

О.В. Максимова, Н.А. Соловьева

# MATHEMATIQUES

## МАТЕМАТИКА. ВВОДНЫЙ КУРС

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$   
 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$   
 $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2)$   
 $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$   
 $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$

Mathematics

Matemáticas

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»

О.В. Максимова, Н.А. Соловьева

## **МАТЕМАТИКА. ВВОДНЫЙ КУРС**

Учебно-методическое пособие для иностранных студентов,  
обучающихся по программе дополнительного образования  
«Довузовская подготовка»



Ижевск  
2024

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я727

М171

*Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ*

**Рецензент:** канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. каф. математического анализа ин-та математики, информационных технологий и физики ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» **Т.С. Тинюкова**

**Максимова О.В., Соловьева Н.А.**

М171 Математика. Вводный курс : учеб.-метод. пособие для иностранных студентов, обучающихся по программе доп. образования «Довузовская подготовка» / О.В. Максимова, Н.А. Соловьева. – 2-е изд., перераб. и доп. – Ижевск : Удмуртский университет, 2024. – 84 с.

Пособие представляет собой вводный курс по математике. В нем содержатся основные разделы курса элементарной математики. В пособии даны основные математические термины на русском и английском языках.

Пособие предназначено для иностранных граждан, обучающихся на подготовительных отделениях высших учебных заведений России.

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я727

© Максимова О.В., Соловьева Н.А., 2024

© ФГОУ ВО «Удмуртский

государственный университет», 2024

## Введение

Данное пособие создано для методического обеспечения первых занятий по математике на русском языке. Главной проблемой, которая возникает у иностранного студента на начальном этапе обучения, является языковой барьер. Сложности возникают при восприятии лекционного материала на слух, его понимании, выделении опорного материала и ведении конспектов. Недостаток необходимого объема знаний терминологии математики приводит к тому, что преподавателям математики приходится выступать и в роли преподавателей русского языка. Им в некоторой степени помогает привлечение символического языка, который в своей общей основе является языком международным и отчасти берет на себя функции языка-посредника.

Пособие содержит 13 разделов курса. Каждый раздел содержит термины основного, минимально необходимого материала, который должен быть усвоен студентами. Дан перевод математических терминов на английский язык, а также их символическое обозначение и предложено самостоятельно перевести их на свой родной язык. В каждом разделе приведены необходимый теоретический материал и примеры с подробными решениями.

Во второе издание добавлены темы «Степени и их свойства», «Показательные уравнения и неравенства», «Логарифмы и их свойства», «Логарифмические уравнения и неравенства», «Текстовые задачи». Каждый раздел дополнен новыми задачами с подробными решениями. По всем темам даны упражнения, которые могут быть использованы на занятиях, а также задания для самостоятельной работы. Исправлены замеченные опечатки и неточности.

Пособие написано в соответствии с приказом Минобрнауки России от 03.10.2014 № 1304 «Об утверждении требований к освоению дополнительных общеобразовательных программ, обеспечивающих подготовку иностранных граждан и лиц без гражданства к освоению профессиональных образовательных программ на русском языке».

Работа над учебно-методическим пособием выполнена при поддержке Управления международного сотрудничества и связей с общественностью Удмуртского государственного университета.

# 1. Числа и действия

Прочитайте. Напишите перевод слов на родной язык.

число	number
цифра	digit, numeral, cipher
знак	sign
символ	symbol
действие	action, operation
вычислить	calculate, compute

нуль (ноль)	zero	0
один	one	1
два	two	2
три	three	3
четыре	four	4
пять	five	5
шесть	six	6
семь	seven	7
восемь	eight	8
девять	nine	9
десять	ten	10
одиннадцать	eleven	11
двенадцать	twelve	12
тринадцать	thirteen	13
четырнадцать	fourteen	14
пятнадцать	fifteen	15
шестнадцать	sixteen	16
семнадцать	seventeen	17
восемнадцать	eighteen	18
девятнадцать	nineteen	19
двадцать	twenty	20
тридцать	thirty	30
сорок	forty	40
пятьдесят	fifty	50
шестьдесят	sixty	60
семьдесят	seventy	70

восемьдесят	eighty	80
девяносто	ninety	90
сто	hundred	100
двести	two hundred	200
триста	three hundred	300
четыреста	four hundred	400
пятьсот	five hundred	500
шестьсот	six hundred	600
семьсот	seven hundred	700
восемьсот	eight hundred	800
девятьсот	nine hundreds	900
тысяча	thousand	1000
плюс	plus	+
минус	minus	-
больше	more	>
меньше	less	<
равно	equal	=
положительное число	positive number	$> 0$
отрицательное число	negative number	$< 0$
противоположные числа	opposite numbers	2 и -2
сложение $a+b=c$ $a$ – слагаемое, $b$ – слагаемое, $c$ – сумма.	addition $a+b=c$ $a$ is a addend, $b$ is a addend, $c$ is a sum.	$2+3=5$
вычитание $a-b=c$ $a$ – уменьшаемое, $b$ – вычитаемое, $c$ – разность.	subtraction $a-b=c$ $a$ is minuend, $b$ is subtrahend, $c$ is the difference.	$4-3=1$
умножение $a \cdot b = c$ $a$ – множитель, $b$ – множитель, $c$ – произведение.	multiplication $a \cdot b = c$ $a$ is a multiplier, $b$ is a multiplier, $c$ is a product.	$3 \cdot 4 = 12$
деление $a:b=c$ $a$ – делимое, $b$ – делитель, $c$ – частное.	division $a:b=c$ $a$ is a dividend, $b$ is a divisor, $c$ is a quotient.	$21:7=3$

**Пример 1.1.** Прочитайте и напишите числа словами 25, 43, 61, 134, 312, 407, 561, 940, 1 208, 2 219, 3 116, 4 510, 15 400, 33 101, 44 123, 50 142, 200 304, 532 187.

*Решение.*

25 – двадцать пять;

43 – сорок три;

61 – шестьдесят один;

134 – сто тридцать четыре;

312 – триста двенадцать;

407 – четыреста семь;

561 – пятьсот шестьдесят один;

940 – девятьсот сорок;

1 208 – одна тысяча двести восемь;

2 219 – две тысячи двести девятнадцать;

3 116 – три тысячи сто шестнадцать

4 510 – четыре тысячи пятьсот десять;

15 400 – пятнадцать тысяч четыреста;

33 101 – тридцать три тысячи сто один;

44 123 – сорок четыре тысячи сто двадцать три;

50 142 – пятьдесят тысяч сто сорок два;

200 304 – двести тысяч триста четыре;

532 187 – пятьсот тридцать две тысячи сто восемьдесят семь.

**Пример 1.2.** Прочитайте и напишите числа словами. Вычислите, ответ запишите словами:

а)  $516+34=550$ ;

б)  $2\,315-704=1\,611$ ;

в)  $105 \cdot 92 = 9\,660$ ;

г)  $15\,785 \div 5 = 3\,157$ .

*Решение.*

а)  $516+34=550$  – пятьсот шестнадцать плюс тридцать четыре равно пятьсот пятьдесят;

б)  $2\,315-704=1\,611$  – две тысячи триста пятнадцать минус семьсот четыре равно одна тысяча шестьсот одиннадцать;

в)  $105 \cdot 92 = 9\,660$  – сто пять умножить на девяносто два равно девять тысяч шестьсот шестьдесят;

г)  $15\,785 \div 5 = 3\,157$  – пятнадцать тысяч семьсот восемьдесят пять разделить на пять равно три тысячи сто пятьдесят семь.

**Пример 1.3.** Прочитайте и напишите числа цифрами. Найдите значение выражения, ответ запишите цифрами и словами.

- а) Две тысячи тринадцать плюс сто тридцать;
- б) Сто тысяч двести пять минус девяносто пять тысяч сто;
- в) Девяносто три умножить на одиннадцать;
- г) Пятьсот сорок восемь разделить на четыре.

*Решение.*

а) Две тысячи тринадцать плюс сто тридцать =  $2\,013 + 130 = 2\,143$  (две тысячи сто сорок три);

б) сто тысяч двести пять минус девяносто пять тысяч сто =  $= 100\,205 - 95\,100 = 5\,105$  (пять тысяч сто пять);

в) девяносто три умножить на одиннадцать =  $93 \cdot 11 = 1\,023$  (одна тысяча двадцать три);

г) пятьсот сорок восемь разделить на четыре =  $548 \div 4 = 137$  (сто тридцать семь).

### Упражнения

**1.** Прочитайте и напишите числа словами:

79	358	1 111	25 854	501 573
37	501	2 762	71 149	343 490
62	415	4 013	78 310	290 317
40	530	6 130	19 376	901 094
58	764	5 121	89 680	808 216

**2.** Прочитайте и напишите числа цифрами: пятнадцать, сто пятьдесят, три тысячи четыреста двенадцать, двести двенадцать, сто пятьдесят три тысячи четыреста двенадцать, тридцать одна тысяча девятьсот шестьдесят, триста одна тысяча девятьсот шесть, триста тысяч девяносто шесть, восемьсот тринадцать тысяч, восемьсот тысяч тринадцать, тринадцать тысяч восемьсот, девятьсот две тысячи, две тысячи девятьсот шесть, девятьсот тысяч два.

**3.** Прочитайте и напишите числа словами. Вычислите, ответ запишите словами:

$70 \cdot 59 =$	$792 - 168 =$	$9\,240 : 7 =$	$336 + 655 =$
$810\,000 : 60 =$	$340\,000 - 340 =$	$350 \cdot 7 =$	$348 + 224 =$
$509 - 446 =$	$34800 : 30 =$	$712 + 274 =$	$720 \cdot 9 =$

## Самостоятельная работа

4. Прочитайте и напишите числа.

23	209	1 638	53 693	276 500
66	970	1 268	23 509	201 930
81	782	5 038	88 867	618 707
13	251	3 989	38 367	866 046
31	196	4 203	99 999	874 112

5. Прочитайте и напишите числа цифрами: тринадцать, тридцать шесть, сто пять, пять тысяч семьсот двенадцать, двести двенадцать, триста восемьдесят две тысячи пятьсот один, девяносто две тысячи пятьсот шестьдесят, двести одна тысяча семьсот семь, одна тысяча триста тридцать три, восемьсот пятнадцать тысяч, тринадцать тысяч двести, пятьсот две тысячи, пятьсот тысяч два, три тысячи четыреста шесть, восемьсот тысяч двести два.

6. Прочитайте и напишите числа словами. Вычислите, ответ запишите словами.

$9\,500 : 50 =$	$810 \cdot 7 =$	$999 - 949 =$	$453 + 78 =$
$20\,200 : 200 =$	$228 + 604 =$	$45\,600 : 240 =$	$92 \cdot 9 =$
$120 \cdot 5 =$	$752 + 91 =$	$855 - 61 =$	$49\,700 : 70 =$

## 2. Дроби, корни, степени числа

Прочитайте. Напишите перевод слов на родной язык.

Русский	English	Пример / Example
дробь $\frac{a}{b}$ ( $a/b$ ) $a$ – числитель дроби $b$ – знаменатель дроби	fraction $\frac{a}{b}$ ( $a/b$ ) $a$ – numerator fraction $b$ – denominator fraction	$\frac{2}{7}$ , $\frac{2}{7}$
дробь правильная	proper fraction	$\frac{a}{b} = \frac{2}{7}, a < b$
дробь неправильная	improper fraction	$\frac{a}{b} = \frac{9}{4}, a \geq b$
смешанная дробь	mixed fraction	$3\frac{9}{11}$
целая часть	integer part, whole part	$3\frac{9}{11} \Rightarrow 3$
дробная часть	fractional part	$3\frac{9}{11} \Rightarrow \frac{9}{11}$
общий (одинаковый) знаменатель	common denominator	$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}$ $\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{3}{24}$
десятичная дробь	decimal fraction	$7,23 = 7\frac{23}{100}$
степень $a^n$ ( $a$ в степени $n$ ) $a$ – основание степени $n$ – показатель степени	degree $a^n$ ( $a$ to degree $n$ ) $a$ – base of degree $n$ – exponent	$5^4$ , $5^{-2}$ , $5^{\frac{1}{2}}$ , $5^{1,3}$
квадрат числа	square of number	$5^2$
куб числа	cube number	$5^3$
$\sqrt[n]{a}$ корень (корень степени $n$ из $a$ ) $a$ – подкоренное выражение $n$ – показатель корня	$\sqrt[n]{a}$ root (root of degree $n$ of $a$ ) $a$ – radical expression $n$ – root indicator	$\sqrt[5]{6}$
квадратный корень	square root	$\sqrt[2]{6} = \sqrt{6}$
кубический корень	cubic root	$\sqrt[3]{6}$

сократить	reduce, abbreviate	$\frac{9}{24} = \frac{9 \div 3}{24 \div 3} = \frac{3}{8}$
внести (под корень)	enter, put on	$3\sqrt{6} = \sqrt{3^2 \cdot 6}$
вынести (из-под корня)	take out (from under the root)	$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$

**Пример 2.1.** Записать в виде дроби, назвать вид дроби:

- а) одна седьмая;
- б) Одна вторая;
- в) Десять двадцать пятых;
- г) Шесть десятых;
- д) Три целых пятьдесят одна сотая.

*Решение.*

а) Одна седьмая (1 – числитель, 7 – знаменатель) =  $\frac{1}{7}$  – правильная обыкновенная дробь;

б) Одна вторая (1 – числитель, 2 – знаменатель) =  $\frac{1}{2}$ ;

в) Десять двадцать пятых (10 – числитель, 25 – знаменатель) =  $\frac{10}{25}$ ;

г) Шесть десятых (6 – числитель, 10 – знаменатель) =  $\frac{6}{10} = 0,6$  – десятичная дробь;

д) Три целых пятьдесят одна сотая (3 – целая часть числа, 51 – числитель, 100 – знаменатель) =  $3\frac{51}{100} = 3,51$  – смешанная дробь.

**Пример 2.2.** Привести к общему знаменателю дроби  $\frac{4}{9}$  и  $\frac{7}{15}$ . Сравнить дроби.

*Решение.*

9 – знаменатель первой дроби,  $9 = 3 \cdot 3$

15 – знаменатель второй дроби,  $15 = 3 \cdot 5$

Общий знаменатель  $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$

$$\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{20}{45} \quad \text{и} \quad \frac{7}{15} = \frac{7 \cdot 3}{15 \cdot 3} = \frac{21}{45}.$$

Эти дроби имеют общий знаменатель.

$$\frac{21}{45} > \frac{20}{45}, \text{ следовательно } \frac{7}{15} > \frac{4}{9}.$$

**Пример 2.3.** Сократить дробь  $\frac{22}{66}$ .

*Решение.* Сократить дробь – значит разделить числитель и знаменатель на одинаковое число (это число не равно нулю).

$$\frac{22}{66} = \frac{22 : 11}{66 : 11} = \frac{2}{6} = \frac{2 : 2}{6 : 2} = \frac{1}{3}.$$

**Пример 2.4.** Выполнить действия с дробями:

а)  $6\frac{3}{4} + 1\frac{5}{6} - 2\frac{3}{8}$ ;

б)  $2\frac{2}{5} \div \left(-\frac{6}{25}\right) = 2\frac{2}{5} : \left(-\frac{6}{25}\right)$ .

*Решение.*

а) При сложении (+) и вычитании (-) дробей сначала выполнить действия с целыми частями чисел

$$6\frac{3}{4} + 1\frac{5}{6} - 2\frac{3}{8} = 6 + 1 - 2 + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} = 5 + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8}.$$

Дроби привести к общему знаменателю.

Знаменатели  $4 = 2 \cdot 2$ ,  $6 = 2 \cdot 3$ ,  $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ .

Общий знаменатель  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

$$\begin{aligned} 5 + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} &= 5 + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} = 5 + \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \\ &= 5 + \frac{18}{24} + \frac{20}{24} - \frac{9}{24} = 5 + \frac{18 + 20 - 9}{24} = 5 + \frac{29}{24}. \end{aligned}$$

При получении неправильной дроби, выделить целую часть

$$5 + \frac{29}{24} = 5 + \frac{24 + 5}{24} = 5 + 1\frac{5}{24} = 6\frac{5}{24}.$$

б) При делении (:) и умножении (·) дробей сначала смешанные числа преобразовать в неправильную дробь  $2\frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$

$$2\frac{2}{5} \div \left(-\frac{6}{25}\right) = \frac{12}{5} \div \left(-\frac{6}{25}\right) = \frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{25}{6}\right) = -\frac{12 \cdot 25}{5 \cdot 6}$$

$$\text{Сократить части дроби } -\frac{12 \cdot 25}{5 \cdot 6} = -\frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 1} = -10.$$

**Пример 2.5.** Записать в математической форме: семь в степени три.

*Решение.* Семь в степени три = семь в кубе =  $7^3$ .

**Пример 2.6.** Выполнить действия со степенями:  $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^3$ .

*Решение.*  $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^3 = (2^1)^3 = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ .

**Пример 2.7.** Записать в математической форме корень: корень второй степени из числа три.

*Решение.*

Корень второй степени из числа три = корень квадратный из числа 3 = корень квадратный из трех =  $\sqrt[2]{3} = \sqrt{3}$ .

**Пример 2.8.** Вынести множитель из-под знака корня:  $\sqrt{50}$ .

*Решение.*

Разложим число 50 на множители:  $50 = 25 \cdot 2$ .

Тогда  $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ .

**Пример 2.9.** Внести множитель под знак корня  $3\sqrt[4]{3}$ .

*Решение.*  $3\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{243}$ .

**Пример 2.10.** Привести корни к общему показателю:  $\sqrt[3]{5}$  и  $\sqrt[4]{2}$ . Сравнить числа.

*Решение.*

Общий показатель для 3 и 4 есть 12.

По основному свойству корня  $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3 \cdot 4]{5^4} = \sqrt[12]{625}$  и  $\sqrt[4]{2} = \sqrt[4 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[12]{8}$ .

$625 > 8$ , следовательно  $\sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{2}$ .

## Упражнения

7. Записать в виде дроби:

- одна десятая;
- три целых четыре сотых;
- две девярых;
- двенадцать двадцатых;
- девять пятых;
- девятнадцать шестых;

- ж) одна целая одна третья;  
 з) четыре целых семь восьмых;  
 и) две целых две пятых.  
 к) Сократить дроби:  $\frac{7}{21}$ ;  $\frac{24}{36}$ ;  $\frac{14}{35}$ ;  $\frac{9}{48}$ ;  $\frac{15}{25}$ .

**8. Сравнить дроби:**

- а)  $\frac{6}{11}$  и  $\frac{2}{11}$ ;  
 б)  $\frac{2}{9}$  и  $\frac{2}{5}$ ;  
 в)  $\frac{5}{14}$  и  $\frac{8}{21}$ .

**9. Выполнить действия с дробями:**

- а)  $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{3} : \frac{5}{6}$ ;  
 б)  $3\frac{3}{5} + 3\frac{11}{15} - 2\frac{7}{9}$ ;  
 в)  $\left(3\frac{13}{50} - 3\frac{1}{20}\right) \cdot 3\frac{4}{7} + 1\frac{7}{15} : \frac{12}{5}$ ;  
 г)  $\frac{8\frac{4}{7} : 2\frac{26}{77}}{0,5 : 18\frac{2}{3} \cdot 11} - \frac{4}{9}$ .

**10. Записать в виде степени:**

- а) квадрат числа пять;  
 б) десять в степени десять;  
 в) пять в степени три;  
 г) пятнадцать в кубе;  
 д) шесть в степени  $m$ ;  
 е)  $a$  в степени двенадцать.

**11. Вычислить**

- а)  $(7)^3 + (-7)^3$ ;  
 б)  $9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$ ;  
 в)  $\left(-2\frac{1}{3}\right)^2$ .

**12.** Записать с помощью знака корня:

- а) корень степени четыре из пятнадцати;
- б) корень кубический из числа два;
- в) корень степени четыре из числа сорок;
- г) корень седьмой степени из семнадцати;
- д) корень степени  $n$  из десяти;
- е) корень пятой степени из семи.

**13.** Вынести множитель из-под знака корня:

- а)  $\sqrt{125}$  ;
- б)  $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{45}$  ;
- в)  $\sqrt[3]{625}$  ;
- г)  $\sqrt[4]{\frac{32}{81}}$  ;
- д)  $\sqrt[5]{128a^6}$  .

**14.** Сравнить два числа с корнями:

- а)  $3\sqrt{3}$  и  $\sqrt{12}$  ;
- б)  $\sqrt[3]{3}$  и  $\sqrt{2}$  ;
- в)  $\sqrt[3]{3}$  и  $\sqrt[4]{4}$  .

### Самостоятельная работа

**15.** Записать в виде дроби

- а) одна сотая;
- б) четыре целых три десятых;
- в) две тринадцатых;
- г) тринадцать сороковых;
- д) три вторых;
- е) семнадцать восьмых;
- ж) одна целая одна вторая;
- з) двенадцать целых пять шестых;
- и) одна целая две пятых.

16. Сократить дроби:  $\frac{4}{6}$ ;  $\frac{6}{16}$ ;  $\frac{21}{56}$ ;  $\frac{36}{60}$ ;  $\frac{8}{20}$ .

17. Сравнить дроби:

а)  $\frac{4}{13}$  и  $\frac{8}{13}$ ;

б)  $\frac{9}{16}$  и  $\frac{9}{14}$ ;

в)  $\frac{5}{12}$  и  $\frac{7}{18}$ .

18. Выполнить действия с дробями:

а)  $\frac{15}{16} - \frac{3}{16} + \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{16}$ ;

б)  $2\frac{7}{15} + 8\frac{3}{4} - 6\frac{9}{10}$ ;

в)  $\left(3\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{24} + 3\frac{5}{6}\right) : \frac{21}{4} - 1\frac{1}{9}$ ;

г)  $\frac{\left(1\frac{32}{63} - \frac{13}{21}\right) \cdot 3,6}{\frac{5}{6} \cdot 1,2 + 0,8}$ .

19. Записать в виде степени:

- а) куб числа шесть;
- б) восемь в степени восемь;
- в) пять в четвертой степени;
- г) семнадцать в квадрате;
- д) пятнадцать в степени  $m$ ;
- е)  $a$  в степени одиннадцать.

20. Вычислить

а)  $(5)^4 + (-5)^4$ ;

б)  $16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5$ ;

в)  $\left(-3\frac{2}{5}\right)^2$ .

**21.** Записать с помощью знака корня:

- а) корень степени пять из двадцать;
- б) корень квадратный из числа пять;
- в) корень четвертой степени из двенадцати;
- г) корень степени  $n$  из шести;
- д) корень десятой степени из сорока.

**22.** Вынести множитель из-под знака корня:

- а)  $\sqrt{135}$  ;
- б)  $-\frac{5}{12} \cdot \sqrt{108}$  ;
- в)  $\sqrt[3]{686}$  ;
- г)  $\sqrt[4]{\frac{80}{625}}$  ;
- д)  $\sqrt[4]{5y^{14}z^{10}}$  .

**23.** Сравнить два числа с корнями:

- а)  $\sqrt{20}$  и  $3\sqrt{5}$  ;
- б)  $\sqrt[3]{15}$  и  $\sqrt{7}$  ;
- в)  $\sqrt[3]{4}$  и  $\sqrt[4]{6}$  .

### 3. Числовые множества

Прочитайте. Напишите перевод слов на родной язык.

множество	set	
элемент множества	element of set	
пустое множество	empty set	$\emptyset$
пересечение множеств	intersection of sets	$A \cap B$
объединение множеств	union of sets	$A \cup B$
разность множеств	difference of sets	$A \setminus B$
множество натуральных чисел	set of natural numbers	$N = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$
множество всех целых чисел	set of integers	$Z = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$
множество всех рациональных чисел	set of rational numbers	$Q = \left\{ \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N \right\}$
множество всех действительных чисел	set of real numbers	$R$
бесконечность	infinity	$\infty$
прямая	straight line	
точка	point	
промежуток	interval	
интервал	open interval	
отрезок	segment	
принадлежит	belong	$\in$
не принадлежит	not belong	$\notin$
подмножество	subset	
содержит множество А содержит множество В	Contains the set A contains the set B	$A \supset B$
содержится множество А содержится в множестве В	Contained the set A is contained in the set B	$A \subset B$
изобразить	represent	

#### Пример 3.1.

1)  $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$  – это множество  $A$ .

2) Множество  $A$  состоит из элементов 1, 2, 3, 4, 5.

1, 2, 3, 4, 5 – это элементы множества  $A$ .

- $1 \in A \rightarrow 1$  принадлежит множеству  $A$ .
- $2 \in A \rightarrow 2$  принадлежит множеству  $A$ .
- $3 \in A \rightarrow 3$  принадлежит множеству  $A$ .
- $4 \in A \rightarrow 4$  принадлежит множеству  $A$ .
- $5 \in A \rightarrow 5$  принадлежит множеству  $A$ .
- $6 \notin A \rightarrow 6$  не принадлежит множеству  $A$ .

3) Множество  $B = \{2;3\}$  является подмножеством множества  $A$ .  
 $B$  содержится в  $A$ ,  $B \subset A$ .

4) Составить все подмножества множества  $A$ :  $\emptyset$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{4\}$ ,  $\{5\}$ ,  $\{1;2\}$ ,  $\{1;3\}$ ,  $\{1;4\}$ ;  $\{1;5\}$ ,  $\{2;3\}$ ,  $\{2;4\}$ ,  $\{2;5\}$ ,  $\{3;4\}$ ,  $\{3;5\}$ ,  $\{4;5\}$ ,  $\{1;2;3\}$ ,  $\{1;2;4\}$ ,  $\{1;2;5\}$ ,  $\{1;3;4\}$ ,  $\{1;3;5\}$ ,  $\{1;4;5\}$ ,  $\{2;3;4\}$ ,  $\{2;3;5\}$ ,  $\{2;4;5\}$ ,  $\{3;4;5\}$ ,  $\{1;2;3;4\}$ ,  $\{1;2;3;5\}$ ,  $\{1;2;4;5\}$ ,  $\{1;3;4;5\}$ ,  $\{2;3;4;5\}$ ,  $\{1;2;3;4;5\}$ .

### Операции над множествами

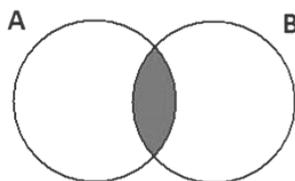
1) Название операции: Пересечение множеств

Определение: Те и только те элементы, которые принадлежат одновременно множествам  $A$  и  $B$ .

Обозначение:  $A \cap B$

Символическая запись:  $A \cap B = \{x/ x \in A \text{ и } x \in B\}$

Изображение:



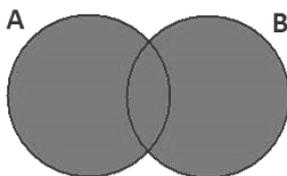
2) Название операции: Объединение множеств

Определение: Те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств  $A$  и  $B$ .

Обозначение:  $A \cup B$

Символическая запись:  $A \cup B = \{x/ x \in A \text{ или } x \in B\}$

Изображение:



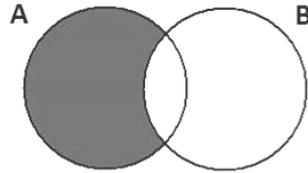
### 3) Название операции: Разность множеств

Определение: Те и только те элементы множества  $A$ , которые не принадлежат множеству  $B$ .

Обозначение:  $A \setminus B$

Символическая запись:  $A \setminus B = \{x / x \in A \text{ и } x \notin B\}$

Изображение:



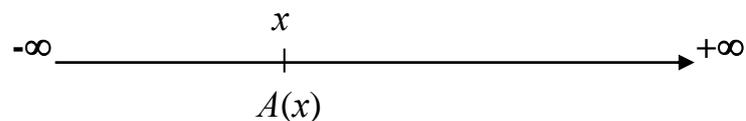
Замечание. Можно рассмотреть разность множеств  $B$  и  $A$  ( $B \setminus A$ ).

### Множества на числовой оси

Числовая прямая (числовая ось):  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$x$  – число,  $A(x)$  – точка на прямой

Каждому действительному числу  $x$  соответствует одна точка  $A(x)$  на числовой оси. Каждой точке  $A(x)$  числовой оси соответствует одно действительное число  $x$ .



### Числовые промежутки

$[a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	отрезок	
$(a;b)$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	интервал	
$(a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	полуинтервал	
$[a;b)$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	полуинтервал	

$[a; +\infty)$	$\{x \in R / x \geq a\}$	луч	
$(-\infty; b]$	$\{x \in R / x \leq b\}$	луч	
$(a; +\infty)$	$\{x \in R / x > a\}$	открытый луч	
$(-\infty; b)$	$\{x \in R / x < b\}$	открытый луч	

**Пример 3.2.** Для множеств  $A = [-2; 5]$  и  $B = (0; 7]$

а) записать в виде неравенств;

б) изобразить на числовой оси;

в) найти пересечение, объединение и разность множеств.

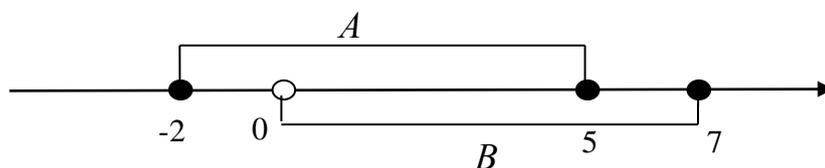
*Решение.*

а) Запишем множества с помощью неравенства.

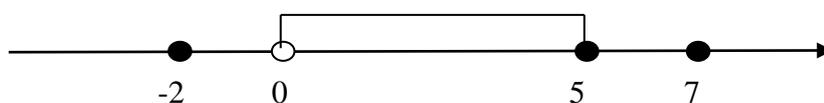
$$A: -2 \leq x \leq 5, \quad x \in R$$

$$B: 0 < x \leq 7, \quad x \in R$$

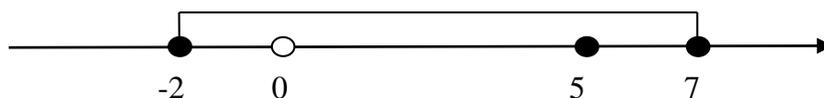
Изобразим множества на числовой оси.



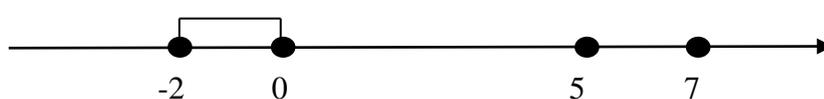
Пересечением множеств  $A$  и  $B$  является  $A \cap B = (0; 5]$ .



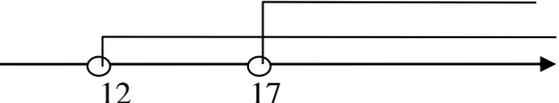
Объединением множеств  $A$  и  $B$  является  $A \cup B = [-2; 7]$ .

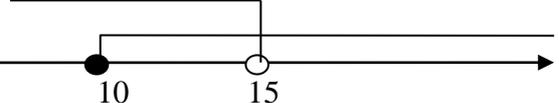


Разностью множеств  $A$  и  $B$  является  $A \setminus B = [-2; 0]$ .



**Пример 3.3.** Покажите на числовой прямой. Запишите числовой промежутком.

а)  $\begin{cases} x > 17 \\ x > 12 \end{cases} \Rightarrow$    $\Rightarrow x \in (17; +\infty)$

б)  $\begin{cases} x \geq 10 \\ x < 15 \end{cases} \Rightarrow$    $\Rightarrow x \in [10; 15)$

### Упражнения

**24.** Запишите математическими символами.

- а) Число  $a$  принадлежит множеству  $A$ ;
- б) Элемент  $b$  не принадлежит множеству  $A$ ;
- в) Множество  $A$  состоит из элементов 1, 2, 3, 4;
- г) Числа 5 и 6 не элементы множества  $A$ ;
- д) Множество, которое не содержит никаких элементов.

**25.** Назовите пять чисел – элементов множества:

- а) целых чисел;
- б) положительных чисел;
- в) рациональных, не целых чисел.

**26.** Поставьте знак  $\in$  или  $\notin$ , прочитайте запись:

- а)  $-2 \dots \mathbb{Z}$ ; б)  $16 \dots \mathbb{Z}$ ; в)  $\pi \dots \mathbb{R}$ ; г)  $-\sqrt{2} \dots \mathbb{Z}$ ; д)  $0 \dots \mathbb{N}$ .

**27.** Найдите пересечение множеств  $A = \{2; 3; 4; 5\}$  и  $B = \{4; 6; 8\}$ .

**28.** Найдите объединение множеств  $C = \{-3; -2; -1\}$  и  $D = \{1; 2; 3\}$ .

**29.** Найдите разность множеств  $M = \{-5; -4; -3; -2\}$  и  $K = \{-4; -3\}$ .

**30.** Дано множество:  $C = \{-3; 0; 3\}$ . Составить все подмножества множества  $C$ . Сколько получится подмножеств?

**31.** Запишите с помощью неравенств множества  $A = [-3; 1]$ ,  $B = (-2; 5)$ . Покажите на числовой прямой множества  $A$  и  $B$ . Найдите  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ .

32. Заполнить таблицу:

Промежуток	Неравенство	Числовая ось
$[0,5; \infty)$		
		
$(-3; 7)$		
	$-\infty < x \leq 1$	

33. Покажите на числовой прямой. Запишите числовой промежуток.

а)  $\begin{cases} x > 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$

в)  $\begin{cases} x < 1 \\ x > -3 \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x \leq 1 \\ x < 3 \end{cases}$

г)  $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 7 \end{cases}$

### Самостоятельная работа

34. Запишите математическими символами.

- а) Число 3 принадлежит множеству  $C$ ;
- б) Элемент  $a$  не принадлежит множеству  $B$ ;
- в) Множество  $A$  состоит из чисел 3, 5, 10, 14;
- г) Числа 11 и 16 не входят в множество  $A$ ;
- д) Множество  $B$  является подмножеством множества  $A$ .

35. Назовите пять чисел - элементов множества:

- а) натуральных чисел;
- б) отрицательных чисел;
- в) действительных, не рациональных чисел.

36. Поставьте знак  $\in$  или  $\notin$ , прочитайте запись:

- а)  $3 \dots Q$ ; б)  $-\sqrt{3} \dots Q$ ; в)  $0,175 \dots Q$ ; г)  $-100 \dots N$ ; д)  $5,5 \dots Q$

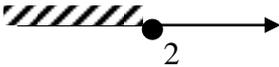
37. Даны множества:  $A = \{1; 5; 7; 8; 10; 11; 12\}$ ,  $B = \{5; 7; 9; 13\}$ . Найти пересечение множеств и объединение множеств  $A$  и  $B$ .

38. Найти разность множеств  $B$  и  $C$ , если  $B = \{-2; 7; 10; 12\}$ ,  $C = \{5; 8; 10; -3\}$ .

39. Составить подмножества множества  $K = \{a; b; c\}$ .

40. Запишите с помощью неравенств:  $A = (0; 3)$ ,  $B = [2; 4]$ . Покажите на числовой прямой множества  $A$  и  $B$ . Найдите  $A \cap B$  и  $A \cup B$  и  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ .

41. Заполнить таблицу:

Промежуток	Неравенство	Числовая ось
$(-\infty; -10)$		
		
	$-2 \leq x < 0$	
		

42. Покажите на числовой прямой. Запишите числовой промежуток.

а)  $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases}$

в)  $\begin{cases} x < 5 \\ x \geq -12 \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x < -10 \\ x \leq -3 \end{cases}$

г)  $\begin{cases} x < 9 \\ x \geq 10 \end{cases}$

## 4. Алгебраические выражения

Прочитайте. Напишите перевод слов на родной язык.

переменная	variable
выражение	expression
значение	value, meaning
формула	formula
правило	law
свойство	property
метод	method
круглые скобки (...)	round brackets
квадратные скобки [...]	square brackets
фигурные скобки {...}	braces
одночлен	monomial
многочлен	polynomial
коэффициент	coefficient
общий множитель	common factor
подобные	similar
вынести	take out
раскрыть скобки	open brackets
выразить	express
подставить	substitute
упростить	simplify
группировать	group
привести к общему знаменателю	reduce

### Формулы сокращенного умножения

**1. Квадрат суммы двух выражений** равен квадрату первого плюс удвоенное произведение первого на второе плюс квадрат второго

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**2. Квадрат разности двух выражений** равен квадрату первого минус удвоенное произведение первого на второе плюс квадрат второго

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**3. Разность квадратов двух выражений** равна произведению их разности и их суммы

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

**4. Куб суммы двух выражений** равен кубу первого плюс утроенное произведение квадрата первого на второе плюс утроенное произведение первого на квадрат второго плюс куб второго

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

**5. Куб разности двух выражений** равен кубу первого минус утроенное произведение квадрата первого на второе плюс утроенное произведение первого на квадрат второго минус куб второго.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

**6. Сумма кубов двух выражений** равна произведению суммы первого и второго на неполный квадрат их разности.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

**7. Разность кубов двух выражений** равна произведению разности первого и второго на неполный квадрат их суммы

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

**Пример 4.1.**

Вынести общий множитель за скобки  $8x^2y + 6xy^2$ .

*Решение.*

$$8x^2y + 6xy^2 = 2xy \cdot 4x + 2xy \cdot 3y = 2xy(4x + 3y).$$

**Пример 4.2.**

Привести подобные слагаемые  $4x - 3y + y - 2x$ .

*Решение.* Подобные слагаемые – это слагаемые, имеющие одинаковую буквенную часть. Подобные слагаемые отличаются своими числовыми коэффициентами.

$$\underline{4x} - \underline{3y} + \underline{y} - \underline{2x} = (4x - 2x) + (-3y + y) = (4 - 2)x + (-3 + 1)y = 2x - 2y.$$

**Пример 4.3.**

Раскрыть скобки  $(5a + 3b)(a - 2b)$ .

$$\begin{aligned} \text{Решение. } (5a + 3b)(a - 2b) &= 5a \cdot a + 5a \cdot (-2b) + 3b \cdot a + 3b \cdot (-2b) = \\ &= 5a^2 - 10ab + 3ab - 6b^2 = 5a^2 - 7ab - 6b^2. \end{aligned}$$

**Пример 4.4.**

Разложить на множители методом группировки  $ac + bd + dc + ad$ .

*Решение.* Сгруппируем так, чтобы слагаемые в каждой группе имели общий множитель:

$$ac + bd + dc + ad = (ac + bc) + (bd + ad) =$$

В каждой группе вынесем за скобки общие множители:

$$c(a + b) + d(b + a) =$$

Каждое слагаемое имеет общий множитель.

Вынесем этот множитель за скобки:  $(a + b)(c + d)$ .

**Пример 4.5.**

Найти сумму дробей  $\frac{3}{a^2 + a} + \frac{5a}{ab + a}$ .

*Решение.* Чтобы сложить две дроби, необходимо привести их к общему знаменателю. Для этого разложим на множители оба знаменателя.

$$\frac{3}{a^2 + a} + \frac{5a}{ab + a} = \frac{3}{a(a+1)} + \frac{5a}{a(b+1)} =$$

Значит, общий знаменатель для обеих дробей будет  $a(a+1)(b+1)$ .

$$= \frac{3(b+1)}{a(a+1)(b+1)} + \frac{5a(a+1)}{a(b+1)(a+1)} = \frac{3(b+1) + 5a(a+1)}{a(a+1)(b+1)} = \frac{3b + 3 + 5a^2 + 5a}{a(a+1)(b+1)}.$$

**Пример 4.6.**

Раскрыть скобки  $(3x + 4ky)^2$ .

*Решение.* Используем формулу квадрата суммы двух выражений (формула 1)

$$(3x + 4ky)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot (4ky) + (4ky)^2 = 9x^2 + 24kxy + 16k^2y^2.$$

**Пример 4.7.**

Раскрыть скобки  $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2$ .

*Решение.* По формуле квадрата разности двух выражений (формула 2) получим

$$\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y.$$

**Пример 4.8.**

Разложить на множители  $25x^2 - 4y^2$ .

*Решение.* По формуле разности квадратов двух выражений (формула 3)

$$25x^2 - 4y^2 = (5x)^2 - (2y)^2 = (5x - 2y)(5x + 2y).$$

**Пример 4.9.**

Представьте в виде квадрата суммы или разности двух выражений  $4a^2 - 28ab + 49b^2$ .

*Решение.* По формуле 2 получим

$$4a^2 - 28ab + 49b^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 7b + (7b)^2 = (2a - 7b)^2.$$

**Пример 4.10.**

Раскрыть скобки  $(2 - 3a^2)^3$ .

*Решение.* Воспользуемся формулой куба разности двух выражений (формула 5)

$$(2 - 3a^2)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot 3a^2 + 3 \cdot 2 \cdot (3a^2)^2 - (3a^2)^3 = 8 - 36a^2 + 54a^4 - 27a^6.$$

**Пример 4.11.**

Разложить на множители  $8 + a^3$ .

*Решение.* По формуле суммы кубов двух выражений (формула 6) получим

$$8 + a^3 = 2^3 + a^3 = (2 + a)(4 + 2a + a^2).$$

**Пример 4.6.**

Упростить выражение  $\frac{1}{a} - \frac{a^2 - 25}{5a} + \frac{a}{5}$ .

*Решение.* Для того, чтобы упростить данное выражение, необходимо привести все дроби к общему знаменателю, который равен  $5a$ .

$$\frac{1}{a} - \frac{a^2 - 25}{5a} + \frac{a}{5} = \frac{5}{5a} - \frac{a^2 - 25}{5a} + \frac{a^2}{5a} = \frac{5 - a^2 + 25 + a^2}{5a} = \frac{30}{5a} = \frac{6}{a}.$$

**Упражнения**

**43.** Вынести общий множитель

а)  $6a^3 - 21a^2b$ ;

б)  $72a^5b^4 - 54a^3b^5 + 36a^2b^6$ .

**44.** Раскрыть скобки

а)  $(3x - 2y)^2$ ;

б)  $(8a^3 + 5a^2b)^2$ ;

в)  $(xy - y^{\frac{1}{3}})^2$ ;

г)  $(2x^{\frac{1}{2}} + 1)^2$ ;

д)  $(0,3x - 2)(0,3x + 2)$ ;

е)  $(8x^3 + 3y^3)(3y^3 - 8x^3)$ ;

ж)  $(ab - 1)^3$ ;

з)  $\left(\frac{4}{3}xy^2 + b^2\right)^3$ .

**45. Разложить на множители**

- а)  $a^3 + a^2b - a^2c - abc$ ;
- б)  $27x^3 - 9x^2 + 3x - 1$ ;
- в)  $81 - 4x^2y^2$ ;
- г)  $144a^4 - 25b^2$ ;
- д)  $27a^3 + 8b^3$ ;
- е)  $(x - 3)^3 - 64$ .

**46. Заменить знаки «?» одночленами так, чтобы равенство было верно**

- а)  $(6a^5 + ?)^2 = ? + ? + 25x^2$ ;
- б)  $(? - ?)^2 = 81x^2 - ? + 100x^4y^6$ ;
- в)  $(? - 15a)(? + ?) = 4c^2 - ?$ ;
- г)  $(? + 2x)^3 = z^6 + ? + ? + ?$ ;
- д)  $(3 - ?)^3 = ? - 108y^3 + ? - ?$ .

**47. Упростить**

- а)  $\frac{a+3}{2a-1} - \frac{a^2-5}{4a^2-4a+1}$ ;
- б)  $\frac{x^2+xy}{x^2-xy} \cdot \frac{x-y}{x^2+2xy+y^2}$ ;
- в)  $\left(\frac{1+6ac}{a^3-8c^3} - \frac{1}{a-2c}\right) \div \left(\frac{1}{a^3-8c^3} - \frac{1}{a^2+2ac+4c^2}\right)$ .

**Самостоятельная работа****48. Вынести общий множитель**

- а)  $64a^6 + 240a^5b + 300a^4b^2$ ;
- б)  $24a^4bc^4 + 10abc^2 - 30a^2bc^6$ .

**49. Раскрыть скобки**

- а)  $(b - 3)^2$ ;
- б)  $(3y + 5)^2$ ;
- в)  $(2x + y^{\frac{1}{2}})^2$ ;

- г)  $(x^{\frac{1}{3}} - 4)^2$ ;  
 д)  $(y - 5)(y + 5)$ ;  
 е)  $(x^2 + 2)(x^2 - 2)$ ;  
 ж)  $(2a - 1)^3$ ;  
 з)  $(3x^2 + b^3)^3$ ;

**50. Разложить на множители**

- а)  $a^2 + ab + ac + bc$ ;  
 б)  $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$ ;  
 в)  $c^2 - 4$ ;  
 г)  $25 - 9b^2$ ;  
 д)  $125a^3 + b^3$ ;  
 е)  $64a^3 - \frac{1}{27}b^3$ ;

**51. Заменить знаки «?» одночленами так, чтобы равенство было верно**

- а)  $(? + ?)^2 = ? + 70b^3c + 49c^2$ ;  
 б)  $(8a^3 - ?)^2 = ? - ? + 49a^8b^6$ ;  
 в)  $(? - 15a^5)(? + ?) = 0,49c^6 - ?$ ;  
 г)  $(4x^5 + ?)^3 = ? + ? + ? + 125x^6$ ;  
 д)  $(? - 4c)^3 = ? - 144c + ? - ?$ .

**52. Упростить**

- а)  $\frac{a^2 - 2an - 2n + a}{an + 3n} \cdot \frac{a^2 + 3a}{(a - n)^2 - n^2}$ ;  
 б)  $\frac{a^2 - b^2}{a^2} \div \frac{(a + b)^2}{a^4}$ ;  
 в)  $\left(\frac{c + 5}{5c - 1} + \frac{c + 5}{c + 1}\right) \div \frac{c^2 + 5c}{1 - 5c} + \frac{c^2 + 5}{c + 1}$ .

## 5. Уравнения

Прочитайте. Напишите перевод слов на родной язык.

уравнение	equation
неизвестное	unknown
неизвестная величина	unknown variable
корень уравнения	solution
линейное уравнение	linear equation
квадратное уравнение	quadratic equation
дискриминант	discriminant
иррациональное уравнение	irrational equation
посторонний корень	outlier, outlying value
система уравнений	system of equations
модуль	module, absolute value
решить уравнение	solve the equation
перенести	be moved
привести подобные	addition of similar terms
раскрыть модуль	expand the module

**Пример 5.1.** Решить линейное уравнение  $3x - 2 = 2x + 1$ .

*Решение.*

Решить уравнение – значит найти значение неизвестной  $x$ .

Привести подобные  $3x - 2x = 1 + 2 \Rightarrow x = 3$ .

Ответ.  $x = 3$ .

**Пример 5.2.** Решить квадратное уравнение  $3x^2 - 2x + 2 = 2x + 1$ .

*Решение.*

Решить квадратное уравнение  $3x^2 - 2x + 2 = 2x + 1$ , значит найти все значения неизвестной  $x$  – корня уравнения.

Привести подобные  $3x^2 - 2x + 2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$ .

В квадратном уравнении коэффициенты:  $a = 3$ ,  $b = -4$ ,  $c = 1$ .

Вычислить дискриминант  $D = b^2 - 4ac \Rightarrow D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 \Rightarrow D = 4$ .

Корни квадратного уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \cdot 3} \text{ и } x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \cdot 3}.$$

Вычислить значения корней  $x_1 = \frac{4+2}{6} = 1$  и  $x_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$ .

Ответ.  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$ .

**Пример 5.3.** Решить уравнение  $24x^4 + 3x = 0$ .

*Решение.*

Разложить на множители – вынести общий множитель

$$3x \cdot (8x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ 8x^3 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \end{cases}$$

Корни уравнения  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2} = -0,5$ .

Ответ.  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -0,5$ .

**Пример 5.4.** Решить иррациональное уравнение  $\sqrt{2x+6} = 1$ .

*Решение.*

Возвести в квадрат части уравнения  $(\sqrt{2x+6})^2 = (1)^2 \Rightarrow 2x+6 = 1$ .

Привести подобные  $2x = 1 - 6 \Rightarrow 2x = -5$ .

Вычислить значение переменной  $x = \frac{-5}{2} \Rightarrow x = -2,5$ .

Ответ.  $x = -2,5$ .

**Пример 5.5.** Решить иррациональное уравнение  $\sqrt{2x+6} = -1$ .

*Решение.*

Корень квадратный числа всегда больше или равен нулю.

Данное уравнение решений не имеет.

Множество решений уравнения – пустое множество  $\emptyset$ .

Ответ.  $\emptyset$ .

**Пример 5.6.** Решить уравнение с модулем  $|3x-12| = 3$ .

*Решение.*

$$\text{Раскрыть модуль: } \begin{cases} 3x-12 = 3 \\ 3x-12 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 3 \end{cases}$$

Корни уравнения  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 3$ .

Ответ.  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 3$ .

**Пример 5.7.**

Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 & (1) \\ x + 2y = 4 & (2) \end{cases}.$$

*Решение.*

1) Решить уравнение (2) относительно неизвестной  $x$ :  $x = 4 - 2y$ .

2) Подставить значение  $x$  в уравнение (1):  $2 \cdot (4 - 2y) - 3y = 1$ .

Раскрыть скобки  $8 - 4y - 3y = 1$ . Привести подобные  $-7y = -7$ .

Найти значение неизвестной  $y = 1$ .

3) Подставить значение  $y$  в уравнение (2):  $x = 4 - 2 \cdot 1 \Rightarrow x = 2$ .

4) Решение системы уравнений:  $x = 2$  и  $y = 1 \Rightarrow (2; 1)$ .

Ответ. (2;1).

**Упражнения**

**53.** Решить уравнения

а)  $15(x + 2) = 6(2x + 7)$ ;

б)  $(x - 3)(x + 4) - 2(3x - 2) = (x - 4)^2$ ;

в)  $\frac{3x - 1}{5} - \frac{5x + 1}{6} = \frac{x + 1}{8} - 3$ ;

г)  $\frac{x + 3}{2x - 1} = 4$ .

д)  $5(x - 2) = 5x - 10$ ;

е)  $\frac{2x + 3}{2} = x - 1$ .

**54.** Решить квадратные уравнения:

а)  $x^2 - 4x = 0$ ;

б)  $x^2 + 5 = 30$ ;

в)  $x^2 + 12x + 35 = 0$ ;

г)  $2x^2 + 3x - 5 = 0$ ;

д)  $x^2 + 6x + 9 = 0$ ;

е)  $2x^2 - 4x + 3 = 0$ .

**55.** Решить уравнение:  $\frac{3x - 7}{x + 5} = \frac{x - 3}{x + 2}$ .

**56.** Решить биквадратные уравнения:

а)  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ ;

б)  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ ;

в)  $4x^4 + 5x^2 + 1 = 0$ .

**57.** Решить иррациональные уравнения:

а)  $\sqrt{3x+1} = 2$ ;

б)  $\sqrt{4x-2} = 0$ ;

в)  $\sqrt{-5x+3} = -2$ ;

г)  $\sqrt[3]{2-4x} = 5$ ;

д)  $\sqrt[3]{-x+5} = -3$ .

**58.** Решить уравнения с модулем

а)  $|2x - 3| = 5$ ;

б)  $3|x| + 1 = |x| + 7$ ;

в)  $|x^2 - 2x - 39| = 24$ .

**59.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9. \end{cases}$

### Самостоятельная работа

**60.** Решить уравнение  $2 - 3(4x - 1) = 5 + 2(1 - x)$ .

**61.** Решить уравнение  $5(x - 2)^2 = 5x^2 - 10$ .

**62.** Решить уравнение:  $\frac{4x-1}{3-x} = \frac{1}{2}$ .

**63.** Решить уравнение:  $5x^2 + 2x = 0$ .

**64.** Решить уравнение:  $2x^2 + 9 = 9$ .

**65.** Решить уравнение:  $3x^2 - 5x - 2 = 0$ .

**66.** Решить уравнение:  $x^2 - 4x - 60 = 0$ .

**67.** Решить уравнение:  $7x^2 - 5x + 1 = 0$ .

**68.** Решить уравнение:  $\frac{5-x}{2x-1} = \frac{15-4x}{3x+1}$ .

**69.** Решить уравнение:  $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ .

70. Решить уравнение:  $\sqrt{x^2 - 1} = 3$

71. Решить уравнение  $|5x - 1| + 2 = 0$ .

72. Решить уравнение:  $|x^2 + x - 20| = 10$ .

73. Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} 3y - 8x = 15 \\ 7x - 2y = 0. \end{cases}$$

## 6. Неравенства

Прочитайте. Напишите перевод слов на родной язык.

неизвестное	unknown
неизвестная величина	unknown variable
неравенство	inequality
система неравенств	system of inequalities
решить	solve
решить неравенство	solve the inequality
перенести	be moved
привести подобные	addition of similar terms
раскрыть модуль	expand the module

### Пример 6.1.

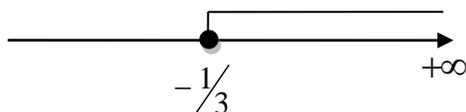
Решить линейное неравенство  $1,7 - 1,2x \leq 3x + 3,1$ .

*Решение.*

Привести подобные  $-1,2x - 3x \leq 3,1 - 1,7 \Rightarrow -4,2x \leq 1,4$ .

Разделить обе части неравенства на отрицательное число  $-4,2$ , знак неравенства меняется на противоположный  $\Rightarrow x \geq \frac{1,4}{-4,2} \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$ .

Решение неравенства можно изобразить на координатной прямой



Записать решение неравенства в виде промежутка  $x \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ .

Ответ.  $x \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$

### Пример 6.2.

Решить квадратное неравенство  $2x^2 - 3x < 2$ .

*Решение.*

Привести неравенство к стандартному виду  $2x^2 - 3x - 2 < 0$

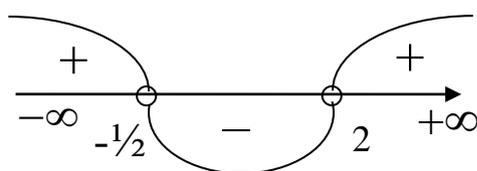
Вычислить дискриминант

$$D = b^2 - 4ac \Rightarrow D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) \Rightarrow D = 25.$$

Корни квадратного уравнения  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \cdot 2}$  и  $x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \cdot 2}$ .

Вычислить значения корней  $x_1 = \frac{3+5}{4} = 2$  и  $x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ .

Решение изобразить на координатной прямой:



Неравенство строгое ( $< 0$ )  $\Rightarrow$  выбираем промежуток отмеченный ниже оси и исключаем отмеченные точки 2 и  $-\frac{1}{2}$

Решение неравенства  $x \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$

Ответ.  $x \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ .

### Пример 6.3.

Решить систему неравенств  $\begin{cases} 2x+1 \leq 3 & (1) \\ 3-2x < 5 & (2) \end{cases}$

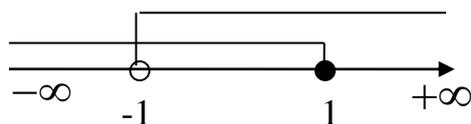
*Решение.*

Решить систему неравенств – решить все неравенства и найти пересечение их решений.

1) Решить неравенство (1)  $\Rightarrow 2x+1 \leq 3 \Leftrightarrow 2x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1$ .

2) Решить неравенство (2)  $\Rightarrow 3-2x < 5 \Leftrightarrow -2x < 2 \Leftrightarrow x > -1$ .

3) Найти пересечение решений неравенств (1) и (2) на координатной прямой



Записать множество решений системы неравенств в виде промежутка  $x \in (-1; 1]$ .

Ответ.  $x \in (-1; 1]$ .

**Пример 6.4.** Решить неравенство  $|5x - 3| \leq 2$ .

*Решение.* Неравенство  $|5x - 3| \leq 2$  равносильно системе неравенств

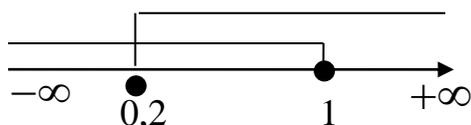
$$\begin{cases} 5x - 3 \leq 2 \\ 5x - 3 \geq -2 \end{cases}$$

Решаем каждое неравенство и находим пересечение этих решений.

1)  $5x - 3 \leq 2 \Leftrightarrow 5x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 1$ .

2)  $5x - 3 \geq -2 \Leftrightarrow 5x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow x \geq 0,2$ .

3) Пересечение решений неравенств



Решением неравенства является отрезок  $x \in [0,2;1]$ .

Ответ.  $x \in [0,2;1]$ .

**Пример 6.5.** Решить неравенство  $|-2x + 3| > 5$ .

*Решение.* Неравенство  $|-2x + 3| > 5$  равносильно совокупности неравенств

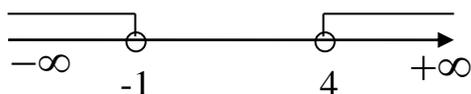
$$\begin{cases} -2x + 3 > 5 \\ -2x + 3 < -5 \end{cases}$$

Решаем каждое неравенство и находим объединение этих решений.

1)  $-2x + 3 > 5 \Leftrightarrow -2x > 2 \Leftrightarrow x < -1$ .

2)  $-2x + 3 < -5 \Leftrightarrow -2x < -8 \Leftrightarrow x > 4$ .

3) Объединение решений неравенств



Решением неравенства являются промежутки  $x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$ .

Ответ.  $x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$ .

### Упражнения

74. Решить неравенство  $x + 4 > 2 - 3x$ .

$$\frac{7 - 6x}{2} + 12 \geq \frac{8x + 1}{3} - 10x.$$

75. Решить неравенство

76. Решить неравенство  $3x^2 - 5x - 2 > 0$ .

77. Решить неравенство  $5x^2 - 7x + 2 \leq 0$ .

78. Решить неравенство  $-x^2 - 14x + 45 > 0$ .

79. Решить неравенство  $x^2 - 5x + 7 > 0$ .

80. Решить неравенство  $-3x^2 + x - 2 \geq 0$ .

81. Решить систему неравенств 
$$\begin{cases} 2x > 4x + 6 \\ 4x + 3 < 2x + 1. \end{cases}$$

82. Решить неравенство  $|-3x - 3| < 1$ .

83. Решить неравенство  $|5x - 2| \geq 7$ .

### Самостоятельная работа

84. Решить неравенство  $4(x - 1) < 2 + 7x$ .

85. Решить неравенство  $8 + \frac{3x - 4}{5} < \frac{x - 1}{6} - \frac{5x - 3}{8}$ .

86. Решить неравенство  $10x^2 - 3x - 1 \leq 0$ .

87. Решить неравенство  $3x^2 - 2x + 5 \geq 0$ .

88. Решить неравенство  $-x^2 + 6x - 18 > 0$ .

89. Решить систему неравенств 
$$\begin{cases} 6x - 7 \geq 5x - 1 \\ 3x + 6 > 8x - 4. \end{cases}$$

90. Решить неравенство  $|5 + 2x| \geq 5$ .

91. Решить неравенство  $|6x - 7| < 2$ .

## 7. Функции и графики

Прочитайте. Напишите перевод слов на родной язык.

функция	function
аргумент	argument
значение – переменной – аргумента – функции	value
линейная функция	linear function
квадратичная функция	quadratic function
дробно-линейная функция	fractional linear function
абсцисса	abscissa
ордината	ordinate
ось ординат	axis of ordinates, y-axis
система координат	coordinate system, coordinate axes, system of axes
координата точки	coordinate of a point
график функции	graph of function
прямая линия (прямая)	straight line
парабола	parabola
вершина (параболы)	parabola vertex
гипербола	hyperbola
область определения функции	domain of a function
область значений функции	range of function values
нули функции	zeros of a function
интервал постоянного знака	interval of sign constancy
возрастание функции (возрастает)	increase of a function
убывание функции (убывает)	decrease of a function
монотонность	monotony of the function
производная	derivative of function
штрих	prime
максимум	maximum
минимум	minimum

**Пример 7.1.**

Записать формулой: значение функции в три раза больше аргумента.

*Решение.*

$y$  – функция (значение функции)

$x$  – аргумент

Ответ: формула  $y = 3x$ .

**Пример 7.2.** Найти значение функции  $y = 2 - x^3$  для аргумента  $x = -0,5$ .

*Решение.*

$$y = y(x) = 2 - x^3 \Rightarrow y(0,5) = 2 - 0,5^3 = 2 - 0,125 = 0,875$$

Ответ:  $y = 0,875$ .

**Пример 7.3.**

Найти значение аргумента  $x$ , при котором значение функции  $y = \sqrt{2x-1}$  равно 3.

*Решение.*

$$\text{Значение функции } y = 3 \Rightarrow \sqrt{2x-1} = 3 \Rightarrow 2x-1 = 9 \Rightarrow x = 5.$$

Ответ:  $x = 5$ .

**Пример 7.4.** Дана функция  $y = f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$ . Найти  $f(1)$ ;  $f(2x)$ .

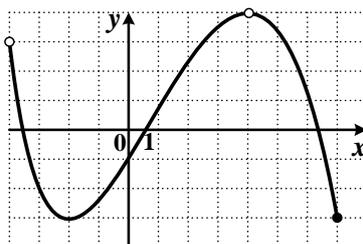
*Решение.*

$$f(1) = \frac{3 \cdot 1 + 1}{1 - 3} = \frac{4}{-2} = -2;$$

$$f(2x) = \frac{3 \cdot (2x) + 1}{2x - 3} = \frac{6x + 1}{2x - 3}.$$

Ответ:  $f(1) = -2$ ,  $f(2x) = \frac{6x+1}{2x-3}$ .

**Пример 7.5.** Функция  $y = f(x)$  задана графиком



а) Найти  $f(-2)$ .

б) Найти значение аргумента из промежутка  $[-2; 2]$ , при котором значение функции равно  $-1$ .

*Решение.*

а)  $y = f(-2)$  при  $x = -2$ .

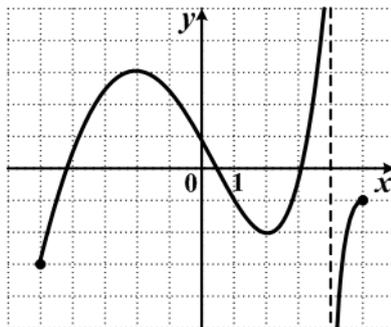
Точка с абсциссой  $x = -2$  имеет координаты  $(-2; -3)$ . Следовательно,  $f(-2) = -3$ .

б)  $y = f(x) = -1$ . На графике имеют ординату  $-1$  три точки с абсциссами  $x_1 \approx -3,2$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 \approx 6,5$ .

В промежуток  $[-2; 2]$  попадает только аргумент  $x = 0$ .

Ответ: 1)  $f(-2) = -3$ ; 2)  $x = 0$ .

**Пример 7.5.** Описать свойства функции по заданному графику функции.



*Решение.*

1) Область определения функции  $D(y) : x \in [-5; 4) \cup (4; 5]$

2) Область значений (изменения) функции  $E(y) : y \in (-\infty; +\infty)$

3) Нули функции  $x = -4$ ;  $x = 0,5$ ;  $x = 3$  (при  $y = 0$ )

4) Интервалы постоянного знака

$$y > 0 \text{ при } x \in (-4; 0,5) \cup (3; 4);$$

$$y < 0 \text{ при } x \in [-5; 4) \cup (0,5; 3) \cup (4; 5].$$

5) Интервалы монотонности.

Функция возрастает ( $y \nearrow$ ) при значении аргумента

$$x \in [-5; -2) \cup (2; 4) \cup (4; 5].$$

Функция убывает ( $y \searrow$ ) при значении аргумента  $x \in (-2; 2)$ .

6) Точка максимума  $x = -2$ , максимум функции  $y = 3$

Точка минимума  $x = 2$ , минимум функции  $y = -2$ .

**Пример 7.6.** Найти нули функции  $y = \frac{5-4x-x^2}{x}$ , если они существуют.

*Решение.*

Найти нули функции, значит найти аргумент функции, при котором значении функции равно 0.

$$y = 0 \Rightarrow \frac{5-4x-x^2}{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5-4x-x^2 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$-x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow D = (-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5 = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{4+6}{-2} = -5 \\ x_2 = \frac{4-6}{-2} = 1 \end{cases}$$

*Ответ:*  $x = 1$  и  $x = -5$ .

**Пример 7.7.** Найти интервалы постоянного знака функции  $y = 0,2x - 3$ .

*Решение.*

Функция принимает положительные значения,

$$y > 0 \Rightarrow 0,2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 15.$$

Функция принимает отрицательные значения,

$$y < 0 \Rightarrow 0,2x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 15.$$

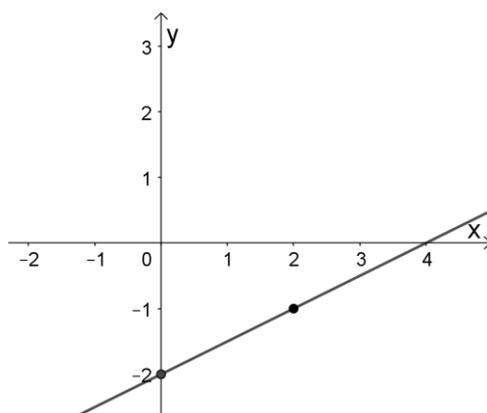
Ответ: интервал положительного знака функции  $y > 0 \Rightarrow x \in (15; +\infty)$ ,  
интервал отрицательного знака функции  $y < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 15)$ .

**Пример 7.8.**

а) Построить график линейной функции  $y = \frac{1}{2}x - 2$ .

б) Записать свойства функции.

в) Проходить ли график этой функции через точку  $A(-4; -3)$ ?



*Решение.*

а) График линейной функции – прямая линия.

Строить прямую (линию) можно по двум точкам. Выбрать значение переменной  $x$  и найти значение функции  $y$ .

Запись  $y(0) = -2$  и  $y(2) = -1$  или таблица

$x$	0	2
$y$	-2	-1

Ставим точки с координатами  $(0; -2)$  и  $(2; -1)$ .

Проводим прямую линию через эти точки.

б) Свойства функции

Область определения функции  $D(y) : x \in (-\infty; +\infty)$

Область значений функции  $E(y) : y \in (-\infty; +\infty)$

Функция возрастает ( $y \nearrow$ ) при значении аргумента  $x \in (-\infty; +\infty)$

Функция убывает ( $y \searrow$ ) при значении аргумента  $x \in \emptyset$ .

в) Для точки  $A(-4; -3) \Rightarrow x = -4; y = -3$ .

Найдем  $y(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4) - 2 = -4 \neq -3$ .

График функции не проходит через точку  $A(-4; -3)$ .

### **Пример 7.9.**

1) Построить график квадратичной функции  $y = x^2 - 2x - 3$ .

2) Найти интервалы монотонности функции.

*Решение.*

1) Коэффициенты квадратичной функции:  $a = 1, b = -2, c = -3$ .

График квадратичной функции – парабола.

Построить параболу по точкам: вершина параболы, точки пересечения с осями координат.

Абсцисса вершины параболы:  $x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$ . Ордината вершины

параболы:  $y_B = y(x_B) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$ .

Точки пересечения с осью ординат:  $y = y(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$ .

Дополнительная точка:  $y(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = -3$

Точки пересечения с осью абсцисс:  $y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ .

Вычислить дискриминант  $D = b^2 - 4ac \Rightarrow D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) \Rightarrow D = 16$ .

Корни квадратного уравнения

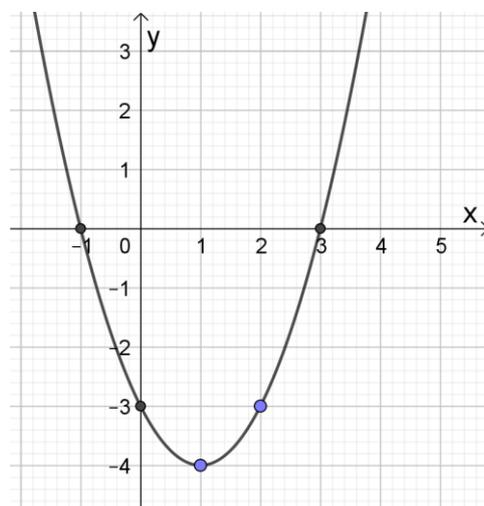
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 3 \text{ и } x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -1.$$

Составить таблицу координат точек

$x$	0	1	2
$y$	-3	-4	-3

Отметить точки на координатной плоскости и провести параболу через точки.

2) Функция возрастает при  $x \in (1; +\infty)$ ; функция убывает при  $x \in (-\infty; 1)$ .



**Пример 7.10.** Построить график дробно-линейной функции  $y = 1 - \frac{2}{x}$ .

*Решение.*

График дробно-линейной функции – гипербола.

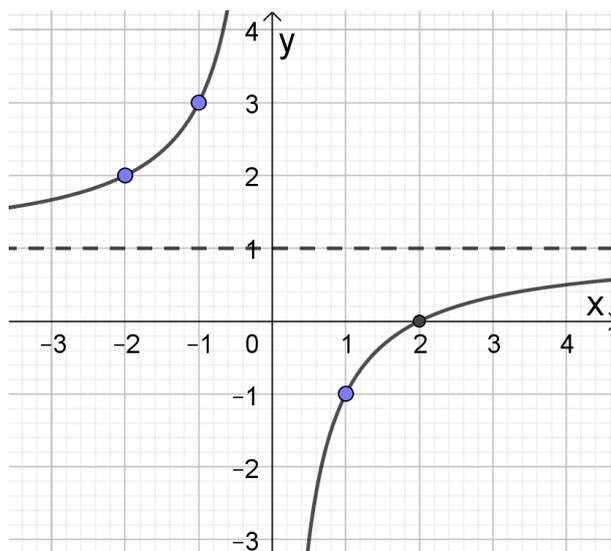
Определить асимптоты гиперболы: прямые  $x = 0$ ,  $y = 1$ . Значения абсциссы  $x$  и ординаты  $y$  точек, в которых функция не определена.

Составить таблицу координат точек

$x$	-2	-1	1	2
$y$	2	3	-1	0

Отметить точки на координатной плоскости.

Построить две ветви гиперболы через точки, не пересекая асимптоты.



### Упражнения

92. Записать функцию формулой: игрек равно икс в квадрате плюс один.

93. Записать формулой: значение функции на 5 меньше корня пятой степени из аргумента.

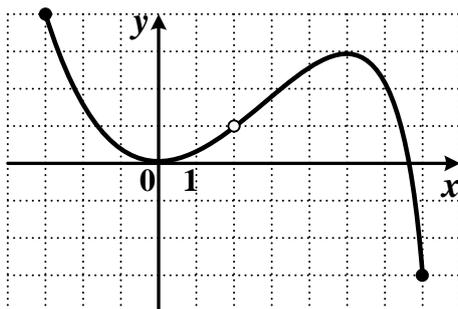
94. Дана функция  $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^4 - 3}$ .

а) Найти значение функции, если аргумент  $x = 3$ .

б) Найти  $f(0)$ ;  $f(-2x)$ .

95. Дана функция  $y = g(x) = \sqrt{\frac{3}{x} + 2}$ . Найти значения аргумента, при которых значение функции  $y$  равно 0; 2; -1.

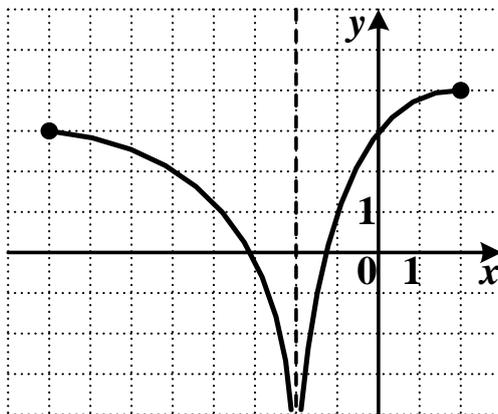
96. Функция  $y = f(x)$  задана графиком.



Найти

- а)  $f(0)$ ;  $f(5)$ ;  $f(-3)$ ;  $f(-4)$ ;  $f(2)$ .
- б) Значения аргумента, при которых  $f(x) = -3$ ;  $f(x) = 0$ ;  $f(x) = 1$ .
- в) Промежутки убывания функции.

97. Описать свойства функции по заданному графику функции.



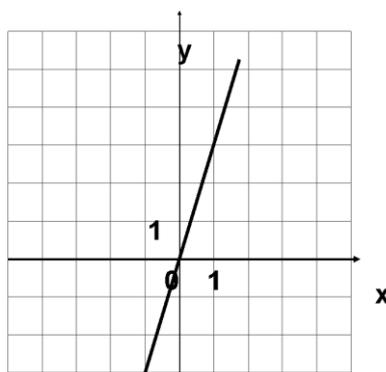
98. Найти интервалы постоянного знака функции.

- а)  $y = 5 - 2x$ . При каких значениях аргумента функция принимает положительные значения?
- б)  $y = 3 + 4x$ . При каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения?

99. График функции  $y = 2x + b$  проходит через точку  $(-3; 5)$ .

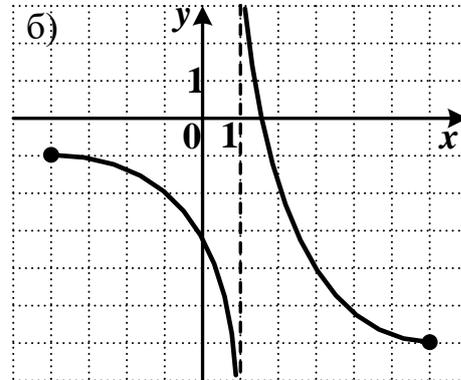
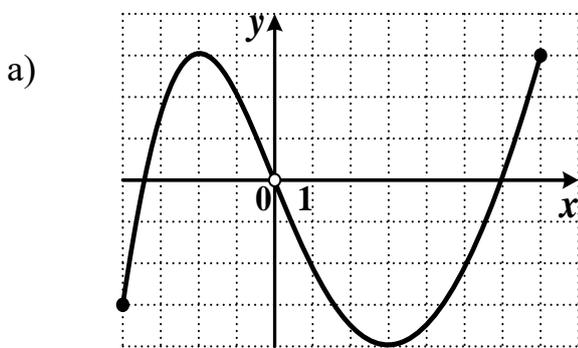
- а) Найдите  $b$ .
- б) Построить график функции.
- в) Найдите значение функции при  $x = -1$ .
- г) Найдите значения аргумента при  $y < 3$ .

100. По графику записать формулу линейной функции

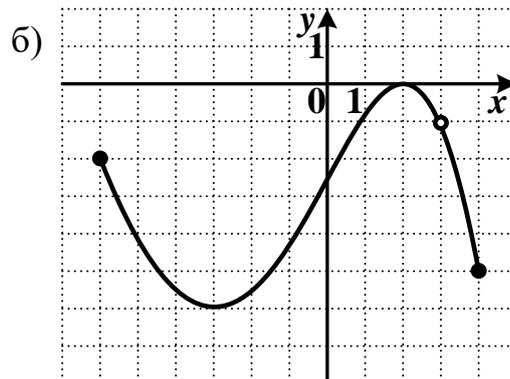
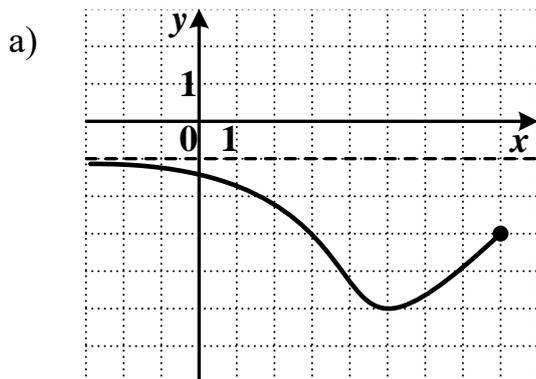


**101.** Построить график функции  $y = 2x^2$ . Проходит ли этот график через точку  $A(-4,5; 40,5)$ ?

**102.** По графику функции найти область определения и множество значений функции



**103.** По графику функции найти 1) интервалы монотонности; 2) точки экстремума



### Самостоятельная работа

**104.** Записать функцию формулой: игрек равно икс в кубе минус два.

**105.** Записать формулой: значение функции в три раза больше корня третьей степени из аргумента.

**106.** Дана функция  $y = f(x) = \frac{2x + 1}{3x^2 - 1}$ .

а) Найти значение функции, если аргумент  $x = 2$ .

б) Найти  $f(1)$ ;  $f(-3x)$ .

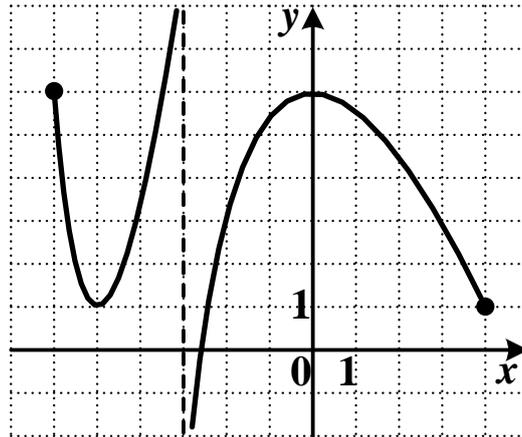
**107.** Дана функция  $y = g(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ . Найти значения аргумента, при которых значение функции  $y$  равно 0; 1; -3.

**108.** Функция  $y = f(x)$  задана графиком. Найти

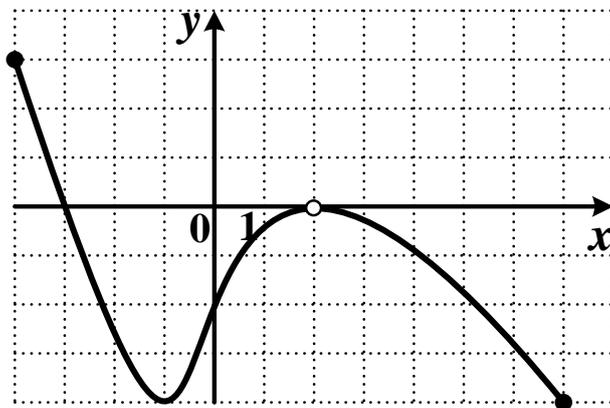
а)  $f(0)$ ;  $f(4)$ ;  $f(-2)$ ;  $f(-3)$

б) Значения аргумента, при которых  $f(x) = 3$ ;  $f(x) = 0$ ;  $f(x) = 6$

в) Промежутки возрастания функции.



**109.** Описать свойства функции по заданному графику функции.



**110.** Найти интервалы постоянного знака функции.

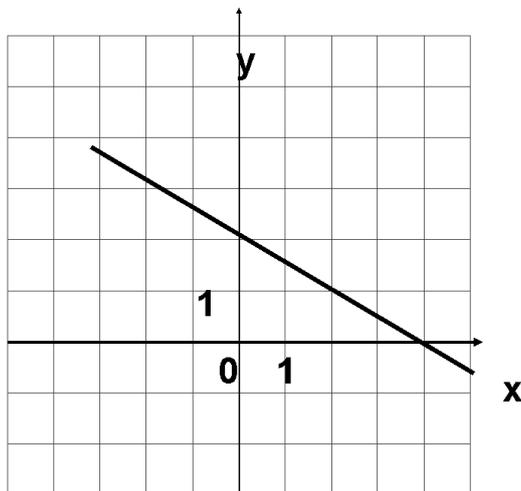
а)  $y = x^2 - 1$ . При каких значениях аргумента функция принимает положительные значения?

б)  $y = 4 - 2x$ . При каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения?

**111.** График функции  $y = kx - 1$  проходит через точку  $(-3; 5)$ .

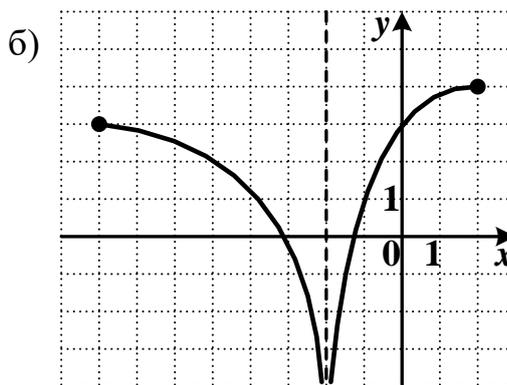
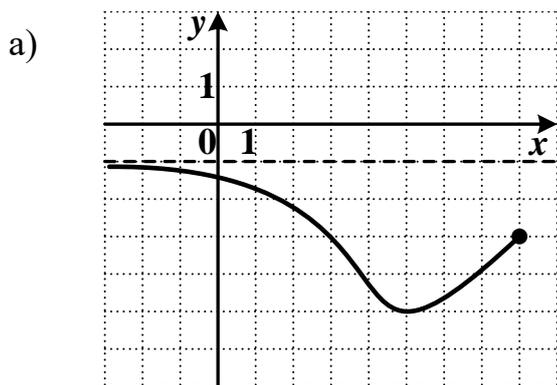
- Найдите  $k$ .
- Построить график функции.
- Найдите значение функции при  $x = 2$ .
- Найдите значения аргумента при  $y \geq 4$ .

**112.** По графику записать формулу линейной функции



**113.** Построить график функции  $y = x^2 - 2x - 3$ . Проходит ли этот график через точку  $A(2,5; -2,25)$ ?

**114.** По графику функции найти область определения и множество значений функции

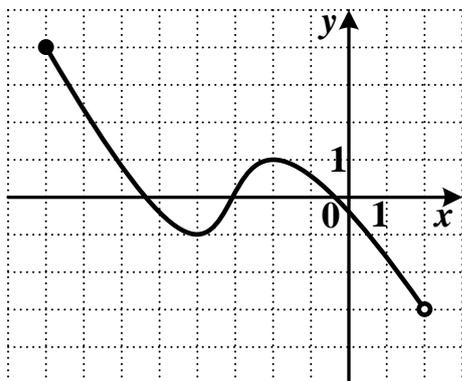


115. По графику функции найти

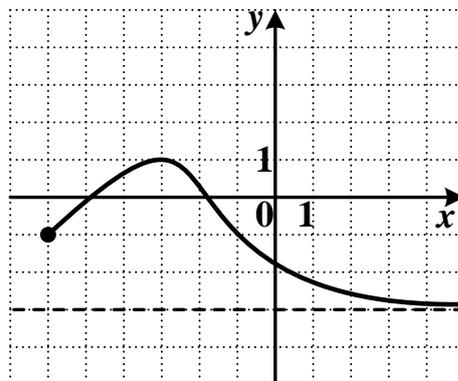
1) интервалы монотонности;

2) точки экстремума

а)



б)



## 8. Степени и их свойства

### Свойства степени (Properties of Exponents)

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ раз}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$
- $a^0 = 1$  нулевая степень (zero exponent)
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  отрицательная степень (negative exponent)
- $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$  произведение степеней (product of powers)
- $a^n \div a^k = \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$  частное степеней (quotient of powers)
- $(a^n)^k = a^{n \cdot k} = a^{nk}$  степень степени (power of a power)
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$  степень произведения (power of product)
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$  степень частного (power of a quotient)
- $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$  переход к степени (changing from Radical to Exponential Form)
- $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-1/n}$  переход к степени (changing from Radical to Exponential Form)
- $\sqrt[n]{a^k} = a^{k/n}$  переход от корня к степени (changing from Radical to Exponential Form)

### Свойства корней

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$  произведение корней с одинаковыми показателями
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$  частное корней с одинаковыми показателями
- $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$  корень из корня
- $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$  степень корня
- $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[nm]{a^{km}}, a^k \geq 0$  основное свойство корня
- $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ , если  $n$  – нечетное

**Пример 8.1.** Выполнить действия  $3^{-4} \cdot 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^0 \cdot 3^7 \cdot 3^{-1}$ .

*Решение.*

Применить свойство произведения степеней

$$3^{-4} \cdot 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^0 \cdot 3^7 \cdot 3^{-1} = 3^{-4+1+2+0+7+(-1)} = 3^5 = 243.$$

**Пример 8.2.** Записать число или выражение в виде степени:

$$216; \frac{1}{128}; \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 6}; \sqrt[3]{7 \cdot 7 \cdot 7}.$$

*Решение.*

$$216 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$$

$$\frac{1}{128} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = (0,5)^7$$

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 6} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\sqrt[5]{7 \cdot 7 \cdot 7} = \sqrt[5]{7^3} = 7^{3/5}$$

**Пример 8.3.** Выполнить действия со степенями:  $\frac{18^4 \cdot 3^{-6}}{2^8 \cdot 4^{-3}}$

*Решение.* Разложим все числа на простые множители и запишем их степени.

$$\begin{aligned} \frac{18^4 \cdot 3^{-6}}{2^8 \cdot 4^{-3}} &= \frac{(2 \cdot 3^2)^4 \cdot 3^{-6}}{2^8 \cdot (2^2)^{-3}} = \frac{2^4 \cdot (3^2)^4 \cdot 3^{-6}}{2^8 \cdot 2^{2 \cdot (-3)}} = \frac{2^4 \cdot 3^8 \cdot 3^{-6}}{2^8 \cdot 2^{-6}} = \frac{2^4 \cdot 3^{8+(-6)}}{2^{8+(-6)}} = \\ &= \frac{2^4 \cdot 3^2}{2^2} = 2^{(4-2)} \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36. \end{aligned}$$

**Пример 8.4.** Найти значение выражения  $\sqrt[4]{\frac{0,4 \cdot 0,125}{0,8}}$ .

*Решение.*

$$\sqrt[4]{\frac{0,4 \cdot 0,125}{0,8}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 125 \cdot 10}{10 \cdot 1000 \cdot 8}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 125}{8 \cdot 125 \cdot 4 \cdot 2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{8 \cdot 2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2^4}} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

**Пример 8.5.** Выполнить действия с корнями  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$ .

*Решение.*

Привести корни к одному показателю и применить свойство произведения корней

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{4 \cdot 27} = \sqrt[6]{108}.$$

**Пример 8.6.** Вычислить  $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$ .

*Решение.*

Использовать вынесение из-под знака корня.

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Тогда } \sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

**Пример 8.7.** Упростить выражение  $\frac{b^2 \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a^2 \cdot b^7}}$

*Решение.*

Использовать внесение под знак корня.

$$\frac{b^2 \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a^2 \cdot b^7}} = \frac{\sqrt[6]{b^{12}} \cdot \sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{a^2 \cdot b^7}} = \frac{\sqrt[6]{b^{12} \cdot a^2}}{\sqrt[6]{a^2 \cdot b^7}} = \sqrt[6]{\frac{b^{12} \cdot a^2}{a^2 \cdot b^7}} = \sqrt[6]{b^5}$$

**Пример 8.8.**

Найти значение выражения  $\frac{\sqrt[4]{125} \cdot (\sqrt{7})^{-1} \cdot 7^3}{(35)^2 \cdot \sqrt{5\sqrt{5}} \cdot 7^{1/2}}$ .

*Решение.*

Использовать свойства степеней и корней

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{125} \cdot (\sqrt{7})^{-1} \cdot 7^3}{(35)^2 \cdot \sqrt{5\sqrt{5}} \cdot 7^{1/2}} &= \frac{\sqrt[4]{5^3} \cdot \left(7^{1/2}\right)^{-1} \cdot 7^3}{(5 \cdot 7)^2 \cdot \left(5^1 \cdot 5^{1/2}\right)^{1/2} \cdot 7^{1/2}} = \frac{5^{3/4} \cdot 7^{-1/2} \cdot 7^3}{5^2 \cdot 7^2 \cdot \left(5^{3/2}\right)^{1/2} \cdot 7^{1/2}} = \\ &= \frac{5^{3/4} \cdot 7^{-1/2} \cdot 7^3}{5^2 \cdot 7^2 \cdot \left(5^{3/2}\right)^{1/2} \cdot 7^{1/2}} = 5^{3/4-2-3/4} \cdot 7^{-1/2+3-2-1/2} = 5^{-2} \cdot 7^0 = \frac{1}{5^2} \cdot 1 = \frac{1}{25} = 0,04. \end{aligned}$$

## Упражнения

**116.** Вычислить

а)  $2^0 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^7 \cdot 2^{-10} \cdot 2^{-12}$ ;

б)  $\frac{125 \cdot 5^2 \cdot 5^0}{625 \cdot 5^3 \cdot 5}$ ;

в)  $\frac{3^3 \cdot 9^2}{3^6}$ ;

г)  $\frac{15^2 \cdot 25^{-3} \cdot 9^2}{81 \cdot 5^{-4}}$ ;

д)  $\frac{(7a^2)^3 \cdot (3b)^2}{(21a^3b)^2}$ ;

е)  $\left( \frac{3^{3/2} \cdot 15^{5/3} \cdot 25^{3/2}}{27^{1/6} \cdot 5^{4/3}} \right)^{3/4}$ .

**117.** Записать степени в виде корней

а)  $17^{1/4}$ ;

б)  $2^{2/3}$ ;

в)  $(a-b)^{-2/5}$ .

**118.** Найти значение выражения

а)  $\left( \sqrt{2\frac{2}{5}} - \sqrt{5\frac{2}{5}} \right) : \sqrt{\frac{3}{20}}$ ;

б)  $\frac{\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{36}}{\sqrt[4]{4}}$ ;

в)  $\frac{15\sqrt{6} \cdot 10\sqrt{6}}{6\sqrt{6}}$ ;

г)  $\left( \frac{2^{1/3} \cdot 2^{1/4}}{\sqrt[12]{2}} \right)^2$ ;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\sqrt{3})^{1,75} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{3} \\ \text{д)} & \frac{2^{1/4} \cdot \sqrt[4]{9} \cdot 3^{-1/2}}{2^{1/4} \cdot \sqrt[4]{9} \cdot 3^{-1/2}}; \\ \text{е)} & \sqrt[4]{6+\sqrt{20}} \cdot \sqrt[4]{6-\sqrt{20}}; \\ \text{ж)} & \sqrt{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

### Самостоятельная работа

**119.** Вычислить

$$\text{а)} (2^2)^3 \cdot 2^{-3} \cdot 2^0 \cdot 3^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 3^0;$$

$$\text{б)} \frac{4^5 \cdot 64^3}{16^6};$$

$$\text{в)} \frac{7^{-4} \cdot 49 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3 \cdot 49^0}{343^{-2}};$$

$$\text{г)} \frac{12^6 \cdot 16^{-2} \cdot 36^{-1}}{27^3 \cdot 3^{-2}};$$

$$\text{д)} \frac{(5a^3)^2 \cdot (2b)^4}{(30a^3b^2)^2};$$

$$\text{е)} \left( \frac{4^{3/4} \cdot 2^{-2/3} \cdot 14^{1/2}}{49^{3/8} \cdot 7^{1/4}} \right)^{3/2}.$$

**120.** Записать степени в виде корней:

$$\text{а)} 8^{-1/5};$$

$$\text{б)} 3^{3/7};$$

$$\text{в)} (a+b)^{3/8}.$$

**121.** Найти значение выражения:

а)  $\left(\sqrt{3\frac{6}{7}} - \sqrt{1\frac{5}{7}}\right) : \sqrt{\frac{3}{175}}$  ;

б)  $\frac{\sqrt[5]{10} \cdot \sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{5}}$  ;

в)  $\frac{\sqrt[9]{7} \cdot \sqrt[18]{7}}{\sqrt[6]{7}}$  ;

г)  $\left(\frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{3}}\right)^2$  ;

д)  $\frac{\sqrt[6]{16} \cdot 6^{0,5} \cdot (\sqrt[6]{6})^3}{\sqrt[3]{81} \cdot (\sqrt[6]{36})^{-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2}$  ;

е)  $\sqrt[3]{7 - \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 + \sqrt{22}}$  ;

ж)  $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}}$  .

## 9. Показательные уравнения и неравенства

Прочитайте. Напишите перевод слов на родной язык.

неизвестное	unknown
неизвестная величина	unknown variable
уравнение	equation
неравенство	inequality
корень уравнения	root of equation
посторонний корень	outlier, outlying value
решение уравнения	solution of equation
показательное уравнение	exponential equation
показательное неравенство	exponential inequality
знак неравенства	the inequality sign
решить	solve
решить уравнение	solve the equation
решить неравенство	solve the inequality
сохраняется (знак неравенства)	be preserved (the inequality sign is preserved)
меняется (знак неравенства)	change (the inequality sign changes)

**Правило 1.** Стандартный вид показательного уравнения

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x), a - \text{число}, a > 0, a \neq 1.$$

**Пример 9.1.** Решить показательное уравнение  $3^{5x-2} = 3^{2x+1}$ .

*Решение.*

Число  $a = 3$ ,  $3 > 0$ ,  $3 \neq 1$ .

Применить правило 1:  $5x - 2 = 2x + 1$ .

Привести подобные  $5x - 2x = 1 + 2 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$ .

Ответ.  $x = 1$ .

**Пример 9.2.** Решить уравнение  $2 \cdot \sqrt{2^x} = 1$ .

*Решение.*

Привести уравнение к стандартному виду

$$2 \cdot \sqrt{2^x} = 1 \Leftrightarrow 2^1 \cdot 2^{x/2} = 2^0 \Leftrightarrow 2^{1+x/2} = 2^0.$$

Применить правило 1:  $2^{1+x/2} = 2^0 \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{2} = 0$ .

Решить линейное уравнение:  $1 + \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow x = -2$ .

Ответ.  $x = -2$ .

**Пример 9.3.** Решить уравнение  $3 \cdot 5^{x+2} - 7 \cdot 5^{x+1} = 8$ .

*Решение.*

Привести уравнение к стандартному виду

$$3 \cdot 5^{x+2} - 7 \cdot 5^{x+1} = 8 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot 5 \cdot 5^{x+1} - 7 \cdot 5^{x+1} = 8 \Leftrightarrow$$

$$5^{x+1} \cdot (15 - 7) = 8 \Leftrightarrow$$

$$5^{x+1} \cdot 8 = 8 \Leftrightarrow$$

$$5^{x+1} = 1.$$

Решить показательное уравнение:  $5^{x+1} = 5^0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ .

Ответ.  $x = -1$ .

**Пример 9.4.** Решить уравнение  $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$ .

*Решение.*

Замена  $3^x = y$ ,  $9^x = 3^{2x} = (3^x)^2 = y^2$ .

Решить квадратное уравнение  $y^2 - 4y - 45 = 0$ .

Вычислить дискриминант  $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-45) = 16 + 180 = 196$ .

Корни квадратного уравнения  $y_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 14}{2} = \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = -5 \end{cases}$

Выполнить обратную замену:

1)  $y = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$ .

2)  $y = -5 \Rightarrow 3^x = -5$  не имеет корней.

Ответ.  $x = 2$ .

**Правило 2.** Стандартный вид показательного неравенства  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$   
( $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ ,  $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ,  $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$ ),  $a$  – число,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), a > 1 & \text{– знак неравенства сохраняется} \\ f(x) < g(x), 0 < a < 1 & \text{– знак неравенства меняется (разворачивается)} \end{cases}$

**Пример 9.5.** Решить показательное неравенство  $4^x < 16$ .

*Решение.*

Привести неравенство к стандартному виду:  $4^x < 16 \Leftrightarrow 4^x < 4^2$ .

Число  $a = 2$ ,  $2 > 1$ . Знак неравенства сохраняется.

Применить правило 2:  $x < 2$ .

Ответ.  $x \in (-\infty; 2)$ .

**Пример 9.6.**

Решить показательное неравенство  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} \leq \frac{16}{9}$ .

*Решение.*

Привести неравенство к стандартному виду:  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ .

Число  $a = \frac{3}{4}$ ,  $\frac{3}{4} < 1$ . Знак неравенства меняется:  $2x-1 \geq -2$ .

Решить линейное неравенство  $2x \geq -2+1 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ .

Ответ.  $x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

**Пример 9.7.** Решить неравенство  $2^{x-1} + 2^{x+3} > 17$ .

*Решение.*

Привести неравенство к стандартному виду:  $2^{x-1} + 2^{x-1} \cdot 2^4 > 17$

$2^{x-1}(1+16) > 17 \Leftrightarrow 2^{x-1} > 2^0$

Решить по правилу 2:  $a = 2 > 1 \Rightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ .

Ответ.  $x \in (1; +\infty)$ .

**Пример 9.8.** Решить неравенство  $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \geq 0$ .

*Решение.*

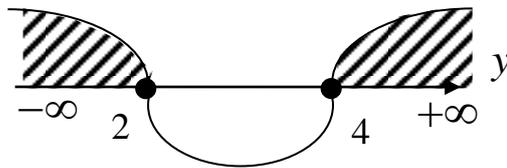
Заменить  $2^x = y$ ,  $4^x = 4^{2x} = (2^x)^2 = y^2$ .

Решить квадратное уравнение  $y^2 - 6y + 8 \geq 0$ .

Вычислить дискриминант  $D = b^2 - 4ac \Rightarrow D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 \Rightarrow D = 4$ .

Корни квадратного уравнения  $y_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 2 \end{cases}$ .

Решение изобразить на координатной прямой:



Решение квадратного неравенства:  $\begin{cases} y \leq 2 \\ y \geq 4 \end{cases}$

Выполнить обратную замену:

1)  $y \leq 2 \Rightarrow 2^x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1$

2)  $y \geq 4 \Rightarrow 2^x \geq 2^2 \Leftrightarrow x \geq 2$ .

Ответ.  $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$ .

### Упражнения

122. Решить уравнение  $\sqrt[3]{5^{2x}} = 125$ .

123. Найти корни уравнения  $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{x^2-8} = 1$ .

124. Найти решение уравнения  $\sqrt{2^x} = 8^{-2/3}$ .

125. Решить уравнение  $3^{x+2} - 3^x = 72$ .

126. Решить уравнение  $3^x - 3^{1-x} = 2$ .

127. Решить уравнение  $4^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+1} = 0$ .

128. Решить неравенство  $4^{2-x} < 64$

129. Решить неравенство  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+3} \geq 3^{1-x}$ .

130. Решить неравенство  $9^x - 3^x \leq 6$ .

131. Решить неравенство  $\left(\frac{2}{10}\right)^{\frac{2x-1}{x}} > 5$ .

### Самостоятельная работа

132. Решить уравнение  $\sqrt[3]{3^{2x-1}} = 27^{-1/5}$ .

133. Найти корни уравнения  $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5} = 3^{5x^2+10}$ .

134. Найти решение уравнения  $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$ .

135. Решить уравнение  $4 \cdot 3^{x-1} + 3^{x+1} = 117$ .

136. Решить уравнение  $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$ .

137. Решить уравнение  $(0,4)^{3-x} = (2,5)^{1-\frac{3}{x}}$ .

138. Решить неравенство  $0,3^{3x-1} < 0,09$ .

139. Решить неравенство  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x-2} \geq 4^{x-1}$ .

140. Решить неравенство  $5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 \geq 0$ .

141. Решить неравенство  $3^{x-3} < 3 \cdot 27^{1/x}$ .

## 10. Логарифмы и их свойства

**Логарифмом (logarithm) числа  $b$  по основанию  $a$**  называется показатель степени, в которую нужно возвести  $a$ , чтобы получить  $b$ :

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0.$$

Если основание равно 10, то пишут  $\log_{10} a = \lg a$  и логарифм по основанию 10 называется десятичным логарифмом (decimal logarithm).

Если основание равно  $e$ , то пишут  $\log_e a = \ln a$  и логарифм по основанию  $e$  называется натуральным логарифмом (natural logarithm).

### Пример 10.1.

Вычислить

а)  $\log_2 8$ ;

б)  $\log_5 25$ ;

в)  $\log_2 2$ ;

г)  $\log_2 \frac{1}{32}$ ;

д)  $\log_{125} 5$ .

*Решение.*

По определению логарифма

а)  $\log_2 8 = 3$ , так как  $2^3 = 8$ ;

б)  $\log_5 25 = 2$ , так как  $5^2 = 25$ ;

в)  $\log_2 2 = 1$ , так как  $2^1 = 2$ ;

г)  $\log_2 \frac{1}{32} = -5$ , так как  $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ ;

д)  $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$ , так как  $125^{\frac{1}{3}} = 5$ .

### Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0.$$

### Свойства логарифмов

Пусть  $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$

1.  $\log_a 1 = 0$

2.  $\log_a a = 1$

- |   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| 3. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$          | логарифм произведения               |
| 4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ | логарифм частного                   |
| 5. $\log_a b^n = n \log_a b$                  | логарифм степени                    |
| 6. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b$      |                                     |
| 7. $\log_{a^n} b^n = \log_a b$                |                                     |
| 8. $\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k} \log_a b$    |                                     |
| 9. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$            |                                     |
| 10. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$    | формула перехода к новому основанию |

### Пример 10.2.

Используя основное логарифмическое тождество и свойства 1–10, вычислить:

- а)  $\log_{\frac{1}{3}} 1$ ;
- б)  $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$ ;
- в)  $2^{3+\log_2 5}$ ;
- г)  $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$ ;
- д)  $\log_{\frac{1}{2}} 28 - \log_{\frac{1}{2}} 7$ ;
- е)  $\log_2 4 \cdot \log_3 27$ ;
- ж)  $\log_{32} 2$ ;
- з)  $\frac{\log_7 25}{\log_7 5}$ .

*Решение.*

- а)  $\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$  (свойство 1);
- б)  $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$  (свойство 2);
- в)  $2^{3+\log_2 5} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 5} = 8 \cdot 5 = 40$  (основное логарифмическое тождество);

- г)  $\log_{12} 2 + \log_{12} 72 = \log_{12}(2 \cdot 72) = \log_{12} 144 = 2$  (свойство 3);
- д)  $\log_{\frac{1}{2}} 28 - \log_{\frac{1}{2}} 7 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{28}{7} = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$  (свойство 4);
- е)  $\log_2 4 \cdot \log_3 27 = \log_2 2^2 \cdot \log_3 3^3 = 2 \cdot 3 \cdot \log_2 2 \cdot \log_3 3 = 6$  (свойство 5);
- ж)  $\log_{32} 2 = \log_{2^5} 2 = \frac{1}{5} \log_2 2 = 0,2$  (свойство 6);
- з)  $\frac{\log_7 25}{\log_7 5} = \log_5 25 = 2$  (свойство 10).

### Пример 10.3.

Найдите  $\log_5 12$ , если  $\log_5 2 = a$  и  $\log_5 3 = b$ .

*Решение.*

$$\log_5 12 = \log_5(3 \cdot 4) = \log_5 3 + \log_5 4 = b + \log_5 2^2 = b + 2 \log_5 2 = b + 2a.$$

### Пример 10.4.

Найдите значение выражения

- а)  $5^{-4 \log_5 2}$ ;
- б)  $\frac{\log_{0,3} 8}{\log_{0,09} 8}$ ;
- в)  $\frac{\log_9 324}{2 + \log_9 4}$ .

*Решение.*

Воспользуемся определением и свойствами логарифма.

$$а) 5^{-4 \log_5 2} = \left(5^{\log_5 2}\right)^{-4} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16};$$

$$б) \frac{\log_{0,3} 8}{\log_{0,09} 8} = \frac{\log_{0,3} 8}{\log_{0,3^2} 8} = \frac{\log_{0,3} 8}{\frac{1}{2} \cdot \log_{0,3} 8} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2;$$

$$в) \frac{\log_9 324}{2 + \log_9 4} = \frac{\log_9(9^2 \cdot 4)}{2 + \log_9 4} = \frac{\log_9 9^2 + \log_9 4}{2 + \log_9 4} = \frac{2 + \log_9 4}{2 + \log_9 4} = 1.$$

## Упражнения

**142.** Вычислить логарифмы

- а)  $\log_5 5$ ;
- б)  $\log_3 243$ ;
- в)  $\log_4 \frac{1}{16}$ ;
- г)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ ;
- д)  $\log_3(\log_3(\log_3 27))$ .

**143.** Используя основное логарифмическое тождество и свойства 1–10, вычислить

- а)  $\frac{7^{\log_7 13}}{52}$ ;
- б)  $10^{3-\lg 40}$ ;
- в)  $\log_6 12 + \log_6 3$ ;
- г)  $\log_2 15 - \log_2 30$ ;
- д)  $\log_5 125 \cdot \log_2 8$ ;
- е)  $\log_{81} 3$ ;
- ж)  $\frac{\log_6 64}{\log_6 2}$ .

**144.** Найдите значение выражения

- а)  $8^{\log_2 5}$ ;
- б)  $\frac{\log_6 2}{\log_6 3} + \log_3 0,5$ ;
- в)  $\log_{\sqrt{8}} 64$

### Самостоятельная работа

**145.** Вычислить логарифмы

- а)  $\log_2 1$ ;
- б)  $\log_2 16$ ;
- в)  $\log_2 \frac{1}{4}$ ;

г)  $\log_{\frac{1}{3}} 81$ ;

д)  $\log_2(\log_{25}(\log_2 32))$ .

**146.** Используя основное логарифмическое тождество и свойства 1–10, ВЫЧИСЛИТЬ

а)  $\frac{70}{2^{\log_2 5}}$ ;

б)  $3^{2+\log_3 11}$ ;

в)  $\log_{18} 2 + \log_{18} 9$ ;

г)  $\log_5 75 - \log_5 3$ ;

д)  $\log_2 128 \cdot \log_6 36$ ;

е)  $\log_{243} 3$ ;

ж)  $\frac{\log_7 256}{\log_7 4}$ .

**147.** Найдите значение выражения

а)  $9^{3-\log_3 2 - \log_{81} 4}$ ;

б)  $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7}$ ;

в)  $\log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$ .

## 11. Логарифмические уравнения и неравенства

Прочитайте. Напишите перевод слов на родной язык.

неизвестное	unknown
неизвестная величина	unknown variable
уравнение	equation
неравенство	inequality
корень уравнения	root of equation
посторонний корень	outlier, outlying value
решение уравнения	solution of equation
логарифмическое уравнение	logarithmic equation
логарифмическое неравенство	logarithmic inequality
знак неравенства	the inequality sign
решить	solve
решить уравнение	solve the equation
решить неравенство	solve the inequality
сохраняется (знак неравенства)	be preserved (the inequality sign is preserved)
меняется (знак неравенства)	change (the inequality sign changes)

**Правило 1.** По определению логарифма

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

**Пример 11.1.** Решить логарифмическое уравнение  $\log_5 x = 2$ .

*Решение.*

По определению логарифма получим  $\log_5 x = 2 \Rightarrow x = 5^2 \Rightarrow x = 25$ .

Ответ.  $x = 25$ .

**Пример 11.2.** Решить логарифмическое уравнение  $\log_x \frac{1}{16} = 4$ .

*Решение.*

По определению логарифма  $x > 0, x \neq 1$ .

$$\log_x \frac{1}{16} = 4 \Rightarrow x^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}.$$

Так как  $x > 0, x \neq 1$ , то выбираем  $x = \frac{1}{2}$ .

Ответ.  $x = 0,5$ .

**Пример 11.3.** Решить логарифмическое уравнение  $\log_7(5-x) = 3$ .

*Решение.*

$$\log_7(5-x) = 3 \Rightarrow 5-x = 7^3 \Rightarrow 5-x = 343 \Rightarrow x = -338.$$

Ответ.  $x = -338$ .

**Правило 2.** Стандартный вид логарифмического уравнения

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

**Пример 11.4.** Решить логарифмическое уравнение  $\lg(2x-7) = \lg(x-1)$ .

*Решение.*

По правилу 2 получаем

$$\lg(2x-7) = \lg(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7 = x-1 \\ 2x-7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x > 3,5 \end{cases}.$$

При  $x = 6$  неравенство в системе  $x > 3,5$  выполняется, значит, это корень уравнения.

Ответ.  $x = 6$ .

**Пример 11.5.**

Решить логарифмическое уравнение  $\log_3(x^2 - 4x - 5) = \log_3(7 - 3x)$ .

*Решение.*

По правилу 2 получаем

$$\log_3(x^2 - 4x - 5) = \log_3(7 - 3x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 7 - 3x \\ 7 - 3x > 0 \end{cases}.$$

Решим квадратное уравнение  $x^2 - 4x - 5 = 7 - 3x$ .

$$x^2 - x - 12 = 0.$$

Вычислить дискриминант  $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$ .

$$\text{Корни квадратного уравнения } x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Решим неравенство  $7 - 3x > 0 \Rightarrow x < \frac{7}{3}$  При  $x_1 = 4$  неравенство не верно,

при  $x_1 = -3$  неравенство верно. Следовательно  $x = -3$  корень уравнения.

Ответ.  $x = -3$ .

**Пример 11.6.**

Решить логарифмическое уравнение  $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$ .

*Решение.*

$$\text{Область определения } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow x > -1.$$

По свойству логарифмов  $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$  получим уравнение  $\log_3(x+1)(x+3) = 1$ .

По правилу 1

$$(x+1)(x+3) = 3$$

$$x^2 + 3x + x + 3 = 3$$

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x(x+4) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -4.$$

Корень  $x = -4$  – посторонний, так как не удовлетворяет области определения.

Ответ.  $x = 0$ .

**Пример 11.7.** Решить логарифмическое уравнение  $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$ .

*Решение.*

Область определения  $x > 0$ .

Сделаем замену  $y = \log_3 x$ .

Решим квадратное уравнение  $y^2 - y - 2 = 0$ .

Дискриминант  $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$ .

Корни квадратного уравнения  $y_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -1 \end{cases}$

Обратная замена:

$$1) \quad y = 2 \Rightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$$

$$2) \quad y = -1 \Rightarrow \log_3 x = -1 \Leftrightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

Ответ.  $x = 9, \quad x = \frac{1}{3}$ .

**Правило 3.** Стандартный вид логарифмического неравенства

$$\text{Если } a > 1, \text{ то } \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$\text{Если } 0 < a < 1, \text{ то } \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

**Пример 11.8.** Решить логарифмическое неравенство  $\lg(x+1) > 2$ .

*Решение.*

По правилу 3 ( $a = 10 > 1$ ) знак неравенства сохраняется.

$$\lg(x+1) > 2 \Leftrightarrow \lg(x+1) > \lg 100 \Leftrightarrow x+1 > 100 \Leftrightarrow x > 99.$$

Ответ.  $x \in (99; +\infty)$ .

**Пример 11.9.** Решить логарифмическое неравенство  $\log_{\frac{1}{4}}(x-1) \geq -2$ .

*Решение.*

Основание логарифма  $a = \frac{1}{4} < 1$ , знак неравенства меняется. По правилу 3

$$\log_{\frac{1}{4}}(x-1) \geq -2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{4}} 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq 16 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 17 \\ x > 1 \end{cases}$$

Ответ.  $x \in (1; 17]$ .

**Пример 11.10.**

Решить логарифмическое неравенство  $\log_3(2x-4) < \log_3(14-x)$ .

*Решение.*

Так как основание логарифма  $a = 3 > 1$ , то знак неравенства не меняется.

Неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} 2x-4 < 14-x \\ 2x-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+x < 14+4 \\ 2x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 18 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6 \\ x > 2 \end{cases}$$

Ответ.  $x \in (2; 6)$ .

### Упражнения

**148.** Решить уравнение  $\log_3 x = -1$ .

**149.** Решить уравнение  $\log_x 27 = -3$ .

**150.** Решить уравнение  $\log_2(1-x) = 4$ .

151. Решить уравнение  $\log_3(x^2 - 5x + 8) = \log_3 x$ .

152. Решить уравнение  $\log_{0,4}(x+2) + \log_{0,4}(x+3) = \log_{0,4}(1-x)$ .

153. Решить неравенство  $\log_3(7-4x) \leq 3$ .

$$\log_{\frac{1}{5}}(x-2) > \log_{\frac{1}{5}}(4-x).$$

154. Решить неравенство

$$\lg(x-4) + \lg(x-3) \leq \lg(17-3x).$$

### Самостоятельная работа

156. Решить уравнение  $\log_4 x = -3$ .

157. Решить уравнение  $\log_x \frac{1}{4} = 2$ .

158. Решить уравнение  $\log_3(9+x) = 2$ .

159. Решить уравнение  $\log_7(2x-1) = \log_7 x$ .

160. Решить уравнение  $\log_3(x-2) + \log_3(x+2) = \log_3(2x-1)$ .

161. Решить неравенство  $\log_{0,5}(7-3x) \geq -2$ .

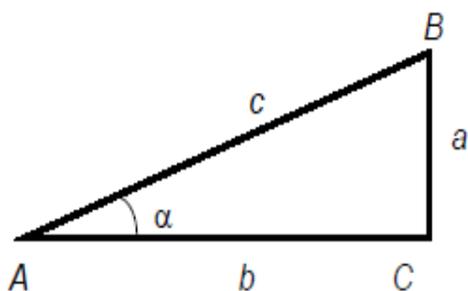
162. Решить неравенство  $\log_5(x^2 - 7x + 12) > \log_5(17 - 3x)$ .

163. Решить неравенство  $\log_{20} x + \log_{20}(x+1) \leq \log_{20}(2x+6)$ .

## 12. Тригонометрия

Прочитайте. Напишите перевод слов на родной язык.

прямоугольный треугольник	right triangle
катет	leg
гипотенуза	hypotenuse
теорема Пифагора	Pythagorean theorem
тригонометрическая функция	<u>trigonometric function</u>
синус	sine
косинус	cosine
тангенс	<u>tangent</u>
котангенс	<u>cotangent</u>



Прямоугольный треугольник

$\angle C = 90^\circ$

AC=a, BC=b – катеты

AB=c – гипотенуза

Теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

$a^2 + b^2 = c^2$  – теорема Пифагора

$\frac{a}{c} = \sin \alpha$	$\frac{b}{c} = \cos \alpha$	$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$	$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$
синус $\alpha$	косинус $\alpha$	тангенс $\alpha$	котангенс $\alpha$

**Основное тригонометрическое тождество:**  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

**Формулы для одного аргумента:**

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

**Пример 12.1.**

В треугольнике ABC угол C равен  $90^\circ$ , AC=7, BC=24. Найдите  $\cos A$ .

*Решение.*

По теореме Пифагора:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow 7^2 + 24^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 625$$

$$\Rightarrow AB = 25$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{7}{25} = 0,28.$$

### Пример 12.2.

В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AB=10$ ,  $\sin A = \frac{7}{25}$ . Найдите  $AC$ .

*Решение.*

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{25} \Rightarrow \frac{BC}{10} = \frac{7}{25}$$

$$BC = \frac{10 \cdot 7}{25} = 2,8$$

По теореме Пифагора

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow AC^2 + 2,8^2 = 10^2 \Rightarrow AC^2 = 100 - 7,84 = 92,16$$

$$\Rightarrow AC = 9,6$$

### Пример 12.3.

В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{\sqrt{17}}{17}$ . Найдите  $\operatorname{tg} A$ .

*Решение.*

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right)^2 + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \cos^2 A = 1 - \frac{17}{289} = \frac{272}{289}$$

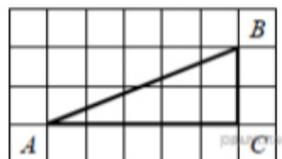
$$\cos A = \sqrt{\frac{272}{289}} = \frac{\sqrt{16 \cdot 17}}{17} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{17}}{17} : \frac{4\sqrt{17}}{17} = \frac{\sqrt{17} \cdot 17}{17 \cdot 4\sqrt{17}} = \frac{1}{4} = 0,25$$

### Упражнения

**164.** В треугольнике  $ABC$  (рисунок) найти

- Тангенс угла  $A$ ;
- Косинус угла  $A$ ;
- Синус угла  $A$ .



**165.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AC=9$ ,  $BC=40$ . Найдите  $\sin A$ .

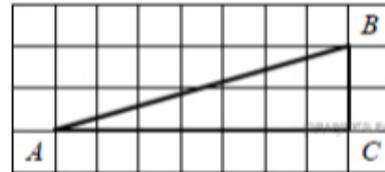
166. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $\sin B = \frac{12}{13}$ . Найдите  $\operatorname{tg} B$ .

167. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AC = 8$ ,  $\operatorname{tg} A = 0,5$ .  
Найдите  $BC$ .

### Самостоятельная работа

168. В треугольнике  $ABC$  (рисунок) найти

- а) Тангенс угла  $B$ ;
- б) Косинус угла  $B$ ;
- в) Синус угла  $B$ .



169. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $AC = 21$ ,  $AB = 29$ . Найдите  $\operatorname{tg} B$ .

170. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $\operatorname{tg} A = \frac{24}{7}$ . Найдите  $\sin A$ .

171. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $BC = 30$ ,  $\operatorname{tg} A = \frac{1}{10}$ .  
Найдите  $AB$ .

172. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $BC = 30$ ,  $\cos A = \frac{8}{17}$ .  
Найдите  $AB$ .

### 13. Текстовые задачи

Прочитайте. Напишите перевод слов на родной язык.

процент	percent
скидка	discount
цена	price
повышение цены	price increase
снижение цены	price decrease
подорожать	increase in price
увеличить	increase
уменьшить	decrease, reduce
наибольшее число	the largest number
наименьшее число	the smallest number

#### Пример 13.1.

В магазине свитер стоит 3500 рублей, но сегодня в этом магазине скидка 20 %. Какую сумму сегодня покупатель заплатит за свитер?

*Решение.*

Найдем сколько будет составлять скидка в рублях

$$\frac{3500 \cdot 20}{100} = 700 \text{ (руб.)}$$

Тогда покупатель заплатит  $3500 - 700 = 2800$  (руб.)

Ответ. 2800.

#### Пример 13.2.

Ученик прочитал 78 страниц, что составляет 39 % числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?

*Решение.*

Чтобы найти сколько страниц в книге необходимо

$$\frac{78 \cdot 100}{39} = 200 \text{ страниц.}$$

Ответ. 200.

#### Пример 13.3.

Шариковая ручка стоит 30 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 700 рублей после повышения цены на 25 %?

*Решение.*

После повышения цены ручка станет стоить  $30 + 0,25 \cdot 30 = 37,5$  рубля.

Разделим 700 на 37,5:

$$\frac{700}{37,5} = \frac{7000}{375} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$$

Значит, можно будет купить 19 ручек.

Ответ. 19.

### **Пример 13.4.**

Стоимость проезда в маршрутном такси составляет 20 руб. Какое наибольшее число поездок можно будет совершить в этом маршрутном такси на 150 руб., если цена проезда снизится на 10 %?

*Решение.*

После того как цена снизилась на 10 % стоимость проезда в маршрутном такси составит  $20 - 0,1 \cdot 20 = 18$  рублей. Разделим 150 на 18:

$$\frac{150}{18} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$$

Следовательно, 150 рублей хватит на 8 поездок.

Ответ. 8.

### **Пример 13.5.**

В летнем лагере на каждого участника полагается 30 г сахара в день. В лагере 148 человек. Сколько килограммовых упаковок сахара понадобится на весь лагерь на 5 дней?

*Решение.*

На 148 человек на 1 день полагается  $30 \cdot 148 = 4440$  г. сахара, на 5 дней –  $4440 \cdot 5 = 22\,200$  г. Если 22200 разделим на 1000, то получим 22,2.

Следовательно, на весь лагерь на 5 дней необходимо 23 килограммовых упаковки сахара.

Ответ. 23.

### **Пример 13.6.**

Поезд Благовещенск–Тында отправляется в 13:02, а прибывает в 5:02 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

*Решение.*

В день отправления поезд едет

$$(24 - 13) \cdot 60 - 2 = 11 \cdot 60 - 2 = 658 \text{ минут,}$$

а на следующий день до момента прибытия он едет  $5 \cdot 60 + 2 = 302$  минуты. Всего в пути поезд проведет  $658 + 302 = 960$  минут.

Разделим 960 на 60:

$$\frac{960}{60} = 16$$

Значит, поезд находится в пути 16 часов.

Ответ.  $x \in (2;6)$ .

### Упражнения

**173.** В летнем лагере 150 детей и 21 воспитатель. В одном автобусе можно перевозить не более 20 пассажиров. Какое наименьшее количество таких автобусов понадобится, чтобы за один раз перевезти всех из лагеря в город?

**174.** Шоколадка стоит 40 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 320 рублей в воскресенье?

**175.** В пачке 250 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 700 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 8 недель?

**176.** Поезд Хабаровск–Благовещенск отправляется в 13:57, а прибывает в 2:57 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

**177.** Призёрами городской олимпиады по математике стали 25 учащихся, что составило 5 % от числа участников. Сколько человек участвовало в олимпиаде?

**178.** В сентябре 1 кг картофеля стоил 20 рублей. В октябре картофель подорожал на 15 %. Сколько рублей стоил 1 кг картофеля после подорожания в октябре?

**179.** В школе девочки составляют 60 % числа всех учащихся. Сколько в этой школе всего учащихся, если девочек в ней на 105 человек больше, чем мальчиков?

**180.** Футболка стоила 800 рублей. После снижения цены она стала стоить 680 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

### Самостоятельная работа

**181.** В университетскую библиотеку привезли новые учебники по математическому анализу для трёх курсов по 430 штук для каждого курса. Все книги одинаковы по размеру. В книжном шкафу 6 полок, на каждой полке помещается 30 учебников. Сколько шкафов можно целиком заполнить новыми учебниками?

**182.** Каждый день во время конференции расходуется 70 пакетиков чая. Конференция длится 6 дней. Чай продается в пачках по 50 пакетиков. Сколько пачек нужно купить на все дни конференции?

**183.** Сырок стоит 18 рублей. Какое наибольшее число сырков можно купить на 190 рублей?

**184.** 14 выпускников школы собираются учиться в технических вузах. Они составляют 28 % от числа всех выпускников. Сколько в школе выпускников?

**185.** Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 5 %. Книга стоит 200 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

**186.** Товар на распродаже уценили на 15 %, при этом он стал стоить 680 р. Сколько рублей стоил товар до распродажи?

**187.** Тетрадь стоит 15 рублей. Сколько рублей заплатит покупатель за 40 тетрадей, если при покупке более 20 тетрадей магазин делает скидку 5 % от стоимости всей покупки?

## Ответы

### 2. Дроби, корни, степени числа

9. а) 1,4; б)  $4\frac{5}{9}$ ; в)  $1\frac{13}{36}$ ; г) 12. 11. б)  $\frac{1}{3}$ ; в)  $5\frac{4}{9}$ . 13. в)  $5\sqrt[3]{5}$ ; г)  $\frac{2\sqrt[4]{2}}{3}$ ;  
д)  $2a\sqrt[5]{4a}$ . 14. б) первое число больше; в) первое число больше. 18. а)  $1\frac{1}{16}$ ;  
б)  $4\frac{19}{60}$ ; в)  $\frac{16}{63}$ ; г)  $1\frac{7}{9}$ . 20. б) 121,5; в) 11,56. 22. в)  $7\sqrt[3]{2}$ ; г)  $0,4\sqrt[4]{5}$ ;  
д)  $y^3z^2\sqrt[4]{5y^2z^2}$ . 23. б) первое число меньше; в) первое число больше.

### 3. Числовые множества

27. {4}. 28. {-3; -2; -1; 1; 2; 3}. 29. {-5; -2}. 30. 8 подмножеств. 31. (-2;1];  
[-3;5); [-3;-2]; (1;5). 33. а) [3;+∞); б) (-∞;1]; в) (-3;1); г) ∅. 37. {5; 7};  
{1; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13}. 38. {-2; 7; 12}. 40. [2;3); (0;4]; (0;2); [3;4].  
42. а) [0;+∞); б) (-∞;-10); в) [-12;5); г) ∅.

### 4. Алгебраические выражения

43. а)  $3a^2(2a-7b)$ ; б)  $18a^2b^4(4a^3-3ab+2b^2)$ ; 44. а)  $9x^2-12xy+4y^2$ ;  
б)  $64a^6+80a^5b+25a^4b^2$ ; в)  $x^2y^2-2xy^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$ ; г)  $4x+4x^{\frac{1}{2}}+1$ ; д)  $0,09x^2-4$ ;  
е)  $9y^6-64x^6$ ; ж)  $a^3b^3-3a^2b^2+3ab-1$ ; з)  $\frac{64}{27}x^3y^6+\frac{16}{3}x^2y^4b^2+4xy^2b^4+b^6$ .  
45. а)  $a(a+b)(a-c)$ ; б)  $(9x^2+1)(3x-1)$ ; в)  $(9-2xy)(9+2xy)$ ;  
г)  $(12a^2-5b)(12a^2+5b)$ ; д)  $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$ ; е)  $(x-7)(x^2-2x+13)$ .  
47. а)  $\frac{a^2+5a+2}{(2a-1)^2}$ ; б)  $\frac{1}{x+y}$ ; в)  $a-2c+1$  48. а)  $4a^4(16a^2+60ab+75b^2)$ ;  
б)  $2abc^2(12a^3c^2+5-15ac^4)$ . 49. а)  $b^2-6b+9$ ; б)  $9y^2+30y+25$ ;  
в)  $4x^2+4xy^{\frac{1}{2}}+y$ ; г)  $x^{\frac{2}{3}}-8x^{\frac{1}{3}}+16$ ; д)  $y^2-25$ ; е)  $x^4-4$ ; ж)  $8a^3-12a^2+6a-1$ ;  
з)  $27x^6+27x^4b^3+9x^2b^6+b^9$ . 50. а)  $(a+b)(a+c)$ ; б)  $(x^2+3)(x+3)$ ;  
в)  $(c-2)(c+2)$ ; г)  $(5-3b)(5+3b)$ ; д)  $(5a+b)(25a^2-5ab+b^2)$ ;  
е)  $(4a-\frac{1}{3}b)(16a^2+\frac{4}{3}ab+\frac{1}{9}b^2)$ . 52. а)  $\frac{a+1}{n}$ ; б)  $\frac{(a-b)a^2}{a+b}$ ; в)  $c-1$ .

## 5. Уравнения

53. а) 4; б) 8; в) 7; г) 1; д)  $x \in (-\infty; +\infty)$ ; е)  $\emptyset$ . 54. а)  $x_1 = 0, x_2 = 4$ ; б)  $x_1 = 5, x_2 = -5$ ; в)  $x_1 = -7, x_2 = -5$ ; г)  $x_1 = 1, x_2 = -2, 5$ ; д) -3; е)  $\emptyset$ . 55.  $x_1 = 0, 5, x_2 = 1$ . 56. а)  $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -3, x_4 = 3$ ; б)  $x_1 = 2, x_2 = -2$ ; в)  $\emptyset$ . 57. а) 1; б) 0,5; в)  $\emptyset$ ; г) -30,75; д) 32. 58. а)  $x_1 = -1, x_2 = 4$ ; б)  $x_1 = 3, x_2 = -3$ ; в)  $x_1 = -7, x_2 = -3, x_3 = 5, x_4 = 9$ . 59. (4;3). 60. -0,2. 61. 1,5. 62.  $\frac{5}{9}$ . 63.  $x_1 = 0, x_2 = -0,4$ . 64. 0. 65.  $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 2$ . 66.  $x_1 = -6, x_2 = 10$ . 67.  $\emptyset$ . 68. 2. 69.  $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -0,5, x_4 = 0,5$ . 70.  $x_1 = -\sqrt{10}, x_2 = \sqrt{10}$ . 71.  $\emptyset$ . 72.  $x_1 = -6, x_2 = 5, x_3 = \frac{-1 - \sqrt{41}}{2}, x_4 = \frac{-1 + \sqrt{41}}{2}$ . 73. (6;21)

## 6. Неравенства

74.  $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ . 75.  $x \in \left[-\frac{7}{2}; +\infty\right)$ . 76.  $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$ . 77.  $x \in \left[\frac{2}{5}; 1\right]$ . 78.  $x \in \left(-7 - \sqrt{94}; -7 + \sqrt{94}\right)$ . 79.  $x \in (-\infty; +\infty)$ . 80.  $\emptyset$ . 81.  $x \in (-\infty; -3)$ . 82.  $x \in \left(-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ . 83.  $x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{9}{5}; +\infty\right)$ . 84.  $x \in (-2; +\infty)$ . 85.  $x \in \left(-\infty; -\frac{839}{127}\right)$ . 86.  $x \in \left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right]$ . 87.  $x \in (-\infty; +\infty)$ . 88.  $\emptyset$ . 89.  $\emptyset$ . 90.  $x \in (-\infty; -5] \cup [0; +\infty)$ . 91.  $x \in \left(\frac{5}{6}; \frac{3}{2}\right)$ .

## 7. Функции и графики

94. а)  $\frac{1}{6}$ ; б)  $-\frac{1}{3}$ ;  $\frac{4x^2 - 2x + 1}{16x^4 - 3}$ . 95. -1,5; 1,5;  $\emptyset$ . 96. а) 0; 3; 4;  $\emptyset$ ;  $\emptyset$ ; б) 7; 0 и  $\approx 6,8$ ;  $\approx -1,5$  и  $\approx 6,5$ ; в)  $[-3; 0)$ ;  $(5; 7]$ . 98. а)  $x \in (-\infty; 2,5)$ ; б)  $x \in (-\infty; -0,75)$ . 99. а) 11; в) 9; г)  $x < -4$ . 100.  $y = 3x$ . 101. Да. 102. а)  $D(y) = [-4; 0) \cup (0; 7]$ ;  $E(y) = [-4; 3]$ ; б)  $D(y) = [-4; 1) \cup (1; 6]$ ;  $E(y) = (-\infty; +\infty)$ . 103. а)  $y \searrow$  при  $x \in (-\infty; 5)$ ;  $y \nearrow$  при  $x \in (5; 8]$ ;  $x_{\min} = 5$ ; б)  $y \searrow$  при  $x \in [-6; -3); (2; 3); (3; 4]$ ;  $y \nearrow$  при  $x \in (-3; 2)$ ;  $x_{\min} = -3$ ;  $x_{\max} = 2$ . 106. а)  $\frac{5}{11}$ ; б) 1,5;  $\frac{-6x + 1}{27x^2 - 1}$ . 107. 1; 0;  $\emptyset$ . 108. а) 6; 1; 3;  $\emptyset$ ; б)  $\approx -5,8$  и -4 и -2 и 3;  $\approx -2,5$ ; -6 и  $\approx -3,5$  и 0; в)  $(-5; -3)$ ;

$(-3;0)$ . **110.** а)  $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ ; б)  $x \in (2; +\infty)$ . **111.** а)  $-2$ ; в)  $-5$ ; г)  $x \leq -2,5$ .  
**112.**  $y = -0,5x + 2$ . **113.** Нет. **114.** а)  $D(y) = (-\infty; 8]$ ;  $E(y) = [-5; -1]$ ;  
б)  $D(y) = [-8; -2) \cup (-2; 2]$ ;  $E(y) = (-\infty; 4]$ . **115.** а)  $y \searrow$  при  $x \in [-8; -4); (-2; 2)$ ;  
 $y \nearrow$  при  $x \in (-4; -2)$ ;  $x_{\min} = -4$ ;  $x_{\max} = -2$ ; б)  $y \searrow$  при  $x \in (-3; +\infty)$ ;  $y \nearrow$   
при  $x \in [-6; -3)$ ;  $x_{\max} = -3$ .

### 8. Степени и их свойства

**116.** а) 0,5; б) 0,008; в) 3; г) 9; д) 7; е)  $225\sqrt{2}$ . **118.** а)  $-2$ ; б) 3; в) 1; г) 2;  
д) 1,5; е) 2; ж) 1. **119.** а) 24; б) 16; в) 7; г)  $\frac{4}{27}$ ; д)  $\frac{4}{9}$ ; е)  $\frac{4\sqrt[4]{7}}{7}$ . **121.** а) 5; б) 2; в) 1;  
г) 3; д) 144; е) 3; ж) 1.

### 9. Показательные уравнения и неравенства

**122.** 4,5. **123.**  $\pm 2\sqrt{2}$ . **124.**  $-4$ . **125.** 2. **126.** 1. **127.**  $-2$ ; 1. **128.**  $x \in (-1; +\infty)$ .  
**129.**  $x \in [1; 4]$ . **130.**  $x \in (-\infty; 1]$ . **131.**  $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$ . **132.**  $-0,4$ . **133.**  $-0,8$ ; 0. **134.** 3. **135.** 3.  
**136.** 1. **137.** 1; 3. **138.**  $x \in (1; +\infty)$ . **139.**  $x \in [-4; 1]$ . **140.**  $x \in [-1; +\infty)$ .  
**141.**  $x \in (-\infty; 2 - \sqrt{7}) \cup (0; 2 + \sqrt{7})$ .

### 10. Логарифмы и их свойства

**143.** а) 0,25; б) 25; в) 2; г)  $-1$ ; д) 9; е) 0,25; ж) 6. **144.** а) 125; б) 0; в) 16. **146.**  
а) 14; б) 99; в) 1; г) 2; д) 14; е) 0,2; ж) 4. **147.** а) 91,125; б) 1,5; в) 0,125.

### 11. Логарифмические уравнения и неравенства

**148.**  $\frac{1}{3}$ . **149.**  $\frac{1}{3}$ . **150.**  $-15$ . **151.**  $x_1 = 2, x_2 = 4$ . **152.**  $-1$ . **153.**  $x \in \left[-5; \frac{7}{4}\right)$ .  
**154.**  $x \in (2; 3)$ . **155.**  $x \in (4; 5]$ . **156.**  $\frac{1}{64}$ . **157.**  $\frac{1}{2}$ . **158.** 0. **159.** 1. **160.** 3. **161.**  $x \in \left[1; \frac{7}{3}\right)$ .  
**162.**  $x \in (-\infty; -1) \cup \left(5; \frac{17}{3}\right)$ . **163.**  $x \in (0; 3]$ .

## 12. Тригонометрия

**164.** а) 0,4; б)  $\frac{5}{\sqrt{29}}$ ; в)  $\frac{2}{\sqrt{29}}$ . **165.**  $\frac{40}{41}$ . **166.** 2,4. **167.** 4. **168.** а) 3,5; б)  $\frac{2}{\sqrt{53}}$ ;  
в)  $\frac{7}{\sqrt{53}}$ . **169.** 1,05. **170.** 0,96. **171.**  $\sqrt{909}$ . **172.** 34.

## 13. Текстовые задачи

**173.** 9. **174.** 12. **175.** 23. **176.** 13. **177.** 500. **178.** 23. **179.** 525. **180.** 15. **181.** 7.  
**182.** 9. **183.** 10. **184.** 50. **185.** 190. **186.** 800. **187.** 570.

## Список литературы

1. Громов А.И., Кузьминов В.И., Хачатурова Е.Т. Профессионально-ориентированный комплекс учебно-методических материалов по математике для иностранных студентов инженерных специальностей/ А.И. Громов, В.И. Кузьминов, Е.Т. Хачатурова – М.: Изд-во РУДН, 2007. – 26 с.

2. Коммуникативный аспект в обучении математике иностранных студентов / О.В. Максимова, Н.А. Соловьева // Европейский и отечественный опыт инновационной культуры и отношений интеллектуальной собственности: коммуникативные аспекты : сб. материалов конф. : в рамках диссеминации гранта № 575008-EPP-1-2016-1-RU-EPPJMO-MODULE – Ижевск : Удмуртский университет, 2019.

3. Математика для иностранных студентов подготовительного отделения: учебно-методическое пособие / А.Л. Фощан, А.А. Борисова, А.А. Борисов – Х.: ХГУПТ, 2016. – 119 с.

4. Полевая Т.А., Ромашова И.Н, Артемьева Г.В. Начальный курс по математике для студентов-иностранцев подготовительных факультетов : учебное пособие /Т.А. Полевая, И.Н. Ромашова, Г.В. Артемьева. – МАДИ. М., 2010. – 60 с.

5. Степаненко Е.В. Математика. Основной курс: учебное пособие / Е.В. Степаненко, И.Т. Степаненко. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2015. – 252 с.

6. Смолякова Н.С. Дважды два четыре! Учебное пособие по русскому языку как иностранному (Программа «2+2»)/ Н.С. Смолякова. – Томск, Изд-во ТПУ, 2010. – 51 с.

## Содержание

Введение .....	3
1. Числа и действия .....	4
2. Дроби, корни, степени числа.....	9
3. Числовые множества.....	17
4. Алгебраические выражения .....	24
5. Уравнения.....	30
6. Неравенства.....	35
7. Функции и графики.....	39
8. Степени и их свойства .....	51
9. Показательные уравнения и неравенства .....	57
10. Логарифмы и их свойства.....	62
11. Логарифмические уравнения и неравенства .....	67
12. Тригонометрия.....	72
13. Текстовые задачи.....	75
Ответы .....	79

*Учебное издание*

Максимова Ольга Васильевна  
Соловьева Надежда Александровна

**МАТЕМАТИКА. ВВОДНЫЙ КУРС**

Учебно-методическое пособие для иностранных студентов,  
обучающихся по программе дополнительного образования  
«Довузовская подготовка»

*Авторская редакция*

*Компьютерная верстка: Т.В. Опарина*

Подписано в печать 09.01.2025. Формат 60x84 1/8.  
Усл. печ. л. 9,88. Уч.-изд. л. 5,41.  
Тираж 12 экз. Заказ № 165.

Издательский центр «Удмуртский университет»  
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021  
Тел. : + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»  
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.  
Тел. 68-57-18