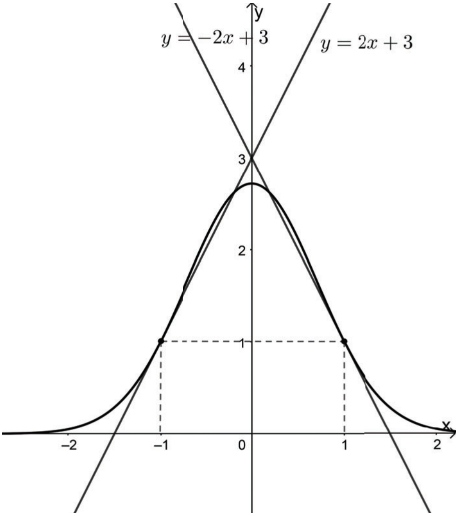
$$y' = \left(e^{1-x^2}\right)' = e^{1-x^2} \cdot (-2x).$$

Составляем уравнение касательной в точке с абсциссой $x = 1$:

$$y = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1);$$
$$y = 1 - 2(x - 1) \quad \text{или} \quad y = -2x + 3.$$

Уравнение касательной в точке с абсциссой $x = -1$ имеет вид

$$y = 1 + 2(x + 1) \quad \text{или} \quad y = 2x + 3.$$

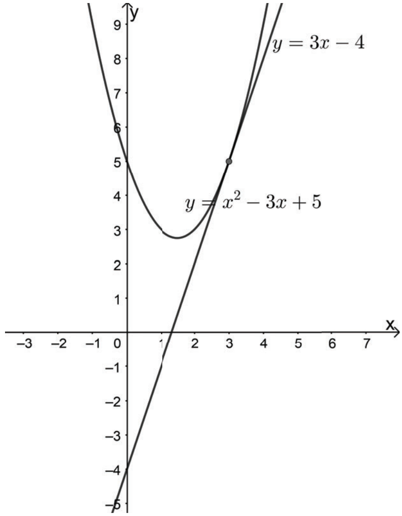


Пример 2. На кривой $y = x^2 - 3x + 5$ найти точку, в которой касательная параллельна прямой $y = 3x - 1$. Сделать рисунок.

Пусть x_0 - абсцисса точки касания. Тогда

$$f(x_0) = x_0^2 - 3x_0 + 5, \qquad f'(x_0) = 2x_0 - 3;$$
$$y = (x_0^2 - 3x_0 + 5) + (2x_0 - 3) \cdot (x - x_0), \quad \text{или}$$
$$y = (2x_0 - 3)x + (x_0^2 - 3x_0 + 5 - 2x_0^2 + 3x_0), \quad \text{или}$$
$$y = (2x_0 - 3)x + (5 - x_0^2).$$

Так как по условию касательная параллельна ($\|$) прямой $y = 3x - 1$, то $\quad 2x_0 - 3 = 3 \implies x_0 = 3$. Уравнение касательной $y = 3x - 4$.



Пример 3.

Найти уравнение нормали к графику функции $y = \sin 3x$ в точке $x = \dfrac{\pi}{18}$. Вычислим значение функции

$$y\left(\frac{\pi}{18}\right) = \sin\left(\frac{3\cdot\pi}{18}\right) = \frac{1}{2};$$

и производную функции в заданной точки

$$y'(x) = 3\cos 3x, \qquad y'\left(\frac{\pi}{18}\right) = 3\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi}{18}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Уравнение нормали $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\left(x - \dfrac{\pi}{18}\right)$.

Example 4. Find the equation of the tangent and normal the elipse $x^2 + 2y^2 = 9$ at the point $M_0(1;2)$.

The slope at any point of the curve is $y' = -\dfrac{x}{2y}$, in that

$$2x + 2\cdot 2y\cdot y' = 0 \quad\implies\quad x + 2yy' = 0 \quad\implies\quad y' = -\frac{x}{2y}.$$

At point M_0 the slope is $-\dfrac{1}{4}$.

The equation of the tangent is

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

and the equation of the normal is

$$y - 2 = 4(x - 1).$$

Example 5. Find the angles determined by the line $y = x$ and parabola $y = x^2$.

Solving the equations simultaneous we find that the line and parabola intersect at (1; 1) and (0; 0)

$$x^2 = x \quad \Longrightarrow \quad x(x-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 1,\ y_1 = 1 \\ x_2 = 0,\ y_2 = 0. \end{array} \right.$$

The slope of line is 1.

The slope at any point of the parabola is $y' = 2x$.

At (1; 1) the slope of the parabola is then 2 and angle from the line to the parabola is given by $\tan\alpha_1 = \dfrac{2-1}{1+2} = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \alpha_1 = 18^\circ\, 26'$.

At (0; 0) the slope of the parabola is then 0 and so the angle from the line to the parabola is given by $\tan\alpha_2 = \dfrac{0-1}{1+0} = -1 \Longrightarrow \alpha_1 = -45^\circ$.

The negative sign signifies that the angle from the line to parabola is measured in the clockwise derective.

6.2 Правило Лопиталя
The L'Hospital-Bernoulli Rule

Предположим, что $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности a (возможно исключая a) и $g'(x) \neq 0$ в окрестности a, при $x \neq a$. Тогда, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

или

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

(имеется неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при $x \to a$), то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{(правило Лопиталя)},$$

если предел в правой части равенства существует либо равен $\pm\infty$.

Неопределенности $(0\cdot\infty)$ и $(\infty-\infty)$ сводятся к $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Для раскрытия неопределенностей 1^∞, 0^0 используется операция логарифмирования (потенцирования).

Suppose $f(x)$ and $g(x)$ differentiable and $g'(x) \neq 0$ near a (expect possible a). Suppose that

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

or that

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{and} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

(in other words, we have an indeteminate form of type $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$). Then

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{(The L'Hospital Rule)},$$

if the limit on the right side exists (or is ∞ or $-\infty$).

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\sin^2 x} - 1}{\ln\cos x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{\sin^2 x} - 1}{\ln\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(2^{\sin^2 x} - 1\right)'}{(\ln\cos x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2^{\sin^2 x} \cdot \ln 2 \cdot 2\sin x\cos x}{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)} =$$

$$= -2\ln 2 \cdot \lim_{x\to 0} \left(2^{\sin^2 x} \cdot \cos^2 x\right) = -2\ln 2.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+1}{3x^3-x^2+x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+1}{3x^3-x^2+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3+2x^2+1)'}{(3x^3-x^2+x)'}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x}{9x^2-2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{18x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{18}=\frac{1}{3}.$$

Example 3.

We will L'Hospital's Rule to show that $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\sin x}{x^2+3x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+\sin x}{x^2+3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(2x+\sin x)'}{(x^2+3x)'}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+\cos x}{2x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}2+\lim\limits_{x\to 0}\cos x}{\lim\limits_{x\to 0}2x+\lim\limits_{x\to 0}3}=$$
$$=\frac{2+1}{0+3}=1,\qquad \text{as we wanted to show.}$$

Example 4. Consider the limit $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2)'}{(1-\cos x)'}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)'}{(\sin x)'}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}2}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

Example 5. Find the limit of $(1+x)^{1/x}$ as x approaches zero.

$$\text{Let}\quad A=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1^{\infty});$$

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \ln (1+x)^{\frac{1}{x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

When x is zero this last expression becomes $\left(\frac{0}{0}\right)$. Therefore

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1;$$
$$\ln A = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = e^1 = e.$$

Example 6. Find the value approach by $\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$ as x approaches $\dfrac{\pi}{2}$.

When x approaches $\dfrac{\pi}{2}$, the numerator and denominator of the fraction approach ∞.

Therefore,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 3x}.$$

When x is replaced by $\dfrac{\pi}{2}$, the last expresion takes the form $\dfrac{0}{0}$, and

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{-6}\cos x \sin x}{\cancel{-6}\cos 3x \sin 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{3(\cos^2 3x - \sin^2 3x)} = \frac{1}{3}.$$

6.3 Физический (механический) смысл производной Mechanical Applications of the Derivative

Если точка движется прямолинейно по закону $S = S(t)$ (t — время, S — путь), то $S'(t)$ представляет собой скорость изменения пути в момент времени t, а $S''(t)$ — ускорение точки в момент t.

The velocity at the time t is defined as $v = \dfrac{dS}{dt} = S'(t)$.

This equation show that dS is the distance the particle would move in a time at if the velocity remained constant. As a rule the velocity will not be constant and so dS will be different from the distance the particle does move in the time dt.

When S is increasing, the velocity is positive, when S decreasing, the velocity is negative.

Acceleration along a straight line. The acceleration of a particle moving along a straight line is defined as the rate of change of its velocity. That is $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2S}{dt^2} == S''(t)$.

This equation show that dv is the amount of would increase in the time dt of the acceleration remained constant.

The acceleration is positive when the velocity is increasing, negative, when it is decreasing.

Пример 1. Пусть прямолинейное движение точки для положительных значений t происходит по зак ону $S(t) = 2t^3 - 3t^2 + 72t + 34$. Определить время t, при котором скорость движения равна нулю.

$v(t) = S'(t) = 6t^2 - 6t + 72$;

$6t^2 - 6t + 72 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t^2 - t + 12 = 0$;

$t_1 = -3$ (посторонний корень), $t_2 = 4$.

Ответ: $t = 4$.

Example 2. A body starting om rest falls approximately $S = 16t^2$ fell in t seconds. Find its velocity at the end of 10 seconds.

The velocity at any time t is $v = \dfrac{dS}{dt} = 32t\,\text{ft}/\text{sec}$.

At the time of seconds it is $v = 320\,\text{ft}/\text{sec}$.

Example 3. At the end t seconds the vertical height of a fall thrown upward with velocity $100\,\text{ft}/\text{sec}$ is $h = 100t - t^2$.

Find its velocity and acceleration

$$v = \frac{dh}{dt} = (100 - 32t)\,\text{ft}/\text{sec}, \qquad a = \frac{dv}{dt} = -32\,\text{ft}/\text{sec}^2.$$

7 Тестовые задания (Test tasks)

1. Производная функция $y = 4x\sqrt[4]{x} + 3\sin 1$ в точке 16 равна

1) -5 2) $10\,dx$ 3) $5\,dx$ 4) 10 4) 16.

2. Производная функции $y = x \cdot \ln x$ равна

1) $x + \ln x$ 2) $1 + \ln x$ 3) $1 + \dfrac{1}{x}$ 4) $\dfrac{1}{x}$.

3. Производная функции $y = x^4 \cdot e^{5x}$ имеет вид

1) $20x^3 \cdot e^{5x}$ 2) $4x^3 \cdot e^{5x}$ 3) $4x^3 \cdot e^{5x} + 5x^4 \cdot e^{5x}$ 4) $20x^4 \cdot e^{4x}$

4. Производная частного $y = \dfrac{x+5}{x+1}$ равна

1) $\dfrac{4}{(x+1)^2}$ 2) $-\dfrac{4}{(x+1)^2}$ 3) $\dfrac{4}{x+1}$ 4) $-\dfrac{4}{x+1}$.

5. Дифференциал функции $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ в точке $x = 1$ при $\Delta x = 0,1$ равен

1) 0 2) $0,1$ 3) 1 4) $1,1$.

6. Производная второго порядка функции $y = \dfrac{2}{5x+3}$ равна

1) $\dfrac{4}{(5x+3)^3}$ 2) $\dfrac{-10}{(5x+3)^2}$ 3) $\dfrac{100}{(5x+3)^3}$ 4) $-\dfrac{100}{(5x+3)^3}$.

7. Производная третьего порядка функции $y = (2x+3)^3 \cdot \sqrt{2x+3}$ имеет вид 1) $y''' = \dfrac{105}{\sqrt{2x+3}}$ 2) $y''' = 105\sqrt{2x+3}$

3) $y''' = 24 \cdot (2x+3) \cdot \sqrt{2x+3}$ 4) $y''' = 48\sqrt{2x+3}$.

8. Точка движется прямолинейно по закону $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 5x + 3$ (x — время, y — расстояние). Ее скорость была равна 2 в момент времени t равный

1) -3 2) 0 3) 11 4) 3 5) 7 6) 10.

9. Угловой коэффициент в уравнении касательной к кривой

$y = \dfrac{8}{4+x^2}$ в точке $x = 2$ равен

1) -2 2) $-0,5$ 3) 0 4) $0,2$ 5) 2 6) 4.

10. Производная функции $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$ равна нулю в точке

1) -2 2) -1 3) 0 4) 1 5) 2 6) точка не существует.

11. Производная функции $y = x \cdot e^x$ отрицательна на промежутке

1) $(-\infty; -1)$ 2) $(-\infty; -2)$ 3) $(-2; +\infty)$ 4) $(-1; +\infty)$

5) нет промежутков.

12. Вторая производная функции $f(x)$ имеет вид

$f''(x) = (x-10)(x-7)$.

Она является положительной на промежутке (промежутках)

1) $(7; 10)$ 2) $(-\infty; -10)$ и $(-7; +\infty)$ 3) $(-10; -7)$

4) $(-\infty; 7)$ и $(10; +\infty)$.

13. Если функция имеет вид $\begin{cases} x(t) = 5t + \operatorname{tg}(3t) \\ y(t) = \sin(2t) + 13 \end{cases}$, то значение производной переменной y по переменной x при $t = 0$ равно

1) $0,25$ 2) $-0,25$ 3) $\dfrac{1}{3}$ 4) $-\dfrac{1}{3}$ 5) $\dfrac{1}{6}$.

14. Какое из ниже перечисленных предложений определяет производную функции (когда приращение аргумента стремится к нулю)?

Выберите один ответ:

1) Отношение предела функции к аргументу;

2) Предел отношения приращения функции к приращению аргумента;

3) Отношение приращения функции к приращению аргумента;

4) Предел отношения функции к приращению аргумента.

15. Физический смысл производной – это:

1) тангенс угла наклона касательной;

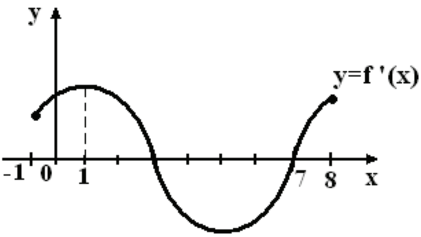
2) работа силы;

3) скорость изменения величины или процесса;

4) ускорение изменения величины или процесса.

Выберите один ответ.

16. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[-1; 8]$.



Укажите точку (точки), в которой (в которых) касательная к графику функции параллельна оси Ox:

1) 3 2) 7 3) 1 4) 8.

17. Укажите верную формулу

1) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'}{v'}$;

2) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$;

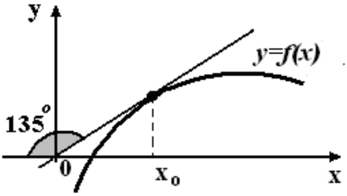
3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v + u \cdot v'}{v^2}$;

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v'}$.

18. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \dfrac{1}{2}t^3 - t^2 + 2t$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t = 6$с.

1) 84   2) $1,5$ 3) 44   4) 0.

19. График функции $y = f(x)$ изображен на рисунке. Найти значение производной этой функции в точке x_0.



1) -1 2) 0   3) $0,5$ 4) 1   5) $\sqrt{3}$.

20. Касательная к графику функции $f(x) = 2x - x^2$ в его точке с абсциссой $x_0 = 1,5$ наклонена к положительному направлению оси Ox под углом

1) 2   2) $\operatorname{arctg} 2$ 3) $30°$ 4) $450°$ 5) $120°$ 6) $135°$.

8 Варианты для самостоятельной работы Tasks for independent work

Вариант 1

Найти производные функций

1. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$;

2. $y = x \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x}$;

3. $y = (x^2 - 1)^{1-x^2}$;

4. $e^x + e^y - e^{xy} = 1$.

5. $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{1-t^2} \\ y = \arccos^2 t \end{cases}, \quad y'_x = ?$

6. Найти предел $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 \cdot e^{-x}$.

7. Показать, что касательные к гиперболе $y = \dfrac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с осями координат параллельны между собой.

8. $y = \cos \ln x + \ln \cos x$, найти y''.

Вариант 2

Найти производные функций

1. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$;

2. $y = x \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

3. $y = (\ln x)^{\ln x}$;

4. $xy - e^{xy} + y = 1$.

5. $\begin{cases} x = 1 + \cos^2 t \\ y = \dfrac{\cos t}{\sin^2 t} \end{cases}, \ y'_x = ?$

6. Найти предел $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \cdot e^{-x}$.

7. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 6x + 6$,

которая перпендикулярна к прямой, проходящей через начало координат и вершину параболы.

8. $y = \dfrac{1}{4}x^2 \cdot (2\ln x - 3)$, найти y''.

Вариант 3

Найти производные функций

1. $y = \cos^3(3^x)$;

2. $y = x \cdot \sqrt[3]{2x - x^2}$;

3. $y = x^{\cos x}$;

4. $\sin(y - x^2) = y$.

5. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\ln t} \\ y = \dfrac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t} \end{cases}$, $\quad y'_x = ?$

6. Найти предел $\lim\limits_{x \to \pi} (\pi - x) \cdot \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

7. Найти точку пересечения касательных к графику $y = \dfrac{3x + 1}{2x - 1}$ в точках $x = -1$ и $x = 3$.

8. $y = \dfrac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$, найти y''.

Вариант 4

Найти производные функций

1. $y = \dfrac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$;

2. $y = x \cdot \operatorname{tg}^3(x^3 - 1)$;

3. $y = (x + x^2)^{x+3}$;

4. $x - y + \sin(xy) = 0$.

5. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \dfrac{t + 1}{t - 1} \\ y = \arcsin \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$, $y'_x = ?$

6. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{-2x^4+6x^3+7x}$.

7. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = e^{1-x^2}$ в точках ее пересечения с прямой $y = 1$.

8. $y = \sin \ln x + \cos^2 \ln x$, найти y''.

Вариант 5

Найти производные функций

1. $y = \sqrt[4]{x^2+2x+3}$;

2. $y = \ln^2 \dfrac{x}{\sin x}$;

3. $y = x^{\sin 5x}$;

4. $y^2 \cdot x = \ln \dfrac{y}{x}$.

5. $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{1-t^2} \\ y = \arccos t \end{cases}, \quad y'_x = ?$

6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x}$.

7. К графику функции $y = 4x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$ проведена касательная. Найти точку пересечения этой касательной с осью Ox.

8. $y = \ln \sqrt[3]{1+x^2} + \dfrac{1-x}{\sqrt{3}}$, найти y''.

Вариант 6

Найти производные функций

1. $y = x^2 \cdot \sqrt{2-x^2}$;

2. $y = \cos^4 \ln^2 x$;

3. $y = (x+1)^{\cos 3x}$;

4. $\ln(xy) = \operatorname{arctg} y$.

5. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$, $y'_x = ?$

6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\ln(x^2 - 3)}$.

7. Найти координаты точки пересечения двух касательных к графику функции $y = \sin 3x$ в точках $x = \dfrac{\pi}{18}$ и $x = \dfrac{5\pi}{18}$.

8. $y = (4 + x^2) \cdot \operatorname{arctg} x^2$, найти y''.

Вариант 7

Найти производные функций

1. $y = \dfrac{3x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$;

2. $y = 3^{-x^2} \cdot 2^{1/x}$;

3. $y = (x + 1)^{\cos^2 x}$;

4. $y - x + \arcsin y = 0$.

5. $\begin{cases} x = a \cdot (\cos t + t \cdot \sin t) \\ y = a \cdot (\sin t - t \cdot \cos t) \end{cases}$, $y'_x = ?$

6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{4}{\arcsin x} - \dfrac{1}{x} \right)$.

7. В какой точке касательная к графику функции $y = x^2 - 7x + 3$ параллельна прямой $5x + y - 3 = 0$.

8. $y = \arccos^2 x + \dfrac{x - 1}{2}$, найти y''.

Вариант 8

Найти производные функций

1. $y = \dfrac{\sqrt{3x - x^2}}{x}$;

2. $y = 2^x \cdot e^{-x^2}$;

3. $y = x^{\sqrt{x}}$;

4. $\cos(xy) + e^{xy^2} = 1$.

5. $\begin{cases} x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$, $y'_x = ?$

6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0+} x \cdot \ln^2 x$.

7. Найти точки, в которых касательные к кривой

$y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ параллельны оси Ox.

8. $y = x - \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, найти y''.

Вариант 9

Найти производные функций

1. $y = \dfrac{4x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$;

2. $y = 3^{-x} \cdot \cos\left(x^2 + \sqrt{x}\right)$;

3. $y = \left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$;

4. $x^y = y^{2x}$.

5. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t^2 \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$, $\quad y'_x = ?$

6. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

7. На кривой $y = x^3 - 3x + 5$ найти точки, в которых касательные перпендикулярны к прямой $y = -\dfrac{x}{9}$.

8. $y = \sqrt{2}\operatorname{arcctg}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + x$, найти y''.

Вариант 10

Найти производные функций

1. $y = \dfrac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x}}$;

2. $y = 5^{-x} \cdot \cos\left(x^3 + \sqrt{x}\right)$;

3. $y = (x+2)^{\frac{1}{\cos x}}$;

4. $y + x^2 + \operatorname{arctg} y = 0$.

5. $\begin{cases} x = \arcsin t^2 \\ y = \ln\left(2 + t^2\right) \end{cases}, \ y'_x = ?$

6. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 + x}{\ln(1 - 2x)}$.

7. Написать уравнение касательной и уравнение нормали к кривой $y = x^3 + 3$ в точке $x_0 = 1$.

8. $y = \sqrt{x^2 + 1} - \ln \dfrac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$, найти y''.

Вариант 11

Найти производные функций

1. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4x - 1}}{2x + 3}$;

2. $y = e^{x^2} \cdot \log_3\left(\sqrt{x} - 1\right)$;

3. $y = (\operatorname{arctg}(x+2))^{\cos x}$;

4. $\sin(x - 2y) + \dfrac{x^3}{y} = 7x$.

5. $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}, \quad y'_x = ?$

6. Найти предел $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sin x}{\cos 3x}$.

7. Какие углы образует парабола $y = \dfrac{x^2}{4}$ с ее хордой, абсциссы концов которой равны 2 и 4?

8. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, найти y''.

Вариант 12

Найти производные функций

1. $y = \dfrac{\sqrt{3x^2+2x+5}}{2x^2+3x}$;

2. $y = 2^{-3x} \cdot \operatorname{ctg}\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right)$;

3. $y = (x^2+2x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$;

4. $e^{xy} + \dfrac{y}{x} = \cos 3x$.

5. $\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \sin t - t \cdot \cos t \end{cases}$, $y'_x = ?$

6. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos 2x}{3x^2}$.

7. В какой точке параболы $y = x^2 - 2x + 5$ нужно провести касательную, чтобы она была перпендикулярна к биссектрисе первого координатного угла?

8. $y = \dfrac{3x-4}{x+1} + \ln(x+2)$, найти y''.

Список литературы

1. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М. : ОНИКС : Мир и Образование, 2007. - 303, [1] с. ; 60x90/16. - ISBN 978-5-488-01070-3 (ОНИКС). - 978-5-488-01071-0 (ч. 1). - 978-5-94666-336-3 (Мир и Образование).

2. Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. - 17-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2020. - 602, [1] с. : ил. ; 60x90/16. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6472-8.

3. Лунгу, К. Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Том 1 [Электронный ресурс] : учебное пособие / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. — Москва : Физматлит, 2013. — 216 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/59697.

4. Рябушко, А. П. Высшая математика: теория и задачи. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. — Минск : "Вышэйшая школа 2016. — 303 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/92434.

5. Шипачев, В. С. Высшая математика : учеб. и практикум для бакалавров вузов / В. С. Шипачев, Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова ; под ред. А. Н. Тихонова. - 8-е изд., перераб. и доп. - Москва : Юрайт, 2014. - 447 с. : рис. ; 84x108/32. - (Бакалавр. Базовый курс). - Предм. указ.: с. 442-447. - ISBN 978-5-9916-3600-1.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

Максимова Ольга Васильевна
Сметанина Людмила Петровна

ПРОИЗВОДНЫЕ
DERIVATIVES
Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 02.12.2024 Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$.
Усл. печ. л. 3,1. Уч.-изд. л. 1,0.
Тираж 27 экз. Заказ № 2198.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021.
Тел.: +7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18