Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики

А.С. Мерзляков

АЛГЕБРА-2

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2024

УДК 512 (075.8)
ББК 22.14р30
М521

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доцент НПО МКМ **Л.И. Романов**

Мерзляков А.С.

М521 Алгебра-2 : учеб.-метод. пособие / А.С. Мерзляков. – Ижевск : Удмуртский университет, 2024. – 117 с. – Текст : электронный.

Данное методическое пособие предназначено для самостоятельной работы студентов-бакалавров направления 02.03.01 «Математика и компьютертерные науки», 01.03.01 «Математика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». Пособие поможет студенту лучше изучить теоретический материал по некоторым вопросам курса фундаментальной алгебры. В пособии подробно заостряется внимание на тех моментах, которые, на взгляд составителя, наиболее важны, и которые могут неоднозначно трактоваться. В пособии также разбираются методы решения некоторых типов задач, которые встречаются в ходе изучения основ курса алгебры и предлагаются различные упражнения. Вместе с пособиями «Векторные пространства-I» и «Векторные пространства-II» будет полезно всем студентам, кто в ходе обучения изучает основы алгебры.

Пособие предназначается для всех студентов, обучающихся по математическим специальностям очной и заочной форм обучения.

УДК 512 (075.8)
ББК 22.14р30

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4
Глава 3. Основы линейной алгебры 5
§ 3.1 Векторные (линейные) пространства 5
§ 3.2 Линейная комбинация и линейная зависимость векторов 8
§ 3.3 Система образующих и базис векторного пространства 12
§ 3.4 Векторные подпространства и их свойства 21
§ 3.5 Прямая сумма векторных подпространств 25
§ 3.6 Матрицы. Виды матриц. Операции с матрицами 30
§ 3.7 Перестановки и их свойства 36
§ 3.8 Определитель матрицы и его свойства 38
§ 3.9 Методы вычисления определителей 43
§ 3.10 Обратная матрица 55
§ 3.11 Ранги матриц и способы их вычисления 59
§ 3.12 Системы линейных уравнений и методы их решения 63
§ 3.13 Отображения на множествах и алгебраических структурах 75
§ 3.14 Линейный оператор на VK и его свойства 83
§ 3.15 Инвариантные и собственные подпространства линейного оператора 96
§ 3.16 Корневые подпространства линейного оператора 104
Литература 117

ВВЕДЕНИЕ

Это пособие является продолжением курса «Алгебра-1», написанного и выпущенного автором первоначально в начале 2008 года, а после редактирования – во второй половине 2023 года, и предназначено, как и первая его часть, для студентов 1 и 2 курсов, которые изучают линейную алгебру. При написании данного пособия автор придерживается тех же самых целей, что и вначале, и к студентам, изучающим данное пособие, предъявляются те же самые требования, что и для изучения 1-й части курса. Все эти цели и требования были написаны во введении к 1-й части пособия, поэтому, чтобы автору не повторяться, можно отослать всех желающих узнать про это, просто прочитать первую часть пособия по алгебре.

Автор обращает внимание всех, кто использует данное пособие для занятия, что немаловажное значение в пособии имеют замечания. В них акцентируется внимание изучающих на особенности, сложности, спорность или неоднозначность данного понятия или результата. Поэтому на них нужно обратить особое внимание.

В данном пособии, так же, как и в первой его части, используется тройная нумерация результатов, которая обозначает номер главы, номер параграфа и номер утверждения, которые формулируются в данном параграфе.

Для более полного и глубокого ознакомления с данным предметом можно использовать любую из книг в предложенном ниже списке литературы.

ГЛАВА 3. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 3.1. ВЕКТОРНЫЕ (ЛИНЕЙНЫЕ) ПРОСТРАНСТВА

В этой главе мы будем изучать новую алгебраическую структуру: векторное пространство, но сначала введем определение этой структуры.

ОПР. Пусть K - некоторое поле. Множество V, на котором введены две бинарные операции: «+» и «$\cdot\lambda$» (сложение и умножение на элементы λ из поля K), называется **векторным пространством над полем K** (обозначается V_K, элементы V_K называются **векторами**, элементы поля K — **скалярами**), если эти операции удовлетворяют следующим свойствам:
1) операция «+» ассоциативна;
2) операция «+» коммутативна;

3) существует **нулевой вектор** $\bar{0}$ в V_K**,** т.е. такой вектор, что для любого вектора a из V_K выполняется равенство:

$$u+\bar{0} = \bar{0}+u = u;$$

4) для любого u из V_K найдется **противоположный вектор** (обозначается **–u**), который также лежит в V_K:

$$-u + u = u + -u = \bar{0};$$

5) умножение любого вектора а V_K на скаляр $\mathbf{1_K}$ (**единица по умножению поля K**) не изменяет вектора;
6) умножение вектора на скаляр обладает ассоциативным свойством, т.е $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ для любого a из V_K и любых λ, μ из K.
7) операции сложение и умножение на скаляр из поля K («+» и «$\cdot\lambda$») в V_K связаны дистрибутивными законами:

$$\lambda(a+b) = \lambda a+\lambda b \qquad \text{и} \qquad (\lambda+\mu)a = \lambda a+\mu a,$$

для любых векторов a,b из V_K, и любых двух скаляров λ и μ из K.

ОПР. Операции сложение («+») и умножение на скаляр («$\cdot\lambda$») называются **линейными операциями**.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>. Из-за свойств линейности этих операций на векторном пространстве, оно в ряде литературы и называется линейным пространством, и весь раздел алгебры, который связан с изучением таких пространств, называется линейной алгеброй.

<u>*ПРИМЕРЫ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ*</u>: а) R^n ($n\in N$) над полем вещественных чисел R, так называемые **арифметические пространства**;

б) поле C над полем R;

в) многочлены R[x] степени не больше 3 над полем R: будем обозначать их $R[x]_3$;

г) все кольцо многочленов R[x], над полем R;

д) кольца матриц $M_{m,n}(R)$ или $M_{m,n}(C)$ над полем R и C соответственно;

е) столбцы (или строки) пространства матриц $M_{m,n}(K)$, над полем K;

ж) множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

где все $a_{ij} \in R$, над полем R. Такие системы, у которых столбец свободных членов состоит из одних нулей, называются **однородными системами линейных уравнений**. О них мы поговорим подробнее, но позднее.

ОПР. Сумма двух векторов a и (-b) (т.е. a + (-b)) называется **разностью векторов a и b** и обозначается **a - b**.

ЛЕММА 3.1.1. (Свойства векторного пространства). Пусть V_K - векторное пространство над полем K. Тогда для него справедливы следующие утверждения.

1. Нулевой вектор – $\bar{0}$ – векторного пространства V_K – единственный.

2. Произведение любого вектора $u \in V_K$ на скаляр $0 \in K$ равно $\bar{0}$ (нуль-вектор векторного пространства).

3. Произведение $\bar{0}$ на любой скаляр из поля K равно $\bar{0}$.

4. Для каждого вектора $u \in V_K$ векторного пространства существует единственный противоположный вектор.

<u>*Доказательство*</u>. 1) Пусть в векторном пространстве V_K есть два нулевых вектора $\bar{0}$ и $\bar{0}$'. Тогда выполняются (по определению нулевого вектора пространства V_K) следующие равенства

$$\bar{0}' = \bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}$$

Таким образом, мы получили, что эти нулевые векторы равны между собой.

2) Для любого вектора $u \in VK$ и скаляра □∈K□□□имеем, в силу свойств операции сложения в поле K и дистрибутивного закона на V_K, что выполняются следующие равенства

$$\lambda u = (\lambda+0)u = \lambda u + 0u.$$

Прибавляем к обеим частям равенства по вектору ($-\lambda u$) (такой вектор существует по определению векторного пространства) и отсюда получаем, что $0u = \bar{0}$.

3) Для любого скаляра $\lambda \in K$ также имеем (в силу свойств $\bar{0}$ и дистрибутивного закона)

$$\lambda\bar{0} = \lambda(\bar{0} + \bar{0}) = \lambda\bar{0} + \lambda\bar{0}.$$

Отсюда, прибавив к обеим частям равенства вектор ($-\lambda\bar{0}$) (противоположный вектор к вектору $\lambda\bar{0}$), получаем, что выполняется следующее равенство:

$$\lambda\bar{0} = \bar{0}.$$

4) Пусть для некоторого вектора $u \in V_K$ есть два противоположных вектора – (-u) и -u'.

Тогда рассмотрим сумму u + (-u) + (-u'). По свойствам $\bar{0}$ –нулевого вектора векторного пространства V_K (которые даны в определении V_K), получаем, что выполняются равенства:

$$u + (-u) + (-u') = u + (-u') + (-u) = \bar{0} + (-u) = \bar{0} + (-u') = (-u) = (-u').$$

Таким образом, получаем, что эти два противоположных вектора совпадают.

ОПР. Пусть W подмножество в векторном пространстве V_K, причем относительно введенных на V_K операций («+» и «$\cdot\lambda$»), оно образует векторное пространство над тем же самым полем K (над которым рассматривается и V_K), тогда это подмножество называется **векторным подпространством V_K,** и обозначается соответственно, через W_K.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что для того, чтобы показать, что данное подмножество W_K является векторным подпространством векторного пространства $V_K = (X, +, \cdot\lambda)$, достаточно показать, что на этом подмножестве W_K замкнуты эти две операции $(+, \cdot\lambda)$ (из этого, в частности, следует, что в W есть нулевой и противоположный элемент для любого элемента a из W_K).

Все остальные свойства введенных на W_K операций (ассоциативность, коммутативность и дистрибутивность), о которых говорится в определении векторного пространства, уже выполняются, так как это операции определены на всём V_K, и так как V_K – векторное пространство, то для всех векторов, в частности и для векторов из W_K, выполняются все требуемые свойства для этих операций.

ПРИМЕРЫ. а) $V_Q = R$ – множество вещественных чисел можно рассматривать как векторное пространство над своим подполем Q – полем рациональных чисел.

б) $V_R = R$ – множество вещественных чисел можно рассматривать как векторное пространство над самим собой.

в) V_R в $R^n = \{X \in R^n$, которые имеют вид $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_k \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}$, где $0, x_1, x_2, .., x_k$ это числа из $R\}$. Понятно, что данное множество изоморфно R^k, и операции «+» и «$\cdot\lambda$» действуют на нем точно также, как и на векторах из R^k.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что если в конструкциях идет речь о полях, т.е. V_K и W_K являются числовыми полями, причем $W_K \subseteq V_K$, то тогда поле V_K называется **расширением поля W_K**. В частности, в примере а), рассмотренном выше, R является расширением поля рациональных чисел Q.

§ 3.2. ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ, ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА ВЕКТОРОВ. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

ОПР. Пусть $u_1, u_2, .., u_n$ – произвольные векторы векторного пространства V_K, а $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$-произвольные скаляры из поля K. Вектор вида

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + .. + \lambda_n u_n$$

называется **линейной комбинацией векторов $u_1, u_2, .., u_n$**.

ОПР. Пусть в VK – векторном пространстве задан набор векторов $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Множество всех линейных комбинаций этих векторов называется **линейной оболочкой векторов $u_1, u_2, \ldots, u_n$** и обозначается **$<u_1, u_2, \ldots, u_n>$.**

ПРИМЕР. Пусть V_K – это плоскость R^2, которая является векторным (линейным) пространством над полем R. Рассмотрим в нем систему из двух векторов $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$. Тогда вектор, равный $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ является линейной комбинацией двух данных векторов, а их линейной оболочкой является $<\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}>$, что, как мы покажем далее, совпадает со всем V_K (т.е. всей плоскостью R^2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Еще раз отметим, что линейная комбинация системы векторов – это какой-то ОДИН ВЕКТОР, а линейная оболочка системы векторов – это МНОЖЕСТВО ВЕКТОРОВ.

ОПР. Система векторов $\{u_1, u_2, .., u_n\}$ из V_K называется **линейно зависимой,** если существует набор скаляров $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$, из поля K, не равных одновременно нулю, такой, что

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + . + \lambda_n u_n = \bar{0}$$

И сразу же дадим определение линейной независимости системы векторов.

ОПР. Система векторов {u1,u2,..,un} из VK называется линейно независимой, если равенство

$$\lambda 1 u 1 + \lambda 2 u 2 + .. + \lambda n u n = \bar{0}$$

выполняется только тогда, когда все скаляры λ1, λ2,.., λn из поля K равны нулю.

Докажем одно несложное свойство, связанное с линейной зависимостью и независимостью.

ЛЕММА 3.2.1. Линейная оболочка системы векторов $\{u_1, u_2, .., u_n\}$ из V_K является векторным подпространством V_K.

Доказательство. По замечанию сделанному после определения векторного подпространства, достаточно доказать, что в <u1,u2,..,un> замкнуты операции «+» и «$\cdot\lambda$», а также что там лежит $\bar{0}$ и для любого $x \in$<u1,u2,..,un> есть противоположный элемент.

То, что в <u1,u2,..,un> лежит нулевой вектор легко следует из того факта, что по свойствам леммы 3.1.1,

$$\bar{0} = 0u1 + 0u2+...+0un \in <u1,u2,..,un>$$

Если $x \in <u_1,u_2,..,u_n>$, и $x=x_1u_1 + x_2u_2+...+ x_nu_n$, то $-x = -x_1u_1 - x_2u_2-...- x_nu_n$ также лежит в $<u_1,u_2,..,u_n>$.

Как отмечено выше, все остальные свойства операций уже выполняются, так как $<u_1,u_2,..,u_n>$ – это подмножество в векторном пространстве V_K.

Рассмотрим некоторые примеры.

<u>ПРИМЕРЫ: </u>а) на R^2. Берем любой вектор, допустим, X=$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Тогда он линейно зависим со всеми векторами вида $\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}, a \in R$, и линейно независим с любым вектором вида $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, xy \neq 0$.

Если взять два вектора, например $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, то любой другой вектор X=$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in R^2$ можно представить в виде линейной комбинации этих двух векторов

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

б) Как уже было отмечено выше, множество решений системы однородных линейных уравнений также образует векторное пространство. Рассмотрим решение однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\\ 3x_2 + 5x_3 = 0\end{cases}$$

Если мы введем независимую переменную $t \in R$, то произвольное решение X данной системы можно выразить в виде X=$\begin{pmatrix}t/3\\ -5t/3\\ t\end{pmatrix}$ или X=t$\begin{pmatrix}1/3\\ -5/3\\ 1\end{pmatrix}$.

Отсюда получаем, что если $\begin{pmatrix}1/3\\ -5/3\\ 1\end{pmatrix}$ – частное решение, то любое другое решение будет линейной комбинацией этого решения, т.е. иметь вид t$\begin{pmatrix}1/3\\ -5/3\\ 1\end{pmatrix}$ для некоторого t. Отсюда можно сделать вывод, что множество решений данной однородной системы уравнений образует линейную оболочку $<\begin{pmatrix}1/3\\ -5/3\\ 1\end{pmatrix}>$, которая является векторным подпространством R^3.

ЛЕММА 3.2.2 (Свойства линейной зависимости). Пусть V_K- векторное пространство над полем К. Тогда для него справедливы следующие утверждения.

1). Система векторов $\{u_1,u_2,..,u_n\}$ с линейно зависимой подсистемой, сама линейно зависима.

2) Любая подсистема векторов линейной независимой системы векторов $\{u_1,u_2,..,u_n\}$ линейно независима.

3). Если $\bar{0}$ входит в систему векторов $\{u_1,u_2,..,u_n\}$, тогда система линейно зависима.

4). Если система векторов $\{u_1,u_2,..,u_n\}$ линейно зависима, тогда один из них можно выразить через систему остальных.

5). Если один из векторов $\{u_1,u_2,..,u_n\}$ линейно выражается через остальные, тогда векторы $u_1,u_2,..,u_n$ —линейно зависимы.

6) Если система векторов $\{u_1,u_2,..,u_n\}$ линейно независима, а система векторов $\{u_1,u_2,..,u_n,u\}$ —линейно зависима, то вектор u является линейной комбинацией векторов $u_1,u_2,..,u_n$.

<u>*Доказательство*</u>: 1) Предположим (без ограничения общности, иначе можно перенумеровать векторы), что первые m векторов из данной системы образуют линейно зависимую подсистему векторов. Тогда, по определению, существует набор скаляров $\lambda_1, \lambda_2,.., \lambda_n$, из поля К, не все из которых равны нулю, такой, что

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+..+\lambda_mu_m = \bar{0} \quad (1)$$

Тогда можно записать (по свойствам леммы 3.1.1.), что будет верно и такое равенство

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+..+\lambda_mu_m +0u_{m+1}+\ldots+0u_n = \bar{0} \quad (1)$$

По определению отсюда будет следовать, что вся система векторов $\{u_1,u_2,..,u_n\}$ будет линейно зависимой.

2) Допустим противное, т.е. допустим, что найдется какая-то подсистема линейно независимой системы векторов, которая является линейно-зависимой. Тогда по п.1 и вся система векторов будет линейно-зависимой. Получили противоречие с условием.

Следовательно, предположение неверно, и любая подсистема линейно-независимой системы векторов будет линейно-независимой.

3) Если один из векторов (допустим первый u_1) есть $\bar{0}$. Тогда справедливо равенство (по лемме 3.1.1)

$$1\bar{0} + 0u_2 + \ldots.. + 0u_n = \bar{0}$$

Получаем, что весь набор скаляров ненулевой (так как λ_1=1), т.е. по определению данная система векторов является линейно-зависимой.

4) Если существует нетривиальный набор скаляров $(\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n) \neq (0,0,..,0)$ для данной системы векторов $\{u_1,u_2,..,u_n\}$, то какой-то (пусть λ_1) не равен нулю. Тогда из равенства

$$\lambda1u1+\lambda2u2+..+\lambda nun = \bar{0}$$

легко получить следующее равенство

$$u_1 = -\lambda_2\lambda_1^{-1}u_2 -\ldots..-\lambda_n\lambda_1^{-1}u_n,$$

т.е. u_1 – есть линейная комбинация остальных векторов данной системы.

5) Если

$$u_n=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3+..+\lambda_{n-1} u_{n-1},$$

то отсюда получаем, что

$$\bar{0} = -u_n+\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3+..+\lambda_{n-1} u_{n-1}$$

Следовательно, для данной системы векторов найдется нетривиальная линейная комбинация нулевого вектора, а это по определению означает, что данная система векторов является линейно-зависимой системой.

6) По условию линейной зависимости системы векторов существует нетривиальная линейная комбинация нулевого вектора ($=\bar{0}$). Рассмотрим ее

$$\bar{0} = \lambda_1\cdot u_1+\lambda_2\cdot u_2+\lambda_3\cdot u_3+..+\lambda_{n-1}\cdot u_{n-1}+\lambda_n\cdot u_n + \lambda\cdot u$$

Если $\lambda=0$, тогда получаем, что нулевой вектор можно представить в виде нетривиальной линейной комбинации системы векторов $u_1,u_2,...u_n$, что противоречит выбору набора.

Следовательно, $\lambda\neq 0$. Но тогда, так как вся система векторов $\{u_1,u_2,..,u_n,u\}$, является линейно-зависимой, совершенно аналогично п.4, мы можем выразить u через векторы $u_1,u_2,..,u_n$, а именно,

$$u = -\lambda_1\alpha^{-1}u_1 -.....- \lambda_n\alpha^{-1}u_n.$$

Лемма доказана.

§ 3.3. СИСТЕМА ОБРАЗУЮЩИХ И БАЗИС ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

ОПР. Пусть V_K – векторное пространство над полем K. Система векторов $\{u_1,u_2,..,u_n\}$ из V_K называется **системой образующих векторного пространства V_K,** если любой вектор $x \in V_K$ можно представить в виде линейной комбинации векторов данной системы, т.е. найдется набор скаляров $\lambda_1, \lambda_2,.., \lambda_n$, $\lambda_i \in K$, $i=1,\dots,n$, такой, что

$$x = \lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+..+\lambda_n u_n$$

ОПР. Линейно-независимая система образующих $\{u_1,u_2,..,u_n\}$ векторного пространства V_K, называется **базисом векторного пространства V_K .** Мы будем обычно обозначать базис через $\{e_i\}$, $i=1,2,\dots,n$.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>. Вообще говоря, число векторов в рассматриваемой системе векторного пространства может быть и бесконечным, при этом оба определения останутся теми же. Если любой вектор векторного пространства может быть представлен в виде линейной комбинации, то данная система – система образующих. Если же данная система образующих является еще и линейно-независимой, то данная система образующих называется базисом векторного пространства.

Сразу же определим важное понятие для векторных пространств – понятие его размерности.

ОПР. Число векторов в базисе векторного пространства V_K называется **размерностью V_K** и обозначается **$\dim V_K$.** Если $\dim V_K$ конечна, то такое пространство называется **конечномерным**, в противном случае пространство V_K называется **бесконечномерным.**

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>**.** Для $V_K=\{\bar{0}\}$ размерность пространства равна 0, так как в нем нет базиса: любая система, содержащая нулевой вектор является линейно-зависимой. Таким образом, $V_K=\{\bar{0}\}$ – единственное векторное пространство, в котором нет базиса. Для всех других векторных пространств размерность пространства может быть определена, т.е. базис будет существовать, хотя определение данной размерности вполне возможно является очень сложным вопросом.

Для бесконечномерных пространств также используется понятие мощности множества и понятие кардинальных чисел, но с ними вы более подробно познакомитесь, изучая курс топологии.

УПР. Доказать, что из любой системы образующих ненулевого векторного пространства можно извлечь базис.

ОПР. Пусть $e_1,e_2,..,e_n$ - базис V_K – n-мерного векторного пространства. По определению базиса любой вектор $X \in V_K$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов

$$X = x_1e_1+x_2e_2+..+x_ne_n .$$

Такое представление называется **разложением вектора X в базисе $e_1,e_2,..,e_n$**. Коэффициенты (скаляры из поля K) $x_1,x_2,..,x_n$ называются **координатами вектора X в базисе $e_1,e_2,..,e_n$.**

Пусть на конечномерном векторном пространстве V_K задан базис $\{e_i\}$, i=1,2,…,n. Тогда произвольный вектор X из V_K в этом базисе может быть разложен в виде линейной комбинации векторов из этого базиса, т.е.

$$X = x_1e_1+x_2e_2+..+x_ne_n,$$

и мы будем записывать его в виде столбца $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Если важно и указание именно этого базиса, тогда вектор-столбец X записывается таким образом $X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_e$.

<u>ПРИМЕР</u>: а) R над R. Базисом R служит вектор (число) 1, так как любой другой вектор (число) $a \in R$ можно представить как $a \times 1$, и один ненулевой вектор a в R является линейно-независимой системой (чтобы получить $\bar{0}$ (=0), нужно a умножить на 0).

Системой образующих будет служить пара векторов (чисел), например, {1,2}. Однако, это не будет базис, так как $2=2\times 1$, т.е. эта система векторов линейно-зависимая система.

б) R^2 над R. Базисом R^2 может служить пара векторов $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, так как любой вектор $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$ может быть представлен в виде линейной комбинации $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Эта система векторов является линейно-независимой, так как из условия, что $\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\bar{0}$, следует, что $\lambda_1=\lambda_2=0$. (Понятно, что есть много и других базисов).

Если рассмотрим систему из трех векторов, например, таких $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, то это будет системой образующих, так как любой вектор из R^2 можно выразить в виде линейной комбинации даже первых двух векторов, однако, это не будет базисом, так как данная система векторов линейно-зависима, так как $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\bar{0} \in R^2$.

в) $R_3[x]$. Базисом в векторном пространстве многочленов с вещественными коэффициентами может служить, например, следующая система векторов (многочленов) $\{1,x,x^2,x^3\}$. (Напомню, что многочлены от одной переменной – это некоторая интерпретация кольца многочленов, которые строятся как множество числовых последовательностей, почти все элементы которых равны 0). Любой многочлен $p(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ от одной переменной можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов

$$p(x) = a_o\times 1+a_1\times x+a_2\times x^2+a_3\times x^3$$

Система векторов $\{1,x,x^2,x^3\}$ линейно-независима, так как если

$$\lambda_o \times 1+\lambda_1\times x+\lambda_2\times x^2+\lambda_3\times x^3 = \bar{0}$$

где $\bar{0}=\bar{0}(x)$ это 0-функция, т.е. для всех значений переменной равна 0, то если взять x=0, получаем, что $\lambda_o=0$.

Если взять x=1 и x=-1, то получим два равенства

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \quad \text{и} \quad -\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 = 0.$$

Если полученные равенства сложить, то получим, что $\lambda_2=0$.

Если положить x=1 и x=2, то получим равенства

$$\lambda_1+\lambda_3 = 0 \quad \text{и} \quad 2\lambda_1+8\lambda_3 = 0.$$

Выражаем из первого равенства λ_3 через λ_1 и подставляем во второе. Получаем, что $6\lambda_1=0$. Таким образом, λ_1, а вместе с ним и λ_3, равны 0. Следовательно, все $\lambda_i=0$, i=0,1,2,3, что по определению означает, что данная система векторов линейно независима.

г) $M_n(R)$. Базисом в векторном пространстве квадратных матриц с элементами из поля вещественных чисел R можно взять, например, множество матриц L_{ij} , i=1,…,n; j=1,..,n, у которых только элемент $a_{ij} = 1$, а все остальные равны 0, т.е. матриц вида $\begin{pmatrix} 0\ldots & 0\ldots. & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.. & 0\ldots & 0 \end{pmatrix}$. Данная система векторов линейно-независимая, так как при умножении на скаляр любой матрицы такого вида, может остаться ненулевым только один элемент. А так как у всех рассматриваемых матриц ненулевые элементы разные, то нулевой вектор пространства матриц (т.е. матрицу из одних нулей) получить, кроме как умножить все матрицы на нулевой скаляр, не удастся.

Рассмотрим сумму двух векторов x и y, которые разложены по векторам базиса $\{e_1,e_2,..,e_n\}$.

$$x = x_1e_1+x_2e_2+..+x_ne_n \quad \text{и} \quad y = y_1e_1+y_2e_2+..+y_ne_n$$

Видим, что координаты суммы векторов x+y в базисе {e1,e2,..,en} будет иметь вид

$$x+y = (x_1+y_1)e_1+(x_2+y_2)e_2+..+(x_n+y_n)e_n$$

Таким образом, мы видим, что координаты суммы двух (или нескольких) векторов в базисе $e_1,e_2,..,e_n$, складываются.

Умножим вектор x на произвольное число λ, получим

$$\lambda x = \lambda(x_1e_1+x_2e_2+..+x_ne_n) = \lambda x_1e_1 + \lambda x_2e_2+..+ \lambda x_ne_n$$

Таким образом, мы видим, что для того, чтобы найти координаты вектора x, умноженного на скаляр λ, достаточно умножить все координаты вектора x на этот скаляр.

ЗАМЕЧАНИЕ. Все выше сказанное можно записать и в матричной форме, т.е. если

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; \ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ то } x+y=\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \ldots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \text{ а } \lambda x=\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \ldots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Заметим, что все вышесказанное верно только тогда, когда речь идет только о каком-то одном базисе, в котором эти два вектора записаны.

ПРИМЕР: Найти координаты многочлена 11-2x+15x2-x3 из R[x]3 в базисе {1,x,x2,x3}. Понятно, что координаты его будут равны соответственно (11,-2,15,-1) или в векторной форме этот вектор в данном базисе будет иметь вид $\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 15 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Докажем один достаточно важный результат, который неоднократно будет использоваться в дальнейших результатах линейной алгебры.

ЛЕММА 3.3.1. Разложение произвольного вектора $X\in V_K$, где V_K – конечномерное векторное пространство, $\dim V_K=n$, в базисе $e_1,e_2,..,e_n$ осуществляется единственным образом, т.е. координаты вектора X в базисе $\{e_i\}, i=1,\ldots,n$ определены однозначно для любого вектора X из V_K.

Доказательство. Допустим, что для некоторого вектора $X\in V_K$ есть два разложения в виде линейной комбинации элементов базиса $\{e_i\}, i=1,\ldots,n$.

$$X = x_1e_1+ x_2e_2 +\ldots+x_ne_n$$

$$X = x'_1e_1+ x'_2e_2 +..+x'_n e_n.$$

Вычитаем из первого равенства второе, и видим, что получилась линейная комбинация базисных векторов $e_1,e_2,..,e_n$ нулевого вектора

$$\bar{0} = (x_1-x'_1)e_1+ (x_2 - x'_2)e_2 +\ldots+ (x_n -x'_n)e_n,$$

причем если разложения разные, то набор скаляров (коэффициентов) будет ненулевым. Поэтому получим, что набор векторов $e_1,e_2,..,e_n$ линейно зависима. Противоречие, так как эта система векторов образует базис.

Следовательно, разложение любого вектора X из V_K в виде линейной комбинации базисных векторов определено однозначно (т.е. однозначно определены коэффициенты этого вектора в данном базисе).

Рассмотрим сумму двух векторов X и Y, которые разложены по векторам базиса $\{e_1,e_2,..,e_n\}$.

$$X = \lambda_1e_1+\lambda_2e_2+..+\lambda_ne_n \quad \text{и } Y = \gamma_1e_1+\gamma_2e_2+..+\gamma_ne_n$$

Видим, что сумма векторов X+Y в базисе {e1,e2,..,en} будет иметь вид

$$X+Y = (\lambda_1+\gamma_1)e_1+(\lambda_2+\gamma_2)e_2+..+(\lambda_n+\gamma_n)e_n$$

Таким образом, мы видим, что координаты суммы векторов в базисе $\{e_1,e_2,..,e_n\}$ складываются покоординатно.

Умножим вектор X на произвольное число λ из поля K, получим

$$\lambda X = \lambda(\lambda_1e_1+ \lambda_2e_2+..+ \lambda_ne_n) = \lambda\cdot\lambda_1e_1+ \lambda\cdot\lambda_2e_2+..+ \lambda\cdot\lambda_ne_n$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что любой базисный вектор не может быть выражен в виде линейной комбинации остальных базисных векторов, так как иначе получаем, что этот вектор имеет двойное представление: он сам и линейная комбинация оставшихся векторов, что противоречит лемме 3.3.1.

Когда идет речь о размерности векторного пространства, то сразу возникает вопрос: а верен ли тот факт, что размерность пространства определяется единственным образом, т.е. одинаковое ли число векторов в каждом базисе векторного пространства?

(Понятно, что речь идет о конечномерных векторных пространствах, в противном случае не очень понятно, что означает термин «одинаковое количество векторов»).

Попытаемся ответить на этот вопрос. Для этого мы докажем сначала один частный результат, который затем попытаемся обобщить. Использование этого результата позволит нам ответить на вопрос, поднятый выше.

ЛЕММА 3.3.2. Пусть V_K – конечномерное векторное пространство над полем K, с базисом $\{e_1,e_2,..e_n\}$(т.е. dim V_K=n) и $y \neq \bar{0}$ - вектор из V_K. Тогда найдется базисный вектор e_i такой, что система векторов

$\{e_1, e_2,.., e_{i-1}, y, e_{i+1}, .., e_n\}$ будет базисом V_K.

Доказательство. Так как система $\{e_i\}$, i=1,..,n – базис, тогда вектор y может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\{e_i\}$

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 +.. + y_ie_i + y_ne_n, \qquad (1)$$

причем найдется вектор e_i: $y_i \neq \bar{0}$. Тогда вектор e_i можно выразить в виде линейной комбинации остальных векторов

$$e_i = - y_i^{-1}y_1e_1 - ...- y_i^{-1}y_{i-1}e_{i-1} + y_i^{-1}Y - y_i^{-1}y_{i+1}e_{i+1} -... - y_i^{-1}y_ne_n.$$

Отсюда, как несложно понять, что система векторов $\{e_1,e_2,..,e_{i-1},y,e_{i+1},..,e_n\}$ будет системой образующих, так как система $\{e_i\}$ – система образующих (это базис), а базисный вектор e_i лежит в $<e_1,e_2,..,e_{i-1},y,e_{i+1},..,e_n>$, поэтому и любой другой вектор x из V_K будет также лежать там.

Осталось показать, что эта система векторов $\{e_1,e_2,..,e_{i-1},y,e_{i+1},..,e_n\}$ будет линейно- независимой.

Допустим, что данная система векторов линейно зависима. Тогда, так как вектора $\{e_1,e_2,..,e_{i-1},e_{i+1},...e_n\}$ линейно независимая система, а система $\{e_1,e_2,\dots,e_{i-1},y,e_{i+1},...,e_n\}$ – линейно зависима, то по свойству 6 леммы 3.2.2, вектор y может быть представлен в виде линейной комбинации системы векторов $\{e_1,e_2,..,e_{i-1},e_{i+1},...,e_n\}$. Но тогда мы получим, что у нас для вектора y – есть два представления (1) и в виде элементов системы $\{e_i\}$ (причем коэффициент при e_i не равен нулю), и для системы векторов $(e_1,e_2,..,e_{i-1},e_{i+1},..,e_n)$.

Получили противоречие с леммой 3.3.1. Значит, система векторов $(e_1,e_2,..,e_{i-1},y,e_{i+1}, ..,e_n)$ линейно независима, т.е. образует базис пространства V_K.

Из данной леммы получаем, что, если вектор y не нулевой, тогда его можно поменять с одним из векторов базиса и вновь образуется базис.

ТЕОРЕМА 3.3.3. Пусть V_K – конечномерное векторное пространство над полем K, с базисом $\{e_1,e_2,..e_n\}$, и $\{f_1,f_2,..,f_m\}$ линейно независимая система векторов из V_K, m□n. Тогда найдутся базисные вектора e_i, i=1,2,..,n-m такие, что система векторов $\{e_1,e_2,..,e_{n-m},f_1,f_2,..,f_m\}$ будет базисом V_K. (В полученном базисе может быть произведена перенумерация векторов первоначального базиса).

Доказательство. Пусть $\{e_i\}$ i=1,..,n базис V_K, и $\{f_j\}$, j=1,..,m линейно независимая система векторов V_K. Тогда по лемме 3.3.2 для $y=f_1$ рассмотрим систему векторов, которая по этой лемме также будет базисом

$$\{e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, f_1, e_{i+1}, .., e_n) \qquad (1).$$

Перенумеруем ее таким образом, чтобы получилась система

$$\{e_1,e_2,\dots,e_{i-1}, e_i,.., e_{n-1}, f_1\} \qquad (2)$$

Эта система будет базисом, поскольку вектор e_n (удаленный вектор в новой нумерации) будет выражаться в виде линейной комбинации данных векторов. С другой стороны, эти векторы (по определению базиса) останутся линейно независимыми. Рассмотрим сейчас представление вектора f_2 через полученную систему векторов.

$$f_2 = a_1e_1+a_2e_2+..+a_{i-1}e_{i-1}+a_ie_i+...+a_{n-1}e_{n-1}+b_1f_1.$$

Понятно, что в системе векторов (2) найдется вектор e_t, t=1,2,...,n-1, с коэффициентом $a_t \neq 0$, иначе, если все $a_i=0$, i=1,2,..,n-1, то получаем, что вектор f_1 может быть выражен через f_2, что противоречит линейной независимости системы векторов $\{f_j\}$, j=1,2,..,m.

Значит, аналогично рассуждениям выше, можно заменить вектор e_t в системе на вектор f_2. Перенумеровывая полученную систему, можно получить, следующую систему векторов

$$\{e_1, e_2, .,.., e_{n-2}, f_1, f_2\} \qquad (3).$$

Рассматривая последовательно представления векторов f_3, f_4, ….., f_m в виде линейной комбинации систем векторов $\{e_1,e_2,e_3,..,e_{n-3},f_1,f_2,f_3\}$, $\{e_1,e_2,.,.., e_{n-4}, f_1, f_2, f_3, f_4\}$,…., $(e_1,e_2,..,e_{n-m+1}, f_1, f_2,.., f_{m-1})$ (полученных после перенумерации, аналогично рассмотренным выше случаям), соответственно получаем, что найдется некоторый вектор e_i в такой системе, у которого коэффициент $a_i \neq 0$. Следовательно, совершенно аналогично рассмотренным выше случаям, получим, что данный вектор e_i, в рассматриваемом базисе, можно также заменить соответствующим вектором f_k.

Каждый раз, перенумеровывая эти векторы, в конечном случае получаем систему из n векторов:

$$\{e_1,..,e_{n-m},f_1,f_2,....f_m\} \qquad (4).$$

Рассуждая аналогично, получаем, что данная система будет оставаться базисом векторного пространства V_K.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть в условии теоремы 3.3.3, $\{e_1,e_2,..e_n\}$ – базис векторного пространства V_K, и $\{f_1,f_2,..,f_n\}$ – линейно-независимая система векторов из V_K. Тогда система векторов $\{f_1,f_2,..,f_n\}$ также является базисом V_K.

Это следствие является прямым следствием теоремы 3.3.3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это следствие для конечномерного векторного пространства VK (dimVK=n), можно трактовать и таким образом, что любая линейно-независимая система из n векторов векторного пространства VK образует базис. Таким образом, чтобы построить какой-нибудь базис векторного пространства достаточно найти линейно-независимую систему из n векторов. Эта система и образует искомый базис.

Рассмотрим еще одно свойство векторного пространства.

СЛЕДСТВИЕ 2. Линейно независимую систему $\{u_1,u_2,..,u_k\}$ векторов ненулевого конечномерного векторного пространства V_K, не являющуюся базисом пространства, можно дополнить до базиса пространства V_K.

Доказательство. Это также является прямым следствием теоремы 3.3.3.

ПРИМЕР: Рассмотрим в R^3 систему векторов $\left\{u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Дополнить ее до базиса методом, описанным выше, исходя из базиса $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Решение. Рассмотрим систему векторов $\{u_1,e_1,e_2,e_3\}$. Эта система является системой образующих в R^3, так как любой вектор $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ из R^3 может быть представлен в виде, например, такой линейной комбинации $X = 0u_1 + xe_1 + ye_2 + ze_3$, но так как $u_1=e_1+e_3$, то данная система является линейно-зависимой системой векторов, т.е. не является базисом R^3. Поэтому можно выразить e_1 ($e_1 = u_1 – e_3$) и убрать вектор e_1 из данной системы. Получим, что система векторов $\{u_1,e_2,e_3\}$ – будет оставаться системой образующих R^3, и она будет линейно-независимой, так как если рассмотреть линейную комбинацию нулевого вектора, т.е.

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \bar{0},$$

и рассмотреть это равенство покоординатно, то получим, что $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, и $\lambda_3=0$. Таким образом, система векторов $\{u_1,e_2,e_3\}$ будет являться базисом R^3.

Используя результаты, полученные выше, несложно доказать и основной результат, который дает ответ на поставленный вопрос: верен ли тот факт, что размерность пространства определяется единственным образом, т.е. одинаковое ли число векторов в каждом базисе векторного пространства?

ТЕОРЕМА 3.3.4. Пусть V_K - конечномерное векторное пространство над полем К. Тогда размерность пространства V_K не зависит от выбора базиса, т.е. в любом базисе число векторов одинаково.

Доказательство. Если есть два базиса $\{e_i\}$;i=1,2,..,n и $\{f_j\}$; j=1,2,..m и пусть $m<n$. Тогда, по теореме 3.3.3 получаем, что m базисных векторов в базисе $\{e_i\}$ можно заменить векторами $\{f_j\}$ и получим, что система векторов $\{ e_1,e_2,...,e_{n-m},f_1,f_2,..,f_m\}$ является базисом. Но это возможно только в случае, когда n-m=0, так как по свойствам линейной независимости никакие два вектора в линейно-независимой системе векторов не могут быть представлены в виде линейной комбинации остальных векторов (иначе, по свойству 4 леммы 3.2.2 система линейно зависима). А у нас, так как $\{f_j\}$; j=1,2,..m – базис, то все векторы $e_1,e_2,...,e_{n-m}$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов.

Следовательно, возможен только вариант, когда $m\geq n$.

Но если $m>n$, тогда в качестве рассматриваемого базиса можно взять базис $\{f_j\}$; j=1,2,..m и в нем производить замену векторов векторами $\{e_i\}$;i=1,2,..,n.

Следовательно, возможен только случай, когда n=m. Что нам и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 3.3.4, если система векторов $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ является произвольным базисом векторного пространства V_K, то $V_K = \langle e_1,e_2,...,e_n\rangle$.

Доказательство. По определению базиса векторного пространства V_K любой вектор из V_K представляется в виде линейной комбинации базисных векторов, т.е. $V_K \subseteq \langle e_1,e_2,...,e_n\rangle$.

По определению векторного пространства V_K сумма любых двух векторов принадлежит V_K. Следовательно, любая линейная комбинация базисных векторов, будет лежать в V_K. Отсюда получаем, что $\langle e_1,e_2,...,e_n\rangle \subseteq V_K$.

Из этих двух соотношений по лемме 1.1.1 отсюда будет следовать, что $V_K=\langle e_1,e_2,...,e_n\rangle$.

ЛЕММА 3.3.5. Пусть размерность векторного пространства V_K равна n ($\dim V_K = n$). Тогда произвольная система векторов $\{u_1,u_2,..,u_m\}$, $u_i \in V_K$, $i=1,2,\ldots,m$; $m>n$, — является линейно-зависимой системой векторов.

Доказательство. Допустим, что система векторов $\{u_1,u_2,..,u_m\}$ линейно независима, тогда ее выпуклая оболочка $<u_1,u_2,..,u_m>$ есть векторное подпространство в V_K и её размерность будет равна m (так как любой вектор из $<u_1,u_2,..,u_m>$ представляется в виде линейной комбинации векторов системы $\{u_1,u_2,..,u_m\}$, то это система образующих, а так как она линейно-независимая, то и базис). Следовательно, размерность этой оболочки, которое является подпространством пространства V_K больше размерности пространства V_K, что противоречит следствию 2 т.3.3.4.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 3.3.5, если W_K подпространство конечномерного векторного пространства V_K, то $\dim W_K \le \dim V_K$.

Это простое следствие теоремы.

УПР. Доказать, что следствие верно.

Рассмотрим еще одно свойство, связанное с линейной зависимостью векторов, которое будет нами использовано в дальнейшем курсе лекций.

Рассмотрим примеры векторных пространств, которые рассматривали ранее, и найдем, чему равна размерность этих векторных пространств.

ПРИМЕРЫ. 1. Множество действительных чисел – векторное пространство над самим собой.

Ответ: $\dim R = 1$, в качестве базиса можно взять вектор 1.

2. Линейная оболочка векторов $<u_1,u_2,..,u_n>$.

Ответ: $\dim<u_1,u_2,..,u_n> = \max$ ЛНС векторов из $\{u_1,u_2,..,u_n\}$.

3. Векторы трехмерного пространства R^3.

Ответ: $\dim R^3 = 3$. В качестве базиса можно взять набор векторов $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

4. Векторы n-мерного пространства.

Ответ: $\dim R^n = n$, в качестве базиса можно взять так называемый стандартный базис

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\ldots\\..\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\\..\\0\end{pmatrix};\ldots;\begin{pmatrix}0\\..\\\ldots\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

5. Многочлены, степени не выше n.

Ответ: $\dim R[x]_n=n+1$, в качестве базиса можно взять многочлены 1, 1+x, $(1+x)^2$,….. $(1+x)^n$.

6. **Пространство** квадратных матриц порядка n.

Ответ: Размерность этого пространства равна n2, в качестве базиса можно выбрать матрицы Lij, у которых все элементы, кроме a^{ij} равны 0, а $a^{ij}=1$, т.е. матрицы вида

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & & \text{j-ый столбец} & & & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
.. & .. & .. & \dots & \dots & .. & \dots\\
0 & \dots & .0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
.0. & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\dots. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

i-ая строка.

7. Рассмотрим $W_K = \{X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ из R^n: $x_1+x_2+\ldots+x_n = 0\}$.

Ответ: $\dim W_K=n-1$. В качестве базиса можно взять систему векторов

$$
\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix};\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix};\ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix};\ldots;u_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.
$$

§ 3.4. ВЕКТОРНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА И ИХ СВОЙСТВА

Мы уже ввели ранее понятие векторного подпространства. Напомню, что это подмножество в V_K, которое замкнуто относительно операций “+” и “$\cdot\lambda$”, где скаляры берутся из поля K, над которым и рассматриваются эти векторные подпространства.

ОПР. Пусть $U_1=\{X_1, +, «\cdot\lambda»\}$, $U_2=\{X_2, +, «\cdot\lambda»\}$, $\lambda\in K$ – подпространства векторного пространства V_K. **Пересечением подпространств U_1, U_2** векторного пространства V_K называется множество, состоящие из общих для U_1, U_2 векторов.

ЛЕММА 3.4.1. Пересечение двух подпространств векторного пространства V_K является векторным подпространством пространства V_K.

Доказательство. Как уже было отмечено в §3.1 после определения векторного подпространства, для доказательства того, что какое-то подмножество является векторным подпространством векторного пространства, достаточно доказать, что заданные операции замкнуты на этом множестве.

Итак, пусть U_1 и U_2 подпространства V_K, и пусть $u,v \in U_1\cap U_2$. Тогда $u+v$ также будет лежать в $U_1\cap U_2$, так как если векторы u, v лежат в векторном подпространстве U_1, то там лежит и сумма этих двух векторов. Аналогично можно показать и то, что эта сумма лежит в U_2.

Если $u\in U_1\cap U_2$, $\lambda\in K$. Тогда λu, для произвольного $\lambda\in K$, также будет лежать в $U_1\cap U_2$, так как если u лежит в векторном подпространстве U_1, то там лежит и λu, для любого $\lambda\in K$. Аналогично можно заметить, что λu лежит в U_2.

Это все, по замечанию выше, показывает, что $U_1\cap U_2$ является векторным подпространством векторного пространства V_K.

Аналогично можно определить пересечение любого конечного (и бесконечного) числа векторных подпространств.

ОПР. Пусть $U_1=\{X_1,+, «\cdot\lambda»\}$, ...$U_n=\{X_n,+, «\cdot\lambda»\}$, $\lambda\in K$ – подпространства векторного пространства V_K. **Пересечением подпространств $U_1,U_2,U_3,..,U_n$ векторного пространства V_K** называется множество, состоящее из общих для этих подпространств векторов.

ЛЕММА 3.4.2. Пересечение любого конечного множества подпространств векторного пространства V_K является векторным подпространством пространства V_K.

УПР. Доказать методом математической индукции, используя результат леммы 3.4.1, что лемма 3.4.2 верна.

Введем еще одно понятие, которое будет нами в дальнейшем широко использоваться.

ОПР. Пусть U_1,U_2 – подпространства векторного пространства V_K. Множество векторов вида

$$\{u_1+u_2 \mid u_1 \text{ из } U_1,\ u_2 \text{ из } U_2\}$$

называется **суммой векторных подпространств U_1 и U_2** и обозначается через $\mathbf{U_1+U_2}$.

ЛЕММА 3.4.3. Сумма двух векторных подпространств V_K является векторным подпространством V_K.

<u>*Доказательство*</u>. Пусть U_1 и U_2 подпространства V_K, и пусть $u,v\in U_1+U_2$. Тогда $u+v$ также будет лежать в U_1+U_2, так как если $u=u_1+u_2$, $v=v_1+v_2$, где векторы u_1,v_1 лежат в U_1, векторы u_2,v_2 лежат в U_2, то и сумма векторов $u+v = (u_1+v_1)+(u_2+v_2) = w_1+w_2$, где $w_1\in U_1$ и $w_2 \in U_2$, лежит в U_1+U_2.

Если $u\in U_1+U_2$, $\lambda \in K$. Тогда λu также будет лежать в U_1+U_2, так как если $u=u_1+u_2$, то $\lambda u=\lambda u_1+\lambda u_2$, для любого $\lambda \in K$, λu_1 лежат в U_1, λu_2 лежат в U_2.

Это все по сказанному выше, показывает, что U_1+U_2 является векторным подпространством векторного пространства V_K.

Аналогично пересечению можно определить сумму любого конечного числа векторных подпространств.

ОПР. Пусть $U_1, U_2,....,U_n$, – подпространства векторного пространства V_K. Множество векторов вида

$$\{u_1+...+u_m \mid u_1 \text{ из } U_1, ...u_m \text{ из } U_m\}$$

называется **суммой векторных подпространств $U_1,U_2,...U_n$** и обозначается через $U_1+U_2+...+U_n$ (или $\sum_{i=1}^{n} U_i$).

ЛЕММА 3.4.4. Сумма любого конечного числа векторных подпространств V_K является векторным подпространством V_K.

УПР. Доказать методом математической индукции и леммой 3.4.3, что лемма 3.4.4 верна.

<u>ПРИМЕР.</u> Пусть $U_1 =<\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}>$, и $U_2 =<\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}>$, векторные подпространства R^3, каждое из которых образовано указанными векторами. Найти сумму U_1+U_2.

Решение. Суммой U_1 и U_2 будет по определению подпространство

$$U_1+U_2 =\{x+y, \text{ где } x \text{ из } U_1 \text{ и } y \text{ из } U_2\},$$

т.е. это будет множество всех линейных комбинаций векторов

$$U_1+U_2 =\{a_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \text{ где } a_i,\ i=1,2,3 \text{ из } R\}.$$

Как несложно видеть, вектор $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ есть линейная комбинация векторов $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, поэтому их сумма совпадает с U_2. Пересечение же этих подпространств, т.е. векторы, общие для обоих подпространств, это будет все векторы подпространства U_1.

ЛЕММА 3.4.5. **(Свойства суммы и пересечения подпространств)**

а) Если U_K и W_K подпространства векторного пространства V_K, то

$$U_K+W_K = W_K+U_K \qquad U_K \cap W_K = W_K \cap U_K$$

б) Если P_K, U_K и W_K подпространства векторного пространства V_K, то

$$P_K+(W_K+U_K) = (P_K+W_K)+U_K \quad \text{и} \quad (U_K \cap W_K) \cap P_K = U_K \cap (W_K \cap P_K)$$

в) Если U_K подпространства векторного пространства V_K, то

$$U_K+V_K = V_K \qquad (U_K \cap W_K)=U_K$$

УПР. Доказать, что лемма 3.4.5 справедлива.

Рассмотрим и докажем ещё одно важное свойство.

ТЕОРЕМА 3.4.6. Пусть V_K – конечномерное векторное пространство, U_K, W_K подпространства V_K. Размерность суммы векторных подпространств (U_K+W_K) равна сумме размерностей U_K и W_K минус размерность пересечения векторных пространств, т.е.

$$\dim(U_K+W_K) = \dim U_K + \dim W_K - \dim(U_K \cap W_K).$$

Доказательство. Положим, что $\dim U_K=n+m$; $\dim W_K=n+k$, где $k=\dim(U_K \cap W_K)$. Пусть $\{e_i\}$,$i=1,2,\dots,n$ – базис пересечения $U_K \cap W_K$; $\{f_j\}$,$j=1,2,\dots,n+m$ – базис U_K, где первые n векторов, совпадают с векторами e_i, $i=1,2,...,n$; $\{g_j\}$, $j=1,..,n+k$ – базис W_K, где первые n векторов, совпадают с векторами e_i, $i=1,2,...,n$; т.е. будем полагать, что в U_K базисом будет набор векторов $\{e_1,e_2,\dots,e_n,f_{n+1},..,f_{n+m}\}$, а в W_K базисом будет набор векторов $\{e_1,e_2,\dots,e_n, g_{n+1},..,g_{n+k}\}$.

Покажем, что система векторов $\{e_1,e_2,\dots,e_n,f_{n+1},..,f_{n+m}, g_{n+1},..,g_{n+k}\}$, будет базисом суммы подпространств.

Во-первых, заметим, что система векторов $\{e_1,e_2,\dots,e_n,f_{n+1},..,f_{n+m}, g_{n+1},..,g_{n+k}\}$, $i=1,2,...,n$ будет системой образующих U_K+W_K. Это действительно так, ибо любой вектор суммы U_K+W_K имеет вид $x+y$, где $x \in U_K$, $y \in W_K$., и он может быть представлен в виде линейной комбинации данных векторов

Сейчас докажем, что эта система векторов линейно независима. Рассмотрим линейную комбинацию нулевого вектора:

$$a_1e_1+a_2e_2+...+a_ne_n + b_{n+1}f_{n+1}+....+b_{n+m}f_{m+n} + c_{n+1}g_{n+1}+c_{n+2}g_{n+2} +\dots+c_{n+k}g_{n+k} = \bar{0} \qquad (1)$$

Это равенство можно переписать таким образом

$$a_1e_1+a_2e_2+...+a_ne_n + b_{n+1}f_{n+1}+....+b_{n+m}f_{m+n} = -(c_{n+1}g_{n+1}+c_{n+2}g_{n+2} +\dots+c_{n+k}g_{n+k}) = \bar{b}\,.$$

Вектор слева – это вектор из U_K, вектор справа – из W_K. Значит, этот вектор $\bar{b}$ лежит в их пересечении, т.е. может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $e_1,e_2,..,e_n$. Поэтому получаем, что найдется система скаляров $d_1,d_2,\dots,d_n$ из поля К:

$$-(c_{n+1}g_{n+1}+c_{n+2}g_{n+2} +\dots+c_{n+k}g_{n+k}) = d_1e_1 + d_2e_2 +.. + d_ne_n$$

Отсюда получаем, что вектор

$$d_1e_1+d_2e_2+..+d_ne_n + c_{n+1}g_{n+1}+c_{n+2}g_{n+2} +\dots+c_{n+k}g_{n+k} = \bar{0}\,. \qquad (2)$$

Но система векторов $(e_1,e_2,\dots,e_n,g_{n+1},..,g_{n+k})$ - это линейно-независимая система (так как образует базис W_K), значит все d_i, $i=1,2,\dots,n$ и c_i, $i=n+1,n+2,\dots,n+k$ в равенстве (2) равны 0. Учитывая это, равенство (1) примет вид

$$a_1e_1+a_2e_2+...+a_ne_n + b_{n+1}f_{n+1}+....+b_{n+m}f_{m+n} = \bar{0}\,. \qquad (3)$$

Но система векторов $(e_1,e_2,\dots,e_n, f_{n+1},..,f_{n+m})$ линейно-независимая система, так как образует базис U_K. Поэтому и все коэффициенты a_i,$i=1,2,\dots,n$ и $b_{n+1},b_{n+2},....,b_{n+m}$ будут равны 0.

Таким образом, мы показали, что система векторов $(e_1,e_2,\dots,e_n, f_{n+1},..,f_{n+m},g_{n+1},..,g_{n+k})$ – является линейно-независимой системой векторов, и следовательно, образует базис суммы U_K+W_K. Поэтому размерность U_K+W_K равна $n+m+k = (n+m) + (n+k) – n = \dim U_K + \dim W_K – \dim(U_K \cap W_K)$. А это и требовалось доказать.

Рассмотрим пример, рассмотренный выше, для нахождения размерности суммы двух подпространств.

<u>ПРИМЕР.</u> Пусть $U_1 =< \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} >$ и $U_2 =< \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} >$ - векторные подпространства R^3, каждое из которых образовано указанными векторами. Нужно найти $\dim(U_1+U_2)$.

Решение. Было показано, что суммой U_1 и U_2 будет множество всех линейных комбинаций векторов

$$\{a_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \text{ где } a_i, i=1,2,3 \text{ из } R\}.$$

Как несложно видеть, вектор $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ есть линейная комбинация векторов $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, поэтому их сумма совпадает с U_2 ($\dim U_2=2$), а пересечение, т.е. вектора общие для обоих пространств совпадает с U_1 ($\dim U_1=1$).

Тогда по формуле (см.теорему 3.4.6)

$$\dim (U_K+W_K) = \dim U_K + \dim W_K - \dim(U_K \cap W_K),$$

можно получить, что

$$\dim (U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 — \dim(U_1 \cap U_2) = 1+2 - 1 = \dim U_2 = 2.$$

§ 3.5. ПРЯМАЯ СУММА ВЕКТОРНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

Ранее было введено понятие суммы векторных подпространств, поэтому на этой основе введём еще одно структурное понятие для подпространств векторного пространства V_K.

ОПР. Пусть U_1, U_2 – подпространства векторного пространства V_K, тогда сумма подпространств U_1+U_2 – называется **прямой суммой подпространств U_1, U_2**, если любой вектор u из U_1+U_2 можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов из U_i, i=1,2, т.е. если $u=u_1+u_2=v_1+v_2$, u_1, v_1 из $\mathbf{U_1}$, u_2, v_2 из U_2, то отсюда следует, что $u_1=v_1$, $u_2=v_2$. Прямая сумма двух подпространств обозначается следующим образом $\mathbf{U_1 \oplus U_2}$.

Вводим, аналогично определению прямой суммы для двух подпространств, определение прямой суммы для любого конечного числа подпространств в V_K.

ОПР. Сумма $U_1+U_2+...+U_m$ называется **прямой суммой подпространств $U_1, U_2, ..., U_m$,** если любой вектор a из $U_1+U_2+...+U_m$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов из U_i, i=1,2,…,m, т.е. если $u=u_1+u_2+...+u_m=v_1+v_2+...+v_m$, то отсюда следует, что $u_1=v_1$; $u_2=v_2$;...,$u_m=v_m$. Прямая сумма m подпространств обозначается следующим образом $\mathbf{U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_m}$.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>. Ранее уже было показано, что сумма любого конечного числа векторных подпространств в V_K является векторным подпространством V_K (см.Л.3.4.5), поэтому и прямая сумма любого конечного числа векторных подпространств в V_K также будет являться векторным подпространством в V_K.

Рассмотрим некоторые примеры прямых сумм.

<u>ПРИМЕРЫ.</u> а) Пусть $V_K=R^2=\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, x,y —вещественные числа$\}$. R^2 можно представить как прямую сумму двух векторных подпространств $(R,0)=\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}; x \in R\}$ и $(0,R)=\{\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}; x \in R\}$, т.е. $R^2=(R,0) \oplus (0,R)$.

Это действительно так, ибо любой вектор $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ может быть записан единственным образом в виде суммы двух векторов $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

б) Пусть $V_K=R^2$. Рассмотрим линейную оболочку двух векторов $\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$, т.е. это множество всех линейных комбинаций вида

$$y = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Любой вектор z = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, лежащий на плоскости, может быть записан в виде суммы двух векторов z = (a-b)$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$+ b$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, причем такое представление, как несложно видеть (ибо вторая компонента рассматриваемого вектора всегда совпадает с коэффициентом при векторе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$), единственно. Таким образом, можно записать, что линейная оболочка <$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$>, которая совпадает с плоскостью, является прямой суммой двух подпространств H_1=<$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$>, H_2=<$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$>, т.е. $R^2=H_1 \oplus H_2$.

ТЕОРЕМА 3.5.1. Сумма подпространств U_K и W_K конечномерного векторного пространства V_K является прямой тогда и только тогда, когда $U_K \cap W_K=\{\bar{0}\}$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Если вектор u лежит в $U_K \cap W_K$, и сумма U_K+W_K прямая, тогда u можно однозначно представить в виде суммы двух векторов из U_K и W_K. Но если u□0, то u можно представить, по крайней мере, в виде $u+\bar{0}=\bar{0}+u$. Следовательно, единственный вектор, лежащий в пересечении U_K и W_K, это $u=\bar{0}$.

$\Leftarrow$ Если $U_K \cap W_K = \{\bar{0}\}$ и допустим, что $e_1,e_2,..,e_k$ базис U_K, $e_{k+1},..e_n$ – базис W_K. Докажем, что в этом случае система векторов $\{e_i\}$, i=1,2…,n образует базис всей суммы U_K+W_K, т.е. это линейно-независимая система векторов.

Понятно, что $\dim(U_K+W_K)\le n$.

Рассмотрим линейную комбинацию нулевого вектора

$$a_1e_1+a_2e_2+...+a_ne_n = \bar{0}.$$

Тогда это равенство можно записать в таком виде

$$a_1e_1+a_2e_2+...+a_ke_k = -a_{k+1}e_{k+1}-a_{k+2}e_{k+2}-...-a_ne_n = u.$$

Левая часть первого равенства представляет собой вектор из U_K, правая – вектор из W_K. В силу равенства получаем, что этот вектор u лежит в пересечении $U_K \cap W_K$, но по условию в пересечении лежит только $\bar{0}$. Следовательно,

$$a_1e_1+a_2e_2+...+a_ke_k = -a_{k+1}e_{k+1}-a_{k+2}e_{k+2}-...-a_ne_n = \bar{0}$$

Отсюда, в силу линейной независимости систем векторов $\{e_i\}$, i=1,..,k и $\{e_i\}$, i=k+1,..,n. получаем, что все a_i, i=1,2,..,n, коэффициенты из K равны 0.

Получаем, что данный набор векторов $\{e_i\}$, i=1,2…,n есть базис, а в каждом базисе представление любого вектора единственно (см.лемму 3.3.1), следовательно, U_K+W_K – прямая сумма, т.е. $U_K+W_K = U_K \oplus W_K$.

Результат теоремы 3.5.1 несложно обобщить. Докажем следующую лемму.

ТЕОРЕМА 3.5.2. Пусть $U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_n$ прямая сумма векторных подпространств векторного пространства V_K. Тогда $\sum_{i=1}^{t} U_i \cap \sum_{i=t+1}^{n} U_i = \{\bar{0}\}$, для любого t=1,…n-1. Верно и обратное утверждение, т.е. если для любого t=1,…n-1 справедливо равенство $\sum_{i=1}^{t} U_i \cap \sum_{i=t+1}^{n} U_i = \{\bar{0}\}$, тогда сумма $U_1+U_2+...+U_n$ будет прямой.

<u>*Доказательство*</u>. $\Rightarrow$Доказательство данного утверждения почти полное повторение доказательства когда n=2, ибо можно переобозначить сумму $\sum_{i=1}^{t} U_i = H_1$, и $\sum_{i=t+1}^{n} U_i = H_2$.

$\Leftarrow$ Если найдется вектор u из $U_1+U_2+..+U_n$ для которого найдутся два представления в виде $u = x_1+x_2+..+x_n = y_1+ y_2 +..+y_n$, где $x_i, y_i \in U_i$, i=1,2,…,n. Тогда рассмотрим разность этих двух представлений и получаем, что

$$\bar{0} = (x_1- y_1)+(x_2-y_2)+..+ (x_n-y_n).$$

Каждая разность векторов (x_i-y_i), i=1,…,n в скобках лежит в соответствующем U_i. Рассмотрим последовательные суммы разностей, т.е.векторы $u_1=(x_1- y_1)$; $u_2=(x_1- y_1)+(x_2-y_2)$; ……; $u_n =(x_1- y_1)+(x_2-y_2)+..+(x_n-y_n)$.

Если какой-то из u_i, i=1,2,…,n (допустим, u_t) не равен нулевому вектору, тогда получаем, что $u_t = (x_1- y_1)+(x_2-y_2)+..+ (x_t-y_t) = -[(x_{t+1}-y_{t+1})+…+ (x_n-y_n)]$. Но выражение в левой части равенства лежит в сумме $U_1+U_2+….+U_t$, а в правой части - в сумме $U_{t+1}+…+ U_n$. Поэтому этот вектор u_t лежит в пересечении $\sum_{i=1}^{t} U_i \cap \sum_{i=t+1}^{n} U_i$ Отсюда получаем (по условию), что это нулевой вектор. Противоречие.

Следовательно, для любого вектора из суммы $U_1+U_2..+U_n$ представление единственно, т.е. эта сумма (по определению) является прямой.

Из этих двух результатов следует одна достаточно важная теорема, которая показывает, что для того, чтобы определить является ли сумма прямой, достаточно рассмотреть представление только одного вектора, а именно, нулевого вектора.

ТЕОРЕМА 3.5.3. Сумма подпространств $U_1,U_2,..,U_m$ конечномерного векторного пространства V_K является прямой суммой, тогда и только тогда, когда для любого набора векторов u_1 из U_1, u_2 из U_2,..,u_m из U_m равенство

$$u_1+u_2+..+u_m = \bar{0}$$

влечет равенство нулю всех слагаемых, т.е. $u_1=\bar{0}$, .., $u_m=\bar{0}$.

<u>*Доказательство.*</u> $\Rightarrow$ Если сумма прямая, то по определению представление любого элемента единственно, значит и для $\bar{0}$ (нулевого вектора) это также выполняется, т.е. все слагаемые также будут равны $\bar{0}$.

$\Leftarrow$ Допустим из того, что сумма $u_1+u_2+..+u_m = \bar{0}$, следует, что все $u_i=\bar{0}$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$,..,$u_m \in U_m$.

Рассмотрим произвольный элемент суммы и допустим, что он представляется двумя различными способами

$$u = x_1+x_2+..+x_m = y_1+y_2+..+y_m$$

Рассмотрим разность этих представлений и получим, что

$$(x_1-y_1) + (x_2-y_2) + ... + (x_m-y_m) = \bar{0}.$$

Отсюда получаем (по предположению), что все $x_i-y_i=\bar{0}$. Следовательно, эти разложения совпадают. Таким образом, представление любого элемента суммы единственно, так что по определению эта сумма будет прямой суммой векторных подпространств.

СЛЕДСТВИЕ. Если система векторов $\{u_1,u_2,..,u_n\}$ есть базис пространства V_K, то $V_K=\langle u_1,u_2,..u_k\rangle \oplus \langle u_{k+1},..,u_n\rangle$, для любого натурального $1 \le k \le n-1$.

Доказательство. $\langle u_1,u_2,..u_k\rangle = \{x_1u_1+.....+x_ku_k \mid x_1,x_2,....,x_k$ из поля К$\}$ по определению. Аналогично и для $\langle u_{k+1},..,u_n\rangle=\{x_{k+1}u_{k+1}+.....+x_nu_n \mid x_{k+1},x_{k+2},..,x_n$ из поля К$\}$. Отсюда получаем, что любая сумма двух векторов v_1+v_2, v_1 из $\langle u_1,u_2,..u_k\rangle$, v_2 из $\langle u_{k+1},..,u_n\rangle$ будет иметь вид:

$$v_1 + v_2 = x_1u_1+.....+x_ku_k+ x_{k+1}u_{k+1}+.....+x_nu_n.$$

Так как $\{u_1,u_2,..,u_n\}$ есть базис пространства V_K, то эта система векторов является линейно независимой системой, и она будет равна нулю, только когда все $x_i=0$, $i=1,\dots,n$, т.е. когда все слагаемые равны нулевому вектору. А это и означает, что и v_1 и v_2 равны нулевому вектору. Отсюда по теореме получаем, что рассматриваемая сумма $\langle u_1,u_2,..u_k\rangle + \langle u_{k+1},..,u_n\rangle$ прямая.

А сейчас поговорим о некоторых других важных свойствах прямой суммы.

ТЕОРЕМА 3.5.4. Если U_K подпространство конечномерного векторного пространства V_K, то существует такое подпространство W_K пространства V_K, что $V_K=U_K \oplus W_K$.

Доказательство. Пусть U_K тривиальное подпространство конечномерного векторного пространства, т.е. $\dim U_K=0$. Тогда в качестве W_K можно взять само пространство V_K. Верно и обратное, если $U_K=V_K$, то в качестве W_K можно взять $\bar{0}$.

Пусть U_K - нетривиальное векторное подпространство V_K. Тогда его базис $e_1,e_2,...,e_m$ можно дополнить до базиса всего пространства (по теореме 3.3.3) $e_1,e_2,...,e_m,e_{m+1},..e_n$. Примем за $W_K=\langle e_{m+1},e_{m+2},...,e_n\rangle$. Тогда, как несложно понять,

$$V_K=U_K+W_K.$$

Покажем, что $U_K \cap W_K=\{\bar{0}\}$.

Пусть u лежит в пересечении $U_K \cap W_K$. Тогда

$$u = a_1e_1+a_2e_2+..+a_me_m = a_{m+1}e_{m+1}+...+a_ne_n$$

Но тогда получаем, что

$$\bar{0} = a_1e_1+a_2e_2+..+a_me_m - a_{m+1}e_{m+1}- ...- a_ne_n, \qquad (1)$$

Но система векторов $\{e_i\}$ - базис, и получаем, что все коэффициенты a_i в равенстве (1) равны 0. Отсюда и $u=\bar{0}$.

<u>ПРИМЕР:</u> Задано H_1 в R^3: $H_1=\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$. Найти подпространство H_2, которое дополняет H_1 до V_K, т.е. $V_K=H_1 \oplus H_2$.

Решение. Заметим, что векторы $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ линейно-независимы, так как умножая первый вектор на любую константу, вторая координата будет равна 0, а у второго вектора она равна 1. Следовательно, их можно принять за базисные векторы во всем пространстве. Значит, нам нужно найти еще один вектор, который бы дополнил эту пару векторов до базиса всего пространства. Для этого нужно, чтобы он не являлся линейной комбинацией этих двух векторов. Поэтому рассмотрим, какой вид имеют линейные комбинации этих двух векторов.

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1+2c_2\\c_2\\c_1+c_2\end{pmatrix}$$

Рассмотрим, например, вектор $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Понятно, что если он является линейной комбинацией векторов $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, то c_2=1. Но тогда c_1=0 (из третьей координаты). Однако, в этом случае вектор должен иметь вид $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. А у нас взят другой вектор. Значит, вектор $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ не является линейной комбинацией векторов $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. Следовательно, $H_2=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ является искомым подпространством, согласно следствию из теоремы 3.5.5.

Рассмотрим еще одно несложное предложение, которое также является достаточно важным результатом, и который будет в дальнейшем неоднократно использоваться.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.6. Если конечномерное векторное пространство V_K есть прямая сумма подпространств U_K и W_K, то $\dim V_K=\dim U_K+\dim W_K$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $(e_1,e_2,..,e_m)$ – базис U_K, и $(e_{m+1},..,e_n)$ – базис W_K. Тогда, так как $U_K\cap W_K=\{\bar{0}\}$, то покажем, что набор $\{e_i\}$,i=1,.., n образует базис V_K.

Рассмотрим линейную комбинацию нулевого вектора

$$a_1e_1+a_2e_2+..+a_me_m+a_{m+1}e_{m+1}+..+a_ne_n=\bar{0},\text{ где } a_i\in K,\ i=1,2,..,n.$$

Отсюда получаем, что

$a_1e_1+a_2e_2+..+a_me_m=-a_{m+1}e_{m+1}-...-a_ne_n=h,\ a_i\in K,\ i=1,2,..,n.$

Выражение в левой части равенства лежит в U_K, а в правой – лежит в W_K, следовательно, вектор h лежит в $U_K\cap W_K$, но $U_K\cap W_K=\{\bar{0}\}$. Отсюда получаем, что

$$a_1e_1+a_2e_2+..+a_me_m=-a_{m+1}e_{m+1}-..-a_ne_n=\bar{0},$$

Но так как системы векторов $(e_1,e_2,..,e_m)$ и $(e_{m+1},..,e_n)$ – базисы векторных подпрост-ранств, то они образуют линейно-независимые системы векторов, а отсюда все a_i, i=1,2..,n равны 0.

§ 3.6. МАТРИЦЫ. ВИДЫ МАТРИЦ. ОПЕРАЦИИ С МАТРИЦАМИ

Сейчас будем рассматривать еще одно, уже упомянутое выше векторное пространство матриц, но с более общей точки зрения.

Еще раз напомню определение матрицы А.

ОПР. **Матрица А** – это таблица из m строк и n столбцов, заполненных числами, которые берутся из некоторой числовой структуры К. Записывается это так: $\mathbf{A} \in \mathbf{M_{m,n}(K)}$, или $\mathbf{A = (a_{i,j})}$, $a_{i,j} \in K$, $i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,..,n$, где К – числовая структура, откуда берутся числовые элементы матрицы.

Первую, вторую,.., n-ю строки матрицы А будем обозначать соответственно через $\mathbf{A_1,A_2,\dots,A_n}$, первый, второй,… ,n-й столбцы, – соответственно, через $\mathbf{A^1,A^2,\dots,A^n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Во-первых, заметим, что элементами матрицы могут быть элементы произвольного множества, совершенно не связанного с математикой, в частности, таблицы, которые используются в повседневной жизни, также можно считать матрицами. Однако, нас интересуют (в первую очередь) не все таблицы, а только такие, на множестве которых можно определить «стандартные» операции, например, сложение, умножение и т.п., со «стандартными» свойствами, такими как ассоциативность, коммутативность.

Во-вторых, несложно понять, что матрица является некоторым обобщением понятия числа, так как числовое множество К можно рассматривать как множество матриц $M_{1,1}(K)$, причем, несложно заметить, что операции сложения и умножения между матрицами будут фактически совпадать с операциями сложения и умножения на самом числовом множестве К.

Определим, как и на произвольном множестве чисел (или просто множестве), например, на множестве С (множество комплексных чисел), понятие равенства двух матриц А и В. Это понятие будет нами неоднократно использоваться в дальнейшем, однако мы не будем на этом особо останавливаться.

ОПР. Пусть даны две матрицы А и В из множества матриц $Mm,n(K)$, где К поле или кольцо: матрица $A = (ai,j)$, $ai,j \in K$,для любого $i=1,..,m$; $j=1,\dots,n$, матрица $B= (bi,j)$, $bi,j \in K$, для любого $i=1,..,m$; $j=1,\dots,n$. Говорят, что матрица А равна матрице В, если $ai,j= bi,j$, для любого $i=1,..,m$; $j=1,\dots,n$. Записывают это следующим образом $A=B$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ещё раз отметим, что понятие равенства матриц рассматривается только на матрицах одинаковых размерностей, т.е. число строк и столбцов у равных матриц одно и то же.

Напомним некоторые определения основных понятий, которые уже давались выше, когда речь шла о различных множествах и структурах.

ОПР. Рассмотрим матрицу $A \in M_{m,n}(K)$.
Если $m=1$, а n – произвольное натуральное число, тогда матрица размерами $1 \times n$, т.е. $A \in M_{1,n}(K)$, называется **матрицей-строкой**, или просто **строкой**, а матрица размерами $m \times 1$, т.е. $A \in M_{m,1}(K)$ —**матрицей-столбцом** или просто **столбцом**.

ОПР. Матрица $A \in M_{m,n}(K)$; $A = (a_{i,j})$, $a_{i,j} \in K$, для любого $i=1,..,n$; $j=1,\dots,n$, где K поле или кольцо, если $m=n$, называется **квадратной**, а n называется **порядком матрицы A.**
Множество квадратных матриц обозначается через $\mathbf{M_n(K)}$ (заметим, что вместе с введёнными на нём операциями оно образует кольцо, о котором говорилось в брошюре Алгебра-I).

ОПР. Элементы $a_{i,i}$ (индексы элементов совпадают) квадратной матрицы $A \in M_n(K)$ порядка n, образуют **главную диагональ матрицы A,** а сумма этих элементов называется **следом матрицы A** и обозначается **trA**. Элементы вида $a_{i,(n+1-i)}$, $i=1,2,..,n$, сумма индексов которых равна $n+1$, образуют **побочную диагональ матрицы A**.

Введем определения типов матриц, которые не встречались ранее.

ОПР. Квадратная матрица $A \in M_n(K)$, все элементы которой, стоящие ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю, т.е. все $a_{i,j}=0$, если $i>j$ (или $j>i$), называется **треугольной матрицей**.

ОПР. Квадратная матрица $A \in M_n(K)$ называется **диагональной матрицей** – если $a_{i,j} \neq 0$, то $i=j$. То есть квадратная матрица - это частный случай треугольной матрицы, когда все ненулевые элементы лежат на главной диагонали.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что в диагональной матрице на главной диагонали могут лежать и нулевые элементы, но ненулевые – только на главной диагонали.

ОПР. Квадратная матрица $(a_{i,j})=A \in M_n(K)$ называется **симметрической**, если $a_{i,j}=a_{j,i}$ для любой пары индексов i и j, и называется **кососимметрической,** если $a_{i,j}= - a_{j,i}$, опять же для произвольной пары индексов i и j, $i,j =1,..,n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как несложно заметить, все диагональные элементы кососимметрической матрицы равны 0, так как ai/i = - ai/i для любого $i=1,2,\dots,n$. А отсюда и следует, что 2ai,I = 0, а, следовательно, и ai,i=0.

Рассмотрим вопрос введения на множестве матриц некоторых операций. Сначала зададим вопрос: а для чего нам нужны эти операции?

Они нужны для того, чтобы доказывая различные свойства матриц, мы могли использовать свойства определенных на них алгебраических структур (из-за введения на них «удобных», т.е обладающих хорошими свойствами операций).

Во-первых, отметим, что ранее мы уже рассматривали операции «+» и «х» (сложение и умножение) на множестве квадратных матриц, когда говорили о кольце квадратных матриц, поэтому введение операции “+” на множестве матриц одинаковых по размерам (но не обязательно квадратным) будет проводиться совершенно аналогично. И, во-вторых, понимание операции “$\cdot t$” – умножение матрицы (произвольной) на скаляр t из некоторого поля или кольца К, также не составляет большого труда.

Итак пусть матрицы A =($a_{i,j}$) и B=($b_{i,j}$) лежат в кольце матриц $M_{m,n}$(К), где К – поле или кольцо, t – элемент кольца или поля К.

I. A+B = C $\stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots. & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots. & \dots. & \dots.. \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots. & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$, т.е. при суммировании матриц просто складываются соответствующие элементы обеих матриц.

II. Пусть $t \in$ K, $A \in$ $M_{m,n}$(К). Тогда tA $\stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} ta_{11} & \dots. & ta_{1n} \\ \dots. & \dots. & \dots.. \\ ta_{m1} & \dots. & ta_{mn} \end{pmatrix}$, т.е. каждый элемент матрицы умножается на элемент t из поля (кольца) К.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>. Заметим вначале, что складывать матрицы между собой можно только в случае, когда матрицы имеют одинаковую размерность, т.е. принадлежат одному кольцу матриц $M_{m,n}$(R). Также понятно, что умножать на скаляр из произвольного поля К можно матрицы произвольной размерности.

ОПР. Ранее уже было определено понятие нулевой матрицы, т.е. матрицы, все элементы которого равны 0. Будем обозначать ее $0M_{m,n}(K)$ или просто $\bar{0}$, если понятно, о каком кольце матриц идет речь.

ОПР. Диагональная матрица (т.е. квадратная матрица, все элементы которой, кроме элементов, лежащих на главной диагонали равны 0), у которой на главной диагонали стоят единицы, называется **единичной матрицей**. Ее будем обозначать **E_M** или просто **E**. (Или **1_M**).

Покажем, что множество матриц $M_{m,n}$(К) с двумя введенными операциями «+» и “$\cdot t$” образует векторное пространство над полем К, если К, т.е. множество, откуда берутся элементы матриц, есть поле.

ЛЕММА 3.6.1. Множество матриц $M_{m,n}$(К),где К – поле, с двумя введенными на нем операциями «+» и«$\cdot t$», где $t \in$ K, образуют векторное пространство.

<u>*Доказательство.*</u> Когда показывалось выше, обе операции определены на множестве матриц фиксированного размера корректно, т.е. и сумма любых двух матриц и при умножении произвольной такой матрицы на произвольный элемент из поля К также являются матрицей такого же размера.

В силу того, что на поле К операция «+» ассоциативна и абелева, т.е. a+b=a+b, для любых двух элементов из поля К, то же самое справедливо и для матриц из $M_{m,n}$(К): (A+B)+C=A+(B+C) и A+B=B+A, где A,B,C все из $M_{m,n}$(К).

На множестве $M_{m,n}(K)$ есть нулевой элемент – это нулевая матрица ($\bar{0}$). Для нее справедливо равенство: $A+\bar{0}=\bar{0}+A$, где A произвольная матрица из $M_{m,n}(K)$.

Для любой матрицы A из $M_{m,n}(K)$в $M_{m,n}(K)$ есть противоположная ей матрица(-A): для которой справедливо равенство $A+(-A)= (-A)+A=\bar{0}$.

По определению единицы поля К и по определению операции «$\cdot t$», где $t\in K$, видим, что $1_K A=A$, для любой матрицы A из $M_{m,n}(K)$. Кроме этого операция «$\cdot t$», где $t\in K$, обладает свойством ассоциативности, т.е. $t(qA)=(tq)A$.

Также несложно проверить, что по определению операций «+» и «$\cdot t$», где $t\in K$, выполняются дистрибутивные законы:

$$(t+q)A=tA+qA; \qquad t(A+B)=tA+qA.$$

Отсюда по определению получаем, что множество $(M_{m,n}(K),+,\cdot t)$ – образует векторное пространство.

СЛЕДСТВИЕ. Множество квадратных матриц порядка n с элементами из К, где К – поле, т.е. $(M_n(K),+,\ \cdot t)$, где t из поля К, образует векторное пространство над полем К.

Доказательство следует непосредственно из леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Не надо путать данный результат с тем, что множество квадратных матриц $M_n(K)$ образует кольцо относительно двух операций «+» и «$\times$». Во-первых, квадратные матрицы это частный случай матриц $M_{m,n}(K)$, а во-вторых, операции, которые рассматриваются на кольце, вообще говоря, другие, а не те, которые рассматриваются на векторном пространстве.

Для доказательства того, что $M_{m,n}(K)$ есть векторное пространство, мы даже не можем воспользоваться тем, что $(M_n(K),+)$ абелева группа (так как $M_n(K)$ – это частный случай $M_{m,n}(K)$). Мы можем только сказать, что доказательство утверждения о том, что$(M_{m,n}(K),+)$ образует абелеву группу, проводится по аналогии с тем, что $(M_n(K),+)$ абелева группа, но не более того.

ПРИМЕР. Если поле $K=Z_2$, то векторное пространство матриц $(M_{m,n}(K),+,\ \cdot t)$, t из Z_2, будет конечным.

Кроме двух введенных операций: «+» и «$\cdot t$», относительно которых, $M_{m,n}(K)$, где К – поле, как было показано выше, образует векторное пространство, на множестве матриц можно ввести и операцию «$\times$». Однако, для этого нужно, чтобы левая матрица A, которая входит в произведение, имела столько же столбцов, сколько правая B – строк.

Определим операцию умножения (обозначается в дальнейшем либо через $A\times B$, либо $A\cdot B$, либо просто AB) для двух матриц $A=(a_{i,j})$ из $M_{m,n}(K)$ и $B=(b_{i,j})$ из $M_{n,k}(K)$ следующим образом:

$$A\cdot B = AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & .. & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & .. & c_{2k} \\ \dots & \dots & .. & .. \\ c_{m1} & c_{m1} & .. & c_{mk} \end{pmatrix}$$

где $c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}$. Как несложно убедиться прямым подсчетом, что матрица С имеет m строк и k столбцов, т. е. лежит в $M_{m,k}(K)$.

<u>ПРИМЕРЫ</u>: а) сложить и умножить две матрицы А=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и В=$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Как несложно получить, что сумма

$$A+B = C = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-2 & 3+3 \\ 2+2 & 1+1 & 3+0 \\ 3+3 & 0+0 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot 3 & 1\cdot(-2)+2\cdot 1+3\cdot 0 & 1\cdot 3+2\cdot 0+3\cdot 2 \\ 2\cdot(-1)+1\cdot 2+3\cdot 3 & 2\cdot(-2)+1\cdot 1+3\cdot 0 & 2\cdot 3+1\cdot 0+3\cdot 2 \\ 3\cdot(-1)+0\cdot 2+1\cdot 3 & 3\cdot(-2)+0\cdot 1+1\cdot 0 & 3\cdot 3+0\cdot 0+1\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 0 & 9 \\ 9 & -3 & 12 \\ 0 & -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

б) Умножить две матрицы А=$\begin{pmatrix} 1,2 \\ 2,1 \\ 3,0 \end{pmatrix}$; В=$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $A\cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 1 & 1\cdot 4+2\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot 2 \\ 2\cdot 1+1\cdot 1 & 2\cdot 4+1\cdot 0 & 2\cdot 1+1\cdot 2 \\ 3\cdot 1+0\cdot 1 & 3\cdot 4+0\cdot 0 & 3\cdot 1+0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 4 \\ 3 & 12 & 3 \end{pmatrix}$

УПР. а) Найти произведение матриц А = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; В=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

б). Доказать, что операция умножения на множестве матриц – ассоциативна.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ.</u> Как было показано выше, когда разбиралась тема кольца, что множество квадратных матриц $M_n(R)$ образует кольцо. Для этого вводилась еще одна операция, а именно операция умножения квадратных матриц одного порядка. Напомним определение этой операции:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & .. & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots\dots & .. & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \overset{\Delta}{=}$$

$$\left(\begin{matrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+...+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+...+a_{1n}b_{n2} & ... & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+..+a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+...+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+...+a_{2n}b_{n2} & ... & a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+...+a_{2n}b_{nn} \\ .. & & & .. \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+...+a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{n2}+...+a_{nn}b_{n2} & ... & a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{2n}+...+a_{nn}b_{nn} \end{matrix}\right)$$

Именно для квадратных матриц, операция умножения двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$, во-первых, корректно определена, во-вторых, она обладает свойством ассоциативности, и, в третьих, для квадратных матриц будет справедлив и дистрибутивный закон, связывающий операции сложения и умножения.

Ранее было доказано и разобрано на примерах для вычисления размерности векторных пространств, что множество матриц $M_{m,n}(R)$ одних параметров с данными операциями образует векторное пространство над полем вещественных чисел R, размерность которого равна mn.

ОПР. Преобразование матрицы из $M_{m,n}$, в матрицу из $M_{n,m}$, состоящее в том, что i-я строка матрицы преобразуется в i-й столбец, называется **транспонированием матрицы**. Для матрицы A транспонированная матрица обозначается $A^т$.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ.</u> Несложно заметить, что при транспонировании изменяются параметры матрицы, и только в случае квадратной матрицы параметры транспонированной матрицы остаются такими же, какими и были, это легко видно из определения:

Если $A\in M_n(R)$, т.е. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots.. & .. & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то $A^т=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots.. & .. & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\in M_n(R)$.

Докажем одну несложную лемму, в которой сформулированы некоторые простейшие свойства операции транспонирования матрицы.

ЛЕММА 3.6.2. (Свойства операции транспонирования) Пусть $A, B \in M_n(K)$. Тогда выполняются следующие свойства:

а) $(A^T)^T = A$

б) $(A+B)^T = A^T+B^T$

в) $(tA)^T=tA^T$, $t\in K$

г) $(AB)^T = B^TA^T$

<u>*Доказательство.*</u> Свойства а), б), в) леммы следуют почти из определения операций транспонирования, сложения, умножения на скаляр из поля K.

Для доказательства г) можно честно перемножить матрицы A и B в левой части и взять транспонированию матрицу к произведению. А затем взять транспонированные матрицы A и B, и перемножить их в указанном в правой части равенства порядке. После чего, сравнивая результаты, мы увидим, что полученные матрицы равны.

Для чего же нужны матрицы? Они позволяют упрощать алгоритмы решения систем уравнений и неравенств, на основе которых работают многие методы математического моделирования, а математическое моделирование сегодня широко используется в экономике, биологии, физике, и т.д. и т.п.

§ 3.7. ПЕРЕСТАНОВКИ И ИХ СВОЙСТВА

С каждой квадратной матрицей связана еще одна числовая величина, которая называется определителем матрицы.

Однако, для того, чтобы ввести понятие определителя нужно ввести и рассмотреть понятие перестановки конечного множества. Мы уже рассматривали понятие перестановки, когда рассматривали комбинаторные свойства подмножеств (см. Алгебра-I **§**1.4**)**.

Напомню важный факт, который доказывался ранее, и в котором говорится об общем числе перестановок конечного множества из n элементов.

Число перестановок конечного множества A порядка n, равно n! ($n!=1\times 2\times 3\times \ldots \times n$ – читается «n-факториал»).

Рассмотрим некоторые другие свойства перестановок одного конечного множества A, порядок которого равен n (Везде в дальнейшем мы будем рассматривать множество $A=\{1,2,3,\ldots,n\}$. Понятно, что это конечное множество и его порядок равен n). Для этого нужно ввести несколько новых понятий, в частности, понятие инверсии и понятие четности перестановки.

ОПР. Рассмотрим перестановку $(k_1,k_2,..,k_n)$ множества A: $A=\{1,2,3,\ldots,n\}$. Если в этой перестановке найдется пара (k_i,k_j), такая, что $j>i$, а $k_j<k_i$, то будем говорить, что пара этих элементов в перестановке образует **инверсию**.

ОПР. Обозначим через $\mathbf{I=I(k_1,k_2,..,k_n)}$ общее число инверсий перестановки $(k_1,k_2,..,k_n)$. Если I чётное, то перестановка $\mathbf{(k_1,k_2,..,k_n)}$ называется **чётной**, если I – нечётное, тогда перестановка $\mathbf{(k_1,k_2,..,k_n)}$ называется **нечётной**.

ПРИМЕР. Какой по чётности является перестановка (1,3,5,2,4)?

Находим, что она имеет 3 инверсии (3,2), (5,2), (5,4) поэтому образует нечётную перестановку.

Рассмотрим свойства перестановок, связанные с их чётностью.

ЛЕММА 3.7.1. Перестановка двух соседних элементов меняет чётность перестановки.

Доказательство. Рассмотрим два соседних элемента в перестановке $(k_1,k_2,..,k_n)$, например, k_i и k_{i+1}, и поменяем их местами. Если после этого мы рассмотрим пары элементов, в которые не входит ни один из рассматриваемых, т.е. ни k_i, ни k_{i+1}, то во всех таких парах инверсии, если они есть, сохранятся, если их нет, тогда они и не появятся после перестановки.

Если в пару входит только один из рассматриваемых элементов, допустим k_i. Тогда вновь, если инверсия была, то она и останется, если ее не было, то она вновь и не появится. Совершенно аналогичное можно сказать, когда в паре есть только элемент k_{i+1}.

Осталось рассмотреть только пару (k_i,k_{i+1}). Понятно, что после перестановки если вначале не было инверсии, то она появится, и соответственно наоборот, если она было, то ее не будет. Следовательно, чётность числа инверсий изменится, так как общее число изменится ровно на 1.

ПРИМЕР. Рассмотрим две перестановки (1,5,3,4,2) и (1,5,4,3,2). Несложно сосчитать, что в первой перестановке 5 инверсий, а во второй – 6, что подтверждает утверждение леммы.

Обобщим результат, полученный в лемме 3.7.1.

ТЕОРЕМА 3.7.2. Чётность перестановки изменится, если в ней поменять местами два произвольных элемента.

Доказательство. Пусть имеется перестановка $(k_1,k_2,...,k_{i-1},k_i,k_{i+1}, \ldots\ k_{t-1}, k_t,k_{t+1}...,k_n)$. Меняем местами два элемента k_i и k_{i+1}, тогда в перестановке $(k_1,k_2,..,k_n)$ единственная пара, которая меняет свое положение (k_i,k_{i+1}). Но она либо образует инверсию, либо нет, в любом случае чётность числа инверсий изменяется на противоположную.

Если мы меняем местами в перестановке $(k_1,k_2,..,k_n)$ два произвольных элемента k_i и k_t,то мы можем проделать это за $2|k - t - 1| + 1$ операций, последовательно меняя местами два соседних элемента, начиная с k_i и k_{i+1}, затем k_i и k_{i+2} и т.д., и наконец, переводя k_t в положение k_i, при этом меняются местами k_t и k_{i+1}.

Каждая такая операция (а их, как указано выше, $2|k\text{-}t\text{-}1|+1$) меняет чётность перестановки, поэтому общая перестановка также меняет свою чётность.

Докажем еще один факт, который также не будет лишним, когда мы будем рассматривать вычисление определителя.

ТЕОРЕМА 3.7.3. Число чётных перестановок из n элементов равно числу нечётных перестановок.

Доказательство. Выделим в множестве $A=\{1,2,3,....n\}$, $n>1$, два элемента t и k (можно полагать, что это 1 и 2).

Рассмотрим в множестве всех перестановок множества A подмножество таких перестановок, в котором t и k стоят на первом и втором местах. Все перестановки в этом подмножестве можно разбить на пары перестановок:

$$(t,k,a_3,a_4,..,a_n) \qquad \text{и} \qquad (k,t,a_3,a_4,...,a_n).$$

Согласно теореме 3.7.2, получаем, что эти две перестановки имеют разную чётность, поэтому в каждой паре одна перестановка чётная, а другая - нечётная. Так как общее число перестановок чётно (оно равно n!, если n>1, то n! – чётное число). Следовательно, число чётных и нечётных перестановок в этом подмножестве перестановок будет одинаково.

Аналогично рассматривается случай, когда два эти элемента стоят на двух (из n) произвольных местах. Таким образом, несложно понять, что и общее число чётных перестановок, равно количеству нечётных перестановок.

§ 3.8. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ И ЕГО СВОЙСТВА.

Везде далее в этом параграфе мы будем подразумевать, что матрица A квадратная и имеет порядок n, т.е. она имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & .. & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ОПР. Число, равное

$$\sum_{(t_1,t_2,\dots,t_n)(k_1,k_2,\dots,k_n)} (-1)^{I(t_1,t_2,\dots,t_n)+I(k_1,k_2,\dots,k_n)} a_{t_1k_1}a_{t_2k_2}\dots a_{t_nk_n}, \qquad (1)$$

где $I(t_1, t_2,\dots, t_n)$ и $I(k_1, k_2,\dots, k_n)$ – число инверсий перестановок из индексов строк и индексов столбцов элементов, входящих в произведение, называется **определителем или дискриминантом матрицы A**. Определитель матрицы обозначается одним из следующих символов

$$\Delta = \det A=\det(a_{ij})=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots. & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

n – называется **порядком определителя**.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>. Из элементов матрицы A составляются всевозможные произведения по n множителей так, чтобы каждое такое произведение содержало по одному элементу из каждой строки и каждого столбца. В результате каждое полученное произведение будет иметь вид

$$a_{t1,k1}a_{t2,k2}a_{t3,k3}\dots a_{tn,kn}$$

Понятно, что можно переставить элементы произведения таким образом, чтобы первый элемент был из первой строки, второй – из второй, третий – из третьей,.., n – из n-строки. Таким образом, получаем, что данный элемент может быть переписан в виде

$$a_{1,s_1}a_{2,s_2}\dots a_{n,s_n} \qquad (*)$$

где $(s_1,s_2,\dots s_n)$ – некоторая перестановка чисел 1,2,3,...,n. Очевидно, что число таких всевозможных произведений вида (*) будет равно числу перестановок из n элементов, т.е. n!. Каждая такая перестановка из вторых индексов (индексов столбцов) будет иметь некоторое число инверсий. Условимся ставить перед произведением с чётной перестановкой вторых индексов +1, с нечётной перестановкой –“-1”.

По сделанному выше замечанию, элементы в произведении можно переставлять, поэтому определитель можно определять и таким образом:

$$\Delta = \det (a_{i,j}) = |A| = \sum_{(k_1,k_2\dots,k_n)} (-1)^{I(k_1,k_2,\dots,k_n)}\ a_{1,k_1}a_{2,k_2}\dots a_{n,k_n}. \quad (2)$$

Аналогично можно записать определитель, упорядочивая элементы в слагаемых-произведениях по столбцам, т.е. по второму индексу

$$\Delta=\det A=\det(a_{i,j})=\left|A\right|=\sum_{(k_1,k_2\ldots,k_n)}(-1)^{I(k_1,k_2,\ldots,k_n)}\, a_{k_1,1}a_{k_2,2}\ldots a_{k_n,n} \quad (3)$$

Возникает вопрос: почему при этом сохраняются знаки, ведь при смене мест двух элементов в произведении в самой перестановке происходит смена мест элементов перестановки, следовательно, и четность ее должна меняться.

УПР. Доказать, что все формулы для определителя (1)-(3) приводят к одному и тому же числу, т.е. проделываемые преобразования равносильны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что по теореме о равенстве числа чётных и нечётных перестановок, количество слагаемых, которые входят в сумму (1) со знаком «-», равно количеству слагаемых, которые входят в эту сумму со знаком “+”. Это, конечно, все верно только при условии, что n - порядок квадратной матрицы - n>1.

ПРИМЕР: а) С каким знаком войдет в определитель произведение $a_{34}a_{21}a_{42}a_{13}$?

Решение. Сначала вычислим знак по общему правилу:

$$a_{34}a_{21}a_{42}a_{13} \Leftrightarrow (-1)^{I(3241)+I(4123)}=(-1)^{4+3}=-1.$$

Переставив в произведении сомножители, получим, что это произведение можно вычислить и по-другому, а именно, получаем, что

$$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} \Leftrightarrow (-1)^{I(3142)}=(-1)^3=-1.$$

б) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Будем действовать по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{I(1,2)}\, a_{11}a_{22} + (-1)^{I(2,1)}\, a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Для того, чтобы придумать алгоритм для вычисления определителей нужно рассмотреть, при каких преобразованиях определителя он не изменяется или изменяется только его знак. Будем рассматривать и обосновывать некоторые такие свойства, которые будем формулировать в виде лемм.

Еще раз напомним, что определитель существует только у квадратной матрицы. Везде далее полагаем, что $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots.. & .. & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K)$ и имеет порядок n.

ЛЕММА 3.8.1. При транспонировании матрицы A ее определитель не изменится.

Доказательство. Как мы видели выше формулы (1), (2) и (3) для вычисления определителя равносильны. Понятно, что если в (2) есть перестановка (k_1, k_2,…, k_n) индексов столбцов, т.е. рассматривается произведение $a_{1,k_1}a_{2,k_2}\ldots a_{n,k_n}$,после транспонирования это же произведение будет выглядеть таким образом $a_{k_1,1}a_{k_2,2}\ldots a_{k_n,n}$. Если сейчас рассматривать определитель по формуле (3), то получим что появляется точно такая же перестановка (равна (k_1, k_2,…, k_n)), индексов строк, причем ее сомножители будет равны сомножителям, которые входили в произведение $a_{1,k_1}a_{2,k_2}\ldots a_{n,k_n}$. Так как для любой перестановки индексов столбцов в формуле (2) есть равная ей перестановка (и равное произведение из одних и тех же множителей, которые получаются после транспонирования матрицы), то и знаки, и значения этих слагаемых-произведений будут одинаковыми. Следовательно, и определители у А и A^T будут принимать одно и то же значение.

ЛЕММА 3.8.2. Если все элементы некоторой строки определителя матрицы А состоит из нолей, определитель равен 0.

Доказательство Из замечания, которые было дано сразу же после введения понятия определитель матрицы было замечено, что в каждое слагаемое-произведение входят элементы всех строк (ровно по одному из каждой строки), то если в это произведение будет входить 0, то и все произведение будет равно 0. Таким образом, и определитель матрицы А будет равен 0.

ЛЕММА 3.8.3. От перестановки двух строк определитель матрицы А меняет знак.

Доказательство. В числе инверсий перестановки индексов столбцов (см. формулу для определителя (1)) ничего не изменится, так как любой элемент матрицы не изменяет своего столбца, а в числе инверсий перестановки индексов строк поменяются местами ровно два элемента (это элементы переставляемых строк). Отсюда из свойств перестановок чётность любой перестановки поменяется. Следовательно, изменится знак у каждого слагаемого в формуле (1). Отсюда изменится знак и у всего определителя.

ЛЕММА 3.8.4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен 0.

Доказательство. Поменяв местами две одинаковые строки, получим, что detA = - detA, согласно лемме 3.8.3. Но, очевидно, что получаются равные матрицы (так как меняются местами две равные строки), поэтому их определители равны, отсюда. Отсюда detA=0.

ЛЕММА 3.8.5. Общий множитель λ всех элементов некоторой строки определителя из целых чисел можно вынести за знак определителя.

Доказательство. Сразу предположим, что общий множитель λ содержат элементы первой строки. Рассмотрим формулу для вычисления определителя (1). Так как в каждом слагаемом-произведении, которые составляют определитель, есть ровно один множитель, содержащий множитель t, то этот множитель можно вынести за скобку и за знак суммы, таким образом, получим, что

$$\det A = \sum_{(t_1,t_2,\dots,t_n)(k_1,k_2,\dots,k_n)} (-1)^{I(t_1,t_2,\dots,t_n)+I(k_1,k_2,\dots,k_n)} (\lambda a_{t1,k1}) a_{t2,k2} a_{t3,k3} \dots a_{tn,kn} =$$

$$= \lambda \sum_{(t_1,t_2,\dots,t_n)(k_1,k_2,\dots,k_n)} (-1)^{I(t_1,t_2,\dots,t_n)+I(k_1,k_2,\dots,k_n)} a_{t1,k1} a_{t2,k2} a_{t3,k3} \dots a_{tn,kn},$$

где $I(t_1, t_2, \dots, t_n)$ и $I(k_1, k_2, \dots, k_n)$ – число инверсий перестановок из индексов строк и индексов столбцов элементов, входящих в произведение.

ЛЕММА 3.8.6. Пусть А – квадратная матрица порядка n, тогда

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

Доказательство. Эта лемма следует из леммы 3.8.5, нужно только применить ее к матрице А ровно n раз.

ЛЕММА 3.8.7. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

Доказательство. Если строки A_k и A_t пропорциональны, т.е. $A_k = \lambda A_t$, $\lambda \in K$ – скаляр из поля К. Отсюда можно полагать, что каждый элемент t–ой строки содержит множитель λ, который можно вынести за знак определителя. Оставшийся определитель будет иметь две одинаковые строки. По лемме 3.8.4 он будет равен 0. Следовательно, и исходный определитель также равен 0.

ЛЕММА 3.8.8. Если все элементы первой строки матрицы А являются суммой двух, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \dots & b_{1n}+c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

то определитель А равен сумме двух определителей, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Итак, пусть элементы первой строки матрицы А можно представить в виде двух слагаемых, т.е. $a_{1i} = b_{1i} + c_{1i}$, i=1,2,..,n. Тогда рассмотрим формулу для вычисления определителей (2). В каждом слагаемом-произведении есть элементы первой строки, т.е.

$$(-1)^{I(k_1, k_2, \dots, k_n)}\ a_{1,k_1}a_{2,k_2}\dots a_{n,k_n} = (-1)^{I(k_1, k_2, \dots, k_n)}(b_{1,k1} + c_{1,k1})a_{2,k2}\dots\dots a_{n,kn}.$$

Понятно, что сейчас вся сумма разобьется на две, в первой можно взять

$$\sum_{(k_1,k_2\dots,k_n)} (-1)^{I(k_1, k_2, \dots, k_n)}\ a_{1,k_1}a_{2,k_2}\dots a_{n,k_n} =$$

$$\sum_{(k_1,k_2\dots,k_n)} (-1)^{I(k_1, k_2, \dots, k_n)} b_{1,k1}a_{2,k2}\cdot\dots\dots a_{n,kn} +$$

$$\sum_{(k_1,k_2\dots,k_n)} (-1)^{I(k_1, k_2, \dots, k_n)} c_{1,k1}a_{2,k2}\dots\dots a_{n,kn} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>. Точно также можно доказать, что определитель матрицы равен сумме двух определителей, если в виде суммы двух элементов представлена любая, например, i-я строка. В этом случае элементы i-ой строки можно поменять с элементами первой строки и свести доказательство к рассмотренному выше случаю.

ЛЕММА 3.8.9. Определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Доказательство. Если мы к A_i прибавим λA_j, $(i \neq j)$, то получим, что определитель матрицы A примет такой вид $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & & . & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. По лемме 3.8.8 и по лемме 3.8.5 такой определитель будет равен сумме двух определителей, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & & . & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots\dots\dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Но второй определитель, согласно лемме 3.8.4, будет равен 0, так как в нем две равные строки: i-ай и j-ая. Следовательно, мы получаем, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3.8.10. Определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить линейную комбинацию других строк.

Доказательство. Эта лемма является естественным обобщением предыдущего свойства определителей. Если мы при прибавляем к какой-то строке линейную комбинацию k других строк, то последовательно применяя лемму 3.8.9 к определителю матрицы A k раз, мы и получим требуемое равенство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что в силу леммы 3.8.1, если мы в любом из свойств заменим слово строка на слово столбец, то свойства определителя сохранятся.

§ 3.9. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

С помощью доказанных выше свойств, можно получить алгоритмы для вычисления определителей. Но сначала рассмотрим случаи нахождения определителей матриц, имеющих простой вид, т.е. матриц малых размерностей, или диагональных матриц, или треугольных.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ МАТРИЦ ПОРЯДКА 2.

Вычисление определителя порядка 2 уже было проделано в примере, после введения понятия определителя. Напомним его.

Итак, задача: вычислить определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Для его вычисления будем действовать по формуле (2), т.е. в произведении будем упорядочивать элементы по элементам строк. Таким образом, мы получим, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{I(1,2)}\ a_{11}a_{22} + (-1)^{I(2,1)}\ a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Таким образом, правило вычисления определителя порядка 2 простое: берется произведение элементов главной диагонали и вычитается произведение элементов побочной диагонали.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ МАТРИЦ ПОРЯДКА 3.

Рассмотрим произвольный определитель порядка 3, и будем вычислять его, пользуясь формулой (2), т.е. в каждом слагаемом-произведении упорядочивать элементы по первому индексу, индексу строк.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{I(1,2,3)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{I(1,3,2)}\ a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{I(2,1,3)}\ a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{I(2,3,1)}\ a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+ (-1)^{I(3,1,2)}\ a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{I(3,2,1)}\ a_{13}a_{22}a_{31} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Заметим, что со знаком «+» в сумму входят те слагаемые-произведения, элементы которых образуют треугольник, одна из сторон которого параллельна главной диагонали треугольника, и со знаком «-» те, элементы которого параллельны побочной диагонали. Это правило вычисления определителя порядка 3, называется «**правилом треугольника**».

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ МАТРИЦ ПРОСТЕЙШЕГО ВИДА

i) Сейчас рассмотрим вычисление определителя диагональной матрицы, т.е. матрицы A вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Понятно, что единственное слагаемое-произведение, которое не содержит нулевых множителей может быть произведение ее диагональных элементов, т.е. $\det A = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}$.

ii) Если А имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & .0 & a_{1n} \\ \ldots & .. & a_{2n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & .. \\ a_{n1} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$. Тогда для вычисления определителя этой матрицы мы должны переставить A^1 с A^n, A^2 с A^{n-1}, и т д., сделав при этом ровно $[\frac{n}{2}]$ перестановок. При этом после каждой перестановки определитель матрицы сменит знак. Отсюда, после перестановки, мы получим определитель уже диагональной матрицы, вычислять который мы уже умеем. В итоге получаем, что

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & .0 & a_{1n} \\ \ldots & .. & a_{2n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & .. \\ a_{n1} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \begin{vmatrix} a_{1n} & \ldots & .0 & 0 \\ \ldots & a_{2n-1}. & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & .. \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n1} \end{vmatrix} = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{1,n} a_{2,n-1} .. a_{n,1}$$

iii) Если А является «треугольной матрицей» вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ \ldots. & \ldots & \ldots & a_{n-1,n} \\ 0 & \ldots & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$. Тогда для вычисления определителя такой матрицы нужно учесть, что в каждом слагаемом-произведении (которое входит в определитель) должен быть элемент первого столбца. Так как там только один (возможно) ненулевой элемент a_{11}, то он должен входить в это слагаемое. Этот элемент лежит в первом столбце и в первой строке. Значит, более элементов из первой строки в этом слагаемом-произведении уже быть не должно. Также в этом слагаемом-произведении должен быть представитель второго столбца, причем этот представитель не должен лежать в первой строке. Значит, это может быть только a_{22}. Рассуждая далее аналогичным образом, мы получаем, что в сумме для вычисления определителя по формуле (3) (возможно) только одно слагаемое-произведение, содержащее все элементы главной диагонали. Во все остальные слагаемые-произведения входят нулевой элемент, т.е. они все будут равны 0.

iv) Если А также является "треугольной"матрицей, но треугольник из ненулевых элементов расположен по-другому, например таким образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & a_{2,n-1} & \ldots \\ \ldots. & a_{n-1,2}\ldots & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & .a_{n,2}.. & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Тогда проделываем с данной матрицей точно такие же преобразования, что и в случае расположения элементов по побочной диагонали, для того, чтобы привести матрицу к треугольному вида типа iii), т.е.переставляем A^1 с A^n, A^2 с A^{n-1}, и т д., сделав (как и выше указанном случае) ровно $[\frac{n}{2}]$ перестановок. При этом после каждой перестановки определитель матрицы сменит знак. Отсюда, после выполнения всех перестановок, мы получим определитель уже «треугольной матрицы» (она будет транспонированной к той, которую мы разбирали выше, но в силу свойств определителя (см.Лемма.3.8.1), при транспонировании матрицы определитель не изменяется!), вычислять который мы уже умеем. В итоге получаем, что

$$\begin{vmatrix} a_{1,n} & 0 & \dots & 0 \\ .a_{2,n} & .a_{2,n-1}.. & & \dots \\ \dots. & a_{n-1,2}\dots & \dots & \\ a_{n,n} & .. & a_{n,2} & a_{n,1} \end{vmatrix} = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{1,.n}a_{2,n-1}\dots\dots a_{n,1}.$$

Все рассмотренные выше случаи – это частные случаи. Рассмотрим два общих метода, которые позволяют находить определители произвольных квадратных матриц.

МЕТОД ГАУССА. ПРИВЕДЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ

Поставлена задача о вычислении определителя матрицы A, где A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots.. & .. & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Алгоритм нахождения определителя сводится к последовательному «обнулению» элементов 1,2,…,n-1-(го) «полустолбца» (элементов столбцов, которые лежат ниже главной диагонали), т.е. последовательно сводя матрицу к треугольному виду, причем при всех таких преобразованиях определитель матрицы может только сменить знак.

Полагаем $a_{11} \neq 0$. Если же $a_{11}=0$, тогда рассматриваем элементы 1-ой строки; если все они равны 0, тогда и определитель матрицы A равен 0; если же найдется $a_{1i} \neq 0$, тогда меняем i-й и 1-й столбцы местами. Получаем при этом, что определитель может сменить знак.

Сейчас обнулим все элементы 1-го столбца, кроме a_{11}. Для этого прибавляем к A_2 (второй строке) первую строку, умноженную на $-a_{21}a_{11}^{-1}$, т.е. к A_2 нужно прибавить $-a_{21}a_{11}^{-1} A_1$, к A_3 (третьей строке) нужно прибавить $-a_{31}a_{11}^{-1} A_1$, и т.д., к A_n нужно прибавить $a_{n1}a_{11}^{-1} A_1$. Таким образом сводим матрицу A к матрице $B=(b_{ij})$, причем все b_{ij}: $i>j$ $b_{ij}=0$, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots. & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots. & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Допускаем, сейчас, что $b_{22} \neq 0$. Если $b_{22}=0$, тогда рассматриваем элементы второй строки. Если они все равны 0, тогда и определитель матрицы A равен 0. Если же есть какое-то $b_{2,i} \neq 0$, тогда меняем 2-ой и i-й столбцы местами, и обнуляем все элементы b_{i2}, $i>2$. Для этого к B_3 прибавляем $-b_{32}b_{22}^{-1} B_2$, к B_4 нужно прибавить $-b_{42}b_{22}^{-1} B_2$, и т.д., к B_n – нужно прибавить -

$b_{n2}b_{22}^{-1}$ B2. Проделываем аналогичные преобразования, что и при обнулении элементов 1-го и 2-го столбцов, получаем, что матрица приводится к виду:

$$\to \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ 0 & 0 & c_{n,n-1} & \dots c_{nn} \end{pmatrix}$$ и т.д. Проделывая аналогичные преобразования с матрицей,

мы приводим ее в конце концов к виду $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ 0 & 0 & h_{33} & h_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & h_{nn} \end{pmatrix}$. Определитель же полученной матрицы равен (как показано выше), произведению диагональных элементов.

Рассмотрим на примере действие этого метода.

ПРИМЕР: Вычислить определитель четвертого порядка методом Гаусса $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. Переставим строки первую и четвертую, от этого знак определителя изменится на противоположный. Получим, что

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \overset{\substack{A_2-3\cdot 2^{-1}A_1 \\ A_3-2^{-1}A_1 \\ A_4-5\cdot 2^{-1}A_1}}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 3 & 4 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

Переставляем второй и четвертый столбец и получаем, что определитель принимает вид:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 4 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{A_3+A_2 \\ A_4-A_2}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{A_3+\frac{2}{5}A_2 \\ A_4-\frac{4}{5}A_2}}{=} \quad = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{A_4-\frac{1}{2}A_3}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 10.$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ СТРОКИ ИЛИ СТОЛБЦА

Рассмотрим еще один метод вычисления определителей, который связан с разложением определителя по элементам строки (или столбца). Но перед этим нужно ввести некоторые новые понятия и доказать ряд несложных результатов, связанных с этими понятиями.

ОПР.1. Пусть А квадратная матрица порядка n. Определитель порядка n матрицы

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ .. & .. & .. & \dots & \dots & .. & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

называется **алгебраическим дополнением элемента $a_{i,j}$** и обозначается **$A_{i,j}$**.

ЗАМЕЧАНИЕ. Алгебраическое дополнение элемента **$a_{i,j}$** матрицы $A \in M_n(K)$ это определитель порядка n, у которого в i-ой строке и в j-м столбце все элементы равны нулю, только на месте $a_{i,j}$ стоит 1. А все остальные элементы этого определителя совпадают с соответствующими элементами матрицы А.

Алгебраическое дополнение элемента матрицы можно определить еще и другим образом.

Рассмотрим сумму (1), в формуле, по которой давалось определение определителя (см.выше). Выделим из суммы слагаемые (каждое из которых – произведение n элементов), в которые входят элементы i-й строки: $a_{i,1,} a_{i,2,} \dots, a_{i\ ,n}$.Сначала рассмотрим все слагаемые-произведения, в которые входит a_{i_1} . Выносим его, как общий множитель, и все остальное (т.е. сумму произведений по (n-1)-у множителю) обозначаем через A_{i_1} . Поступая аналогично для остальных элементов i-ой строки, получаем, что определитель можно записать в виде

$$\det A = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \dots + a_{i\ ,n}A_{i\ ,n} .$$

ОПР.2. Величину **$A_{i,j}$** – **называют алгебраическим дополнением элемента $a_{i,j}$ в определителе матрицы $A=(a_{i,j})$**.

Из такого определения сразу видно, что определитель матрицы А равен сумме произведений элементов данной строки на их алгебраические дополнения.

ЛЕММА 3.9.1. Доказать, что эти два определения алгебраического дополнения элемента a_{ij} равносильны.

Доказательство. Записываем определитель матрицы А в виде суммы.

$$
|A| = \begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\
.. & .. & .. & \dots & \dots & .. & \dots \\
a_{i-1,1} & \dots & .a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\
a_{i,1}+0 & \dots & a_{i,j-1}+0 & 0+a_{i,j} & a_{i,j+1}+0 & \dots & a_{i,n}+0 \\
a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\
\dots. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

По свойствам определителя (см.Лемму 3.8.8) этот определитель можно записать в виде суммы двух.

$$
|A| = \begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\
.. & .. & .. & \dots & \dots & .. & \dots \\
a_{i-1,1} & \dots & .a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\
0 & \dots & 0 & a_{i,j} & 0 & \dots & 0 \\
a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\
\dots. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\
.. & .. & .. & \dots & \dots & .. & \dots \\
a_{i-1,1} & \dots & .a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\
a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & 0 & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\
a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\
\dots. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

Заметим, что во втором определителе не будет членов с $a_{i,j}$, так как на его месте стоит 0. Поэтому все слагаемые-произведения, в которые входят $a_{i,j}$ будут получаться только из первого определителя.

Рассмотрим первый определитель. Его можно представить в таком виде

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j}+0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\
.. & .. & .. & \dots & \dots & .. & \dots \\
a_{i-1,1} & \dots & .a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j}+0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\
0 & \dots & 0 & 0+a_{i,j} & 0 & \dots & 0 \\
a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j}+0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\
\dots. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j}+0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}. \qquad (1)
$$

Определитель (1) равен по свойствам определителей (см.Лемму 3.8.8) сумме двух определителей, т.е. его можно записать в виде суммы определителей

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\
.. & .. & .. & \dots & \dots & .. & \dots \\
a_{i-1,1} & \dots & .a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\
0 & \dots & 0 & a_{i,j} & 0 & \dots & 0 \\
a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\
\dots. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\
.. & .. & .. & \dots & \dots & .. & \dots \\
a_{i-1,1} & \dots & .a_{i-1,j-1} & a_{1-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\
\dots. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

Понятно, что второй определитель (так как содержит нулевую строку) равен 0 (см. Лемму 3.8.2). В первом же определителе, так как все его элементы в i-ой строке содержит общий множитель $a_{i,j}$, то этот множитель можно вынести за знак определителя, поэтому в итоге получаем, что все слагаемые-произведения, в которые входит множителем элемент $a_{i,j}$, получаются при вычислении определителя:

$$a_{i,j}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ .. & .. & .. & \dots & \dots & .. & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & .a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Таким образом, мы и получаем, что $A_{i,j}$ будет равно

$$A_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ .. & .. & .. & \dots & \dots & .. & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & .a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

А это нам и требовалось доказать. Таким образом мы показали, что два определения алгебраических дополнений элемента $a_{i,j}$ равносильны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что это также будет верно, если мы будем рассматривать вместо строк столбцы матрицы.

Введем еще одно определение.

ОПР. Вычеркнем в определителе матрицы $A \in M_n(K)$ произвольную строку и столбец (например i-ую строку и j-ый столбец). Оставшийся определитель (n-1) порядка назовем **минором элемента $a_{i,j}$** определителя n-го порядка и обозначим его через $M_{i,j}$ (или $\Delta_{i,j}$).

Оказывается между $A_{i,j}$ и $M_{i,j}$ есть одно интересное соотношение. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.9.2. Алгебраическое дополнение $A_{i,j}$ и минор $M_{i,j}$ одного элемента связаны между собой соотношением

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}.$$

Доказательство. а) Сначала рассмотрим это равенство для a_{11}. Если рассматривать формулу для A_{11} (см. определения выше), то согласно ей видим, что

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(k_1,k_2\dots,k_n)} (-1)^{I(k_1,k_2,\dots,k_n)} a_{1,k_1} a_{2,k_2} \dots a_{n,k_n},$$

где $a_{1,k}$ может равняться только $a_{11}=1$. Поэтому перестановки индексов столбцов будут иметь вид только $(1, k_2,\dots, k_n)$. В такой перестановке 1 можно опустить, так как никаких инверсий она не образует. Поэтому формулу можно переписать так

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \sum_{(k_2 ..., k_n)} (-1)^{I(k_2, ..., k_n)} 1 \cdot a_{2,k_2} \dots a_{n,k_n}.$$

Но это по определению будет равно M_{11}. Таким образом, получаем, что утверждение теоремы верно.

б) Рассмотрим произвольный элемент $a_{i,j}$ матрицы A, и будем рассматривать его алгебраическое дополнение $A_{i,j}$. Наша цель перенести 1 с места $a_{i,j}$ на место a_{11}. Это можно выполнить последовательно, сначала меняя местами строки i-ую с (i-1)-ой, затем (i-1)-ую с (i-2)-ой, и т.д., меняя 2-ую строку с 1-ой, т.е за i-1 перестановку. Затем переставляем j-ый столбец с (j-1)-ым, (j-1)-й с (j-2)-ым и т.д,, второй столбец с первым, т.е за j-1 перестановку. Всего было сделано (i-1)+(j-1) перестановок строк и столбцов. Каждая такая перестановка меняет знак определителя (алгебраического дополнения) на противоположный, поэтому

$$A_{ij}=(-1)^{i+j-2}A_{ij}' = (-1)^{i+j} A_{ij}'. \ (*)$$

Заметим, что A_{ij}' имеет вид

$$A_{i,j}' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & .. & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & .. & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_{ij} \end{vmatrix}$$

В A_{ij}' мы видим, что число 1 расположена на месте a_{11}, поэтому для этого числа выполняется (см.п.а теоремы) требуемое соотношение, т.е. $A_{i,j}'=M_{i,j}$. А отсюда и получаем нужное нам соотношение, что завершает доказательство теоремы.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ.</u> Данная теорема позволяет вычислять определитель n-го порядка (алгебраическое дополнение элемента матрицы) с помощью некоторого набора определителей (n-1)-го порядка. А это, вообще говоря, достаточно удобно, так как иногда позволяет находить определитель, сводя его к вычислению определителей значительно меньших порядков, чем первоначальный.

Покажем, как действует метод разложения по элементам строки или столбца при нахождении следующего определителя.

<u>ПРИМЕР:</u> Вычислить определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, используя разложение по какой-либо строке или столбцу.

Решение. Заметим, что в данном определителе достаточно много нулей, поэтому удобнее раскладывать определитель по элементам той строки (столбца), в которой их максимальное число. Раскладываем определитель по элементам второй строки и получаем, учитывая и результат теоремы 3.9.2, что

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Еще раз применяя прием разложении по элементам строки (в обоих случаях по третьей строке), получаем, вновь учитывая результат теоремы 3.9.2, что исходный определитель будет равен

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-3)(-1)^{3+3}3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+1}2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9(4-6)+4(4-6) = 18-8 = 10.$$

Как видим, метод разложения по элементам строки в данной задаче несколько более эффективен, чем метод Гаусса.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что оба метода, о которых говорилось, как о методах вычисления определителей, могут быть обобщены: один – это результат т. Лапласа (о которой мы не будем упоминать далее), а второй – также метод Гаусса для подсчета ранга матрицы. Об этом мы будем говорить далее.

Рассмотрев понятие алгебраического дополнения и минора элементов квадратной матрицы A порядка n, можно доказать следующую теорему, которая нам пригодится для нахождения обратной матрицы, да и в дальнейшем курсе лекций может понадобиться.

ТЕОРЕМА 3.9.3. (Свойства алгебраических дополнений). С учетом второго определения алгебраического дополнения для элементов матрицы A = ($a_{i,j}$), можно доказать следующее свойством для алгебраических дополнений элементов произвольного столбца (или строки) матрицы A:

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} \det A, & \textit{если} \quad i = j; \\ 0, & \textit{если} \quad i \neq j. \end{cases}.$$

Доказательство. Пусть дан определитель матрицы $A \in M_n(K)$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Заменим в этом определителе элементы j-ого столбца соответствующими элементами i-ого ($i \neq j$) столбца (все остальные элементы оставим без изменения) и получим определитель detA’:

$$\det A' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

имеющий два одинаковых столбца. Следовательно, в соответствии с леммой 3.8.4 такой определитель равен 0. Отсюда, в соответствии с методом разложения определителя detA' по элементам j-ого столбца, получаем, что

$$\det A' = a_{1,i}A_{1,j}' + a_{2,i}A_{2,j}' + .. + a_{n,i}A_{n,j}' = 0$$

где $A_{k,j}'$ (k=1,2,..,n) – алгебраические дополнения элементов j-ого столбца определителя detA', т.е. то, что нам и требовалось доказать.

Если же i=j, то в соответствии со вторым определением алгебраического дополнения элементов матрицы, получаем, что

$$a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \ldots + a_{n,j}A_{n,j} = \det A.$$

Используя некоторые свойства определителей, и методы их вычисления, о которых говорилось выше, можно доказать еще один важный результат о свойствах определителей, который нам потребуется в дальнейшем, это свойство определителя произведения матриц.

Сначала докажем один вспомогательный результат.

ЛЕММА 3.9.4. Пусть матрица L порядка n имеет вид $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$, где A и C квадратные матрицы и матрица L также квадратная. Тогда

$$\det L = \det A \cdot \det C.$$

<u>*Доказательство*</u>. Пусть L имеет вид $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где A - матрица порядка m, а C - матрица порядка k. Работая с первыми m строками матрицы L, можно привести матрицу A к треугольному виду (при этом возможна перестановка при необходимости первых m столбцов матрицы L). Каждое такое преобразование первых m столбцов изменит знак у определителя матрицы L и определителя матрицы A.

Аналогично, работая с k последними строками матрицы L, можно привести к треугольному виду матрицу C, при необходимости переставляя k последних столбцов матрицы L. Аналогично, каждая такая перестановка изменяет знак у определителя матрицы L и определителя матрицы C.

Таким образом, мы можем привести матрицу L к треугольному виду, т.е. к матрице L’. Определитель матрицы L’ (уже треугольной формы) в результате будет равен

$$\det A' * \det C' = \det L',$$

где матрицы A’ и C’ имеют треугольный вид. Учитывая, что было сделано p перестановок первых m строк и столбцов и q перестановок последних k строк и столбцов матрицы L будем иметь,

$$\det L' = (-1)^{p+q} \det L$$

С другой стороны имеем $\det A' = (-1)^p \det A$ и $\det C' = (-1)^q \det C$. Отсюда получаем, что

$$\det L' = (-1)^{p+q} \det L = (-1)^p \det A \cdot (-1)^q \det C.$$

Отсюда $\det L = \det A \cdot \det C$, что нам и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что этот же результат будет верен, когда мы будем рассматривать матрицу вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$, где A и C квадратные матрица порядков m,k соответственно. Только преобразования нужно будет делать с первыми m строками и последними k столбцами.

А сейчас рассмотрим и докажем основной результат об определителе произведения двух матриц.

ТЕОРЕМА 3.9.5. Определитель произведения двух квадратных матриц n-го порядка A и B равен произведению определителей перемножаемых матриц: $|AB|=|A||B|$, где A и B матрицы из $M_n(K)$.

<u>*Доказательство*</u>. Сконструируем и запишем матрицу $L=\begin{pmatrix} A & C \\ -E & B \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$ и ее определитель $\Delta = |L|$.

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & C \\ -E & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & .. & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ .. & .. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & .. & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

По лемме 3.9.4 (и замечанию выше) имеем, что

$$\Delta = \det A \det B = |A||B|. \qquad (1)$$

Для вычисления определителя произведения матриц A и B, преобразуем определитель Δ таким образом, чтобы все элементы блока матрицы L (а именно, матрицы B в правом нижнем углу) стали равными нулю. Причем делать это будем таким образом, что для того, чтобы, например, обнулить элемент b_{11}, нужно к n+1 столбцу прибавить 1-й столбец, умноженный на b_{11}. От этого также изменятся элементы нулевой матрицы $C=(c_{i,n+j})$, $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,n$; порядка n, расположенной в правом верхнем угле матрицы L. И вообще, чтобы обнулить элемент $b_{i,j}$ мы к (n+j)-му столбцу прибавляем j-й, умноженный на $b_{i,j}$.

Что при этом получается в первых n строках (n+1)-го, (n+2)-го,…., 2n-го столбцов (т.е. элементы матрицы $C=(c_{i,n+j})$, $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,n$)? Когда обнулятся все элементы $b_{i,j}$, $i=1,2,3,..,n$ (элементы j-го столбца), то на месте $c_{1,n+j}$ (т.е. на 1 месте в (n+j)-ом ряду матрицы C) будет стоять

$$c'_{1,n+j} = a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + a_{13}b_{3j} + ..+ a_{1n}b_{nj}.$$

Но как несложно понять, это есть элемент, который стоит на первом месте в j-м ряду матрицы (произведения) AB. Аналогично, на месте $c_{2,n+j}$ (т.е. на 2 месте в (n+j)-ом ряду матрицы C) будет стоять число

$$c'_{2,n+j} = a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + a_{23}b_{3j} + ..+ a_{2n}b_{nj},$$

а это есть элемент, который стоит на втором месте в j-м ряду матрицы (произведения) AB; и т.д., на месте c_{nn+j} (т.е. на n месте в (n+j)-ом ряду матрицы C) будет стоять

$$c'_{n,n+j} = a_{n1}b_{1j} + a_{n2}b_{2j} + a_{n3}b_{3j} + ..+ a_{nn}b_{nj},$$

а это есть элемент, который стоит на n-ом месте в j-м ряду матрицы (произведения) АВ.

После преобразований получится аналог ступенчатой матрицы, т.е. матрица вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & C' = AB \\ -E & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} & c_{11}^{'} & \dots & c_{1n}^{'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} & c_{n1}^{'} & \dots & c_{nn}^{'} \\ -1 & 0 & .. & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ .. & .. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & .. & -1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

определитель которой можно найти, переставив n столбцов: n+1 с первым, 2-й с (n+2)-м, ...n-й столбец с 2n-ым. При этом определитель изменится на $(-1)^n$. Вот сейчас получим определитель ступенчатой матрицы, которой по лемме 3.9.4 равен

$$\det \Delta = (-1)^n(-1)^n \det C' = \det C'.$$

Сравнивая полученное с (1), получим, что

$$\det \Delta = \det(AB) = \det C' = \det A \det B.$$

ПРИМЕР. Рассмотрим определитель произведения двух матриц A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и сравнить их с произведением определителей этих матриц.

Решение. Найдем определитель матриц А и В. |A| = (4-6) =-2; |B|=(4+2)=6.

С другой стороны найдем произведение матриц АВ=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$.Отсюда находим, что |AB|=-12. Мы видим, что |A||B|=|AB|, что подтверждает результат теоремы 3.9.5.

§ 3.10. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

На множестве матриц нами уже были введены операции сложения и умножения, а также умножение на скаляр (или на элемент из поля K, над которым рассматриваются матрицы). Мы также показали, что относительно этих операций множество матриц образует векторное пространство.

Напомню, что в курсе лекций, когда разбиралось понятие кольца квадратных матриц порядка n, т.е. $M_n(K)$, с элементами из поля (или кольца) K (см. часть 1), на этом множестве квадратных матриц вводилась операция умножения матриц, которая ассоциативна (но не коммутативна).

Рассмотрим относительно операции умножения обратные элементы для каждой из матриц.

Введем определение обратной матрицы.

ОПР. Пусть A, квадратная матрица порядка n. Если существует такая квадратная матрица B, что AB=BA=E —где E- единичная матрица порядка n, то такая матрица называется **обратной к A**, и обозначается A^{-1}.

ОПР. Матрица, которая имеет обратную матрицу, называется **обратимой матрицей**.

Сразу встает вопрос: для каких матриц из $M_n(K)$ существует обратная к ней? Сейчас рассмотрим вопрос о ее существовании, и выясним при каких условиях она существует. Оказывается, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.10.1. Если $\det A=\Delta\neq 0$, где detA - определитель квадратной матицы A, порядка n, то для A существует обратная матрица A^{-1}. Верно и обратное, т.е. если detA=0, то обратной матрицы для A не существует.

<u>*Доказательство*</u>. Сначала покажем, что верно обратное утверждение, т.е. если detA=0, то обратной матрицы не будет. Это действительно верно, так как по свойствам произведения определителей (см.теорему 3.9.5) $\det A\det A^{-1}=\det E=1$, но с другой стороны, $\det A\cdot\det A^{-1}=0$, так как detA=0. Противоречие.

Если $\det A\neq 0$, тогда матрица будет обратимой, и мы можем явно написать ее, используя теорему 3.9.3.

Пусть $A = (a_{i,j})$: $\det A\neq 0$. Рассмотрим матрицу A^v, у которой на месте $a_{i,j}$ стоит $A_{j,i}$, где $A_{i,j}$ - алгебраическое дополнение элемента $a_{i,j}$:,т.е. это матрица имеет вид:

$$A^v=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{21} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произведение А на А^{v}. Получаем, согласно теореме 3.9.3, что

$$\mathrm{AA^{v}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{21} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}=|A|\,\mathrm{E}.$$

Аналогично показывается, что и А^{v}А также равняется $|A|$Е.

Отсюда получаем, что обратную матрицу для А можно записать в виде

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{v}.$$

Таким образом, мы показали, что обратная матрица существует только для квадратных матриц, у которых detA≠0. Однако, представление обратной матрицы через использование матрицы А^{v} не всегда удобно с точки зрения подсчета, так как приходится вычислять определители высоких порядков, если матрица А имеет достаточно большой порядок. Поэтому для нахождения обратной матрицы можно использовать и другие алгоритмы, например, алгоритмы преобразования матрицы А в единичную матрицу.

Рассмотрим действие данного алгоритма на примере.

<u>ПРИМЕР.</u> Найти обратную матрицу для матрицы А=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Для этого рассмотрим расширенную матрицу (А|Е)=$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Преобразовывая левую матрицу (матрицу А) в единичную матрицу, при этом работая только со строками расширенной матрицы, по окончании мы получим в левой части расширенной матрицы Е, а в правой – А$^{-1}$. Преобразования очень напоминают метод Гаусса сведения матрицы к треугольному виду, т.е. сначала обнуляем все элементы первого столбца, лежащие ниже элемента a_{11}, затем обнуляем все элементы второго столбца лежащие ниже a_{22}, и т.д. до получения треугольной матрицы.

Итак, начинаем сводить (преобразовывать) левую матрицу (матрицу А) расширенной матрицы (А|Е) к Е. Последовательно получаем: ко 2-ой строке прибавляем –А$_1$; к 3-ей строке прибавляем (–А$_1$), к 4-ой также (-А$_1$):

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Переставляем 4-ую и вторую строки и получаем, что расширенная матрица принимает вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Сейчас к 3-ей строке прибавляем (-$A_2^{'}$). Получаем, что расширенная матрица принимает вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Сейчас к четвертой строке прибавляем третью и получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Сейчас к третьей строке прибавляем $(-\frac{A_4}{2})$, а к первой – $(-\frac{A_4}{4})$. Получаем, что расширенная матрица приобретает вид:

Сейчас к 1-ой и 3-ой строке прибавляем четвертую и получаем, что расширенная матрица принимает вид

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Прибавляем ко 2-ой строке третью, и к первой – (-$\frac{A_3^{'}}{2}$). Получаем

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Ну и наконец, прибавляем к первой строке $\frac{A_2'}{2}$. Получаем, что расширенная матрица приобретает вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Делим вторую строку на (-2), третью на 2, и четвертую на (-4), в итоге получаем, что обратная к A матрица будет иметь вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что мы не учитываем то, во время процедуры нахождения обратной матрицы переставляли строки матрицы местами (2-ую и 4-ую), так как мы в это же время переставляли и строки единичной матрицы! Поэтому по окончании алгоритма сразу получается обратная для A матрица.

§ 3.11. РАНГИ МАТРИЦ И СПОСОБЫ ИХ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Когда мы рассматриваем произвольную матрицу из m строк и n столбцов, то понятие определителя для нее, вообще говоря, не определено, однако вместо определителя рассматривается минор матрицы k-ого порядка. Поговорим об этом понятии более подробно.

ОПР. Пусть A из $M_{n,m}(K)$, где K – числовое поле. Тогда **минором k-го порядка** называется определитель k-ого порядка, элементами которого являются элементы матрицы A, стоящие на пересечении каких-то k строк и k столбцов. (Будем обозначать его через Δ_k).

Еще раз напомню, что столбцы (или строки) всех матриц одинаковых размеров $m\times n$ образуют векторные пространство над K и их можно трактовать, как множество векторов из K^m или K^n соответственно.

Понятно, что если не все элементы матрицы равны нулю, то всегда можно указать такое r, что у матрицы имеется ненулевой минор r-го порядка, а всякий минор (r+1)-го порядка равен нулю.

ОПР. Число r, обладающее таким свойством, называется **рангом матрицы A** и обозначается **rang A**.

Если все элементы матрицы равны нулю, тогда полагают, что rangA=0.

ПРИМЕРЫ. а) Найти rangA=rang $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Понятно, что rangA=1, так как только один элемент матрицы отличен от нуля (есть определитель 1-го порядка $|1|$, который не равен 0), а определителя 2-го порядка, отличного от 0, не будет.

б) Найти rangA=rang$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Понятно, что rangA$\geq$1,так как есть, по крайней мере, один элемент, отличный от нуля. Если рассмотреть 1-е и 2-е строки и 1-й и 3-й столбец, то получаем, что есть определитель 2-го порядка, отличный от нуля. Следовательно, rangA$\geq$2. Также понятно, что detA=$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$=0, так как есть столбец, состоящий из одних нулей. Значит, rangA=2.

ОПР. Если rangA=r, тогда найдется отличный от нуля определитель r-го порядка, который называется **базисным минором** матрицы A. Строки и столбцы, из которых построен базисный минор, называются **базисными строками и столбцами.**

ОПР. Пусть выделено k строк -$A_1,A_2,\dots,A_k$ и существует такой набор ($\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_k$), что одна из строк матрицы A, пусть i-ая строка, может быть представлена в виде $A_i = \lambda_1 A_1 +\dots+ \lambda_k A_k$. В таком случае говорят, что **i-ая строка может быть линейно выражена через строки $A_1,A_2,\dots,A_k$,** или **A_i есть линейная комбинация строк $A_1,A_2,..,A_k$**.

Оказывается, для базисных строк (и столбцов) справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.11.1 Базисные строки матрицы А из $M_{n,m}(K)$, где К – числовое поле, линейно-независимы. Это же утверждение верно и для базисных столбцов матрицы А.

<u>*Доказательство.*</u> Если rangA=r и пусть первые r строк являются базисными. Допустим, что базисные строки линейно-зависимы. Тогда какая-то k-я из этих r строк линейно выражается через остальные (r-1)-у строки:

$$A_k = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_{k-1} A_{k-1} + \lambda_{k+1} A_{k+1} + ... + \lambda_r A_r \qquad (1)$$

Рассмотрим сейчас базисный минор. Мы можем вычесть из A_k (k-ой строки) линейную комбинацию (1)

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_{k-1} A_{k-1} + \lambda_{k+1} A_{k+1} + ... + \lambda_r A_r,$$

тогда и получим, что A_k' (k-ай строка) станет нулевой. Но тогда – базисный минор Δ_r, будет равен нулю. Противоречие.

Следовательно, базисные строки (и столбцы) линейно-независимы.

Однако, основным результатом зависимости строк (и столбцов) произвольной матрицы является следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.11.2. Любая строка матрицы А из $M_{n,m}(K)$, где К – числовое поле, есть линейная комбинация ее базисных строк. Аналогично и для столбцов.

<u>*Доказательство*</u>. Допустим, что базисный минор r-ого порядка, где r=rangA, расположен в левом верхнем углу (это не уменьшает общности рассуждения, так как в противном случае можно произвести перенумерацию строк: нас не интересует порядок строк в матрице).

Если $k \le r$, тогда понятно, что k строка есть линейная комбинация себя, так как входит в набор базисных строк.

Допустим, что k>r. Рассмотрим следующий минор: присоединяем произвольный t-й столбец и k-ю строку (k>r)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rt} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{kt} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Получаем минор (r+1)-го порядка (1), который в силу того, что rang A=r, равен 0.

Разложим этот определитель (1) по элементам t-го (последнего) столбца, получаем, что

$$a_{1t}A_{1t} + a_{2t}A_{2t} + ... + a_{rt}A_{rt} + a_{kt}A_{kt} = 0$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе (1). Так как A_{kt} – совпадает с базисным минором А — Δ_r, то он не равен 0. Отсюда

$$a_{kt} = -\frac{A_{1t}}{A_{kt}} a_{1t} - \frac{A_{2t}}{A_{kt}} a_{2t} - ... - \frac{A_{rt}}{A_{kt}} a_{rt} \qquad (2)$$

или $a_{kt} = \lambda_1 a_{1t} + \lambda_2 a_{2t} + ... + \lambda_r a_{rt}$, где $\lambda_i = -\frac{A_{it}}{A_{kt}} = \frac{A_{it}}{\Delta_r}$ (i=1,2..,r),

так как λ_i не зависят от элементов последнего столбца.

Придавая t значения от 1 до n (т.е. мы приставляем все столбцы по очереди, при этом $A_{it} \neq 0$ (Δ_i), i=1,2, ,r не изменяются, так как они получаются из элементов первых r столбцов и r+1 строк (r- базисных и k-ая строка, которая также не изменяется) определителя (1)), получаем, что

$a_{k1} = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + ... + \lambda_r a_{r1}$, где $\lambda_i = -A_{it}/\Delta_b$ $(i=1,2..,r)$

$a_{k2} = \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + ... + \lambda_r a_{r2}$, где $\lambda_i = -A_{it}/\Delta_b$ $(i=1,2..,r)$.

……………

$a_{kn} = \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + ... + \lambda_r a_{rn}$, где $\lambda_i = -A_{it}/\Delta_b$ $(i=1,2..,r)$.

Из этих формул видим, что k-ая строка A_k будет представима в виде линейной комбинации первых r строк A_i (i=1,2,..,r) базисного определителя:

$$A_k = (a_{k1} a_{k2} .... a_{kn}) = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + .. + \lambda_r A_r.$$

Заметим, что аналогичное утверждение справедливо и для произвольного столбца матрицы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теорем 3.11.1 и 3.11.2 следует, что базисные строки (или столбцы) образуют базис линейной оболочки, образованной всеми строками (или столбцами) данной матрицы. По теореме 3.11.1 базисные строки (или столбцы) являются линейно-независимыми, а по теореме 3.11.2 – они являются системой образующих множества строк матрицы. Также нужно отметить, что в общем случае выбор множества базисных строк и столбцов неоднозначен, но при любом таком выборе их число всегда одно и то же. Это все следствие теоремы 3.3.4.

ПРИМЕР. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$. Найти ее ранг и показать, что все остальные строки являются линейной комбинацией базисных строк.

Решение. Несложно найти, что ранг матрицы A равен 2. Покажем, что третья строка есть линейная комбинация первых двух, т.е. $A_3 = x_1 A_1 + x_2 A_2$. Отсюда, можно решить соответствующую систему уравнений, и получить, что $x_1 = x_2 = 3$.

Введем следующее определение для некоторого вида преобразований матриц из $M_{n,m}(K)$, где K – числовое поле.

ОПР. Элементарными преобразованиями матриц являются:

а) вычеркивание или добавление строки, состоящей из нолей;

б) перестановку двух столбцов или строк.

в) умножение строки или столбца на какое-то ненулевое число.

г) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на любое число, или вычёркивание строки (или столбца), являющихся линейной комбинацией других строк (или соответственно столбцов) матрицы.

Заметим, основываясь на свойствах определителей что, если в квадратной матрице есть нулевая строка (или столбец), то определитель этой матрицы равен 0; что от перестановки столбцов или строк определитель меняет только знак; что если мы имеем какой-то общий для данной строки ненулевой множитель, то он может быть вынесен за знак определителя.

Основываясь на теоремах 3.11.1 и 3.11.2, и на свойствах определителей, докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.11.3. При элементарных преобразованиях матрицы A из $M_{n,m}(K)$, где K – числовое поле, ранг матрицы не изменится.

<u>*Доказательство*</u>. Последовательно рассмотрим элементарные преобразования матрицы

A, и покажем, что любое такое преобразование не изменит rang A.

а-б) Понятно, что вычёркивание или добавление строк из одних нулей не повлияет на rangA, точно также, как и перестановка столбцов или строк матрицы A. Это легко следует из свойств определителей матриц.

в) Это свойство также следует из свойств определителей матриц, так как общий ненулевой множителей можно вынести за знак определителя матрицы.

г) Пусть rangA=r, и первые r строк являются базисными. Они по теореме 3.11.1 являются линейно-независимыми, и, по теореме 3.11.2, все другие строки являются линейными комбинациями этих базисных строк. Поэтому, если приписывается какая-то строка, которая является линейной комбинацией каких-либо строк матрицы, то эта строка будет линейной комбинацией базисных строк, и от такого приписывания ранг матрицы не изменится.

Покажем, что ранг матрицы A не изменится, если вычеркнуть из нее строку, являющуюся линейной комбинацией остальных строк матрицы.

Пусть rangA=r, и первые r строк являются базисными. Они по теореме 3.11.1 являются линейно-независимыми, и, по теореме 3.11.2, все другие строки являются линейными комбинациями этих базисных строк. Поэтому если вычеркивается какая-то строка, которая не является базисной, то от ее вычеркивания (или приписывания см. лемму 3.11.3) ранг матрицы не изменится.

Из Теоремы 3.11.3 можно получить еще один достаточно важный результат.

ТЕОРЕМА 3.11.4. Определитель матрицы $A \in M_n(K)$, где K – числовое поле, равен нулю, тогда и только тогда, когда ее строки линейно зависимы.

Доказательство. $\Leftarrow$. Если строки матрицы A линейно зависимы (т.е. по свойствам линейной зависимости, какая-то строка будет линейной комбинацией других строк), то по теореме 3.11.3 ранг матрицы не изменится, после вычеркивания этой строки. Следовательно ее ранг будет не больше n-1, т.е. $\mathrm{rang}A \leq n-1$. Таким образом, тогда detA=0.

$\Rightarrow$ Допустим противное, т.е. detA=0 и строки линейно независимы. Если все n строк линейно-независимы, тогда они образуют базисный минор (т.е. базис линейной оболочки, образованной строками матрицы A). Базисный минор по определению не равен нулю. Противоречие.

Следовательно, если detA=0, то система строк является линейно-зависимой системой.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что строки в теореме 3.11.4 можно заменить столбцами.

§ 3.12. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Заметим, что в современное время использование систем линейных уравнений и неравенств очень широко: оно используется при решении многих прикладных задач, и является основным инструментом в линейном программировании.

Сначала дадим основные определения, связанные с системами линейных уравнений.

ОПР. **Система линейных уравнений** от n переменных (неизвестных) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

где $\mathbf{x_1, x_2, .., x_n}$ – **неизвестные (или переменные**), числа $\{\mathbf{a_{i,j}}\}$, i=1,..,m, j=1,..,n, $\mathbf{a_{i,j}} \in K$ – называются **коэффициентами системы линейных уравнений**, числа $\mathbf{b_i}$, i=1,2,..,m, $\mathbf{b_i} \in K$, **свободные члены системы уравнений**.

Заметим, что первый индекс коэффициента a_{ij} соответствует уравнению, в которое он входит, а второй – номеру неизвестной, к которой приставлен a_{ij}.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что коэффициенты a_{ij} и свободные члены системы линейных уравнений обычно берутся из того же числового множества, где находятся решения данной системы, причем обычно подразумевается, что на этом множестве есть две операции: сложение и умножение, что позволяет преобразовывать уравнения. Поэтому, будем считать в дальнейшем, что все $a_{i,j}$ и все b_i – являются элементами какого-нибудь кольца или поля K.

Помимо записи системы линейных уравнений в виде (1), возможна и другая запись, которая использует понятие матрицы. Для этого введем еще несколько новых понятий, связанных с системой линейных уравнений.

ОПР. Множество коэффициентов $(a_{i,j})$, i=1,...m; j=1,..,n системы линейных уравнений (1) образуют **матрицу системы линейных уравнений**

$$A = (a_{i,j}), \text{ размерами } m\times n, \text{ т.е. } A \in M_{m,n}(K),$$

а множество свободных членов $b_1, b_2, \ldots, b_m$ образует **столбец свободных членов**, т.е. матрицу-столбец $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$.

ОПР. Определитель матрицы системы линейных уравнений, составленной из коэффициентов этой системы, называется **определителем системы линейных уравнений AX=b.**

ОПР. Множество коэффициентов и столбец свободных членов составляет **расширенную матрицу системы линейных уравнений**…

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & .. & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{nn} & b_m \end{array}\right),$$

которая обозначается таким образом (A|b).

Таким образом, как несложно заметить, система линейных уравнений (1) может быть переписана в матричном виде следующим образом:

$$AX = b \qquad (2),$$

где $A = (a_{ij})$, $i=1,..,n$; $j=1,2,..,m$ – матрица системы; $X=(x_1,x_2,x_3,..,x_m)$ – столбец неизвестных или переменных; $b=(b_1, b_2,.... b_n)^t$ —столбец свободных членов.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>: мы видим, что умножение таких матриц вполне возможно: число столбцов первой матрицы A (mxn: m строк (уравнений) n столбцов (неизвестных)) равно числу строк матрицы X (nx1: n строк и 1 столбец), и получается в результате умножения матрица (mx1: m строк, 1 столбец).

Сразу же встает вопрос о разрешимости системы линейных уравнений. Для этого введем определения еще нескольких новых понятий, которые связаны с решением системы линейных уравнений.

ОПР. Решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

называется всякая упорядоченная совокупность (или набор) чисел $\alpha_1, \alpha_2 ,..., \alpha_n$, которая будучи поставленной на место соответствующих неизвестных (α_1 вместо x_1, α_2 вместо x_2, и т.д..., α_n вместо x_n) обращает в равенство все уравнения системы (1).

Если данная система (1) записана в матричной форме, т.е.

$$AX=b, \qquad (2)$$

где $A = (a_{i,j})$, $i=1,..,n$; $j=1,2,..,m$ – матрица системы (1); $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$ – матрица-столбец неизвестных или переменных; $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$ – матрица-столбец свободных членов, тогда решением системы линейных уравнений будет вектор $X \in M_{n,1}$, который обращает в равенство матричное уравнение (2).

<u>ЗАМЕЧАНИЕ.</u> Следовательно, решение линейной системы уравнений может быть записано в двух формах: в числовой, т.е. набор чисел, который удовлетворяет системе (1); а также – в матричной форме, т.е. решение системы линейных уравнений – это некий вектор X. Причем по ходу лекций мы будем использовать оба способа записи, причем полагаем, что это равносильная форма записи.

ОПР. Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и называется несовместной, если она не имеет решений. Две системы уравнений называются **равносильными**, если они имеют одно и то же множество решений.

ПРИМЕР: а) Разрешима ли система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

Решение. Данная система разрешима, так как набор чисел $(x_1,x_2,x_3)=(0,1,0)$ является ее решением.

б) Разрешима ли система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$?

Решение. Система $x_1+x_2+x_3 = 1$ и $x_1+x_2+x_3 = 2$ является несовместной, так как у нее нет решений.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что если мы будем производить с системой линейных уравнений такие преобразования: а) прибавлять к какому-нибудь уравнению несколько других, умноженных на некоторые ненулевые константы; б) умножать любое уравнение на ненулевую константу; в) переставлять уравнения или производить перенумерацию переменных; г) вычеркивать или приписывать уравнение, которое совпадает с каким- либо другим или является нулевым, т.е. все коэффициенты являются нулевыми; одним словом, если все это производятся с матрицей, то такие преобразования называются элементарными, то разрешимость системы сохранится. Максимум, что может быть, это то, что, если система разрешима, то в решении сменится нумерация чисел в наборе.

ОПР. Если в системе линейных уравнений столбец свободных членов равен 0-ому столбцу (т.е. все равны 0), то такую систему называют **однородной системой линейных уравнений**.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения систем линейных уравнений используется много способов. Мы будем рассматривать только несколько из них. Начнем с одного, наиболее известного: метода Крамера.

МЕТОД КРАМЕРА

Это частный случай системы линейных уравнений, он может работать только тогда, когда число неизвестных совпадает с числом уравнений, и определитель системы линейных уравнений, т.е. detA, отличен от нуля. В этом случае справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.12.1 (Формулы Крамера) Пусть задана система из n линейных уравнений относительно n неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

где $A \in M_n(K)$ матрица этой системы уравнений (1), причем $\Delta=\det A \neq 0$. Тогда для вычисления неизвестных x_i можно использовать следующие формулы:

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}, \text{ где } \Delta_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>*Доказательство*</u>. Если $\Delta \neq 0$, тогда умножив каждое уравнение системы на алгебраические дополнения элементов i-ого столбца, т.е. первое уравнение умножим на на $A_{1,i}$, второе – $A_{2,i}$,...,n-ое – на $A_{n,i}$, сложим все полученные уравнения. После этого сгруппи-руем все элементы с $x_1, x_2, .., x_n$. Получим

$$(a_{11}A_{1i} + a_{21}A_{2i} + ... + a_{n1}A_{ni})x_1 + (a_{12}A_{1i} + ... + a_{n2}A_{ni})x_2 + \ldots$$
$$\ldots + (a_{1n}A_{1i} + a_{2n}A_{2i} + ... + a_{nn}A_{ni})x_n = b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + ... + b_nA_{ni}$$

Заметим, что коэффициент при x_i равен Δ, при всех остальных x_j ($i \neq j$) коэффициенты равны нулю (по теореме 3.9.3). Правую часть равенства можно записать в виде определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Обозначим его через Δ_{x_i} , он отличается от Δ, тем, что здесь один из столбцов (i-ый), заменен столбцом свободных членов данной системы линейных уравнений.

Отсюда и получаем формулы для всех x_i.

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta};\ldots\ldots;\ x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

Этот метод решения системы уравнений, основанный на использовании формул и подсчете определителей, называется методом Крамера, а формулы – формулами Крамера для нахождения значений x_i.

ПРИМЕР. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases}$$

используя метод Крамера.

Решение. Вычисляем определитель системы линейных уравнений и находим, что Δ =58. Затем находим определители Δ_{x_i} ,i=1,2,3,4. Δ_{x_1} =58; Δ_{x_2} =58; Δ_{x_3} =-58; Δ_{x_1} =58. Отсюда по формулам Крамера (см. теорему 3.12.1) находим решения: x_1=1, x_2=1, x_3=-1, x_4=1.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ.</u> Если Δ=detA=0, то такой случай не может быть рассмотрен с помощью правила Крамера. Однако, после небольших дополнений этот метод также может быть использован. Мы это рассмотрим чуть далее.

Сегодня мы поговорим о других способах решения систем линейных уравнений, а именно поговорим о методе решения однородной системы линейных уравнений, а затем рассмотрим и общий метод решения систем линейных уравнений.

МЕТОД ГАУССА

Рассмотрим универсальный способ решения систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1),$$

или, эту же систему, записанную в матричном виде

$$AX = b \qquad (2),$$

где A = ($a_{i,j}$), i=1,..,n; j=1,2,..,m – матрица системы; X=($x_1,x_2,x_3,..,x_m$) – столбец неизвестных или переменных; b=(b_1, b_2,.... b_n)^t – столбец свободных членов, – это все тот же метод Гаусса, т.е. метод преобразования расширенной матрицы системы линейных уравнений и приведения расширенной матрицы этой системы к трапецевидному виду, что после дополнительных (небольших) вычислений позволяет найти общее решение системы линейных уравнений.

Заметим, что все данные преобразования, которые производятся с матрицами при использовании метода Гаусса, не изменяют равносильности данной системы линейных уравнений (см. замечание о методах преобразования системы и разрешимости, выше), а также не изменяют и ранга матрицы.

После приведения расширенной матрицы (A|b) этой системы к «трапецевидной» форме, мы получим, что наша система сведется к равносильной и примет следующий вид:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ 0 \quad + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ 0 + 0 \ + \ldots + c_{kk}x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases}$$

Если в результате преобразований получились уравнения вида

$$0x_1 + \ldots.. + 0x_n = 0,$$

то мы их исключаем из рассмотрения, так как их решениями являются любой набор из n чисел, поэтому это уравнение не накладывает на решение никаких ограничений.

Если в ходе преобразований получилось уравнение вида

$$0x_1 + \ldots.. + 0x_n = b_i \quad \text{и} \quad b_i \neq 0, \qquad (3)$$

то понятно, что данная СЛУ не имеет решений.

Пусть уравнений вида (3) в результате преобразований СЛУ не встретилось, тогда все приводится к системе уравнений вида

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ 0 \quad + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ 0 + 0 \ + \ldots + c_{kk}x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases}$$

или, если записано в матричном виде, то эта СЛУ имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} c_{1,1} & c_{1,2} & .. & .. & .. & .. & c_{1,n} & d_1 \\ 0 & c_{2,2} & c_{2,3} & .. & .. & .. & c_{2,n} & d_2 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & c_{k,k} & c_{k,k+1} & .. & .. & c_{k,n} & d_k \end{array}\right)$$

Сейчас дополняем полученную систему уравнений до системы, с треугольной матрицей:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 & (1 \quad \textit{уравн.}) \\ 0 \quad + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 & (2 \quad \textit{уравн.}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ & \\ 0 + 0 \; + \ldots + c_{kk}x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_k & (k \quad \textit{уравн.}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_{k+1} \ldots\ldots\ldots = t_1 & (k+1 \quad \textit{уравн.}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n \quad = t_{n-k} & (n \quad \textit{уравн.}) \end{cases}$$

или, если мы имеем дело с расширенной матрицей СЛУ, то получаем матрицу

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} c_{1,1} & c_{2,1} & .. & .. & .. & .. & c_{1,n} & d_1 \\ 0 & c_{2,2} & .. & .. & .. & .. & c_{2,n} & d_2 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & c_{k,k} & c_{k,k+1} & .. & c_{k,n} & d_k \\ 0 & .. & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t_1 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & .. & .. & .. & 0 & 1 & t_{n-k} \end{array}\right)$$

Таким образом, если ранг расширенной матрицы (A|b) системы линейных уравнений равен k, то было введено ровно (n-k) переменных (т.е. придаем переменным $x_{k+1},x_{k+2},..,x_n$ произвольные значения t_i, i=1,2,..,n-k), через которые и будем выражать все решения данной системы линейных уравнений.

Из уравнения (k) получаем, что x_k можно выразить через d_k и t_i, i=1,2,..,n-k.

Подставив в уравнение (k-1) получаем, что x_{k-1} можно выразить через x_k, d_{k-1}, d_k и t_i, i=1,2,..,n-k, и т. д..

Таким образом, находим все x_i, т.е. нужное нам решение. Причем, так как мы ввели n-k независимых переменных t_i,i=1,2,…,n-k, тогда и общее решение можно выразить через n-k векторов.

Рассмотрим использование данного метода на конкретном примере.

ПРИМЕР: Решить систему линейных уравнений, используя метод Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица данной системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 10 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 1 & 10 \end{array}\right).$$

Начнем преобразования данной матрицы до «трапецевидного» вида. Для этого сначала из второй строки вычитаем первую, умноженную на 2, а из третьей – первую, умноженную на 3. В результате расширенная матрица системы примет вид: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 7 & -20 \\ 0 & 1 & 7 & -20 \end{array}\right)$. Понятно, что вторая и третья строки задают одно и то же уравнение, поэтому третью строку в расширенной матрице можно сократить. В итоге система свелась к такой системе

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10 \\ 0x_1 + x_2 + 7x_3 = -20 \end{cases}.$$

Дополняем эту систему до треугольной, вводя одну переменную:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10 & (1\ \text{уравнение}) \\ 0x_1 + x_2 + 7x_3 = -20 & (2\ \text{уравнение}) \\ x_3 = t_1 & (3\ \text{уравнение}) \end{cases}.$$

Из 2-го уравнения системы получаем, что $x_2+7x_3=-20$, следовательно, $x_2=-20-7x_3=-20-7t_1$. Из 1-го уравнения получаем, что $x_1=10-3x_2+2x_3=10-(-20-7t_1)+t_1=30+8t_1$. Отсюда получаем общее решение, которое если записать в виде набора чисел, будет иметь вид: $(x_1,x_2,x_3)=(30+8t_1,\ -20-7t_1,t_1)$. Если же решение записать в виде вектора X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, тогда X=$\begin{pmatrix} 30+8t_1 \\ -20-7t_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$, где t_1 – произвольное вещественное число.

РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Еще раз напомним определение однородной системы линейных уравнений

ОПР. Система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

или в матричной форме это можно записать так,

$$AX=\bar{0} \qquad (2)$$

где A матрица из m строк и n столбцов, а столбец свободных членов является нулевым столбцом, **называется однородной системой линейных уравнений или просто однородной системой уравнений**.

Про множество решений однородной системы линейных уравнений справедлива лемма.

ЛЕММА 3.12.2 Множество решений однородной системы линейных уравнений $AX=\bar{0}$, где A из $M_{m,n}(K)$, столбец переменных X из $M_{n,1}(K)$, а столбец свободных членов - $\bar{0}$ из $M_{n,1}(K)$, образует векторное пространство над полем K.

Доказательство следует из двух почти очевидных утверждений о том, что если X_o, Y_o решения, то и X_o+Y_o и tX_o также решения данной системы линейных уравнений, для любого скаляра t из K.

Также нужно заметить, что нулевое решение, т.е. все переменные равны нулю, также является решением однородной системы линейных уравнений.

ОПР. Произвольный базис решений однородной системы уравнений называется **фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений или просто фундаментальной системой решений**.

Однородная система линейных уравнений из n уравнений с n неизвестными (1) или (2), являются частным случаем систем линейных уравнений. Рассмотрим вопрос о ее разрешимости.

Во-первых, заметим, что однородная система линейных уравнений всегда разрешима, так как она имеет нулевое решение.

Во-вторых, заметим также, что если $\det A \neq 0$, тогда, согласно формулам Крамера, решение будет единственное и нулевое (во всех Δ_{x_i} есть нулевой столбец, значит все x_i будут равны нулю).

Если же $\det A=0$, то в этом случае про однородную систему можно сказать однозначно, что решений бесконечно много. Запишем все вышесказанное в виде теоремы и докажем ее.

ТЕОРЕМА 3.12.3. (О числе решений однородной системы) Однородная система $AX=\bar{0}$, где A из $M_n(K)$, столбец переменных X из $M_{n,1}(K)$, а столбец свободных членов, нулевой столбец ($\bar{0}$) из $M_{n,1}(K)$, всегда совместна. Причем если $\det A\neq 0$, то тогда система имеет одно нулевое решение. Если $\det A=0$, т.е. $\operatorname{rang}A<n$, то в этом случае система имеет бесконечно много решений.

Доказательство. Как несложно заметить (уже отмечено выше), однородная система всегда совместна, так как при любых (a_{ij}) система таких уравнений имеет нулевое решение.

Если же $\Delta=0$, тогда по теореме 3.11.4 это означает, что столбцы матрицы линейно зависимы, и $\operatorname{rang}A<n$. Пусть $\operatorname{rang}A = r<n$. Тогда все n столбцов являются линейно-зависимой системой векторов. Следовательно, по определению найдется набор $(x_1,x_2,..,x_n)$ из K, не все $x_i\neq 0$, $i=1,2,..,n$:

$$x_1A^1+ x_2A^2 +.. + x_nA^k = \bar{0}\ .$$

Следовательно, этот набор $(x_1,x_2,..,x_n)$ будет решением данной системы уравнений. Понятно, что любой вектор, вида $\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\lambda\in K$ также являются решениями $AX=\bar{0}$. Итак, мы показали, что однородная система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений, что и требовалось.

Рассмотрим произвольную систему из m линейных однородных уравнений от n неизвестных систему (1). Тогда для множества ее решений, которое (как было показано выше) является векторным пространством справедливо обобщающее предыдущие результаты утверждение.

ТЕОРЕМА 3.12.4 (О размерности пространства решений) Пусть дана произвольная система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

и $A=(a_{ij})$, $i=1,\ldots,m;j=1,..,n$ матрица системы линейных уравнений (1). Если ранг матрицы A меньше числа переменных n, то данная система обладает фундаментальной системой решений, которая состоит из (n-r) векторов (решений), т.е. размерность пространства решений этой системы равна n-r. Если же $\operatorname{rang}A=n$, то у этой системы есть только одно решение – нулевое и фундаментальной системы решений у данной системы нет.

Доказательство. Если $r=0$, тогда все коэффициенты матрицы, а, следовательно, и системы уравнений, равны 0. Поэтому мы можем ввести ровно n переменных, так как от них ничего не зависит (ибо каждой набор является решением однородной системы линейных уравнений, у которой все коэффициенты равны 0, поэтому число линейно независимых решений можно выбрать ровно n штук: $x_1=t_1$, $x_2=t_2$,..,$x_n=t_n$.

Пусть $0<r(A)<n$. Тогда, можно полагать, что базисный определитель матрицы системы образуют первые r ($r>0$) строк и столбцов.

Так как все остальные m-r строк являются линейными комбинациями первых r строк, тогда их всех можно привести к нулевым строкам (вычтя соответствующую линейную комбинацию базисных строк), и поэтому система (1) будет равносильна системе из r уравнений (2)

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 + \ldots + b_{rn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Где матрица $B=(b_{ij})$, $i=1,2,..,r$; $j=1,2,\ldots,n$ – получена из матрицы A элементарными преобразованиями, которые не изменяют ранга матрицы.

Используя метод Гаусса, можно привести расширенную матрицу $(B|\bar{0})$ системы (2) к «трапецевидному» виду:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = 0 \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + c_{rr}x_r + \ldots + c_{rn}x_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Причем, нужно отметить, что $c_{11}c_{22}\ldots c_{rr} \neq 0$, так как у системы (2) rangB=r.

Будем в системе (3) придавать переменным $x_{r+1}, x_{r+2},\ldots,x_n$ независимо друг от друга значение t_i, $i=1,2,..,n-r$.

Тогда первые r переменных, по теореме Крамера, можно выразить единственным образом, из r уравнений системы (3).Набор из n-r решений системы (3) вида $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_r \\ 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;$X_2=\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_r \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$; ......$X_{n-r}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_r \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ линейно независимы. А любое решение системы (3) (и соответственно систем (2) и (1)) может быть представлено в виде линейной комбинации этих решений, ибо для любого решения задаются однозначно переменные $x_{r+1}, x_{r+2},\ldots,x_n$, а остальные (первые) r переменных определяются однозначно по выбранным. Поэтому эти n-r векторов (решений) образуют базис системы решений однородной системы уравнений (1), т.е. фундаментальную систему решений.

ПРИМЕРЫ. а) Найти размерность пространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Рассматриваются вещественные решения системы линейных уравнений.

Решение. Найдем ранг матрицы A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Понятно, что он равен 2. Число переменных равно 5. Из теоремы 3.12.4 размерность пространства решений равна

$$3 = 5 – 2(n - rangA).$$

б) Найти фундаментальную систему решений следующей однородной системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$. Рассматриваются вещественные решения системы линейных уравнений.

Решение. По теореме 3.12.4 мы можем найти, сколько векторов должно войти в фундаментальную систему решений: это количество равно 4-2=2 (n-rangA).

Можно найти подбором два линейно-независимых решения данной системы линейных уравнений, но мы будем решать эту задачу последовательно.

Итак, используя метод Гаусса, мы приведем расширенную матрицу данной системы к следующему «трапецевидному» виду:

A=$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Дополняем эту матрицу до треугольной, вводя две переменные t_1 и t_2. Получаем, что расширенная матрица приобретает вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_2 \end{array}\right)$$

Рассматривая вторую строку (второе уравнение системы), получаем, что $-3x_2=3t_1$. Следовательно, $x_2=-t_1$. Рассматриваем первую строку (первое уравнение), получаем, что $x_1=-x_2-x_3-x_4=-t_2$. Отсюда получаем, что общее решение системы можно записать в таком виде: X=$\begin{pmatrix} -t_2 \\ -t_1 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$=$t_1\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$+$t_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, где t_1,t_2 – принимают произвольные вещественные значения.

Как мы уже доказывали, что произвольный базис векторного пространства состоит из одинакового количества векторов, поэтому количество векторов в фундаментальной системе решений однородной системы линейных уравнений всегда одно и то же.

Возникает вопрос: можно ли определить, когда система линейных уравнений разрешима?

Для ответа на этот вопрос прежде всего формализуем условие. Так вот вопрос идет о разрешимости системы уравнений AX=b, где $A \in M_{m,n}(K)$ – матрица произвольных пара-метров m строк и n столбцов, а b столбец из m строк. Решение рассматриваются только те, которые лежат в поле K (то есть все координаты вектора X-решения лежат в поле K, если решение записывается в векторной форме).

Уже были рассмотрены конкретные приемы и методы решения таких систем, с использованием формул Крамера, когда $\det A \neq 0$ и с использованием метода Гаусса приведения расширенной матрицы системы к «трапецевидному» виду. Также были рассмотрены случаи решения однородной системы линейных уравнений, причем было найдено, что такие системы всегда разрешимы и можно вычислить размерность пространства решений таких систем. Причем эту размерность можно было выразить через ранг матрицы системы.

Так вот, в общем случае, критерий разрешимости системы уравнений также связан с рангами матриц системы линейных уравнений.

ТЕОРЕМА 3.12.5. (Кронекер-Капелли) Для того, чтобы неоднородная система линейных уравнений AX=b, $A\in M_{m,n}(K)$, $b\in M_{m,1}(K)$, $X\in M_{1,n}(K)$ (т.е. решения ищутся в поле K), была совместной (или разрешимой), необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы уравнений $(A\,|\,b)$ был равен рангу A - матрицы системы уравнений.

Доказательство. $\Rightarrow$ Если система имеет решение $c = (c_1,c_2,..,c_m)$, тогда столбец свободных членов есть линейная комбинация остальных столбцов:

$$b = c_1A^1 + c_2A^2 + ...+ c_mA^m,$$

где A^i – i-й столбец матрицы системы A. По лемме 3.11.3 добавление столбца, который является линейной комбинацией остальных, не изменит ранга матрицы. Отсюда и следует требуемое, т.е. rang(A|b)=rangA.

$\Leftarrow$ Если равны ранги, тогда столбец свободных членов есть линейная комбинация остальных столбцов, т.е. есть набор $(c_1,c_2,..c_n)$, $c_i\in K, i=1,2..,n$:

$$b = c_1A^1+c_2A^2+..+c_nA^n$$

А это и означает (если переписать данное равенство в виде системы уравнений по координатам), что данный набор $(c_1,c_2,..c_n)$, $c_i\in K, i=1,2..,n$ есть решение данной системы, т.е. система разрешима.

ПРИМЕРЫ. а) Разрешима ли данная система $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$?

Решение. Находим ранг матрицы системы. Так как $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}=23\neq 0$, то $\text{rang}A\geq 2$. Третья строка, как несложно заметить есть разность A_2 и A_1, следовательно, rangA=2. Однако, рассматривая ранг расширенной матрицы, мы находим, что определитель $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 7 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}= 92$. Отсюда rang(A|b)=3. Следовательно, данная система не разрешима.

б) Разрешима ли данная система $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 2 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 3 \end{array}\right)$?

Решение. Находим ранг A матрицы системы. Так как $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-4\neq 0$, то $\text{rang}A\geq 2$. Если из третьей строки вычесть вторую, а затем из второй - первую, то получится две одинаковые строки. Отсюда получаем, что rangA=2. Рассматривая ранг расширенной матрицы, мы также находим, что, вычитая из третьей строки вторую, а затем из второй – первую, мы получим, что и в расширенной матрице есть две одинаковые строки. Значит, rang (A|B)=2. То согласно критерию Кронекера-Капелли, данная система разрешима.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что мы отвечаем на вопрос задачи: разрешима ли данная система, а не находим решение.

§ 3.13. ОТОБРАЖЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ И НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

В дельнейшем курсе изучения линейной алгебры мы будем рассматривать свойства так называемых линейных отображений на векторных пространствах. Но для этого мы сначала должны ввести понятие отображения между множествами вообще, а затем будем рассматривать, какие отображения есть на алгебраических структурах. Итак, сначала введём основные понятия и рассмотрим некоторые основные результаты про отображения между множествами.

ОПР. Отображение (или функция) f множества X в Y это соответствие, которое каждому элементу (**аргументу) x** (из X) ставит в соответствие элемент f(x) (**образ элемента x**) (из Y), он может обозначаться $\mathbf{f_x}$ или **f(x)** или **fx**. (Сама запись того, что есть отображение между множествами X и Y, может быть записана таким образом: f: $X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$). X – называется **областью определения отображения f**, Y – **областью значений отображения f.**

Если X=Y, то говорят об **отображении в себя**.

ОПР. **Образом отображения f:X$\to$Y** называется множество образов элементов из X, т.е. множество {y из Y: найдется x из X: f(x)=y} обозначается **Imf**.

ОПР. **Прообразом элемента y из Y** называется множество {x из X: f(x)=y}. Прообраз элемента y обозначается через $\mathbf{f^{-1}(y)}$.

ОПР. **Прообразом подмножества A из Y** называется множество прообразов элементов, которые отображаются в A. (обозначается $\mathbf{f^{-1}(A)}$)

ОПР. Равенство двух отображений f и g означает, что равны их области определения и для любых x из X выполняется равенство f(x)=g(x). (Будем обозначать равенство отображений таким образом $\mathbf{f \equiv g}$).

Понятно, что различных видов отображений между множествами очень много, но мы будем рассматривать только небольшой класс среди них, а именно такие, с которыми мы столкнемся в дальнейшем курсе изучения.

ОПР. Сюръективное отображение f: $X \to Y$ (или просто сюръекция) его еще называют отображением «на»: это такое отображение f, что для любого y из Y, найдется x из X: f(x)=y.

ОПР. **Инъективное отображение** f:$X \to Y$ (в), (или просто инъекция) его еще называют отображением «в»: это такое отображение f, если $x1 \neq x2$, то и $f(x1) \neq f(x2)$.

ОПР. Биективное отображение f:$X \to Y$: если оно является инъекцией и сюръекцией. Оно также называется **взаимно однозначным соответствием**.

УПР. Доказать, что можно дать еще одно, равносильное данному, определение инъективного отображения.

ОПР. Инъективное отображение $f:X \to Y$, называется отображение, такое что из условия $f(x_1)=f(x_2)$ следует, что $x_1=x_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нужно обратить внимание, что возможно, вообще говоря, отображение от многих переменных, однако этот вид отображения почти не будет использоваться в дальнейшем.

Дадим определение некоторым частным видам отображений.

ОПР. **Тождественное (единичное) отображение**, это отображение $f\colon X \to X$, такое, что $f(x)=x$. Обозначается $\mathbf{id_X}$ или $\mathbf{e_X}$.

ОПР. Если X лежит в Y, то $id:X \to Y$ называется **вложением X в Y**.

ОПР. Если X лежит в Y, то **ограничением (сужением) отображения $g\colon Y \to Z$ на множество X** называется отображение $f:X \to Z$, такое, что $f(x)=g(x)$ для любого x из X.

ПРИМЕРЫ. а) $A=\{a,b,c\}$, $B=\{x,y\}$. Тогда $f:A \to B$ зададим явно: $a \to x$, $b \to y$, $c \to x$. Это сюръекция, но не инъекция. И инъекций здесь нельзя построить, так как не хватает элементов в области значений, т.е. в B.

б) $X=\{x,y,z\}$, $Y=N=\{1,2,3,4,...\}$ $f:X \to Y$: $x \to 1$, $y \to 2, z \to 3$. Это инъекция, но не сюръекция, и сюръекции здесь не построить, так как слишком много элементов в области значений по сравнению с областью определения.

Когда речь идет о бесконечных множествах, то отображения могут быть очень интересны по своим свойствам.

в) $f\colon Z \to Z$, $n \to n+1$ это инъективное и сюръективное отображение, поэтому это биекция.

г) f: $\{\frac{1}{n} \mid n=1,2,..\} \to \{\frac{1}{n} \mid n=1,2,..\}$задается таким образом $f\left(\frac{1}{n}\right) \to \left(\frac{1}{n+1}\right)$

Это инъекция, но не сюръекция.

д) $NxN \to N$ можно установить биекцию f следующим образом: f: $NxN \to N$ так, что $f(1,1) = 1$; $f(1,2) = 2$; $f(2,2) = 3$; $f(2,1) = 4$; $f(2,3) = 5$;……….. Если рассмотреть это отображение, то можно заметить, что это отображение связано с движением «по кругу» на координатной плоскости.

Оказывается, отображения можно строить и на самом множестве отображений.

ОПР. Пусть заданы отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$. Тогда отображение $fog\colon X \to Z$, задаваемое как $(fog)(x)=(g(f(x)))$ называется **композицией отображений f и g**.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно строить композиции и нескольких отображений. Если заданы отображения $f:X \to Y$, $g:Y \to Z$ и $h:Z \to W$, то можно определить композицию отображений fogoh, как отображение из X в W, действующее по правилу: $(hogof)(x) = h(g(f(x)))$ для любого x из X.

ОПР. Если отображение f задано на одном множестве, т.е. $f:X \to X$, тогда можно определить произвольную степень отображения f, а именно,

$$f^n(x)=f(f(...f(x)...)) \qquad \text{(n раз отображение f)},$$

то говорят, что это **n-я степень отображения f (обозначается через f^n)**.

ПРИМЕРЫ: а) f: Xx$Y \to a$xY и g:Xx$Y \to X$xb, тогда gof:Xx$Y \to (a,b)$

б) $f:R \to R$: $f(x) = x+1$, тогда $f(f(x)) = x+2$. Можно применять отображение f n раз, и тогда получим, что $f(f(...f(x)...) = f^n(x) = x+n$.

Для отображений выполняются некоторые свойства.

Итак, начинаем со свойства ассоциативности для композиции отображений.

ТЕОРЕМА 3.13.1 (**Закон ассоциативности для композиции отображений**). Пусть f: $X \to Y$, g: $Y \to C$ и h:$C \to D$. Тогда справедливо равенство (fog)oh = fo(goh)

УПР. Доказать справедливость теоремы 3.13.1.

Указание к доказательству. По определению композиции расписываем правую и левую части.

Если мы рассмотрим только специальные виды отображений, которые и будут в дальнейшем нас интересовать, то для них также выполняются некоторые специальные свойства, которые удобно записать в едином ключе.

ТЕОРЕМА 3.13.2 (Свойства инъективности и сюръективности) Пусть $f:X \to Y$ – отображение множеств.

Тогда а) f – инъективно $\Leftrightarrow$ не существует элемента в Y, который имеет более одного прообраза.

б) f – сюръективно $\Leftrightarrow$ если любой элемент в Y имеет прообраз.

в) f – биекция $\Leftrightarrow$ когда каждый элемент в Y имеет один прообраз.

Доказательство. Докажем первое утверждение т.е. п.а) $\Rightarrow$ По определению инъекции, если $f(x_1)=f(x_2)=y \in Y$, то это означает, что равны и аргументы, т.е. $x_1=x_2$. Значит, нет такого $y \in Y$, у которого два прообраза.

$\Leftarrow$ Если для любого $y \in Y$ существует не более одного прообраза, то в один элемент не смогут отобразиться более одного элемента. А это и означает, что f- инъекция (т.е. если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$).

б) Докажем второе утверждение. Оно целиком следует из определения сюръекции.

в) $\Rightarrow$ Так как f – сюръекция (по определению биекции), то по п. б) любой элемент имеет прообраз. Так как f – инъекция, то все элементы в Y имеют не более одного прообраза, т.е. можно сделать вывод о том, что каждый элемент из Y имеет ровно 1 прообраз.

$\Leftarrow$ Если каждый элемент в Y имеет ровно один прообраз, то по п. а). f – инъекция. А по п.б) f – сюрьекция. Следовательно, f – биекция.

ОПР. Пусть f: $X \to Y$. Тогда отображение g: $X \to Y$ называется **обратным к f**, если fog=i_X, а gof=i_Y. (Обозначается через $\mathbf{f^{-1}}$)

ОПР. Отображение f называется **обратимым**, если оно имеет обратное.

ПРИМЕРЫ: а) f: $Z \to Z$, $n \to n+1$ это инъективное и сюръективное отображение, поэтому это биекция; оно обладает и обратным g: $Z \to Z$ g(n)=n-1.

б) f: $\{\frac{1}{n} \mid n = 1,2,..\} \to \{\frac{1}{n} \mid n = 1,2,..\}$задается таким образом $f\left(\frac{1}{n}\right) \to \left(\frac{1}{n+1}\right)$. Как мы уже показали, это инъекция, но не суръекция. Однако, это отображение не обладает обратным g, так как есть если взять g: $\left(\frac{1}{n}\right) \to \left(\frac{1}{n-1}\right)$, то оно не определено для n=1, хотя для него и будет выполняться условие fog=id_X и gof=id_X, где X=$\{\frac{1}{n} \mid n = 1,2,..\}$, но это будет выполняться не для всех n.

Дадим еще несколько определений, связанных с отображениями, только уже на алгебраических структурах. Вообще говоря, отображение на алгебраической структуре (X,*) будет называться **морфизмом**.

Сначала допустим, что у нас групповая структура, т.е. на множестве задана только одна бинарная операция.

ОПР. Пусть $(X,\bullet)$ и (Y,o) – алгебраические структуры. Отображение f:$X \to Y$ называется **мономорфизмом**, если 1) f – инъекция; и 2) $f(x \bullet y)$=f(x)of(y).

ОПР. Пусть $(X,\bullet)$ и (Y,o) – алгебраические структуры. Отображение f:$X \to Y$ называется **эпиморфизмом**, если 1) f – инъекция; и 2) $f(x \bullet y)$=f(x)of(y).

ОПР. Пусть $(X,\bullet)$ и (Y,o) – алгебраические структуры. Отображение f:$X \to Y$ называется **изоморфизмом**, если 1) f – биекция; и 2) $f(x \bullet y)$=f(x)of(y).

ПРИМЕРЫ. а) (X,+)=(Y,+)=(N,+). f:$N \to N$; f(n)=2n. Тогда понятно, что f мономорфизм, так как 1) f – инъекция; 2) f(x+y)=2(x+y)=2x+2y=f(x)+f(y). Однако, f не является эпиморфизмом, так как для 1, например, нет прообраза при таком отображении, ибо образы всех элементов являются четными натуральными числами.

б) F:$(R^4,+) \to (M_2(R),+)$ на каждом элементе F действует таким образом $F\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$**.** Покажем, что это изоморфизм между группами (по сложению)**.** Понятно, что для разных векторов из R^4, образы будут различны. Так же понятно, что для любой матрицы $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ из $M_2(R)$ найдется вектор $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ из R^4, который в эту матрицу отображается. Значит, это и сюръекция, т.е. F - это биекция.

Также несложно понять, что

$$F\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} a+e \\ b+f \\ c+g \\ d+h \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

Следовательно, F – морфизм, а по определению, и изоморфизм.

Сейчас допустим, что у нас кольцевая структура, т.е. на множестве задана две бинарных операции: умножение и сложение. Тогда названия и определения выше повторятся, только будут согласовываться уже две операции.

ОПР. Пусть $(X,\bullet,+)$ и $(Y,o,+)$ – алгебраические структуры. Отображение $f:X\to Y$ называется **мономорфизмом**, если 1) f – инъекция; и 2) $f(x\bullet y)=f(x)of(y)$ и $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

ОПР. Пусть $(X,\bullet,+)$ и $(Y,o,+)$ – алгебраические структуры. Отображение $f:X\to Y$ называется **эпиморфизмом**, если 1) f – инъекция; и 2) $f(x\bullet y)=f(x)of(y)$ и $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

ОПР. Пусть $(X,\bullet,+)$ и $(Y,o,+)$ – алгебраические структуры. Отображение $f:X\to Y$ называется **изоморфизмом**, если 1) f – инъекция; и 2) $f(x\bullet y)=f(x)of(y)$ и $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

ПРИМЕР. X=Y=Z, $(Z,\bullet,+)$ $f:Z\to Z$; f(z)=z. Это отображение инъекция, но не сюръекция, так как для n=2, например, нет прообраза. Для любых двух x,y из Z, f(x+y)=(x+y)=x+y=f(x)+f(y), и f(xy)=xy=f(x)f(y). Следовательно, это отображение будет мономорфизмом, но не будет эпиморфизмом.

Изучение свойств отображений на различных алгебраических структурах продолжится на 2-ом курсе, ну а нас будут интересовать только отображения на векторных пространствах.

Как мы знаем, на векторном пространстве V_K две операции «+» (сложение) и «$\cdot\lambda$» (умножение на скаляр из поля К), которые называются линейными операциями. Введем ещё одно определение некоторого вида отображений между векторными пространствами, которое как раз и называется линейным отображением, так как оно согласует обе линейные операции на двух векторных пространствах, но над одним и тем же полем К.

ОПР. Пусть V_K, W_K векторные пространства над одним и тем же полем К. Отображение f из $V_K\to W_K$ называется **линейным отображением векторного пространства V_K** в векторное пространство W_K, если выполняются следующие свойство f(ax+by) = af(x) + bf(y), для любых двух векторов из V_K и любых скаляров a и b из поля К. V_K при этом называется **областью определения линейного отображения f, W_K – областью значений линейного отображения f**.

ОПР. Если $V_K=W_K$, тогда линейное отображение f из V_K в $W_K=V_K$ будем называть **линейным оператором на V_K.**

ПРИМЕРЫ: а) Является ли линейным отображением, а точнее, линейным оператором, отображение f:$R^2 \to R^2$, действующее на каждом векторе $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ из R^2 следующим образом: $f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$?

Решение. Проверяем по определению значение выражения $f\left(\lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$. Оно равно

$$f\left(\begin{pmatrix} \lambda a+\mu c \\ \lambda b+\mu d \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \lambda b+\mu d \\ \lambda a+\mu c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda b \\ \lambda a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \mu d \\ \mu c \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix}=\lambda\cdot f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)+\mu\cdot f\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right).$$

Следовательно, данное выражение является линейным оператором на R^2.

б) Является ли линейным отображением отображение F: $R[x]_3 \to R^3$ действующее на каждом элементе следующим образом $F(ax^3+bx^2+cx+d)=\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$?

Решение. Проверим значение $F(\lambda(ax^3+bx^2+cx+d)+\mu(ex^3+fx^2+gx+h))$, где ax^3+bx^2+cx+d и ex^3+fx^2+gx+h из $R[x]_3$, и λ, μ из R. По определению

$$F(\lambda(ax^3+bx^2+cx+d)+\mu(ex^3+fx^2+gx+h))=\begin{pmatrix} \lambda b+\mu f \\ \lambda c+\mu g \\ \lambda d+\mu h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \mu f \\ \mu g \\ \mu h \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

$= \lambda F(ax^3+bx^2+cx+d)+\mu F(ex^3+fx^2+gx+h)$.

Что и показывает, что F это линейное отображение.

Рассмотрим одно простейшее свойство линейного отображения.

ЛЕММА 3.13.2 Любое линейное отображение f из векторного пространства V_K в векторное пространство W_K нулевой вектор $\bar{0}_{V_K}$ переводит в нулевой $\bar{0}_{W_K}$.

Доказательство. $f(\bar{0}_{V_K}) = f(\bar{0}_{V_K}+\bar{0}_{V_K}) = 2f(\bar{0}_{V_K})$. Отсюда получаем, что $f(\bar{0}_{V_K})=\bar{0}_{W_K}$.

Определим некоторые частные виды линейных отображений.

ОПР. Линейное отображение из V_K в W_K, которое все элементы x отображает в нулевой вектор W_K, называется **нулевым отображением** и его будем обозначать его через $\mathbf{0}_{V_K}$ **.**

ОПР. Линейное отображение, или точнее линейный оператор на V_K, которое все элементы x отображает в себя, называется **тождественным или единичным оператором** и его будем обозначать его через $\mathbf{id}_{V_K}$.

Совершенно аналогично понятию образа отображения между множествами дадим определение образа линейного отображения и оператора.

ОПР. Пусть f: $V_K \to W_K$ - линейное отображение. Тогда вектор $y \in W_K$: f(x)=y называется **образом элемента x**, а множество образов всех элементов из X образует образ отображения f (или образом оператора f, если $V_K=W_K$), и обозначается через **Jmf**.

ЛЕММА 3.13.3. Пусть f – линейное отображение из V_K в W_K, тогда Imf – образ этого отображения является векторным подпространством в W_K.

Доказательство. Пусть x и y лежат в образе Imf из W_K. Тогда найдутся вектора a и b из V_K: f(a) = x, f(b)=y. Но тогда сумма x+y также будет лежать в образе Imf, так как f(a+b) = x+y, по свойству линейного отображения.

Если x лежит в образе f, т.е. найдется a из V_K: f(a)=x и λ произвольный элемент из поля K, то λx также лежит в образе f, так как

$$f(\lambda a) = \lambda x.$$

$f(\bar{0}) = f(\bar{0}+\bar{0}) = 2f(\bar{0}) = \bar{0}$, т.е. $\bar{0}$ также лежит в образе Imf.

Если вектор x лежит в Imf, т.е. найдется вектор a из V_K: f(a)=x, то и -x также лежит в образе Imf, так как f(-a)=-x.

Операции сложение и умножение на скаляр из поля K уже согласованы, так как они действуют на векторном пространстве.

Отсюда получаем, что образ линейного отображения f является векторным подпространством в W_K.

Дадим определение ядра линейного отображения.

ОПР. Множество векторов из V_K, которые линейное отображение f переводит в нулевой вектор W_K, называется **ядром линейного отображения f**. Обозначается он **Kerf.**

ПРИМЕР**.** Выше уже было показано, что отображение F: $R[x]_3 \to R^3$ действующее на каждом элементе следующим образом $F(ax^3+bx^2+cx+d)=\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ является линейным отображением. Найти его KerF.

Решение. Это многочлены вида ax^3, где $a \in R$. Это легко следует из определения этого отображения.

ЛЕММА 3.13.4 Пусть f —линейное отображение $V_K \to W_K$, тогда ядро Kerf этого отображения является векторным подпространством в V_K.

Доказательство. Доказываем аналогичным образом, что и в лемме 3.13.3.

Пусть x и y лежат в Kerf. Тогда сумма этих векторов x+y также будет лежать в Kerf, так как $f(x+y)=f(x)+f(y)=\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$ (по свойству линейного отображения).

Если x лежит в Ker f, то и λx также лежит в Ker f, так как $f(\lambda a) = \lambda f(x) = \bar{0}$.

Очевидно, что $\bar{0}$ также лежит в Kerf.

Если вектор x лежит в Kerf, то и -x также лежит в Kerf, так как $f(-a) = \bar{0}$.

Операции + и умножение на скаляр уже согласованы, так как они действуют на векторном пространстве.

Отсюда получаем, что Ker f является векторным подпространством V_K.

ОПР. Пусть f – линейное отображение $V_K \to W_K$, тогда линейное отображение g: $W_K \to V_K$ называют **обратным к линейному отображению f**, если fog=id_V, gof=id_W.

Обозначается обратное к линейному отображению f через $\mathbf{f^{-1}}$.

ПРИМЕР: Рассмотрим линейное отображение из $f:R^2 \to R^2$. Оно действует на вектор $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ из R^2 следующим образом: $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. Обратное к нему будет это же самое отображение, так как $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, а $f\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Таким образом fog=gof=$id_{R^2}$.

Пусть f –линейное отображение

Используя вышеприведенные результаты, докажем следующий важный результат об изоморфности двух векторным пространств над одним и тем же полем..

ТЕОРЕМА 3.13.5. Два конечномерных векторных пространства V_K и W_K над полем K изоморфны, тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

Доказательство. Если пространства изоморфны и $\dim V_K = n > m = \dim W_K$, тогда система из образов базисных векторов $f(e_i)$, i=1,2,…,n линейно зависима в W_K. Отсюда найдется какой-то $f(e_i)$ (допустим $f(e_n)$), который линейно выражается через линейную комбинацию остальных (какие-то векторы могут входить и с нулевыми коэффициентами), т.е. найдется набор λ_i, i=1,2…,n-1, не все элементы которого равны 0, такие, что

$$f(e_n)= \lambda_1 f(e_1)+\ldots..+ \lambda_{n-1} f(e_{n-1}). \quad (1)$$

Отсюда в силу свойств линейности найдутся два различных вектора из V_K:

$X_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots. \\ \lambda_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ и $X_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots. \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, которые имеют одинаковый образ - $f(e_n)$. Отсюда f – не инъекция, т.е. и не изоморфизм. Противоречие. Следовательно, $n \le m$.

Если n<m, тогда можно рассмотреть изоморфизм из W_K в V_K, и придем к аналогичному результату.

Если n=m, тогда можно установить изоморфизм f следующим образом:

$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots. \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}_e \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots. \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}_f$, где $\{e_i\}$, i=1,2,…,n(=m); $\{g_i\}$, i=1,2,…,m(=n) – базисы в V_K, W_K соответственно.

Понятно, что это и инъекция и сюръекция. Кроме того, выполняется и соотношение:

$f(\lambda X+ \mu Y)= \lambda f(X) + \mu Y$, для любых X и Y из V_K, и λ, μ из K.

§ 3.14. ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР НА V_K И ЕГО СВОЙСТВА

Заметим, что когда речь пойдет о линейном операторе, т.е. о линейном отображении на V_K, то все основные определения и обозначения, а также естественно все основные свойства линейных отображений, которые были рассмотрены выше, также сохраняются.

Аналогично обратному к произвольному линейному отображению дается определение обратному оператору.

ОПР. Линейный оператор g называется **обратным к оператору f**, если $fog=gof=id_{V_K}$. Обратный оператор обозначается $\mathbf{f^{-1}}$.

<u>ПРИМЕР</u>: $V_K=R$, $f:R\to R$. $f(X)=2X$. Тогда обратным к f оператором будет оператор f^{-1}: $f^{-1}(x)=\dfrac{X}{2}$.

Рассмотрим **множество линейных операторов, действующих на векторном пространстве V_K**, которое будем обозначать через **$L(V_K)$**. На этом множестве операторов оказывается можно ввести структуру векторного пространства над тем же самым полем К.

Для этого на $L(V_K)$ нужно ввести операции: «+» (сложение) и «$\times\lambda$» (умножение на скаляр из поля К). Определим эти операции.

ОПР. Пусть f,g – два линейных оператора, действующих на векторном пространстве V_K, тогда **суммой линейных операторов f и g** (обозначается через (**f+g**)), называется линейный оператор из $L(V_K)$, действующий на каждый вектор из V_K следующим образом:

$$(f+g)(X) \overset{\Delta}{=} f(X) + g(X), \text{ для любого } X \text{ из } V_K, \text{ любого } \lambda \text{ из поля } K;$$

Пусть λ из поля К. Тогда оператором **(λf) (линейным оператором умноженным на некоторый скаляр λ**) называется линейный оператор из $L(V_K)$, действующий на каждый вектор X из V_K следующим образом:

$$(\lambda f)(X) \overset{\Delta}{=} f(\lambda X).$$

Справедлива лемма.

ЛЕММА 3.14.1 Множество $L(V_K)$ вместе с введенными на нем операциями сложения и умножения на скаляр, образует структуру векторного пространства над полем К.

<u>*Доказательство.*</u> Ассоциативность операции сложения на $L(V_K)$ легко показывается, и следует почти из определения этой операции на $L(V_K)$.

Как несложно показать, в виду того, что операция сложения на V_K абелева, то это же свойство операции сложения будет выполняться и на множестве $L(V_K)$.

Роль нулевого элемента на $L(V_K)$будет выполнять нулевой оператор, т.е. оператор, переводящий все векторы V_K в нулевой вектор. Обозначим его через $\mathbf{O}_{L(V_K)}$. Понятно, что для $\forall f\in L(V_K)$

$$(f+\mathbf{O}_{L(V_K)})(x)=f(x)+\mathbf{O}_{L(V_K)}(x)=f(x)+\mathbf{O}_{L(V_K)}=f(x).$$

Следовательно, по определению равенства операторов, получаем, что

$$(f+\mathbf{O}_{L(V_K)})=f,\ \forall f\in L(V_K).$$

Аналогично можно показать, что и верно и следующее соотношение

$$(\mathbf{O}_{L(V_K)}+f)=f.\ \forall f\in L(V_K)$$

Для любого линейного оператора f из $L(V_K)$ найдется линейный оператор (-f) из $L(V_K)$:

$$(f+(-f))(x)=((-f)+f)=\mathbf{O}_{L(V_K)},$$

т.е. справедливо равенство операторов:

$$f+(-f)=(-f)+f=\mathbf{O}_{L(V_K)}.$$

Этот оператор (-f) можно определить в соответствии с определением оператор на скаляр λ из поля K, где вместо λ взять (-1).

Следовательно, $(L(V_K),+)$ – образует абелеву группу.

Относительно умножения на $\lambda=1$ всех линейных операторов, сразу видно, что $1_K\cdot f=f$, для любого линейного оператора из $L(V_K)$.

Также сразу проверяется свойство ассоциативности умножения на скаляр на множестве $L(V_K)$.

Осталось проверить, что для обеих операций выполняется дистрибутивный закон.

Но это также почти очевидно. Пусть f,g из $L(V_K)$, λ,μ из поля K, тогда равенство пары операторов $(\lambda+\mu)\,f$ и $\lambda f+\mu f$ следует из определения операций. Также из определения операций следует равенство пары операторов $\lambda(f+g)$ и $\lambda f+\lambda g$.

Следовательно $(L(V_K),+,\times\lambda)$ векторное пространство над полем K.

Оказывается, существует связь между векторным пространством линейных операторов $L(V_K)$, действующим на конечномерном векторном пространстве V_K, размерности n, и векторным пространством квадратных матриц порядка n, т.е. $M_n(K)$, Мы сейчас и рассмотрим этот вопрос.

Пусть на V_K – некоторое векторное пространство над полем K, и на нем действует оператор f, и пусть $\{e_i\}$ – некоторый базис пространства V. Тогда рассмотрим произвольный вектор $X\in V_K$, координаты которого в базисе имеют вид

$$X_e=\sum_{i\in I}x_ie_i,$$

где I – некоторое множество индексов, которое может быть и конечным, и бесконечным. Тогда по свойствам линейности оператора получаем, что

$$f(X_e)=f(\sum_i x_ie_i)=\sum_i x_if(e_i) \qquad (1)$$

Отсюда видим, что для того, чтобы знать образ произвольного вектора X, координаты которого в некотором базисе известны, при действии линейного оператора f, достаточно знать только образы базисных векторов, т.е. $f(e_i)$.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>. Это утверждение еще не раз будет использоваться, например, при доказательстве изоморфизма между векторным пространством квадратных матриц порядка n, и пространством линейных операторов, действующих на конечномерном векторном пространстве, $\dim V_K=n$.

Если мы предположим, что линейный оператор f действует на конечномерном векторном пространстве V_K: $\dim V_K = n$, то можно разложить векторы ($f(e_k)$, $k=1,2,\ldots,n$) по базису $\{e_i\}$, $i=1,2\ldots,n$. Получим следующую систему равенств

$$
\begin{aligned}
f(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n \\
f(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n \qquad (2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f(e_n) &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n
\end{aligned}
$$

ОПР. Квадратная матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K)$, полученная из соотношений (2), называется **матрицей линейного оператора f в базисе $\{e_i\}_{i=1,2,3..,n}$**, она обозначается через $\mathbf{A_{f,e}}$.

Замечаем из формул (2), что столбцами матрицы $\mathbf{A_{f,e}}$ (матрицы оператора в данном базисе) являются образы базисных векторов, т.е. i-ым столбцом матрицы $\mathbf{A_{f,e}}$ будут координаты образа i-го базисного вектора e_i.

Зная матрицу оператора в данном базисе (т.е. есть равенства (2)), можно переписать равенства (1) в матричной форме, т.е. используя матрицу оператора в данном базисе и зная координаты вектора X в данном базисе.

$$
\begin{aligned}
f(X_e) = f\Big(\sum_i x_i e_i\Big) &= \sum_i x_i f(e_i) \; \sum_i x_i (a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \ldots + a_{in}e_n) = \\
&= x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n) + \ldots + x_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 \ldots + a_{nn}e_n) \\
&= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)e_1 + \ldots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n)e_n \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Несложно заметить, что равенство (3) можно записать, с использованием матрицы $A_{f,e}$ и вектора переменных

$X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}_e$. А именно равенство (3), которое получилось из равенства (1) можно записать таким образом: образ произвольного вектора $X_e \in V_K$ под действием линейного оператора f равен

$$f(X_e) = A_{f,e}X_e.$$

Рассмотрим некоторые простейшие свойства матриц линейного оператора, если задан некоторый базис $\{e_i\}$, $i=1,2,3..,n$, в конечномерном векторном пространстве V_K.

ЛЕММА 3.14.2 (**Свойства матрицы линейного оператора**). Пусть f и g – линейные операторы конечномерного векторного пространства V_K с фиксированным базисом $\{e_i\}$,i=1,2..,n и λ из K. Тогда, если $A_{f,e}$,$A_{g,e}$ – матрицы операторов f и g в этом базисе, то справедливы следующие соотношения.

1) $A_{(f+g),e} = A_{f,e}+A_{g,e}$

2) $(A)_{\lambda f,\ e} = \lambda A_{f,e}$

__Доказательство.__ 1) По определению F - сумма двух линейных операторов f и g – является оператором, который действует на каждом векторе следующим образом: он каждый вектор X переводит в сумму векторов, первое слагаемое – это образ X под действием f, а второе слагаемое – это образ X под действием оператора g, т.е. F(X) = f(X)+g(X). Если это записать в матричном виде, то

$$A_{f+g,e}X_e = A_{f,e}X_e + A_{g,e}X_e = (A_{f,e} + A_{g,e})X_e.$$

Второе равенство следует из арифметики матриц, ведь для них также справедлив дистрибутивный закон.

2) Доказательство п.2 оставляем в качестве упражнения.

УПР. Доказать справедливость п.2) леммы 3.14.2.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ.</u> В силу леммы 3.14.2 и в силу свойств операций с матрицами (сложения и умножения на скаляр из поля K) понятно также, что справедливо и общее свойство, а именно,

$$A_{f,e}(\alpha X_e + \beta Y_e) = \alpha A_{f,e} X_e + \beta A_{f,e}Y_e$$

где α и β произвольные скаляры из поля K.

Перепишем равенство (3) два раза, сначала в виде линейной комбинации образа вектора X, под действием оператора f.

$f(X_e) = x_1(a_{11}e_1+a_{21}e_2+...+a_{n1}e_n) + ...+x_n(a_{1n}e_1+...+ a_{nn}e_n) = (a_{11}x_1+a_{12}x_2+....+a_{1n}x_n)e_1+ ...+(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2+....+a_{nn}x_n)e_n = Y_e$

Это же равенство можно записать и в матричном виде, напомнив еще раз, что для нахождения образа произвольного вектора X при действии на него оператора f, достаточно подействовать на него матрицей оператора слева:

$$f(X_e)=f(\sum_i x_i e_i)=\sum_i x_i f(e_i)=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}_e =A_{f,e}X_e=Y_e \quad (3)$$

Рассмотрим некоторые, наиболее часто используемые примеры матриц операторов, причем будем находить их в так называемых “стандартных” базисах.

<u>ПРИМЕРЫ</u>: а) Пусть $V_K=R^2$, на нем задан базис $\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.\}$ Рассмотрим оператор $f:R^2\to R^2$; на произвольном векторе $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ из R^2 оператор действует следующим образом: $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$. Найти $A_{f,e}$ матрицу оператора в базисе $\{e_i\}$,i=1,2.

Решение. Будем действовать по определению, т.е. столбцами матрицы оператора f будет матрица, столбцами которой будут служить образы базисных векторов. Находим, что $A^1_{f,e}$=f $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; $A^2_{f,e}$=f$\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Следовательно, матрица оператора имеет вид $A_{f,e}$ $=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

б) Найти матрицу оператора проектирования пространства R^3 на плоскость XoY = $<e_1,e_2>$, в стандартном базисе, т.е. в базисе $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Решение. Найдем матрицу прямым использованием определения матрицы линейного оператора. Найдем образы базисных векторов под действием оператора проектирования. Итак, при проектировании векторы e_1 и e_2 переходят в себя, т.е. $A^1=e_1$; $A^2=e_2$, а вектор e_3 переходит в нулевой вектор, т.е. $A^3=\bar{0}$, поэтому матрицы оператора проектирования в базисе $\{e_i\}$,i=1,2,3, будет иметь вид

$$A_{пр,e}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Если мы ходим узнать образ произвольного вектора $X_e=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ под действием оператора проектирования, то получаем $Y_e=A_{проект,e}X_e=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$.

в) Найти матрицу оператора f поворота на острый угол α в пространстве вокруг оси Oz в стандартном базисе, т.е. в базисе $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Решение. Найдем образы базисных векторов при таком повороте. Тогда $f(e_1)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\\0\end{pmatrix}$; $f(e_2)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\\0\end{pmatrix}$; $f(e_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Отсюда матрица оператора поворота вокруг оси Oz на острый угол α в стандартном базисе имеет вид $\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

г) Найти матрицу f оператора дифференцирования многочленов, с вещественными коэффициентами от одной переменной, степень которых не превышает n, в базисе $e_1=1, e_2=x, e_3=x^2, \ldots, e_{n+1}=x^n$.

Решение. Заметим, что размерность такого пространства равна n+1, поэтому матрица оператора дифференцирования лежит в $M_{n+1}(R)$. Ну а далее действуем по определению: находим образы базисных векторов. Несложно установить, что образ i-ого базисного вектора, т.е. x^{i-1}, равен $(i-1)x^{i-2}$, т.е. $f(1)=0$; $f(x)=1; f(x^2)=2x;..; f(x^n)=nx^{n-1}$. Поэтому в базисе $\{e_i\}, i=1,2\ldots,n+1$ матрица оператора дифференцирования имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим вопрос о том, как же изменяются координаты векторов и матрица линейного оператора, и как они между собой взаимосвязаны, если изменяется базис на векторном пространстве V_K.

Сначала введем понятие матрицы перехода от базиса к базису. Для этого рассмотрим в векторном пространстве V_K размерности n два базиса $\{e_i\}$ и $\{m_i\}$, i=1,2,..,n. Любой вектор одного базиса можно представить в виде линейной комбинации другого базиса. Разложим векторы второго «нового» базиса $\{m_i\}$, i=1,2,..,n, в виде линейных комбинаций векторов первого «старого» базиса $\{e_i\}$, i=1,2,..,n:

$$\begin{aligned} m_1 &= c_{11}e_1+c_{21}e_2+\ldots+c_{n1}e_n \\ m_2 &= c_{12}e_1+c_{22}e_2+\ldots+c_{n2}e_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n &= c_{1n}e_1+c_{2n}e_2+\ldots+c_{nn}e_n \end{aligned} \qquad (4)$$

или в общем виде

$$m_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}e_k \ (i=1,2,..,n)$$

где c_{ki} (k=1,2,..,n) —координаты вектора m_i в базисе $\{e_i\}$, i=1,2,..,n.

ОПР. Матрица, $\mathbf{C = (c_{i,j})}$, i=1,2,..,n; j=1,2,..,n, полученная в системе равенств (4), называется **матрицей перехода от базиса {e} к базису {m}.** Она обозначается $\mathbf{C}_{e\to m}$.

Заметим, что i-й столбец матрицы перехода $C_{e\to m}$ является координатами базисного вектора m_i, т.е. i-го «нового» базисного вектора, в «старом» базисе $\{e_i\}$, i=1,2,…,n. Отсюда понятно, что матрица перехода $C_{e\to m}$ не вырождена, т.е. её определитель не равен нулю, так как её столбцы линейно независимы (это базисные векторы) (см. теорему 3.11.6).

Из этого можно также заметить, что $m_i = C_{e\to m}\begin{pmatrix}0\\ ..\\ 0\\ 1\\ 0\\ ..\\ 0\end{pmatrix}_e = C_{e\to m}\, e_i$.

Аналогично, каждый вектор из базиса $\{e_i\}$, i=1,2,..,n, можно представить в виде линейной комбинации векторов второго базиса $\{m_i\}$, i=1,2,..,n:

$$e_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} m_k \ (i=1,2,..,n)$$

и матрица B = (b_{ij}) будет матрицей перехода от базиса {m} к базису {e}. Обозначим ее через $C_{m\to e}$. Несложно понять, что матрицы $C_{e\to m}$ и $C_{m\to e}$ обратны друг другу, т.е.

$$C^{-1}_{e\to m} = C_{m\to e}.$$

Это связано с тем, что $m_i = C_{e\to m}\, e_i$ (5) и $e_i = C_{m\to e}\, m_i$ (6).

Если подставим (6) в (5), то получаем, что

$$m_i = C_{e\to m}\, e_i = C_{e\to m}\, C_{m\to e}\, m_i, \quad \text{для любого } i=1,2,...,n,$$

т.е., так как любой вектор X из V_K есть линейная комбинация базисных векторов, и в силу свойств операций сложения и умножения с матрицами, получаем, что

$$(C_{e\to m}\, C_{m\to e})X = X \text{ для любого } X\in V_K.$$

Отсюда $C_{e\to m}\, C_{m\to e} = E$.

Понятно, что верно и обратное, т.е. $C_{m\to e}\, C_{e\to m} = E$.

Сейчас рассмотрим, как работает матрица перехода, когда рассматривается вопрос о преобразованиях координат векторов при изменении базиса векторного пространства.

Пусть X произвольный вектор пространства V_K, где заданы два базиса: базис $\{e_i\}$, i=1,2,..,n и базис $\{m_i\}$, i=1,2,..,n. Тогда дано, что

$$X_e = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ ....\\ x_{n-1}\\ x_n\end{pmatrix}_e \text{ в базисе } \{e_i\};\ X_m = \begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\\ ....\\ x'_{n-1}\\ x'_n\end{pmatrix}_m \text{ - в базисе } \{m_i\}, \quad (5)$$

т.е. $X_e = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $X_m = \sum_{i=1}^{n} x'_i\, m_i$. С учетом равенств (4) (где векторы одного базиса заменяются через линейные комбинации другого, с использованием матрицы перехода), получаем, что

$$X_m = \sum_{i=1}^{n} x'_i\, m_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ki} x'_k\, e_k = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i. \quad (6)$$

Отсюда получаем, сравнивая (5) и (6), что

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} c_{k,i} x'_i, \quad \text{т.е. } X_e = C_{e\to m} X_m'. \qquad (7)$$

Совершенно аналогично получаем, что

$$x_k' = \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} x_i, \text{ т.е. } \quad X_m' = B_{m\to e} X_e = C^{-1}_{e\to m} X_e \quad (8)$$

Таким образом, получены формулы для изменения координат векторов, при изменении базиса. Это формулы (7) и (8), в которой используется матрица перехода.

<u>ПРИМЕР:</u> Найти координаты вектора X в базисе $\{m_i\}$, i=1,2,3, пространства R^3, если в стандартном базисе $\{e_i\}$, i=1,2,3, вектор X имеет координаты $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, а базис {m} задан следующим образом: $m_1=e_1$, $m_2=e_1+e_2$, $m_3=e_1-e_3$.

<u>Решение</u>. Находим матрицу перехода $C_{e\to m}$: по определению (i-ый столбец – есть координаты i-го вектора m_i в стандартном базисе, т.е это будет фактически координаты вектора m_i) она будет равна $C_{e\to m} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Чтобы найти координаты вектора X в новом базисе, т.е. X_m, нужно вектор X_e умножить на матрицу перехода $C_{m\to e}$, которая равна обратной к $C_{e\to m}$ матрице. Найдем обратную к матрице перехода $C_{e\to m}$. Это будет матрица $C_{m\to e} = C^{-1}_{e\to m} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (причем $\left|C^{-1}_{e\to m}\right|$=-1). Следовательно, координаты вектора X_m будут равны $X_m = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>. Задачу можно решать и иным, например, матричным способом. Обозначить $X_m = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, и применив к нему матрицу $C_{m\to e}$, должны получить вектор X_e. Получим систему уравнений, которую можно решить и найти ответ на вопрос задачи.

Эту же задачу можно было решить и другим способом, просто рассмотрев систему линейных уравнений, которая получается

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Решая эту систему (рассматривается равенство покоординатно), находим искомые координаты.

Сейчас проследим за тем, как изменяется матрица линейного оператора, при изменении базиса $\{e_i\}$,i=1,..,n на базис $\{m_i\}$ i=1,..,n.

Пусть $A_{f,e}$, $A_{f,m}$ – матрицы оператора f в базисах $\{e_i\}$ и $\{m_i\}$ соответственно, $C_{e\to m}$ – матрица перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{m_i\}$, тогда получаем равенства (3):

$$A_{f,e}X_e = Y_e \quad (\text{или} \quad A_{f,m}X_m = Y_m). \qquad (3)$$

Как уже было показано выше (см. равенство (7)), при смене базиса получаем, что

$$X_e = C_{e\to m} X_m \quad \text{и} \quad Y_e = C_{e\to m} Y_m. \qquad (7')$$

Подставляем это в равенство (3) и, согласно равенству (7'), получаем, что

$$A_{f,e}\, C_{e\to m}\, X_m = C_{e\to m}\, Y_m$$

Отсюда получаем, что

$$C^{-1}_{e\to m}\, A_{f,e}\, C_{e\to m}\, X_m = Y_m.$$

Таким образом, мы устанавливаем, что матрицы операторов в двух различных базисах связаны между собой следующим равенством

$$A_{f,m} = C^{-1}_{e\to m}\, A_{f,e}\, C_{e\to m}\,. \qquad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что формула (9) нередко используется и в «обратную» сторону, т.е. если матрицу оператора удобно найти в каком-то базисе $\{m_i)$,i=1,2,3, но матрицу перехода от базиса $\{m_i)$,i=1,2,3, к базису $\{e_i)$,i=1,2,3, найти непросто, зато просто найти матрицу перехода от базиса$\{e_i\}$,i=1,2,3, к базису$\{m_i\}$,i=1,2,3. Следовательно, сначала и находят эту матрицу перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{m_i\}$, и затем находится искомая матрица по формуле:

$$C_{e\to m}\, A_{f,m}\, C^{-1}_{e\to m} = A_{f,e}. \qquad (10)$$

Рассмотрим примеры, в которых показаны эти моменты.

ПРИМЕРЫ: а) Линейный оператор f действует на R^2: $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, $\forall\, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$. На R^2 заданы два базиса $\{e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\}$ и $\{m_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ m_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. Известно, что в первом базисе матрица оператора f имеет вид $A_{f,e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти эту матрицу в базисе $\{m_i\}$,i=1,2.

Решение. Найдем матрицу перехода $C_{e\to m}$. Понятно, что она (по определению) равна $C_{e\to m} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Находим обратную к ней. Как несложно убедиться, она примерно такая, отличается только коэффициентом $\frac{1}{2}$, т.е. $C^{-1}_{e\to m} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Отсюда по формуле (9) находим матрицу оператора в новом базисе:

$$A_{f,m} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Найти матрицу оператора симметрии R^3 относительно плоскости x+y+z=0 в стандартном базисе.

Решение. Замечаем, что если бы была симметрия относительно плоскости, например, XoY, то любой вектор X=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$ просто поменял бы знак третьей координаты, т.е z, вектор $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ перешел в вектор $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$. Тогда матрица такого оператора в стандартном базисе имела бы вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Если мы рассмотрим следующий «удобный» для данного линейного оператора базис: $m_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $m_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $m_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, то как несложно заметить, два первых из этих базисных векторов лежат в плоскости x+y+z=0, поэтому они при симметрии относительно данной плоскости перейдут сами в себя, а третий вектор перпендикулярен к данной плоскости (он служит нормальным вектором к данной плоскости), следовательно, при симметрии он перейдет в противоположный к себе вектор, т.е. в вектор $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}=-m_3$. Отсюда матрица данного линейного оператора в базисе $\{m_i\}$,i=1,2,3, будет иметь вид $A_{f,m}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.Следовательно, наша задача осталась в том, чтобы найти матрицу перехода от данного базиса к стандартному, и найти ей обратную.

Заметим, что обратную к искомой матрице перехода от базиса $\{m_i\}$,i=1,2,3 к стандартному базису $\{e_i\}$,i=1,2,3, найти очень несложно. Найдем ее. Это будет матрица, столбцами которой будут координаты векторов m_i,i=1,2,3, в стандартном базисе, т.е. это матрица $C_{e\to m}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем к ней обратную, она и будет матрицей перехода $C_{m\to e}$.

Получаем, что $C_{m\to e}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Сейчас уже можно найти и искомую матрицу. Для этого используем формулу, которую легко получить из формулы (9), а именно $C_{e\to m} A_{f,m} C^{-1}_{e\to m} = A_{f,e}$. Для нашего случая получаем, что искомая матрица оператора симметрии относительно плоскости x+y+z=0 в стандартном базисе $\{e_i\}$,i=1,2,3, находится по формуле

$$A_{f,e}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&-3&0\\1&1&-2\\2&2&2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&-1\\0&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-3&0\\1&1&-2\\2&2&2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-4&-4\\-4&2&-4\\-4&-4&2\end{pmatrix}.$$

в) Найти матрицу поворота вокруг прямой x=y=z на острый угол α , в стандартном базисе.

Решение. Эта задача по своему алгоритму решения подобна предыдущей: сначала ищется «удобный» для данного линейного оператора базис, затем ищется матрица перехода от стандартного базиса к «удобному» базису и обратная к ней. Затем используя формулу (10), находим искомую матрицу.

Итак, в качестве «удобного» базиса можно взять следующие векторы $m_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $m_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$; $m_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Заметим, что согласно знаниям школьной аналитической геометрии, эти векторы попарно перпендикулярны (скалярное произведение любых двух из них равно 0), причем третий вектор лежит на оси поворота, следовательно, при повороте он перейдет в себя. Как несложно подсчитать, получаем, что матрица поворота на острый угол α в таком базисе $\{m_i\}$,i=1,2,3, будет иметь вид

$$A_{f,m}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Стандартный базис $\{e_i\}$,i=1,2,3, имеет вид $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Матрица перехода легко находится $C_{e\to m}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\0&-2&1\end{pmatrix}=C^{-1}_{m\to e}$. Отсюда находим $C_{m\to e}=C^{-1}_{e\to m}$.

Она будет равна $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&-3&0\\1&1&-2\\2&2&2\end{pmatrix}$. Отсюда находим матрицу оператора поворота в стандартном базисе по формуле $C_{e\to m}\,A_{f,m}\,C^{-1}_{e\to m}=A_{f,e}$. Получаем, что

$$A_{f,e}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&-3&0\\1&1&-2\\2&2&2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sin\alpha+2\cos\alpha+1 & -2\sin\alpha-\cos\alpha+1 & \sin\alpha-\cos\alpha+1 \\ 2\sin\alpha-\cos\alpha+1 & -\sin\alpha+2\cos\alpha+1 & -\sin\alpha-\cos\alpha+1 \\ -3\sin\alpha-\cos\alpha+1 & 3\sin\alpha-\cos\alpha+1 & 2\cos+1 \end{pmatrix}.$$

Еще раз рассмотрим формулы (9) и (10). По известной теореме об определителе произведения матриц (см. теорему 3.9.5) видим, что справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.13.3. Если линейный оператор f действует на конечномерном векторном пространстве V_K: $\dim V_k = n$, то определитель матрицы линейного оператора f не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Пусть A – матрица линейного оператора f, действующего на V_K. Пусть на V_K задано два базиса $\{e_i\}$, i=1,2..,n и $\{m_i\}$. i=1,2..,n. Тогда матрица $A_{f,m} = C_{e\to m}^{-1} A_{f,e} C_{e>m}$.

По теореме о том, что определитель произведения матриц равен произведению определителей, отсюда несложно получить, что

$$\det A_{f,e} = \det A_{f,m}$$

Введем еще одно новое понятие.

ОПР. Две квадратные матрицы A и B порядка n (из $M_n(K)$) называются **подобными,** если найдется такая матрица T из $M_n(K)$, что $B=T^{-1}AT$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Во-первых, нужно заметить, что определители подобных матриц равны (см.теорему 3.9.5); а во-вторых, если A подобна B, то верно и то, что B подобна A, и в качестве матрицы T можно взять T^{-1} (из определения подобия матриц).

Итак, если задано конечномерное векторное пространство V_K: $\dim V_K = n$, и задан базис $\{e_i\}$,i=1,2,..,n,. Тогда любому оператору f , действующему на V_K, соответствует некоторая матрица $A_{f,e}$ из $M_n(K)$, столбцы которой определяются нахождением образов базисных векторов.

Однако, как несложно понять, если задана квадратная матрица B из $M_n(K)$, тогда ее можно считать матрицей какого-нибудь линейного оператора g действующего на V_K, для которого данная матрица B будет матрицей этого оператора g в заданном базисе $\{e_i\}$, i=1,2,..,n. Как уже было отмечено выше, столбцы матрицы B определяют образы базисных векторов, т.е будем полагать, что действие g на базисные векторы $\{e_i\}$, i=1,2,…,n, задается таким образом: $e_i \to B^i$, i=1,2,..,n. Тогда, как было показано выше, произвольный вектор X из V_K переходит под действием оператора g в $B_{g,e}X_e$ (запись в матричной форме).

Докажем даже более сильный результат.

ТЕОРЕМА 3.14.4. Между векторным пространством матриц $(M_n(K),+,\times\lambda)$ и векторным пространством линейных операторов $(L(V_K),+,\times\lambda)$, действующих на V_K , конечномерном векторном пространстве $\dim V_K=n$), существует изоморфизм.

Доказательство. Пусть на конечномерном векторном пространстве V_K ($\dim V_K=n$), задан базис $\{e_i\}$,i=1,2,…,n, тогда для каждого линейного оператора, действующего на V_K, существует матрица, столбцы которой - образы базисных векторов, при действии данного оператора.

Причем, если два линейных оператора имеют одну и ту же матрицу в данном базисе, то эти операторы совпадают, так как совпадает и область определения, т.е. V_K, так и образ произвольного вектора X из V_K. Образ любого вектора однозначно определяется матрицей линейного оператора в данном базисе, так как, как было показано выше, $f(X_e)=A_{f,e}X_e$.

С другой стороны, если дана матрица B из $M_n(K)$, то можно положить, что $B^i = g(e_i)$, $i=1,2,\ldots,n$, т.е. i-ый столбец матрицы B есть образ i-ого базисного вектора при действии g – некоторого линейного оператора на V_K, $\dim V_K=n$. Тогда, как было показано выше, эта матрица задает действие линейного оператора на произвольный вектор из V_K, а именно,

$$g(X_e) = g(\sum_i x_i e_i) = \sum_i x_i g(e_i).$$

Если равенство переписать в матричном виде, то получим, что $g(X_e) = BX_e$.

Из этого следует, что существует биекция $F\colon L(V_K) \to M_n(K)$, которая каждому оператору f сопоставляет матрицу этого оператора в данном базисе $\{e_i\}$, $i=1,2,\ldots,n$, т.е. $F: f \to A_{f,e}$.

Покажем, что это есть изоморфизм. По лемме 3.13.2 п.а) для любых двух линейных f и g операторов из $L(V_K)$,

$$F(f+g)=A_{(f+g),e} = A_{f,e}+A_{g,e} =F(f)+F(g).$$

Аналогично, по лемме 3.13.2 п.б) для любого линейного оператора f из $L(V_K)$

$$F((\lambda f)) = (A)_{\lambda f,\, e} = \lambda A_{f,e}.$$

А это и показывает, что F – изоморфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ. На основе этой теоремы можно заметить, что квадратную матрицу можно понимать как матрицу линейного отображения на некотором конечномерном векторном пространстве V_K, что еще раз показывает широкое применение матричного аппарата в современной математике.

§ 3.15. ИНВАРИАНТНЫЕ И СОБСТВЕННЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Во всем ранее рассмотренном нас интересовало, как задается и чем определяется линейный оператор, действующий на конечномерном векторном пространстве, но нас мало интересовало само действие оператора. Мы нашли, что при изменении базиса векторного пространства происходит изменение матрицы линейного оператора, причем нашли, каким именно образом происходит это изменение. Мы пришли к тому, что действие линейного оператора определяется матрицей этого оператора, поэтому чем проще вид этой матрицы, тем лучше поддается исследованию поведение этого оператора. Поэтому в дальнейшем наша главная цель – упрощение матриц линейного оператора.

Понятно, что упростить матрицу можно только за счет изменения базиса. Значит, задача встает задача о нахождении или конструировании такого базиса, в котором матрица линейного оператора имела бы достаточно простой вид, например, диагональный.

Итак, вопрос: для каких линейных операторов найдется базис, в котором матрица этого линейного оператора будет иметь диагональный вид?

Для решения этой задачи нужно ввести несколько новых понятий.

ОПР. Пусть линейный оператор f действует на векторном пространстве V_K. Подпространство W_K в V_K называется **подпространством инвариантным относительно действия линейного оператора f**, если для любого x из W f(x) также лежит также в W.

В качестве показа того, что такие примеры есть и существуют для каждого линейного оператора, докажем лемму.

ЛЕММА 3.15.1. Пусть на векторном пространстве V_K действует линейный оператор f, тогда Kerf и Imf являются инвариантными относительно действия оператора f.

<u>*Доказательство.*</u> Пусть $X \in$ Kerf, тогда f(X)= $\bar{0}$ $\in$ Kerf, так как любой линейный оператор нулевой вектор переводит в $\bar{0}$.

Пусть $X \in$ Imf. Тогда f(X) $\in$ Imf $\in V_K$. Следовательно, f(X) $\in$ Imf. И этим все доказано.

Докажем еще одну вспомогательную лемму, которая пригодится в дальнейшем.

ЛЕММА 3.15.2. Пусть линейный оператор f действует на конечномерном векторном пространстве V_K, и A_f его матрица в каком-то базисе. Тогда все инвариантные относительно действия линейного оператора с матрицей A_f подпространства совпадают с подпространствами, инвариантными относительно действия линейных операторов с матрицей (A_f - λE), где λ- произвольный скаляр из K. Другими словами, все инвариантные подпространства для линейных операторов с матрицами вида A_f - λE совпадают.

<u>*Доказательство*</u>. Пусть зафиксирован базис в пространстве V_K, на котором действует линейный оператор f, и матрица этого оператора равна A_f.

Пусть W_K – инвариантное подпространство относительно действия этого линейного оператора f, и X – вектор из него. Тогда A_fX лежит в W_K. Но тогда, в силу свойств векторного пространства разность векторов A_fX и X, т.е. вектор $(A_f-\lambda E)X = A_fX - \lambda EX$ также лежит в W_K. Отсюда получаем, так как X и $(A_f - \lambda E)X$ лежат в W_K, что X из W_K , а само W_K – инвариантно относительно действия линейного оператора с матрицей $(A_f - \lambda E)$, т.е. W_K – инвариантное подпространство для оператора с матрицей $(A_f - \lambda E)$.

Докажем и обратное. Если W_K – инвариантное подпространство относительно действия линейного оператора с матрицей $(A_f-\lambda E)$, где λ из K, и X - вектор из него. Тогда вектор $(A_f-\lambda E)X$ лежит в W_K. Но тогда, в силу свойств векторного пространства, и сумма двух векторов $(A_f - \lambda E)X$ и X, т.е. вектор $(A_f - \lambda E)X + \lambda EX = A_fX$ также лежит в W_K. Отсюда получаем, что W_K - инвариантное подпространство относительно действия линейного оператора с матрицей A_f.

На этом доказательство утверждения завершено.

Сейчас дадим определение еще одному очень важному понятию.

ОПР. Пусть на V_K действует линейный оператор f. Число □□из поля E, $K \subseteq E$, называется **собственным значением линейного оператора (или линейного отображения),** если существует ненулевой вектор X из V_K, такой, что

$$f(X) = \lambda X \qquad (1).$$

Вектор X, удовлетворяющий условию (1) называется **собственным вектором линейного оператора f, соответствующим собственному значению λ.**

ЗАМЕЧАНИЕ. Принято считать, что нулевой вектор не является собственным вектором для любого собственного значения линейного оператора, так как иначе он должен был бы быть собственным сразу для всех.

ОПР. Множество собственных значений линейного оператора, действующего на векторном пространстве V_K, называется его **спектром**.

ОПР. Если линейный оператор f действует на конечномерном векторном пространстве $\dim V_K=n$ и имеет n различных собственных значений в поле E: $K \subseteq E$, то говорят, что **линейный оператор f имеет простой спектр.**

ПРИМЕРЫ. а) Рассмотрим линейный оператор проектирования пространства R^2 на ось OY. Тогда у него можно найти собственные значения $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1$. Для λ_1 собственным вектором является вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а для λ_2 – вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

б) Для линейного оператора дифференцирования многочленов, степень которых не превосходит 2, можно найти собственное значение $\lambda_1=0$. Собственным вектором, соответствующим этому собственному значению будет f(x)=const.

Сразу же возникает вопрос: как находить собственные значения оператора? Рассмотрим конечномерное векторное пространство V_K, $\dim V_K=n$, и пусть задан базис$\{e_i\}_{i=1}^n$. На нем действует линейный оператор f. Тогда произвольной вектор X из V_K, имеет в $\{e_i\}_{i=1}^n$ координаты $(x_1,x_2,..,x_n)$, в этом же базисе задана и матрица оператора $A_{f,e}$. Тогда равенство (1), можно записать в матричном виде.

$$f(X)=A_{f,e}X=\lambda X \Rightarrow \quad (A_{f,e}-\lambda E)X=\bar{0} \qquad (2)$$

где E – единичная матрица.

Это равенство (2), если рассматривать левую часть в координатном виде, можно рассматривать, как систему однородных линейных уравнений (где $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор неизвестных), которая имеет отличное от нуля решение (по теореме 3.12.3, о числе решений однородной системы уравнений), тогда и только тогда, когда определитель матрицы этой системы равен нулю, т.е.

$$|A_{f,e}-\lambda E| = 0 \qquad (3)$$

Понятно, что левую часть в условии (3) можно рассматривать как многочлен от λ.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>. Значит, если $\lambda:: |A_{f,e}-\lambda E|=0$, то найдется ненулевой вектор X, который является решением системы (2), а это значит, что это будет собственным вектором, соответствующим собственному значению λ.

ОПР. Этот многочлен в левой части равенства (3) называется **характеристическим многочленом линейного оператора f, а уравнение (3)- характеристическим уравнением линейного оператора f**, мы будем обозначать его в дальнейшем через $P_f(\lambda)$.

Понятно, так как в равенстве (3) есть матрица линейного оператора в данном базисе, то характеристический многочлен вроде бы должен зависеть от выбора базиса, но это не так. Оказывается, этот многочлен для данного линейного оператора не изменяется, при изменении базиса. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.15.3. Пусть A и B д ве подобные квадратные матрицы порядка n из поля K. Тогда $|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$, для произвольного скаляра λ из поля K (или поля E: $K\subseteq E$), т.е. их характеристические многочлены совпадают.

<u>Доказательство</u>. Так как A и B подобны, то существует обратная матрица T такая, что

$$B=T^{-1}AT \Rightarrow B-\lambda E= T^{-1}BT - \lambda E = T^{-1}BT - \lambda T^{-1}ET= T^{-1}(A-\lambda E)T.$$

Отсюда получаем, что

$$|B-\lambda E| = |T^{-1}||A-\lambda E||T| = |A-\lambda E|, \text{ т.е. } |B-\lambda E| = |A-\lambda E|.$$

Из этого равенства становится понятным, что собственные числа λ линейного оператора f являются корнями его характеристического многочлена, причем неважно, в каком базисе рассматривается матрица этого линейного оператора. Более того, оказывается справедлива следующая теорема о собственных значениях линейного оператора.

ТЕОРЕМА 3.15.4. Число λ из поля K (или из поля E: $K\subseteq E$) является собственным значением линейного оператора f, действующем на конечномерном векторном пространстве V_K: $\dim V_K=n$, тогда и только тогда, когда λ является корнем характеристического уравнения этого линейного оператора.

<u>Доказательство.</u> Пусть линейный оператор f действует на V_K, где задан базис $\{e_i\}$,i=1,2..,n, и пусть $A_{f,e}$ – матрица этого оператора в данном базисе, а λ – собственное значение f. Тогда по определению найдется ненулевой вектор X такой, что $A_{f,e}X=\lambda X$. Отсюда получаем, что $(A_{f,e}-\lambda E)X=\bar{0}$. По теореме 3.12.3 (о том, что однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det(A_{f,e}-\lambda E)=0$), отсюда следует, что $|A_{f,e}-\lambda E|=0$, т.е. λ- корень характеристического многочлена.

Обратно, если λ—корень характеристического уравнения оператора f, то есть

$$|A_{f,e}-\lambda E|=0.$$

Отсюда следует (по теореме 3.12.3), что система линейных уравнений с матрицей ($A_{f.e}$-λE), т.е. $(A_{f.e}-\lambda E)X = \bar{0}$ имеет ненулевое решение X_o. Тогда

$$(A_f-\lambda E)X_o = A_fX_o-\lambda EX_o=\bar{0} \Rightarrow AX_o=\lambda X_o,$$

т.е. λ – собственное значение оператора f.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>. Известна основная теорема алгебры, которая говорит о том, что любой многочлен, степень которого не меньше 1, с комплексными коэффициентами в поле комплексных чисел имеет хотя бы один корень. Так вот согласно ей, если мы рассматриваем векторное пространство V_K над полем К, подполем поля комплексных чисел, тогда любой линейный оператор, который действует на этом векторном пространстве, имеет хотя бы одно собственное значение.

А сейчас рассмотрим множество собственных векторов линейного оператора, соответствующих одному и тому же собственному значению линейного оператора f. Для этого множества справедлива лемма.

ЛЕММА 3.15.5. Множество всех собственных векторов линейного оператора f, действующего на конечномерном векторном пространстве V_K, соответствующих собственному значению λ этого оператора, вместе с нулевым вектором, образует векторное подпространство в V_K.

<u>*Доказательство*</u>. Если векторы X и Y лежат в этом множестве, т.е. являются собственными векторами, соответствующими одному и тому же собственному значению линейного оператора f, то $f(X+Y)=f(X)+f(Y) = \lambda X+\lambda Y = \lambda(X+Y)$. Отсюда и сумма X+Y также является собственным вектором, соответствующим собственному значению λ.

Нулевой вектор добавляется по условию, а существование противоположного вектора для каждого собственного вектора следует из того условия, что

$$f(\mu X)= \mu f(X) = \lambda (\mu X),$$

т.е. если X собственный вектор, соответствующий собственному значению λ, то и μX также будет собственным вектором, соответствующим собственному значению λ. Если сейчас взять μ=-1, то получим, и противоположный вектор для произвольного собственного вектора X, соответствующего данному собственному значению λ также будет собственным вектором, соответствующим тому же собственному значению.

Как уже отмечалось ранее, доказывать согласованность операций не нужно, так как это все векторы из векторного пространства V_K, где все эти операции уже хорошо согласованы.

ОПР. Подпространство в векторном пространстве V_K, на котором действует линейный оператор f, образованное собственными векторами этого оператора f, соответствующими данному собственному значению λ вместе с нулевым вектором), называется **собственным подпространством линейного оператора f, соответствующим собственному значению** λ и обозначается $\mathbf{Q}_\lambda$**.**

Сразу заметим, что собственное подпространство $\mathbf{Q}_\lambda$ инвариантно, относительно действия данного линейного оператора f.

ЛЕММА 3.15.6. Собственное подпространство линейного оператора f, который действует на векторном пространстве V_K, является инвариантным подпространством в V_K относительно действия оператора f.

Доказательство. Если X из Q_λ, тогда $f(X)= \lambda X$, а λX также лежит в этом же пространстве Q_λ. Это связано с тем, что операции умножение на скаляр из поля К замкнуто на векторном пространстве.

Также справедлива и следующая теорема.

ЛЕММА 3.15.7. Собственные векторы линейного оператора f, действующего на конечномерном векторном пространстве V_K, соответствующие различным собственным значениям этого оператора, линейно независимы.

Доказательство. Докажем это индукцией по числу различных собственных значений линейного оператора f, действующего на V_K.

Для n=1 верно, так как собственный вектор является ненулевым, то он один всегда линейно независим.

Допустим, что для всех, меньших n верно, докажем, что верно для n. Пусть $X_1,X_2,X_3,..,X_n$ - собственные векторы, соответствующие различным значениям $\lambda_1, \lambda_2,.., \lambda_n$. Рассмотрим линейную комбинацию нулевого вектора

$$a_1X_1+a_2X_2+...+a_nX_n = \bar{0}. \qquad (4)$$

Нужно показать, что тогда все $a_i=0, i=1,2,\dots,n$.

Воздействуем на равенство (4) оператором f. Тогда

$$a_1f(X_1) + a_2f(X_2) + ..+a_nf(X_n) = a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_2X_2 + ..+a_n\lambda_nX_n = f(\bar{0})=\bar{0} \qquad (5)$$

Из равенства (5) вычтем (4), умноженное на λ_1. Получаем, что

$$a_2(\lambda_2-\lambda_1)X_2 + ..+a_n(\lambda_n-\lambda_1)X_n = \bar{0} \qquad (6)$$

По предположению индукции вектора $X_2,X_3,..,X_n$ - линейно независимы, и по условию все $\lambda_i \neq \lambda_1$, то отсюда и следует, что в равенстве (6) все $a_i=0$, $i=2,3,\dots,n$. Поэтому, в силу равенства (4), отсюда и следует, что и $a_1=0$, а, следовательно, вся система векторов $\{X_i\}$, $i=1,2,..,n$, линейно независима.

Следовательно, любой набор собственных векторов линейного оператора, соответствующих различным собственным значениям этого оператора, является линейно независимой системой векторов.

Знание материала уже позволяет ответить нам на вопрос, который ставился в начале параграфа: для каких линейных операторов найдется базис, в котором матрица этого оператора будет иметь диагональный вид. Но сначала докажем один вспомогательный результат.

ЛЕММА 3.15.8. Пусть f – линейный оператор, действующий на n-мерном векторном пространстве V_R с простым спектром $\{\lambda_1, \lambda_2,.., \lambda_n\}$. Пусть $e_1,e_2,..,e_n$ собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2,.., \lambda_n$, соответственно. Тогда система векторов $\{e_1,e_2,..,e_n\}$ является базисом пространства V_R.

Доказательство. Из теоремы 3.15.7 набор векторов $e_1,e_2,..,e_n$ является линейно-независимой системой векторов. Так как их n, и размерность пространства V_K, на котором действует линейный оператор f, и где лежат все векторы данного набора, также n, то по следствию теоремы 3.3.3, данный набор векторов $\{e_1,e_2,..,e_n\}$ будет базисом.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что если базис составлен из собственных векторов, то матрица оператора в таком базисе будет иметь диагональный вид, так как любой собственный вектор X (пусть это i-ый базисный вектор из данного базиса), соответствующий собственному значению λ линейного оператора f переходит в λX. Отсюда соответствующий столбец матрицы линейного оператора в таком базисе будет иметь вид: $\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Однако, не только для операторов с простым спектром матрица будет иметь диагональный вид. Сделаем некоторое обобщение предыдущего результата.

ТЕОРЕМА 3.15.9 (Критерий диагонализируемости матрицы линейного оператора). Пусть линейный оператор f действует на конечномерном векторном пространстве V_K, $\dim V_K=n$. Для того, чтобы матрица $A_{f,e}$, из $M_n(K)$, линейного оператора f в данном базисе $\{e_i\}$,i=1,2,..,n, векторного пространства V_K была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы каждый базисный вектор e_k был собственным вектором линейного оператора f.

Доказательство. $\Rightarrow$ Если $\{e_k\}$, k=1,..,n – собственные векторы оператора f, т.е. $A_{f,e}e_k=\lambda_k e_k$, то его матрица в данном базисе будет иметь диагональный вид, так как матрица оператора в данном базисе строится из образа базисных векторов под действием этого оператора. (k-ый столбец матрицы $A_{f,e}$ будет иметь вид $\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \lambda_k \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$).

$\Leftarrow$. Если матрица линейного оператора является диагональной в некотором базисе, то, по построению матрицы линейного оператора, все базисные векторы данный оператор переводит в коллинеарные (столбцы матрицы – образы базисных векторов).

СЛЕДСТВИЕ. Если характеристический многочлен оператора имеет n различных корней, то в некотором базисе матрица оператора имеет диагональный вид, причем на диагонали этой матрицы стоят собственные значения этого оператора.

Доказательство этого следствия фактически проводится в замечании после леммы 3.15.8.

ЗАМЕЧАНИЕ. Еще раз обращаю внимание, на то, что из леммы 3.15.8, вовсе не следует, что, если матрица оператора диагонализируема, то есть n различных собственных значений. Важно, чтобы было n линейно независимых собственных векторов, и вовсе не обязательно, чтобы все они относились к различным собственным значениям.

Можно сформулировать этот критерий, когда матрица линейного оператора диагонализируема, и по-другому.

ТЕОРЕМА 3.15.10. Пусть линейный оператор f действует на конечномерном векторном пространстве V_K, $\dim V_K=n$. Если сумма размерностей всех собственных подпространств, соответствующих различным собственным значениям оператора f, равна размерности V_K, на котором этот оператор действует, тогда матрица оператора диагонализируема в некотором базисе V_K.

УПР. Доказать, что теорема 3.15.10 верна.

ПРИМЕР. Пусть f – линейный оператор, действующий на R^4. Диагонализируема ли матрица этого линейного оператора, если матрица его в стандартном базисе имеет вид $A_{f,e}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Решение. Находим, что $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, причем оба корни кратности 2.

Находим Q_{λ_1}. Для этого рассмотрим однородную систему $(A_{f,e}-E)X=0$. Получаем, что матрица этой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решаем, удаляя нулевые и одинаковые строки, и получаем, что решением будет множество векторов вида $X=\begin{pmatrix} t_1 \\ -2t_2 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, т.е. можно взять два линейно-независимых вектора, например $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Эти векторы являются собственными векторами данного линейного оператора, соответствующими собственному значению $\lambda=1$.

Аналогично для Q_{λ_2}. Получаем матрицу однородной системы $(A_{f,e}-2E)X=0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решаем, удаляя нулевые и одинаковые строки, и получаем, что решением будет множество векторов вида X=$\begin{pmatrix} t_3 + t_4 \\ t_3 \\ -2t_4 \\ t_4 \end{pmatrix}$, т.е. можно взять два линейно-независимых вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Эти векторы будут собственными векторами данного оператора, соответствующими собственному значению $\lambda = 2$.

Сейчас найдем матрицу оператора f в базисе

$$X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ X_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ X_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ X_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По определению первый столбец матрицы оператора f в базисе есть образ первого базисного вектора, а он равен X_1, так как это собственный вектор, отвечающий собственному значению λ=1. Следовательно, первый столбец матрицы имеет вид $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Аналогично, и второй столбец матриц имеет вид $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Для третьего и четвертого получаем, что $A^3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; а $A^4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Следовательно, матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид

$$A_{f,X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

§ 3.16 КОРНЕВЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Продолжим изучение свойств различных подпространств V_K, на котором действует данный линейный оператор f.

ОПР. Вектор $X \neq \bar{0}$ конечномерного векторного пространства V_K, $\dim V_k=n$, называется **присоединенным вектором**, соответствующим собственному значению λ линейного оператора f с матрицей A_f в каком-то базисе V_k, если найдется натуральное k:

$$(A_f-\lambda E)^k X=\bar{0}.$$

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>. Заметим, что все собственные вектора являются присоединенными векторами. Для них можно взять k=1.

ЛЕММА 3.16.1 Пусть линейный оператор f действует на конечномерном векторном пространстве V_K, $\dim V_k=n$, A_f его матрица в каком-то базисе V_K, и λ- собственное значение оператора f. Тогда множество векторов, удовлетворяющих условию $(A_f-\lambda E)^k X=\bar{0}$, для некоторого натурального k, образует векторное подпространство пространства V_K.

<u>*Доказательство*</u>. Сразу заметим, что $\bar{0}$ лежит в рассматриваемом множестве векторов, так как любая натуральная степень матрицы $(A_f-\lambda E)$ переводит $\bar{0}$ в $\bar{0}$, т.е.

$$(A_f-\lambda E)^k\,\bar{0}=\bar{0}.$$

Пусть X и Y - два присоединенных вектора, которые удовлетворяют условию

$$(A_f-\lambda E)^k X=\bar{0} \quad \text{и} \quad (A_f-\lambda E)^t Y=\bar{0}.$$

Положим (без ограничения общности), что $k \geq t$. Тогда, в силу свойств арифметики матриц, выполняется и следующее равенство:

$$(A_f-\lambda E)^k (X+Y)=(A_f-\lambda E)^k X+(A_f-\lambda E)^k Y=\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}.$$

Таким образом, сумма любых двух таких присоединенных векторов также лежит в рассматриваемом множестве присоединенных векторов.

Если X: $(A_f-\lambda X=\bar{0}$, то и для вектора $(\mu X), \forall \mu \in K$, также выполняется равенство $(A_f-\lambda E)^k(\mu X)=\mu((A_f-\lambda E)^k)X=\bar{0}$. Отсюда получаем, что и вектор $(\mu X), \forall \mu \in K$, лежит в рассматриваемом множестве присоединенных векторов. Ну а так как можно взять λ = -1, то и вектор (-1)X=-X – противоположный для X вектор также лежит в рассматриваемом нами множестве.

ОПР. Пусть линейный оператор f действует на векторном пространстве V_K и A_f его матрица в каком-то базисе. Тогда множество векторов X из V_K, для которых найдется натуральное k, удовлетворяющее свойству $(A_f-\lambda E)^k X=\bar{0}$, т.е. множество векторов, о котором говорится в лемме 3.16.1 называется **корневым подпространством векторного пространства V_K, соответствующим собственному значению λ оператора f**, а его элементы называются **корневыми или присоединенными векторами**. Это подпространство обозначается через $\mathbf{W}_\lambda$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Понятно, что если k=1, для λ – данного собственного значения линейного оператора f, то множество векторов, для которых будет выполняться равенство

$(A_f-\lambda E)X=\bar{0}$ (где A_f, – матрица линейного оператора в каком-то базисе), будет собственным подпространством – Q□, т.е. собственное подпространство – $Q\lambda$ – является подпространством корневого W_λ, соответствующего данному собственному значению λ.

ПРИМЕР: Найти корневое подпространство для линейного оператора, матрица которого в каком-то базисе R^3, на которой он действует, имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, соответствующее собственному значению этого линейного оператора $\lambda=1$.

Решение. Находим собственные значения этого линейного оператора. Для их нахождения рассматриваем его характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Вычисляем определитель и находим, что он имеет вид: $(1-\lambda)^3=0$. Отсюда собственное значение этого линейного оператора одно и оно равно 1. Сейчас находим все решения матричного уравнения $(A-E)X=\bar{0}$, т.е. находим все собственные векторы X, соответствующие собственному значению 1. Это матричное уравнение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решениями уравнения будут векторы вида $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, t из R.

Сейчас находим множество векторов, которые являются решениями матричного уравнения $(A-E)^2X=\bar{0}$, или $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Несложно найти, что решениями этого уравнения будут векторы вида $\begin{pmatrix} t \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$, $t,q\in R$.

Ну и заметив, что $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, мы видим, что решением матричного уравнения $(A-E)^3X=\bar{0}$, или $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ будет произвольный вектор из R^3. Отсюда можно сделать вывод, что $W_1=R^3=V_K$, т.е корневое подпространство в этом случае совпадает со всем векторным пространством, на котором действует данный линейный оператор.

ЛЕММА 3.16.2. Пусть f линейный оператор, который действует на конечномерном векторном пространстве V_{K}., $\dim V_K$=n, и λ - некоторое собственное значение этого линейного оператора. Корневое подпространство W_{λ} – линейного оператора f, соот-ветствующее собственному значению λ, является инвариантным относительно действия линейного оператора f.

<u>Доказательство</u>. Пусть вектор X лежит в W□□– корневом подпространстве, соответствующем собственному значению □ этого линейного оператора f. Тогда проверим, лежит ли образ вектора X, т.е. вектор A_fX (здесь A_f матрица данного линейного оператора в каком-то базисе) в этом же корневом подпространстве, т.е. в W_{λ}. Вспомним, что по лемме 3.15.2 все инвариантные для линейного оператора f с матрицей A_f являются инвариантными и для линейного оператора, с матрицей A_f-tE, где t – произвольный скаляр из поля K. Значит, можно взять в качестве t собственное значение λ, и проверить выполняется ли для вектора $(A_f-\lambda E)X$ следующее равенство:

$$(A_f-\lambda E)^k((A_f-\lambda E)X) = (A_f-\lambda E)^{k+1}X = \bar{0}\,.$$

Понятно, что для вектора X это равенство выполняется, так как по определению X – корневой вектор из W□, следовательно, получаем, что W□ – инвариантное подпространство относительно действия линейного оператора с матрицей A_f, т.е. оператора f.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>. Пусть линейный оператор f действует на каком-то конечномерном векторном пространстве V_K, $\dim V_K$=n.Тогда ввиду леммы 3.16.2, если мы найдем какое-то корневое подпространство данного линейного оператора f, например Wλ, соответствующее собственному значению λ данного линейного оператора f, и найдем $\{e_i\}$,i=1,2…,m, базис этого корневого подпространства W□, то матрица оператора в этом базисе будет иметь блочный вид вида: $A_{f,e}=\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, где матрицы $B\in M_m(K)$; $C\in M_{m,n-m}(K)$; $D\in M_{n-m}(K)$, **0** – нулевая матрица в

$M_{n-m,m}$ (K). Это связано с тем, что если есть базис векторного подпространства W_{λ}, то его базис $\{e_i\}$,i=1,2…,m, согласно теореме 3.3.3, можно дополнить до базиса всего пространства V_K, $\{e_i\}$,i=1,2…,n. Матрица линейного оператора в данном базисе (по определению) будет строиться из образов базисных векторов. Заметим, что образы первых m векторов (корневые векторы из W_{λ}) будут лежать в этом же W_{λ}, т.е. будут выражаться через эти же m первых базисных векторов, т.е. остальные базисные векторы e_{m+1}, e_{m+2}, … e_n входят с нулевыми коэффициентами.

Таким образом, матрица линейного оператора несколько упрощается.

Для дальнейшего упрощения матрицы линейного оператора в общем виде, нам потребуются три теоремы, которые мы сформулируем без доказательства.

ТЕОРЕМА 3.16.3. Пусть f линейный оператор, действующий на конечномерном векторном пространстве V_K, т.е. $f:V_K\to V_K$, $\dim V_K$=n, и $X_1,\ldots,X_t$: $X_1\in W_{\lambda_1}$, $X_2\in W_{\lambda_{12}}$, …., $X_t\in W_{\lambda_t}$, система ненулевых векторов, принадлежащих различным корневым подпространствам этого линейного оператора, тогда эта система векторов является линейной независимой системой векторов.

Заметим, что доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3.15.7. Доказательство данной теоремы можно найти в работе

Вторая теорема, которая вытекает из предыдущей.

ТЕОРЕМА 3.16.4. Пусть f линейный оператор, действующий на конечномерном векторном пространстве V_K, т.е. $f:V_K \to V_K$, $\dim V_K=n$, и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ – все различные собственные значения данного линейного оператора f. Тогда $V_K = W_{\lambda_1} \oplus W_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus W_{\lambda_t}$ т.е. векторное пространство V_K раскладывается в прямую сумму корневых подпространств.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>. Теореме 3.16.4 говорит о том, что любой вектор X из конечномерного векторного пространства V_K, не котором действует линейный оператор f, лежит в каком-то корневом подпространстве W_λ пространства V_K, т.е. для него найдется натуральное k: $(A_f - \lambda E)^k X = \bar{0}$,для некоторого собственного значения λ линейного оператора f, где A_f - матрица f в некотором базисе V_K.

Ну и наконец, третья теорема, которая определяет размерность корневого подпространства W□.

ТЕОРЕМА 3.16.5. Пусть f линейный оператор, действующий на конечномерном векторном пространстве V_K, т.е. $f:V_K \to V_K$, $\dim V_K=n$ и W□ корневое подпространство данного линейного оператора, соответствующее некоторому собственному значению линейного оператора f. Тогда dim W□□равна кратности собственного значения λ, как корня характеристического многочлена линейного оператора f.

На основании этих трёх теорем и в связи с замечанием выше, мы видим, что матрицу линейного оператора f можно упростить.

Пусть $W_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}, \ldots, W_{\lambda_t}$ – все различные корневые подпространства в векторном пространстве V_K, $\dim V_K=n$, на котором действует линейный оператор f. Так как V_K представляется в виде прямой суммы этих корневых подпространств (по теореме 3.16.5), то базис всего пространства V_K $\{e_i\}, i=1,\ldots,n$ можно получить из объединения базисов этих корневых подпространств (согласно теореме 3.5.3). Если мы будем рассматривать матрицу линейного оператора в этом базисе, то получим, что образы базисных векторов, которые лежат в корневом подпространстве W_{λ_i}, будут лежать в этом же корневом подпространстве W_{λ_i}, т.е. будут выражаться через этот же базис корневых векторов из W_{λ_i}. Таким образом, A_f - матрица линейного оператора в данном базисе будет иметь блочно-диагональный вид:

$$A_f=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & A_2 & .. & .. \\ \ldots & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & A_t \end{pmatrix}, \text{ где матрица } A_i \text{ из } M_m(K), \text{ где } m_i=\dim W_{\lambda_i},\ i=1,2,..,t.$$

Продолжим изучать вопрос об упрощении матрицы линейного оператора более детально, когда в конечномерном векторном пространстве V_K, на котором действует данный линейный оператор f, нет базиса из собственных векторов.

Для этого нужно ввести ещё несколько новых понятий.

ОПР. Пусть V_K конечномерное векторное пространство, на котором действует линейный оператор f, тогда вектор $X \in V_K$, называется **присоединенным (или корневым) вектором высоты h** (h-натуральное), **соответствующим собственному значению λ, линейного оператора f, с матрицей A_f в некотором базисе V_K,** если

$$(A_f - \lambda E)^{h-1} X \neq \bar{0} \quad \text{и} \quad (A_f - \lambda E)^{h} X = \bar{0}$$

Рассмотрим пример нахождения высоты корневого вектора для линейного оператора, который рассматривался в предыдущем примере нахождения корневого подпространства.

ПРИМЕР. Найти корневой вектор высоты 3, соответствующий собственному значению λ=1 линейного оператора, матрица которого в каком-то базисе R^3, на которой он действует, имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Как уже было показано выше, что корневым подпространством $W_\lambda = W_1$ данного линейного оператора будет все R^3, причем мы нашли, что решениями матричного уравнения $(A-E)X=\bar{0}$, т.е. множеством корневых векторов, высота которых будет равна 1 (а сами они ненулевые), есть множество векторов вида $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, t из $R\backslash\{0\}$.

Отсюда несложно показать, что все остальные ненулевые векторы (по замечанию выше), имеют высоту не меньшую 2.

Решениями матричного уравнения $(A-E)^2X=\bar{0}$, т.е. векторами, высота которых не больше двух, будут векторы вида $\begin{pmatrix} t \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$, t,q из R. Отсюда получаем, что все векторы $\begin{pmatrix} t \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$, t из R и q из $R\backslash\{0\}$ будут иметь высоту 2. Следовательно, все остальные векторы из R^3, которые не являются решениями уравнения $(A-E)^2X=\bar{0}$ (заметим еще раз, что нулевой вектор является решением этого уравнения), имеют высоту 3. Например, это вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ или просто $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим следующую лемму.

ЛЕММА 3.16.6. Пусть f линейный оператор, действующий на конечномерном векторном пространстве V_K, т.е. $f: V_K \to V_K$, $\dim V_K = n$, и W_λ - корневое подпространство, соответствующее собственному значению λ данного линейного оператора f. Тогда множество присоединенных векторов из W□, высота которых не превышает h, h-натуральное, вместе с $\bar{0}$ из V_K, образует векторное подпространство в W□, и его будем обозначать через P_h.

Доказательство. Если X и Y векторы из W_λ, высота которых не превосходит m, тогда и

$$(A-\lambda E)^h(X+Y) = (A-\lambda E)^h X + (A-\lambda E)^h Y = \bar{0}.$$

Таким образом, и высота суммы векторов X+Y – также не превосходит m.

Аналогично можно получить и то, что

$$(A-\lambda E)^k(\alpha X) = \alpha(A-\lambda E)^k X,$$

где α - произвольный скаляр из поля K. Таким образом, получаем, что и αX (в частности, и –X), также имеет высоту, не превышающую h.

По условию $\bar{0}$ лежит в рассматриваемом множестве. Следовательно, рассматриваемое множество векторов образует векторное подпространство в W_λ.

Несложно видеть, что

$$\{0\} = P_o \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3 \subseteq .... \subseteq P_h.$$

Заметим, что $P_1 = Q_\lambda$ – собственное подпространство оператора A, соответствующее рассматриваемому собственному значению λ.

Рассмотрим один частный случай.

ОПР. Оператор f, действующий на конечномерном векторном пространстве V_K, $\dim V_k = n$, называется **одноклеточным**, если максимальная высота его корневого вектора совпадает с размерностью всего векторного пространства V_K.

<u>ЗАМЕЧАНИЕ</u>. Заметим, что в этом случае у f одно собственное значение, и кратность этого значения равна $n=\dim V_K$, т.е. речь идет об одном корневом подпространстве W□, которое совпадает с V_K.

ЛЕММА 3.16.7. Пусть f одноклеточный линейный оператор, действующий на конечномерном векторном пространстве V_K, т.е. $f:V_K \to V_K$, $\dim V_K=n$, матрица которого в некотором базисе равна A_f, W_λ - корневое подпространство, соответствующее собственному значению λ данного линейного оператора f, и вектор $X \in W_\lambda$ – присое-диненный вектор высоты h ($h \geq 1$) оператора f. Тогда система векторов $\{X,(A_f-\lambda E)X,(A_f-\lambda E)^2X,...(A_f-\lambda E)^{h-1}X\}$ является линейно независимой системой векторов и образует базис V_K=W□.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим линейную комбинацию нулевого вектора

$$a_1X + a_2(A_f-\lambda E)X + a_3(A_f-\lambda E)^2X+...+a_h(A_f-\lambda E)^{h-1}X = \bar{0} \qquad (1)$$

Подействуем на выражение (1) матрицей $(A_f-\lambda E)^{h-1}$ и получим, что $a_1(A_f-\lambda E)^{h-1}X = \bar{0}$

Отсюда получаем, что $a_1=0$, так как высота вектора X равна h, поэтому $(A_f-\lambda E)^{h-1}X \neq \bar{0}$.

Подействуем на оставшееся выражение (1) (после удаления вектора $a_1X=0X=\bar{0}$) матрицей $(A_f-\lambda E)^{h-2}$ и получим, что

$$a_2(A_f-\lambda E)^{h-1}X = \bar{0}\,.$$

Отсюда $a_2=0$, так как высота вектора X равна h.

Действуем так и далее, и получаем, что все $a_i=0$, $i=1,2,..,h$. Следовательно, система векторов

$\{X, (A_f-\lambda E)X,(A_f-\lambda E)^2X,...(A_f-\lambda E)^{h-1}X\}$ линейно независима.

Так как у нас есть h линейно независимых векторов, и размерность V_K, на котором действует линейный оператор f, равна h (так как оператор одноклеточный), то по следствию 1 теоремы 3.3.3, эта система векторов также будет базисом пространства V_K .

ОПР. Пусть f одноклеточный линейный оператор, действующий на конечномерном векторном пространстве V_K, т.е. $f:V_K \to V_K$, $\dim V_K=n$, матрица которого в некотором базисе равна A_f, W_λ – корневое подпространство, соответствующее собственному значению λ данного линейного оператора f, $X \in W_\lambda$ - присоединенный вектор высоты h ($h \geq 1$) линейного оператора f. Линейную оболочку векторов $<X,(A_f-\lambda E)X,(A_f-\lambda E)^2X,..., (A_f-\lambda E)^{h-1}X>$ будем называть **циклическим подпространством оператора f** и обозначим через $H_{\lambda,h}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что если f одноклеточный линейный оператор, действующий на конечномерном векторном пространстве V_K, то у него помимо того, что одно собственное значение λ, но и одно циклическое подпространство, которое совпадает и с W_λ и с V_K.

Покажем, что циклическое подпространство $H_{\square,h}$, является инвариантным относительно действия f. Для этого докажем лемму.

ЛЕММА 3.16.8. Пусть f одноклеточный линейный оператор, действующий на конечномерном векторном пространстве V_K, т.е. $f:V_K \to V_K$, $\dim V_K=n$, матрица которого в некотором базисе равна A_f. Тогда циклическое подпространство $H_{\lambda,h}$, т.е. векторное пространство, образованное системой векторов

$$\{X, (A_f-\lambda E)X, (A_f-\lambda E)^2X,...(A_f-\lambda E)^{h-1}X\},$$

где $X \in W_\lambda$ – присоединенный вектор высоты h ($h \geq 1$), является инвариантным относительно действия линейного оператора f.

Доказательство. Пусть вектор u лежит в $H_{\lambda,h}$. Тогда этот вектор является линейной комбинацией векторов $\{X, (A_f-\lambda E)X, (A_f-\lambda E)^2X,...(A_f-\lambda E)^{h-1}X\}$.

$$u = \mu_1 X + \mu_2(A_f - \lambda E)X + \ldots + \mu_h(A_f - \lambda E)^{h-1}X \quad (2)$$

По лемме 3.15.2 инвариантные подпространства для оператора f с матрицей A_f и с матрицей $A_f-\lambda E$ совпадают. Поэтому подействуем на u матрицей $(A_f-\lambda E)$. Понятно, что выражение (2) вновь перейдет в выражение такого же вида, т.е. полученный вектор будет также лежать в $H_{\lambda,h}$. Таким образом, получаем, что $H_{\lambda,h}$ – инвариантно относительно действия линейного оператора f.

Сейчас рассмотрим, какой вид будет иметь одноклеточный оператор в базисе, о котором идет речь в лемме 3.16.7.

По лемме 3.16.7 получаем, что если оператор f с матрицей A_{f_f} - одноклеточный и его корневой вектор X имеет высоту $h=\dim V_k=W_\square$, то в качестве базиса W_λ - можно взять набор векторов, про который идет разговор в лемме 3.16.7, а именно, $\{X,(A_f-\lambda E)X, (A_f - \lambda E)^2X,...(A_f - \lambda E)^{h-1}X\}$. Обозначим их следующим образом:

$e_h=X$, $e_{h-1}=(A_f-\lambda E)X$, $e_{h-2}=(A_f-\lambda E)^2X$,... $e_1=(A_f-\lambda E)^{h-1}X$.

Тогда

$e_h=X$,

$e_{h-1} = (A_f-\lambda E)X = (A_f-\lambda E)e_h$,

$e_{h-2}=(A_f-\lambda E)e_{h-1}$,

$e_{h-3}=(A_f-\lambda E)e_{h-2}$,

$e_1=(A_f-\lambda E)e_2$.

Отсюда получаем, что для любого i=1,..h $e_i= (A_f-\lambda E)e_{i+1}$.

Из этого равенства получаем, что $A_fe_{i+1} = e_i+\lambda e_{i+1}$

О чем же это говорит?

Это говорит о том, что если мы рассмотрим действие оператора f на таком векторном подпространстве, то матрица его в этом базисе будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & .. & .. \\ .. & 0 & \lambda & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .. & \lambda \end{pmatrix}$$

ОПР. Жордановой клеткой порядка t, относящейся к числу □, называется квадратная матрица порядка t вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & .. & .. \\ .. & 0 & \lambda & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .. & \lambda \end{pmatrix} \text{ из } M_t(K), \text{ где К поле.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В некоторых учебниках жордановой клеткой порядка t называется матрица вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & .. & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & .. & 0 & 0 \\ .. & 1 & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .1 & \lambda \end{pmatrix} \text{ из } M_t(K), \text{ где К поле.}$$

Это связано с тем, что по-другому записывается матрица перехода от базиса к базису.

ОПР. Пусть f линейный оператор, действующий на конечномерном векторном пространстве V_K, т.е. $f{:}V_K \rightarrow V_K$, $\dim V_K=n$, матрица которого в некотором базисе равна A_f. **Жордановой формой матрицы линейного оператора f** называется блочно-диагональная матрица $A_{f,e}$ вида:

$$A_{f,e} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & .. & .. & .. \\ .. & \Delta_2 & .. & .. \\ .. & ... & .. & .. \\ .. & .. & .. & \Delta_t \end{pmatrix}, \text{ где } \Delta_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .. & \lambda_i \end{pmatrix}$$

- жорданова клетка, к которой приводится (при определенном выборе базиса V_K) A_f - матрица линейного оператора f.

Рассмотрим примеры жордановых форм матриц некоторых линейных операторов.

ПРИМЕРЫ: а) Найти жорданову форму линейного оператора дифференцирования многочленов, с вещественными коэффициентами от одной переменной, степень которых не превосходит трех.

Решение. Рассмотрим базис $e_1=1$, $e_2=x$, $e_3=x^2$, $e_4=x^3$. В таком базисе матрица оператора дифференцирования $A_{f,e}$ (по определению) будет иметь вид

$$A_{f,e}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Используя данную матрицу, можно найти все собственные значения оператора дифференцирования. Несложно показать, что характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^5=0$. Отсюда собственными значениями будет только $\lambda=0$.

Заметим, что $A_{f,e}-\lambda E=A_{f,e}$,

и $(A_{f,e}-\lambda E)^2=\ A_{f,e}^2=\begin{pmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$;

$(A_{f,e}-\lambda E)^3=A_{f,e}^3=\begin{pmatrix}0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$;

$(A_{f,e}-\lambda E)^4=A_{f,e}^4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

Следовательно, все рассматриваемое множество многочленов имеет высоту не более 4, так как под действием на него матрицей $(A_{f,e}-\lambda E)^4=A_{f,e}^4$ он обратится в нулевой многочлен. Причем, понятно, что $e_4=x^3$ имеет высоту 4. Значит, циклическое подпространство, образованное системой векторов $\{6;\ 6x;\ 3x^2;\ x^3\}$, будет совпадать со всем пространством рассматриваемых многочленов, и ему будет соответствовать жорданова клетка высоты 4, и оператор дифференцирования является одноклеточным оператором. Итак, жорданова форма оператора дифференцирования на $R[x]_3$ имеет вид: $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. Заметим, что базис, в котором оператор дифференцирования имеет такой вид также известен, это $m_1=6$; $m_2=6x$; $m_3=3x^2$; $m_4=x^3$.

б) Пусть на R^3 действует линейный оператор f, матрица которого в некотором базисе имеет вид: $A_f=\begin{pmatrix}3&-3&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. Найти жорданову форму матрицы данного линейного оператора и соответствующий этому базис.

Решение. Характеристический многочлен данного линейного оператора имеет вид

$$f(\lambda)=1-3\lambda+3\lambda^2-\lambda^3=(1-\lambda)^3.$$

Следовательно, есть только одно собственное значение $\lambda=1$.

Найдем $(A_f\text{-}E)$; $(A_f\text{-}E)^2$; $(A_f\text{-}E)^3$. Это будут следующие матрицы:

$$(A_f\text{-}E)=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix};\ (A_f\text{-}E)^2=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix};$$

$$(A_f\text{-}E)^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Находим вектор, высота которого равна 3, т.е. размерности всего R^3, на котором действует данный линейный оператор. В качестве такого вектора можно взять вектор $X=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$,

так как $(A_f\text{-}E)^2X \neq \bar{0}$. Тогда система векторов $\{(A_f\text{-}E)^2X,\ (A_f\text{-}E)X,\ X\}$ образует линейную оболочку (или циклическое подпространство), которая совпадает со всем R^3. А если взять их в качестве базиса $\{m_i\}$,i=1,2,3, (именно в таком порядке), то получим, что в таком базисе матрица данного оператора будет иметь жорданову форму, а точнее вид:

$$A_{f,m}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Данную задачу можно было решить и несколько по иному плану. После нахождения собственного значения можно показать, что собственным вектором, соответствующим 1, есть вектор $X=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. Он всего лишь один, поэтому, не может быть двух циклических подпространств, так как в любом циклическом подпространстве есть вектор высоты 1 (и он единственный), а пересечение двух циклических подпространств возможно только по нулевому вектору (см. теорему 3.16.9).

Следовательно, может быть только одно циклическое подпространство $H_{\square}$, и его размерность будет равна 3 (т.е. линейный оператор – это вновь одноклеточный оператор). Поэтому, матрица данного линейного оператора будет иметь вид жордановой клетки порядка 3.

Однако, для нахождения искомого базиса нужно найти вектор высоты 3, поэтому придется также подсчитывать матрицы $(A_f\text{-}E)$; $(A_f\text{-}E)^2$; $(A_f\text{-}E)^3$, и базисом может быть тот же набор векторов

$$m_1=(A_f\text{-}E)^2X=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix};\ m_2=(A_f\text{-}E)X=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix};\quad m_3=X=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Подведем некоторые итоги нахождения жордановой формы матрицы линейного оператора.

Пусть f линейный оператор, действующий на конечномерном векторном пространстве V_K, т.е. $f:V_K \to V_K$, $\dim V_K=n$, и пусть W_λ : $\dim W_\lambda=m$ (m-кратность собственного значения λ как корня характеристического многочлена линейного оператора f). Можно, дополнить базис

W_λ до базиса всего V_K, и пусть в этом базисе матрица этого линейного оператора равна A_f (при этом $V_K=W_\lambda \oplus H$, где H – образовано теми базисными векторами, которые не входят в W_λ). Тогда, как уже было показано выше, в матрице A_f есть блок (т.е. квадратная матрица mxm, главная диагональ которой совпадает с главной диагональю матрицы A_f, так как можно считать, что первые m базисных векторов лежат в W_λ), который соответствует данному корневому подпространству W_λ.

Рассмотрим, каким образом представить этот блок матрицы A_f в виде жордановых клеток. Запишем это все в виде алгоритма.

1 ШАГ. Находим r_1- размерность пространства решений матричной однородной системы линейных уравнений $(A_f-\lambda E)X=\bar{0}$.

Так как в каждом циклическом подпространстве (образованном корневыми векторами, соответствующими собственному значению λ), есть ровно один вектор высоты 1, то этим самым мы определяем, сколько таких циклических подпространств, а следовательно, сколько всего жордановых клеток для данного собственного значения будет. Их будет ровно r_1 (среди них могут быть и совершенно одинаковые). Заметим, что r_1 – размерность собственного подпространства линейного оператора f, соответствующего собственному значению λ. И переходим к шагу 2.

2 ШАГ. Находим r_2 - размерность пространства решений матричной однородной системы линейных уравнений $(A_f-\lambda E)^2X=\bar{0}$.

Это множество векторов содержит все векторы, которые были определены на первом шагу, поэтому, если размерности совпали, тогда алгоритм останавливается и пишется ответ. Жорданова форма блока матрицы A_f - матрицы линейного оператора, который соответствует собственному значению λ линейного оператора f, имеет вид из r_1=m жордановых клеток порядка 1, (т.е. клеток вида (λ)).

Если же размерности отличаются, т.е. $r_2>r_1$. Тогда разность r_2-r_1 показывает, сколько жордановых клеток, порядок которых не меньше 2, будет присутствовать в жордановой форме матрицы A_f. И переходим к шагу 3.

3 ШАГ. Находим r_3 – размерность пространства решений матричной однородной системы линейных уравнений

$(A_f-\lambda E)^3X=\bar{0}$.

Это множество векторов содержит все векторы, которые были определены на первом и втором шагах, поэтому, если совпали размерности, т.е. $r_3=r_2$, тогда алгоритм останавливается и пишется ответ. Жорданова форма блока матрицы A_f - матрицы линейного оператора, который соответствует собственному значению λ линейного оператора f, имеет вид из r_1 жордановых клеток порядка 1, (т.е. клеток вида (λ)) и r_2-r_1 жордановых клеток высоты 2, т.е клеток вида $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Если же размерности отличаются, т.е. $r_3>r_2$. Тогда разность r_3-r_2 показывает, сколько жордановых клеток, порядок которых не меньше 3, будет присутствовать в жордановой форме матрицы A_f. И переходим к шагу 4. и т.д.

Понятно, в силу конечности m алгоритм всегда заканчивается.
Ответ, если сделано h шагов, то матрица будет иметь следующий вид.

Жорданова форма блока матрицы A_f - матрицы линейного оператора, который соответствует собственному значению λ линейного оператора f, имеет вид из r_1 жордановых клеток порядка 1, (т.е. клеток вида (λ)) и r_2-r_1 жордановых клеток высоты 2, т.е клеток вида $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$,…., r_h-r_{h-1} – жордановых клеток порядка h (т.е. клеток вида $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .. & \lambda \end{pmatrix} \in M_h(K)$). Причем порядок их расположения по главной диагонали блока матрицы (впрочем, и по главной диагонали самой матрицы A_f) не важен.

Для нахождения жордановой формы всей матрицы A_f данный алгоритм нужно использовать ровно t раз, где t – количество различных собственных значений данного линейного оператора, который действует на конечномерном векторном пространстве V_K.

Заметим, что в ходе решения конкретных задач по нахождению жордановой формы матрицы линейного оператора не обязательно находить размерности всех вводимых пространств и их подпространств. Рассмотрим ряд случаев, которые дают достаточно быстрый ответ на вопрос: «найти жорданову форму линейного оператора».

1) Если находим, что линейный оператор имеет простой спектр, т.е. все собственные значения различны, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t$ тогда жорданова форма такого оператора равна диагональной матрице, а по диагонали стоят элементы $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_t$.

2) Если линейный оператор имеет одно собственное значение и имеет только один линейно независимый собственный вектор, т.е. $\dim Q^{\lambda}=1$, тогда жорданова форма такого оператора состоит из одной жордановой клетки, порядок которой равен размерности VK, т.е. данный линейный оператор одноклеточный.

3) Если $\dim V_K=3$ и линейный оператор имеет два различных собственных значения λ_1, λ_2. Тогда для нахождения жордановой клетки линейного оператора достаточно найти только размерность собственных подпространств: $\dim Q\lambda_1$ и $\dim Q\lambda_2$. Если они равны, например, 2 и 1, тогда жорданова форма – имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Если они равны, например, 1 и 1 (других вариантов нет, кроме этого же для второго собственного значения), тогда форма имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Если же встает вопрос о нахождении базиса, в котором матрица линейного оператора имеет жорданову форму, то это более сложный вычислительный вопрос. Для этого на каждом шаге нужно находить и размерность, и базис (т.е. фундаментальную систему решений) пространства решений данных однородных систем уравнений.

На (последнем) h-ом и на (h-1)-ом (предпоследнем) шагах были найдены r_h и r_{h-1} – размерности и, соответственно $\{e_{h,i}\}$, $i=1,..,r_h$ и $\{e_{h-1,i}\}$, $i=1,..,r_{h-1}$, - базисы пространства решений матричных однородных систем линейных уравнений $(A_f-\lambda E)^h X=\bar{0}$ и $(A_f-\lambda E)^{h-1} X=\bar{0}$. Отсюда получаем, что существует ровно (r_h-r_{h-1}) жордановых клеток высоты h. Задаем $(r_h - r_{h-1})$ циклических подпространств, которые образуются $(r_h - r_{h-1})$-мя векторами, высота которых равна h (см. лемму 3.16.7).

Для нахождения этих векторов можно рассмотреть базисные векторы, которые лежат в пространстве решений системы $(A_f-\lambda E)^h X=\bar{0}$ и не лежат в пространстве решений системы $(A_f-\lambda E)^{h-1} X = \bar{0}$.

Аналогично находятся базисные векторы, которые образуют жордановы клетки порядка (h-1). Для этого рассматривается (h-1)-й и (h-2)-й шаги, и также находятся r_{h-1} и r_{h-2} размерности и базисные векторы$\{e_{h-1,i}\}$, $i = 1,..,r_{h-1}$, и $\{e_{h-2,i}\}$, $i=1,..,r_{h-2}$, пространств решений соответствующих однородных систем линейных уравнений: $(A_f-\lambda E)^{h-1} X=\bar{0}$ и $(A_f-\lambda E)^{h-2} X=\bar{0}$. Если$(r_{h-1}-r_{h-2})>(r_h-r_{h-1})$, то это означает, что есть жордановы клетки, порядок которых равен h-1, т.е. есть базисные векторы из $\{e_{h-1,i}\}$ $i=1,..,r_{h-1}$, которые не лежат в (r_h-r_{h-1}) – циклических подпространствах, которые уже образованы на предыдущем шагу. И эти базисные векторы, высота которых равна h-1, могут образовывать

$$(r_{h-1} - r_{h-2}) - (r_h - r_{h-1}) = 2r_{h-1} - r_h - r_{h-2}$$

циклических подпространств (см. лемму 3.16.7). Следовательно, на этом шагу образуется

$$2r_{h-1} - r_h - r_{h-2} + (r_h - r_{h-1}) =(r_{h-1}-r_{h-2})$$

циклических подпространств, т.е. в блоке матрицы есть уже $r_{h-1}-r_{h-2}$ жордановых клеток, высоты которых равны h и h-1.

Продолжая аналогичные рассуждения, мы получим, что на следующем шаге число жордановых клеток, порядка h-2, которые будут в блоке матрицы линейного оператора, соответствующему корневому подпространству W_λ, будет равно

$$(r_{h-2} - r_{h-3}) - (r_{h-1} - r_{h-2}) = 2r_{h-2}-r_{h-1}-r_{h-3},$$

а общее число циклических подпространств будет равно

$$2r_{h-2} - r_{h-1} - r_{h-3} + (r_h - r_{h-2}) = (r_{h-2} - r_{h-3}), \text{ и т.д.}$$

Причем эти $2r_{h-2} - r_{h-1} - r_{h-3}$ циклических подпространства, размерность каждого из которых равна h-2, могут быть образованы базисными векторами, высота которых равна h-2, и которые не лежат в циклических подпространствах, образованных на предыдущих шагах.

ЛИТЕРАТУРА

1. КОСТРИКИН А.И. Введение в алгебру (основы алгебры) – М. Наука, 1994. – 318 с.
2. ИЛЬИН В.А., ПОЗДНЯК Э.Г. Линейная алгебра. (изд.3-е) – М. Наука. 1984. – 296 с.
3. КУРОШ А.Г. Курс высшей алгебры. (изд.9-е) –М.Наука. 1968. – 432 с.
4. ФАДДЕЕВ Д.К. Лекции по алгебре – М.Наука.1984. – 416 с.

Учебное издание

Мерзляков Александр Сергеевич

АЛГЕБРА-2

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция
Компьютерная верстка: В.В. Данилова

Издательство «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб.021
Тел.: +7 (3412) 916-364 E-mail: editorial@udsu.ru