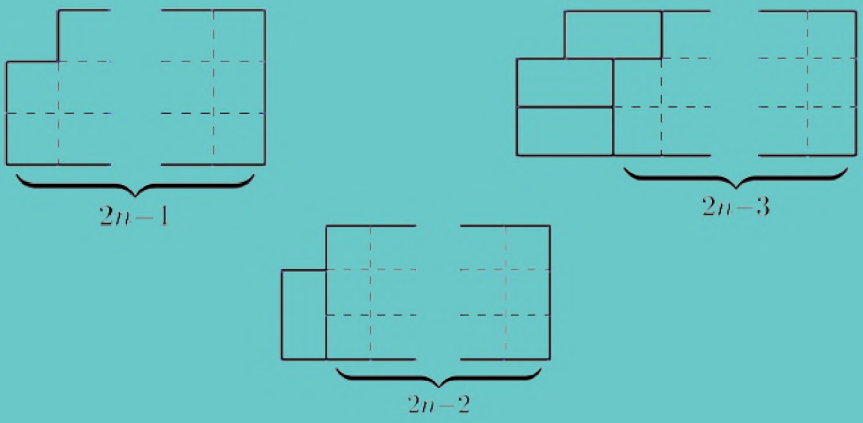
В.Н. Баранов, О.В. Баранова

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Рекуррентные соотношения



Ижевск
2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики

В.Н. Баранов, О.В. Баранова

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ
Рекуррентные соотношения

Учебное пособие

Ижевск
2025

УДК 512.817(075.8)
ББК 22.18я73
Б24

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент каф. прикладной математика и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова» **А.Г. Ицков,** д-р физ.-мат. наук, зав. каф. дифференциальных уравнений ИМИТиФ ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» **С.Н. Попова.**

Баранов В.Н., Баранова О.В.

Б24 Элементы дискретной математики. Рекуррентные соотношения : учеб. пособие / В.Н. Баранов, О.В. Баранова. – Ижевск : Удмуртский университет, 2025. – 61 с.

ISBN 978-5-4312-1224-6

Учебное пособие посвящено рекуррентным соотношениям в дискретной математике. Пособие включает теоретический материал курса лекций по дисциплине «Дискретная математика». Пособие содержит множество примеров. Практическая часть включает задания для самостоятельной работы студентов.

Учебное пособие предназначено для студентов уровней бакалавриата и специалитета, обучающихся по направлениям «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Прикладная информатика», «Фундаментальная и прикладная химия». Пособие будет полезно также студентам бакалавриата и магистратуры других естественно-научных направлений.

УДК 512.817(075.8)
ББК 22.18я73

ISBN 978-5-4312-1224-6

© Баранов В.Н., Баранова О.В., 2024
© ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», 2024

Оглавление

Предисловие 4

1 Три классические задачи 6

2 Линейные разностные уравнения 13

3 Задачи, приводящие к рекуррентным отношениям 35

Литература 61

Предисловие

Понятие “рекуррентность” (англ. “recurrence” — возвращение, повторение) часто встречается в различных научных дисциплинах. Оно используется, например, в биологии (связь с миграцией фауны и флоры), в геологии (повторение состава продуктов вулканического извержения) и во многих других областях знаний.

В математике многие числовые последовательности имеют рекуррентную природу

Наиболее известной задачей, связанной с рекуррентными соотношениями, является задача о кроликах одного из самых значительных западных математиков средневековья, итальянского купца Фибоначчи (Леонардо Пизанского), появившаяся в 1202 г. в книге “Liber Abaci”.

Другой известный пример — треугольник Паскаля — стал широко известен благодаря сочинению французского математика Блеза Паскаля “Трактат об арифметическом треугольнике”, изданном в 1655 году. Именно, в указанном сочинении была опубликована таблица, в которой каждое число было равно сумме двух чисел в предыдущей строке.

Оба этих примера, а также числа Стирлинга первого и второго рода были подробно исследованы в предыдущей части методического пособия [4].

В настоящей части мы исследуем различные задачи, приводящие к рекуррентным отношениям, а также подробно разбираем один из способов решения частного случая рекуррентных отношений — линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

При решении задач упор делается на построение рекуррентного отношения, для чего очень важно ввести удачные обозначения и использовать принцип — *обозначай и властвуй*. Технические детали доказательств общих утверждений опускаются, как выходящие за рамки данного методического пособия.

Глава 1

Три классические задачи

Задачи, в которых появляются рекуррентные отношения, известны очень давно. Напомним, что треугольник Паскаля был известен задолго до 1655 г. В Италии треугольник Паскаля иногда называют треугольником Тартальи, поскольку Никколо Тарталья описал соответствующую таблицу на сто лет раньше Паскаля. Треугольник воспроизведен и на титульном листе учебника арифметики, написанном в начале XVI века Петером Апианом, астрономом из Ингольтштадского университета. Омар Хайям, бывший не только философом и поэтом, но и математиком, знал о существовании треугольника около 1100 года (в Иране эту схему называют треугольником Хайяма), в свою очередь, заимствовав его из более ранних китайских или индийских источников. Этот треугольник изображен на иллюстрации в книге "Яшмовое зеркало четырех элементов" китайского математика Чжу Шицзе, выпущенной в 1303 году. При этом, в Китае считают, что изобрел треугольник другой китайский математик, Ян Хуэй, поэтому китайцы называют его треугольником Яна Хуэя.

В этом параграфе мы рассмотрим три задачи, которые естественным образом приводят к понятию рекуррентного отношения.

ЗАДАЧА О ХАНОЙСКОЙ БАШНЕ

Существует легенда о башне Брамы, которая, как утверждается, состоит из 64 различных дисков чистого золота и трех алмазных шпилей. При сотворении мира Всевышний поместил диски на первый шпиль в порядке уменьшения размеров и повелел, чтобы жрецы переместили их на третий в соответствии с предписанными правилами: переносить каждый раз только один диск и не помещать больший диск на меньший. Жрецы трудятся над этой задачей денно и нощно — как только они закончат, башня рассыплется в прах и наступит конец света.

На основе этой легенды в 1883 г. французский математик Эдуард Люка придумал головоломку под названием *ханойская башня*, представляющую собой восемь дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков.

Убедившись, что эта головоломка разрешима при небольшом количестве дисков, поставим следующую задачу: какое количество перемещений дисков является необходимым и достаточным для выполнения поставленной задачи? Сразу обобщим ее до случая n дисков. Обозначим через x_n — минимальное число перекладываний, необходимых для перемещения n дисков с одного колышка на другой по правилам головоломки. Нетрудно проверить, что $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Теперь разберемся, как переместить башню из n дисков. Для перемещения нижнего самого большого диска необходима следующая ситуация: это диск перемещается с колышка, на котором больше нет ни одного диска, на пустой колышек. Значит, до этого нам необходимо переместить башню из меньших $(n-1)$ дисков на пустой колышек, то есть выполнить не менее x_{n-1} перекладываний. На перемещение большого диска нужно хотя бы одно перекладывание, а затем башню из $(n-1)$ дисков надо переместить на большой диск. Получается, что нам нужно не менее $x_{n-1}+1+x_{n-1} = 2x_{n-1}+1$ перекладываний. За-

метим, что выше мы описали рецепт, как управиться за $2x_{n-1}+1$ перекладывание. Получаем, что $x_n = 2x_{n-1}+1$, $n \geqslant 2$. Учитывая условие $x_1 = 1$, получаем последовательность 1, 3, 7, 15, ... По индукции нетрудно показать, что $x_n = 2^n - 1$.

ЗАДАЧА ИОСИФА ФЛАВИЯ

Рассмотрим далее вариант античной задачи, носящей имя Иосифа Флавия — известного историка первого века. Существует легенда, что Иосиф выжил и стал известным благодаря математической одаренности. В ходе иудейской войны он в составе отряда из 41 иудейского воина был загнан римлянами в пещеру. Предпочитая самоубийство плену, воины решили выстроиться в круг и последовательно убивать каждого третьего из живых до тех пор, пока не останется один человек, который должен убить себя. Однако Иосиф, вместе с одним из своих единомышленников, счел подобный конец бессмысленным — он быстро вычислил спасительные места в круге, на которые поставил себя и своего товарища, чтобы остаться последними выжившими. Эта задача вошла в работу "Problem es Plaisants" по занимательной математике Баше де Мезириака 1612-го года.

Будем решать эту задачу сразу для n человек, но упростив ее следующим образом: будем исключать каждого второго из оставшихся до тех пор, пока не уцелеет только один человек. Обозначим через x_n — номер последнего уцелевшего человека. Нетрудно видеть, что $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Для $n = 10$ порядок исключения будет: 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9. То есть $x_{10} = 5$.

Вообще, рассмотрим сначала случай, когда у нас $2n$ людей. После первого прохода круга останутся n людей с номерами 1, 3, 5, ..., $2n-1$ и мы начинаем считать с номера 1. То есть мы можем считать, что в кругу стоит n людей, и человек с номером k держит в руках табличку с номером $2k-1$. Продолжим проходы,

пока не останется один человек. Для n людей номер оставшегося человека равен x_n, в нашем случае это человек с табличкой $2x_n - 1$. Получаем, что $x_{2n} = 2x_n - 1$.

Теперь рассмотрим случай, когда у нас $2n + 1$ людей. После первого прохода круга останутся n людей с номерами $1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, 2n + 1$. После этого сразу убирается номер 1. Остаются номера $3, 5, \ldots, 2n + 1$ и мы начинаем счет с 3. То есть мы можем считать, что в кругу стоит n людей, и человек с номером k держит в руках табличку с номером $2k+1$. Продолжим проходы, пока не останется один человек. Для n людей номер оставшегося человека равен x_n, в нашем случае это человек с табличкой $2x_n - 1$. Получаем, что $x_{2n+1} = 2x_n + 1$.

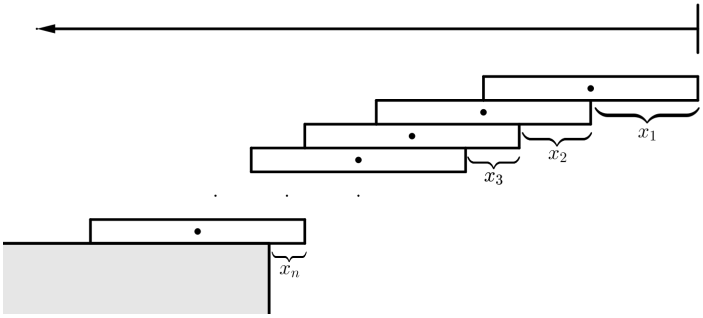
Этих условий:

$$\begin{cases} x_{2n} &= 2x_n - 1, \\ x_{2n+1} &= 2x_n + 1, \\ x_1 &= 1, \\ x_2 &= 1 \end{cases}$$

нам достаточно, чтобы вычислить любой элемент последовательности. Вот первые члены: 1, 1, 3, 1, 3, 5, 7, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 1, ... Здесь мы не будем исследовать подробно эту очень любопытную последовательность.

КАРТЫ НАД КРАЕМ СТОЛА

Положив на стол n карт и сдвигая их относительно друг друга, нам хочется образовать как можно больший выступ над краем стола с учетом действия силы тяжести.



Будем считать, что длина карты равна 1. Пронумеруем карты справа налево. Обозначим: x_1 — длина выступа первой карты над второй, x_2 — длина выступа второй карты над третьей, и т.д., x_n — длина выступа крайней карты над столом. Считая, что правый край первой карты имеет координату 0, найдем, что координата S_1 правого края второй карты равна $S_1 = x_1$, третьей карты — $S_2 = x_1 + x_2$, …, n-й карты — $S_{n-1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$.

Координаты по горизонтальной оси центров тяжести каждого из этих блоков соответственно равны: $1/2$, $1/2 + x_1$, …, $1/2 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$. Условие, чтобы система находилась в равновесии: координата x центра тяжести системы крайних k блоков должна быть не меньше, чем координата правого края $k+1$ блока. Найдем координату x центров тяжести крайних k блоков:

$$\frac{1}{k}\left(1/2 + (1/2 + x_1) + \ldots + (1/2 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})\right) = \\ = \frac{1}{2} + \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_{k-1}}{k}.$$

Условия равновесия запишутся следующим образом:

$$\frac{1}{2} \geqslant S_1,$$

$$\frac{1}{2} + \frac{S_1}{2} \geqslant S_2,$$

$$\frac{1}{2} + \frac{S_1 + S_2}{3} \geqslant S_3,$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1}}{n} \geqslant S_n.$$

По индукции получаем, что любое решение такой системы неравенств, не превосходит (для каждого k) решения системы уравнений:

$$\begin{cases} S_1 &= \dfrac{1}{2}, \\ S_2 &= \dfrac{1}{2} + \dfrac{S_1}{2}, \\ &\vdots \\ S_n &= \dfrac{1}{2} + \dfrac{S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1}}{n}. \end{cases}$$

Мы получили, что каждый следующий член последовательности $\{S_k\}$ выражается через все предыдущие.

Найдем явный вид для S_n. Для этого перепишем $(k-1)$-ю и k-ю строку системы в виде:

$$kS_k = \frac{k}{2} + S_1 + S_2 + \ldots + S_{k-1},$$

$$(k-1)S_{k-1} = \frac{k-1}{2} + S_1 + S_2 + \ldots + S_{k-2},$$

Вычтем из верхней строки нижнюю:

$$kS_k - (k-1)S_{k-1} = \frac{1}{2} + S_{k-1}.$$

Откуда получаем, что $S_k = S_{k-1} + \dfrac{1}{2k}$, то есть $x_k = \dfrac{1}{2k}$. Таким образом, правый край первого блока может находиться на расстоянии $S_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right)$ от края стола. Как известно, это — половина частичной суммы гармонического ряда. То есть, край стопки карт может находиться сколь угодно далеко от края стола. □

В этом параграфе мы исследовали три задачи, сводя исследуемый случай к более простому случаю, то есть содержащему меньшее количество объектов. Мы ввели числовые последовательности, равные исследуемым характеристикам в задаче: количество перемещений дисков, номер выжившего человека, выступ над краем стола. Затем мы составили соотношения, связывающие члены этих последовательностей. В первом случае мы получили соотношение, которое связывает два соседних члена последовательности, что является одной из самых простых задач и подробно далее исследуется. Во втором случае мы связали элемент последовательности с элементом, номер которого примерно в два раза меньше. Это более сложное отношение, так как количество предыдущих членов последовательности, которые необходимы для вычисления x_n, зависит от n. В третьем случае нам понадобились все предыдущие члены последовательности для вычисления S_n.

Глава 2

Линейные разностные уравнения

В этом параграфе мы приведем основные результаты для решения линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Подобные уравнения возникают в большом количестве примеров, и для их решения имеются определенные алгоритмы. Например, в задаче о Ханойской башне мы получили разностное уравнение первого порядка.

Определение 2.1. *Разностным уравнением k-го порядка,* $k \in \mathbb{N}$, называется уравнение вида

$$x_{n+k} = F(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}),$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$, $F : \mathbb{Z}_+ \times X^k \to \mathbb{R}$, — заданная функция, $X \subset \mathbb{R}$.

Решением разностного уравнения называется любая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, для которой

$$x_{n+k} = F(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}),$$

при всех $n \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема 2.1. (о существовании и единственности решения разностной задачи Коши). Пусть $F(n, x_1, x_2, \ldots, x_k) \in X$

для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, x_1, $x_2, \ldots, x_k \in X$. Для любого набора начальных значений u_0, $u_1, \ldots, u_{k-1} \in X$ существует единственное решение уравнения n-го порядка

$$x_{n+k} = F(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}),$$

удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = u_0$, $x_1 = u_1, \ldots, x_{k-1} = u_{k-1}$.

З а м е ч а н и е. В отличие от теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциальных уравнений, эта теорема весьма просто доказывается по индукции.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.1. Для уравнения $a_{n+1} = -(n+1) - \sqrt{a_n}$ и любого a_0 получим $a_1 < 0$ — не входит в область определения функции $F(n, x) \doteq -(n+1) - \sqrt{x}$.

Пример 2.2. Арифметическая прогрессия с разностью $d \in \mathbb{R}$ задается разностным уравнением первого порядка $x_{n+1} = x_n + d$. Здесь $k = 1$, $X = \mathbb{R}$, $F(n, x) \doteq x + d$, $x \in \mathbb{R}$. Заметим, что F не зависит от n.

Пример 2.3. Геометрическая прогрессия с знаменателем $q \in \mathbb{R}$ задается разностным уравнением первого порядка $x_{n+1} = qx_n$. Здесь $k = 1$, $X = \mathbb{R}$, $F(n, x) \doteq qx$, $x \in \mathbb{R}$, F не зависит от n.

Пример 2.4. В задаче о Ханойской башне отношение $x_n = 2x_{n-1} + 1$ также является разностным уравнением первого порядка. Перепишем его в виде $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Здесь $k = 1$, $X = \mathbb{R}$, $F(n, x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, F не зависит от n.

Пример 2.5. Последовательность Фибоначчи задается разностным уравнением второго порядка $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ и начальным условиям $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Здесь $k = 2$, $X = \mathbb{R}$, $F(n, x, y) = y + x$, x, $y \in \mathbb{R}$, F не зависит от n.

Определение 2.2. *Линейным разностным уравнением k-го порядка с переменными коэффициентами* называется уравнение

$$x_{n+k} + a_1(n)x_{n+k-1} + a_2(n)x_{n+k-2} + \ldots + a_k(n)x_n = b(n), \quad (2.1)$$

где $a_1(n)$, $a_2(n), \ldots, a_k(n)$, $b(n)$ — некоторые функции от $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_k(n) \neq 0$. Если $b(n) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным.*

Пример 2.6. Рассмотрим линейное разностное однородное уравнение первого порядка

$$x_{n+1} + a(n)x_n = 0.$$

Тогда $x_n = c \cdot (-1)^n \prod\limits_{i=0}^{n-1} a(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $c = x_0$. □

Пример 2.7. Рассмотрим линейное разностное неоднородное уравнение первого порядка

$$x_{n+1} + a(n)x_n = b(n).$$

Будем искать его решение в виде $x_n = c \cdot (-1)^n \prod\limits_{i=0}^{n-1} a(i)$ методом вариации произвольной постоянной. Для этого в решении соответствующего линейного однородного уравнения будем считать c не произвольной постоянной, а некоторой неизвестной функцией $c(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $A(0) \doteq 1$, $A(n) \doteq (-1)^n \prod\limits_{i=0}^{n-1} a(i)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда решение ищем в виде $x_n = c(n)A(n)$. Подставив в уравнение получаем, что

$$c(n+1)A(n+1) + a(n)c(n)A(n) = b(n).$$

Заметим, что $A(n+1) = -a(n)A(n)$, следовательно

$$c(n+1)A(n+1) - c(n)A(n+1) = b(n),$$

$$c(n+1) = c(n) + \frac{b(n)}{A(n+1)}.$$

Тогда

$$c(n) = c + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b(i)}{A(i+1)},$$

и общее решение имеет вид

$$x_n = (-1)^n \left(c + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b(i)}{\prod\limits_{j=0}^{i} a(j)} \right) \prod_{i=0}^{n-1} a(i),$$

$n \in \mathbb{N}$, $c = x_0$. □

Общие утверждения о разностных уравнениях мы приводим без доказательства.

Теорема 2.2. (о структуре множества решений линейного однородного разностного уравнения).

1. Множество решений линейного однородного уравнения

$$x_{n+k} + a_1(n)x_{n+k-1} + a_2(n)x_{n+k-2} + \ldots + a_k(n)x_n = 0,$$

$a_k(n) \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, является линейным пространством размерности k.

2. Всякая система решений $x^1 = \{x_n^1\}_{n=0}^{\infty}$, $x^2 = \{x_n^2\}_{n=0}^{\infty}$, $\ldots$, $x^k = \{x_k^1\}_{n=0}^{\infty}$ уравнения

$$x_{n+k} + a_1(n)x_{n+k-1} + a_2(n)x_{n+k-2} + \ldots + a_k(n)x_n = 0,$$

с линейно независимыми начальными значениями

$$\begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_1^1 \\ \vdots \\ u_{k-1}^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_0^2 \\ u_1^2 \\ \vdots \\ u_{k-1}^2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} u_0^k \\ u_1^k \\ \vdots \\ u_{k-1}^k \end{pmatrix}$$

образует фундаментальную систему решений — базис пространства решений.

Определение 2.3. Если в уравнении (2.1) коэффициенты $a_1, \ldots, a_k$ не зависят от n, то такое уравнение называется линейным разностным *с постоянными коэффициентами.*

Уравнение

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \ldots + a_k = 0$$

называется *характеристическим* для уравнения

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \ldots + a_k x_n = 0. \qquad (2.2)$$

Теорема 2.3. (о построении фундаментальной системы решений линейного однородного уравнения по корням характеристического уравнения). Если каждому вещественному корню λ характеристического уравнения кратности r поставить в соответствие r последовательностей

$$x^1 = \{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}, \quad x^2 = \{n\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}, \ldots, x^r = \{n^{r-1}\lambda^n\}_{n=0}^{\infty},$$

а каждому комплексному корню $\lambda = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ кратности r и сопряженному корню $\overline{\lambda} = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ поставить в соответствие $2r$ последовательностей

$$\begin{aligned} x^1 &= \{\rho^n \cos n\varphi\}_{n=0}^{\infty}, \quad y^1 = \{\rho^n \sin n\varphi\}_{n=0}^{\infty}, \\ x^2 &= \{n\rho^n \cos n\varphi\}_{n=0}^{\infty}, \quad y^2 = \{n\rho^n \sin n\varphi\}_{n=0}^{\infty}, \\ &\ldots \\ x^r &= \{n^{r-1}\rho^n \cos n\varphi\}_{n=0}^{\infty}, \quad y^r = \{n^{r-1}\rho^n \sin n\varphi\}_{n=0}^{\infty}, \end{aligned}$$

то объединение всех таких последовательностей будет одной из фундаментальных систем решений уравнения

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \ldots + a_k x_n = 0.$$

Разберем на конкретных примерах, как найти общее и частное решение разностных уравнений, применяя эту теорию.

Пример 2.8. Для уравнения

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

его корни: $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$ кратности 1. Фундаментальную систему решений составляют последовательности

$$\{1^n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{3^n\}_{n=0}^{\infty},$$

общее решение имеет вид

$$x_n = c_1 + c_2 3^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

□

Пример 2.9. Для уравнения

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

его корни: $\lambda_1 = 1 + i$ и $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = 1 - i$ кратности 1. Их тригонометрическая форма $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i \sin\frac{\pi}{4}\right)$. Фундаментальную систему решений составляют последовательности

$$\left\{(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right\}_{n=0}^{\infty}, \quad \left\{(\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right\}_{n=0}^{\infty},$$

общее решение имеет вид

$$x_n = c_1(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + c_2(\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

□

Пример 2.10. Для уравнения

$$x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 0$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0,$$

его корень: $\lambda = -3$ кратности 2. Фундаментальную систему решений составляют последовательности

$$\{(-3)^n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{n(-3)^n\}_{n=0}^{\infty},$$

общее решение имеет вид

$$x_n = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

□

Пример 2.11. Числа Фибоначчи определяются соотношениями

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

его корни: $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ кратности 1. Фундаментальную систему решений составляют последовательности

$$\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}, \quad \left\{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty},$$

общее решение имеет вид

$$x_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определим значения постоянных c_1 и c_2 из системы

$$\begin{cases} 1 = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \\ 1 = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \end{cases}$$

откуда $c_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $c_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

Пример 2.12.

$$x_{n+2} + x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -2.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0,$$

его корни: $\lambda_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ и $\lambda_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ кратности 1. Фундаментальную систему решений составляют последовательности

$$\left\{\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty},$$

общее решение имеет вид

$$x_n = c_1\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad c_1 \in \mathbb{Z}, \quad c_2 \in \mathbb{Z}.$$

Такая запись не очень удобна для вычислений. Запишем корни характеристического уравнения в тригонометрической форме:

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \sqrt{2},$$

а угол φ определен системой:

$$\begin{cases} \cos\varphi = & -\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ \sin\varphi = & \dfrac{\sqrt{14}}{4}. \end{cases}$$

Тогда другая фундаментальная система решений имеет вид:

$$\left\{(\sqrt{2})^n \cos n\varphi\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{(\sqrt{2})^n \sin n\varphi\right\}_{n=1}^{\infty},$$

где $\varphi = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$, или $\varphi = \pi - \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{14}}{4}\right)$, так как угол лежит φ во второй четверти.

Общее решение запишется тоже проще:

$$x_n = c_1(\sqrt{2})^n \cos n\varphi + c_2(\sqrt{2})^n \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определим значения постоянных c_1 и c_2 из системы

$$\begin{cases} 1 & = c_1\sqrt{2}\cos\varphi + c_2\sqrt{2}\sin\varphi, \\ -2 & = c_1 2\cos 2\varphi + c_2 2\sin 2\varphi. \end{cases}$$

Учитывая равенства

$$\cos 2\varphi = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2 = -\frac{3}{4},$$

$$\sin 2\varphi = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{4},$$

имеем

$$\begin{cases} 1 & = c_1\left(-\dfrac{1}{2}\right) + c_2\dfrac{\sqrt{7}}{2}, \\ -2 & = c_1\left(-\dfrac{3}{2}\right) + c_2\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right), \end{cases}$$

откуда $c_1 = \dfrac{1}{2}$, $c_2 = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$,

$$x_n = \frac{(\sqrt{2})^n}{2}\cos n\varphi + \frac{5\sqrt{7}(\sqrt{2})^n}{14}\sin n\varphi, \quad \varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right),$$

$n \in \mathbb{N}$. □

Теорема 2.4. (о структуре множества решений линейного неоднородного разностного уравнения). Пусть $\hat{x} = \{\hat{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$, некоторое решение неоднородного уравнения (2.1), $x^1 = \{x_n^1\}_{n=0}^{\infty}$, $x^2 = \{x_n^2\}_{n=0}^{\infty}, \ldots, x^k = \{x_k^1\}_{n=0}^{\infty}$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (2.2). Тогда любое решение $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ уравнения (2.1) может быть единственным способом представлено в виде

$$x = \hat{x} + c_1 x^1 + \ldots + c_k x^k,$$

где $c_1, \ldots, c_k$ — постоянные, определяемые из начальных условий.

Теорема 2.5. (о построении частного решения линейного неоднородного уравнения с правой частью специального вида). Если правая часть линейного неоднородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$b(n) = \rho^n(P(n)\cos\omega n + Q(n)\sin\omega n),$$

где $P(n)$ и $Q(n)$ — многочлены степени не больше m, то при $\omega \neq 0$ существует решение вида

$$\hat{x}_n = n^r\rho^n(R(n)\cos\omega n + T(n)\sin\omega n)$$

где $R(n)$ и $T(n)$ — многочлены степени не больше m, а r — кратность корня $\lambda = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$ в характеристическом уравнении (если такого корня нет, то $s = 0$). При $\omega = 0$, т.е. при

$$b(n) = \rho^n P(n),$$

существует решение вида

$$\hat{x}_n = n^r \rho^n R(n),$$

где $R(n)$ — многочлен степени не больше m, а r — кратность корня (если такого корня нет, то $s = 0$).

Пример 2.13. Решим задачу о Ханойской башне: $x_{n+1} = 2x_n + 1$, $x_1 = 1$. Перепишем уравнение в виде $x_{n+1} - 2x_n = 1$. В наших обозначениях $k = 1$, $a_1 \equiv 1$, $b(n) = 1 = (1)^n(1 \cdot \cos(0n) + +1 \cdot \sin(0n))$, то есть $\rho = 1$, $\omega = 0$, степени P и Q равны 0.

Характеристическое уравнение $\lambda - 2 = 0$ имеет единственный корень $\lambda = 2$. Решение однородного уравнения $x^1 = \{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная система.

Число $\lambda = 1(\cos 0 + i \sin 0)$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде $\hat{x}_n = n^0(1)^n C = C$. Подставив в уравнение $\hat{x}_{n+1} - 2\hat{x}_n = 1$, получаем, что $C = -1$.

Тогда общее решение запишется в виде $x_n = c_1 2^n - 1$. Подставим начальное условие: $x_1 = c_1 2 - 1 = 1$, получим $c_1 = 1$, $x_n = 2^n - 1$. □

Пример 2.14. Найдите общий вид члена последовательности, заданной разностным уравнением:

$$a_{n+3} = 7a_{n+2} - 15a_{n+1} + 9a_n + 1 + 3^n,\ n \geqslant 1, \tag{2.3}$$

и начальными условиями: $a_1 = \dfrac{22}{3}$, $a_2 = \dfrac{59}{2}$, $a_3 = \dfrac{233}{2}$.

Характеристическое уранение соотвествующего однородного уравнения

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9 = 0,$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Найдем по отдельности частные решения уравнений:

$$a_{n+3} = 7a_{n+2} - 15a_{n+1} + 9a_n + 1,\ n \geqslant 1, \tag{2.4}$$

$$a_{n+3} = 7a_{n+2} - 15a_{n+1} + 9a_n + 3^n,\ n \geqslant 1. \qquad (2.5)$$

В первом случае 1 — корень характеристического уранения порядка 1, поэтому частное решение ищем в виде

$$\hat{x}_n^1 = n^1 \cdot (1)^n P(n),$$

где $P(n)$ — многочлен 0-й степени, то есть в виде $\hat{x}_n^1 = An$, A — константа. Подставив в уравнение, получим

$$A(n+3) = 7A(n+2) - 15A(n+1) + 9An + 1,$$
$$An + 3A = 7An + 14A - 15An - 15A + 9An + 1,$$
$$3A = 14A - 15A + 1,$$

$A = 1/4$. Получили, что $\hat{x}_n^1 = \dfrac{1}{4}n$ — частное решение уравнения (2.4).

Во втором случае 3 — корень характеристического уранения порядка 2, поэтому частное решение ищем в виде

$$\hat{x}_n^2 = n^2 3^n Q(n),$$

где $Q(n)$ — многочлен 0-й степени, то есть в виде $\hat{x}_n^2 = Bn^2 3^n$, B — константа. Подставив в уравнение, получим

$$B(n+3)^2 3^{n+3} = 7B(n+2)^2 3^{n+2} - 15B(n+1)^2 3^{n+1} + 9Bn^2 3^n + 3^n,$$
$$27B(n+3)^2 = 63B(n+2)^2 - 45B(n+1)^2 + 9Bn^2 + 1,$$
$$27B(n^2 + 6n + 9) = 63B(n^2 + 4n + 4) -$$
$$-45B(n^2 + 2n + 1) + 9Bn^2 + 1,$$
$$243B = 252B - 45B + 1,$$
$$36B = 1,$$

$B = 1/36$. Получили, что $\hat{x}_n^2 = \dfrac{1}{36}n^2 3^n$ — частное решение уравнения (2.5).

Сложим $\hat{x}_n^1$ и $\hat{x}_n^2$, получим, что

$$\hat{x}_n = \frac{1}{4}n + \frac{1}{36}n^2 3^n,\ n \geqslant 1$$

— частное решение уравнения (2.3)

Таким образом, последовательности вида

$$x_n^0 = C_1 + C_2 3^n + C_3 n 3^n + \frac{1}{4}n + \frac{1}{36}n^2 3^n,\ n \geqslant 1,$$

C_1, C_2, C_3 — константы, являются решениями уравнения (2.3).

Найдем C_1, C_2, C_3 из начальных условий:

$$\begin{cases} C_1 + 3C_2 + 3C_3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{36} &= \frac{22}{3}; \\ C_1 + 9C_2 + 18C_3 + \frac{1}{2} + 1 &= \frac{59}{2}; \\ C_1 + 27C_2 + 81C_3 + \frac{3}{4} + \frac{27}{4} &= \frac{233}{2}. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем, что $C_1 = C_2 = C_3 = 1$, и решением задачи является последовательность

$$x_n = 1 + 3^n + n3^n + \frac{1}{4}n + \frac{1}{36}n^2 3^n, n \geqslant 1.$$

□

Квадратные уравнения и рекуррентные отношения

Рассмотрим уравнение

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Его решением являются числа $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 2.15. Найдите значение выражения $x_1^{10} + x_2^{10}$.

Для вычисления можно воспользоваться биномом Ньютона. Но мы найдем более быстрый путь. Как обычно, найдем сначала значения для меньших степеней:

$$x_1 + x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1-2\sqrt{5}+5+1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

Для вычисления $x_1^3+x_2^3$ еще несложно возвести в третью степень, но проще воспользоваться формулой для суммы кубов:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

В это формуле мы уже знаем $x_1 + x_2$ и $x_1^2 + x_2^2$. Осталось найти x_1x_2. По теореме Виета: $x_1x_2 = -1$. Тогда

$$x_1^3 + x_2^3 = 1 \cdot (3+1) = 4.$$

Это наводит на мысль, что сумму степеней корней квадратного трехчлена можно вычислить, зная предыдущие.

Предположим, что мы знаем $a+b$ и $a^{n-1}+b^{n-1}$. Перемножим эти выражения:

$$(a+b)(a^{n-1}+b^{n-1}) = a^n+b^n+ab^{n-1}+ba^{n-1} = a^n+b^n+ab(a^{n-2}+b^{n-2}).$$

Откуда получаем, что

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} + b^{n-1}) - ab(a^{n-2} + b^{n-2}).$$

Это означает, что для вычислений суммы n-х степеней чисел a и b нам достаточно знать их произведение, сумму а также две предыдущие степени.

В нашем случае по теореме Виета: $x_1 + x_2 = 1$, $x_1x_2 = -1$. Тогда мы можем написать линейное разностное уравнение:

$$x_1^n + x_2^n = (x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) + (x_1^{n-2} + x_2^{n-2}).$$

Теперь мы можем без труда решить задачу:

$$x_1 + x_2 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 = 3,\ x_1^3 + x_2^3 = 4,\ x_1^4 + x_2^4 = 7,\ x_1^5 + x_2^5 = 11$$
$$x_1^6 + x_2^6 = 18,\ x_1^7 + x_2^7 = 29,\ x_1^8 + x_2^8 = 47,\ x_1^9 + x_2^9 = 76,$$

и окончательно: $x_1^{10} + x_2^{10} = 123$.

Обобщим полученный результат. Обозначим сумму n-х степеней корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ через S_n. По теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = -b/a,\ x_1 x_2 = c/a.$$

Получаем линейное разностное уравнение:

$$S_n = -\frac{b}{a} \cdot S_{n-1} - \frac{c}{a} \cdot S_{n-2},\ n \geqslant 2.$$

Начальные условия будут выглядеть следующим образом:

$$S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2,\ S_1 = x_1^1 + x_2^1 = -\frac{b}{a}.$$

Обратим внимание, что для того, чтобы найти сумму n-х степеней корней квадратного уравнения, нам, благодаря теореме Виета, сами корни находить не нужно.

В разобранном примере мы получили разностное уравнение: $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$, и начальные условия: $S_0 = 2$, $S_1 = 1$. Последовательность, заданная таким образом имеет специальное название — числа Лукаса. □

Рассмотрим еще один пример из алгебры, где возникают рекуррентные отношения.

Пример 2.16. Найдите определитель матрицы $n \times n$, где над и под главной диагональю стоят единицы, остальные элементы равны нулю. Например, при $n = 5$ матрица имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Обозначим через Δ_n — определитель из условия задачи. Начнем вычислять Δ_n для маленьких значений n: $\Delta_1 = |0| = 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$.

Для вычисления определителей более высокого порядка будем использовать сначала разложение по первой строке, а потом во втором слагаемом разложение по первому столбцу:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \Delta_2 - 1 \cdot \Delta_1.$$

Повторим этот процесс для Δ_4, только мы будем удалять элементы, сохраняя размер матрицы:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} & & & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} & & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} & & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \Delta_3 - 1 \cdot \Delta_2.$$

Рассмотрим теперь случай для n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

В первом слагаемом получается Δ_{n-1}. Во втором определитель матрицы, у которой в первом столбце только один ненулевой элемент, а именно — в первой строке. Разложив по первому столбцу, получим только одно слагаемое. Это будет определитель матрицы, которая получается из исходной вычеркиванием двух первых строк и двух первых столбцов. Ее определитель — это Δ_{n-2}. Мы получим соотношение: $\Delta_n = 0 \cdot \Delta_{n-1} - 1 \cdot \Delta_{n-2}$. То есть $\Delta_n = -\Delta_{n-2}$.

Это опять линейное разностное уравнение. Учитывая начальные данные $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -1$, мы увидим, что $\Delta_{2n-1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_{2n} = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Решив, используя характеристическое уравнение, получим формулу частного решения: $\Delta_n = \cos \dfrac{\pi n}{2}$.

Разумеется эти записи задают одну и ту же последовательность. □

Пример 2.17. Найдем значение интеграла $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$,

$n \in \mathbb{N}$. Пусть $n \geqslant 3$. Проинтегрируем по частям:

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x\, d\sin x = \cos^{n-1} x \sin x \Big|_0^{\pi/2} -$$
$$- \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\, d\cos^{n-1} x = (n-1) \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \sin^2 x\, dx =$$
$$= (n-1) \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x\, dx - (n-1) \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx =$$
$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Из соотношения $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ получаем, что

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2},\ n \geqslant 3.$$

Непосредственным интегрированием получаем, что

$$I_1 = 1,\ I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Получили разностное уравнение второго порядка и начальные условия. Результатом решения является последовательность:

$$I_{2n-1} = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},\ I_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},\ n \geqslant 1.$$

□

Найдите последовательности, удовлетворяющие линейным разностным уравнениям и начальным условиям:

Задача 2.1. $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

Задача 2.2. $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

Задача 2.3. $x_{n+2} = -x_{n+1} - x_n$, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Задача 2.4. $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Задача 2.5. $x_{n+2} = -x_{n+1} - 4x_n$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Задача 2.6. $x_{n+2} = -2x_{n+1} - 5x_n$, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Задача 2.7. $x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Задача 2.8. $x_{n+3} + x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Задача 2.9. $a_{n+3} = a_{n+2} + 8a_{n+1} - 12a_n$, $a_1 = 2$; $a_2 = 1$; $a_3 = 1$.

Задача 2.10. $a_{n+3} = -2a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n$, $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$.

Задача 2.11. $x_{n+4} + 4x_{n+3} + 8x_{n+2} + 8x_{n+1} + 4x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_1 = 2$, $x_3 = 2$.

В следующих задачах объекты удовлетворяют некоторому рекуррентному соотношению.

Задача 2.12. Вычислите трехдиагональный определитель $n \times n$:

а)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

б) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

в) $$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix};$$

г) $$\begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b \end{vmatrix},$$

α, β, a, b, $c \in \mathbb{R}$.

Задача 2.13. Вычислите определитель Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ & & & \vdots & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

У к а з а н и е.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \dots & \lambda_n - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 & \lambda_3^2 - \lambda_1\lambda_3 & \dots & \lambda_n^2 - \lambda_1\lambda_n \\ & & & \vdots & \\ 0 & \lambda_2^{n-1} - \lambda_1\lambda_2^{n-2} & \lambda_3^{n-1} - \lambda_1\lambda_3^{n-2} & \dots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_1\lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Задача 2.14. Вычислите определитель, составив рекуррентное отношение:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \\ & & & \vdots & \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Задача 2.15. Вычислите определитель, составив рекуррентное отношение:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

Задача 2.16. Пусть n-й член последовательности задается формулой

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n,$$

$c_1, c_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Докажите, что для последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет место рекуррентное соотношение

$$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} - \beta a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$\alpha = x_1 + x_2$, $\beta = x_1 x_2$.

Задача 2.17. Докажите, что для любого натурального n число

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

является целым и нечётным.

Задача 2.18. Найти первые 100 знаков после запятой у числа $(5+\sqrt{26})^{101}$.

Задача 2.19. Докажите, что числа

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^{99} - (1-\sqrt{2})^{99}\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^{100} - (1-\sqrt{2})^{100}\right)$$

являются целыми и взаимно простыми.

Задача 2.20. Докажите, что $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{1000}\right]$ является чётным числом.

Задача 2.21. Докажите, что число $\left[(3+\sqrt{5})^n\right] + 1$ делится на 2^n при любом $n \in \mathbb{N}$.

Задача 2.22. Докажите, что число $\operatorname{tg}^{2n} 15^\circ + \operatorname{ctg}^{2n} 15^\circ$ представимо в виде суммы квадратов трех последовательных целых чисел при любом $n \in \mathbb{N}$.

Задача 2.23. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ задана условиями $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ и рекуррентным соотношением

$$x_{n+2} = x_n + \sqrt{12x_{n+1}(x_{n+1}+1)+1}.$$

Докажите, что все члены этой последовательности — целые числа.

Задача 2.24. Составив рекуррентное отношение, найдите значение интеграла для натуральных n: а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$;

б) $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx$; в) $\int\limits_0^1 (1-x^2)^n x\,dx$; г) $\int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x\,dx$, $\alpha > -1$.

Глава 3

Задачи, приводящие к рекуррентным отношениям

Задача 3.1. Найдите число двоичных последовательностей длины 11, не содержащих единиц ни в каких трех соседних позициях.

Р е ш е н и е. Это продолжение известной задачи про числа Фибоначчи, только здесь условие на три подряд идущие цифры. Обозначим через x_n — число двоичных последовательностей длины n, не содержащих единиц ни в каких трех соседних позициях. Такие последовательности назовем *правильными*. Легко проверить, что $x_1 = 2$, $x_2 = 2^2 = 4$, $x_3 = 2^3 - 1 = 7$. Далее составим рекуррентное отношение. Так как на последних трех местах не могут стоять только 1, то хотя бы на одной из позиций n, $n-1$, $n-2$ стоит 0. Тогда все правильные последовательности длины $n \geqslant 4$ разбиваются на три непересекающихся множества: последний 0 в последовательности может стоять на n-ом, $(n-1)$-ом или на $(n-2)$-ом месте.

Если правильная последовательность длины n заканчивается

на 0, то на первых $(n-1)$-ом местах записана какая-то правильная последовательность. И наоборот, возьмем правильную последовательность длины $n-1$ и допишем в конце 0, получим правильную последовательность длины n, заканчивающуюся на 0. Получаем, что в первом множестве столько же последовательностей, сколько правильных последовательностей длины $n-1$, то есть x_{n-1}.

Аналогично получаем, что количество правильных последовательностей длины n, заканчивающихся на 01, равно количеству правильных последовательностей длины $n-2$, то есть x_{n-2}.

Также получаем, что количество правильных последовательностей длины n, заканчивающихся на 011, равно количеству правильных последовательностей длины $n-3$, то есть x_{n-3}.

Объединяя все три множества, получаем рекуррентное отношение $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$, $n \geqslant 4$. Начальные условия $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$.

Характеристическое уравнение $\lambda^3 = \lambda^2 + \lambda + 1$ этого отношения имеет один действительный корень:

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}\right)$$

и два комплексных с еще более сложной записью. Записывать общий вид и подставлять начальные условия выполнять не будем.

Также можно вычислять значения членов последовательности через матричное отношение:

$$\begin{pmatrix} x_{n+3} \\ x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 1,$$

что дает формулу

$$\begin{pmatrix} x_{n+3} \\ x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 0.$$

При $n = 8$ получаем равенство

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{10} \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^8 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Откуда получаем:

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{10} \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 68 & 44 \\ 44 & 37 & 24 \\ 24 & 20 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Окончательно: $x_{11} = 81 \cdot 7 + 68 \cdot 4 + 44 \cdot 2 = 927$.

Ответ: $x_{11} = 927$. □

Задача 3.2. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC, перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из вершины A в A за n прыжков?

Р е ш е н и е. Обозначим через a_n — количество способов попасть из вершины A в A за n прыжков, b_n — количество способов попасть из вершины A в B за n прыжков, c_n — количество способов попасть из вершины A в C за n прыжков.

Тогда имеем рекуррентные отношения: $a_n = b_{n-1} + c_{n-1}$, $b_n = a_{n-1} + c_{n-1}$, $c_n = a_{n-1} + b_{n-1}$, $n \geqslant 1$ и начальные условия: $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$. Сведем к линейному уравнению:

$$a_n = b_{n-1} + c_{n-1} = b_{n-2} + c_{n-2} + 2a_{n-2} = a_{n-1} + 2a_{n-2},$$

с начальными условиями $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 = \lambda + 2$ являются $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, подставляя в общее решение $a_n^o = C_1(-1)^n + C_2 2^2$ начальные условия $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, получаем решение задачи $a_n = \dfrac{2}{3}((-1)^n + 2^{n-1})$.

Также мы могли получить общий вид из матричного отношения:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Задача 3.3. Лягушка прыгает по вершинам шестиугольника $ABCDEF$, каждый раз перемещаясь в одну из соседних вершин. а) Сколькими способами она может попасть из A в C за n прыжков? б) Тот же вопрос, но при условии, что ей нельзя прыгать в D?

Р е ш е н и е. а) Обозначим через a_n — количество способов попасть из вершины A в A за n прыжков, b_n — количество способов попасть из вершины A в B за n прыжков, c_n — количество способов попасть из вершины A в C за n прыжков, d_n — количество способов попасть из вершины A в D за n прыжков, e_n — количество способов попасть из вершины A в E за n прыжков, f_n — количество способов попасть из вершины A в F за n прыжков. Имеем рекуррентные отношения:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ d_{n-1} \\ e_{n-1} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

и начальные условия: $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = d_0 = e_0 = f_0 = 0$. В силу четности числа вершин, нетрудно понять, что $a_{2k+1} = c_{2k+1} =$

$e_{2k+1} = b_{2k} = d_{2k} = f_{2k} = 0$, $k \geqslant 0$. Заметим также, что в силу симметрии $b_n = f_n$, $c_n = e_n$. Далее имеем

$$c_n = b_{n-1} + d_{n-1} = 2c_{n-2} + a_{n-2} + e_{n-2} = 3c_{n-2} + a_{n-2},$$
$$a_n = b_{n-1} + f_{n-1} = 2a_{n-2} + c_{n-2} + e_{n-2} = 2a_{n-2} + 2c_{n-2}.$$

Откуда получаем рекуррентное отношение

$$c_n = 3c_{n-2} + a_{n-2} = 3c_{n-2} + 2a_{n-4} + 2c_{n-4} =$$
$$= 3c_{n-2} + 2(c_{n-2} - 3c_{n-4}) + 2c_{n-4} = 5c_{n-2} - 4c_{n-4}.$$

То есть для последовательности $x_k = c_{2k}$, $k \geqslant 0$, имеем

$$x_k = 5x_{k-1} - 4x_{k-2}, \quad k \geqslant 2$$

и начальные условия $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Решение: $x_k = \dfrac{1}{3}(4^k - 1)$. Тогда $c_{2k+1} = 0$, $c_{2k} = \dfrac{1}{3}(4^k - 1)$, $k \geqslant 0$.

б) Сохраним обозначения пункта а). Так как теперь запрещено прыгать в вершину D, то $c_n = b_{n-1}$, $n \geqslant 1$. Так как точки B и F симметричны относительно AD, то $b_n = f_n$. Далее, для $n \geqslant 2$ имеем $b_n = a_{n-1} + c_{n-1} = f_{n-2} + b_{n-2} + b_{n-2} = 3b_{n-2}$. Мы имеем рекуррентное отношение $b_n = 3b_{n-2}$ и начальные условия $b_0 = 0$, $b_1 = 1$. В общее решение $C_1(-\sqrt{3})^n + C_2(\sqrt{3})^n$ подставим начальные условия $b_0 = 0$, $b_1 = 1 : C_1 + C_2 = 0$, $-\sqrt{3}C_1 + \sqrt{3}C_2 = 1$. Откуда находим $C_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}$, $C_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$,

$$b_n = \frac{\sqrt{3}}{6}(-(-\sqrt{3})^n + (\sqrt{3})^n) = \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{n-1}{2}} \cdot ((-1)^{n+1} + 1).$$

Получаем, что $b_{2k} = 0$, $b_{2k+1} = 3^k$, $k \geqslant 0$. □

Задача 3.4. Найдите количество 2024-значных чисел, в записи которых имеются только цифры 1, 2, 3, 4, 5, и любые две соседние цифры отличаются на 1.

Р е ш е н и е. Все последовательности, в записи которых имеются только цифры 1, 2, 3, 4, 5, и любые две соседние цифры отличаются на 1 назовем *правильными*. Обозначим через $x_n^{(i)}$ — число правильных последовательностей длины n, заканчивающихся на i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Легко проверить, что $x_1^{(1)} = x_1^{(2)} = x_1^{(3)} = x_1^{(4)} = x_1^{(5)} = 1$.

Если правильная последовательность заканчивается на 1, то на $(n-1)$-месте стоит 2. Значит, $x_n^{(1)} = x_{n-1}^{(2)}$, $n \geqslant 2$.

Если правильная последовательность заканчивается на 2, то на $(n-1)$-месте стоит 1 или 3. Значит, $x_n^{(2)} = x_{n-1}^{(1)} + x_{n-1}^{(3)}$, $n \geqslant 2$.

Аналогично получаем остальные три отношения, которые можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \\ x_n^{(3)} \\ x_n^{(4)} \\ x_n^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1}^{(1)} \\ x_{n-1}^{(2)} \\ x_{n-1}^{(3)} \\ x_{n-1}^{(4)} \\ x_{n-1}^{(5)} \end{pmatrix}.$$

Получаем формулу

$$\begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \\ x_n^{(3)} \\ x_n^{(4)} \\ x_n^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что мы можем степень матрицы, перейдя к ее жордановой форме.

Можно получить формулу и по индукции. Для этого напишем

первые значения для последовательностей $x_n^{(i)}$ и для их суммы:

n	1	$2\cdot 1$	$2\cdot 1+1$	$2\cdot 2$	$2\cdot 2+1$	$2\cdot 3$	$2\cdot 3+1$
$x_n^{(1)}$	1	$1\cdot 3^0$	$2\cdot 3^0$	$1\cdot 3^1$	$2\cdot 3^1$	$1\cdot 3^2$	$2\cdot 3^2$
$x_n^{(2)}$	1	$2\cdot 3^0$	$3\cdot 3^0$	$2\cdot 3^1$	$3\cdot 3^1$	$2\cdot 3^2$	$3\cdot 3^2$
$x_n^{(3)}$	1	$2\cdot 3^0$	$4\cdot 3^0$	$2\cdot 3^1$	$4\cdot 3^1$	$2\cdot 3^2$	$4\cdot 3^2$
$x_n^{(4)}$	1	$2\cdot 3^0$	$3\cdot 3^0$	$2\cdot 3^1$	$3\cdot 3^1$	$2\cdot 3^2$	$3\cdot 3^2$
$x_n^{(5)}$	1	$1\cdot 3^0$	$2\cdot 3^0$	$1\cdot 3^1$	$2\cdot 3^1$	$1\cdot 3^2$	$2\cdot 3^2$
S	5	$8\cdot 3^0$	$14\cdot 3^0$	$8\cdot 3^1$	$14\cdot 3^1$	$8\cdot 3^2$	$14\cdot 3^2$

Делаем предположение, что при $n=2k$ $x_n^{(1)}=x_n^{(5)}=3^{k-1}$, $x_n^{(2)}=x_n^{(3)}=x_n^{(4)}=2\cdot 3^{k-1}$, а при $n=2k+1$: $x_n^{(1)}=x_n^{(5)}=2\cdot 3^{k-1}$, $x_n^{(2)}=x_n^{(4)}=3\cdot 3^{k-1}$, $x_n^{(3)}=4\cdot 3^{k-1}$. Это несложно доказать по индукции.

Получим этот же результат, решая рекуррентное отношение. Заметим, что в силу симметрии $x_n^{(1)}=x_n^{(5)}$, $x_n^{(2)}=x_n^{(4)}$, $n\geqslant 1$. Для $n\geqslant 3$ имеем равенства

$$x_n^{(2)}=x_{n-1}^{(1)}+x_{n-1}^{(3)}=$$
$$=x_{n-2}^{(2)}+x_{n-2}^{(2)}+x_{n-2}^{(4)}=3x_{n-2}^{(2)}.$$

Тогда $x_n^{(2)}$ находим в общем виде $C_1(-\sqrt{3})^n+C_2(\sqrt{3})^n$ и из начальных условий $x_1^{(2)}=1$, $x_1^{(2)}=2$. Получаем, что

$$x_n^{(2)}=\frac{2-\sqrt{3}}{6}(-\sqrt{3})^n+\frac{2+\sqrt{3}}{6}(\sqrt{3})^n.$$

Тогда, при $n=2k$

$$x_n^{(2)}=\frac{2-\sqrt{3}}{6}3^k+\frac{2+\sqrt{3}}{6}3^k=2\cdot 3^{k-1},\quad k\geqslant 1.$$

При $n=2k+1$

$$x_n^{(2)}=-\frac{2-\sqrt{3}}{6}3^k\sqrt{3}+\frac{2+\sqrt{3}}{6}3^k\sqrt{3}=$$
$$=\frac{3-2\sqrt{3}}{6}3^k+\frac{3+2\sqrt{3}}{6}3^k=3^k,\quad k\geqslant 0.$$

Остальные последовательности находим из равенств $x_n^{(4)} = x_n^{(2)}$ и $x_n^{(1)} = x_n^{(5)} = x_{n-1}^{(2)}$, $x_n^{(3)} = x_{n-1}^{(2)} + x_{n-1}^{(4)}$. □

Задача 3.5. Сколько существует раскрасок вершин n-угольника, если соседние вершины должны быть разного цвета, а всего имеется k цветов? Поворачивать многоугольник нельзя.

Р е ш е н и е. Заметим, что последние две задачи на самом деле описываются одной моделью. Каждую раскраску вершин n-угольника можно описать при помощи строки номеров красок. При условии, что соседние вершины n-угольника должны быть разного цвета, мы получаем, что в строке любые два соседних, а также первое и последнее числа различны. Такие строки будем называть *правильными*. Обозначим количество правильных строк $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ длины n, $n \geqslant 2$, через x_n.

Рассмотрим правильную последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. По условию $a_1 \neq a_n$. Для a_{n-1} возможны два варианта: либо $a_{n-1} \neq a_1$, либо $a_{n-1} = a_1$.

В первом случае последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ является правильной. Теперь возьмем произвольную правильную последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ и поставим в конце любое число, отличное от a_1 и a_{n-1}. Получим $(k-2)$ различные правильные последовательности длины n. Получаем, что каждой последовательности первой группы соответствует ровно одна правильная последовательность длины $n-1$, а каждой правильной последовательности длины $n-1$ соответствует ровно $k-2$ последовательности первой группы. Это значит, что в первой группе ровно $(k-2)x_{n-1}$ последовательностей.

Во втором случае последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ является правильной, так как $a_{n-2} \neq a_{n-1} = a_1$. Теперь возьмем произвольную правильную последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ и продолжим ее до последовательности длины n числами a_1 и a: $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_1, a)$ так, что $a \neq a_1$. Получим $(k-1)$ различную правильную последовательность длины n. Получаем, что каж-

дой последовательности второй группы соответствует ровно одна правильная последовательность длины $n-2$, а каждой правильной последовательности длины $n-2$ соответствует ровно $k-1$ последовательность второй группы. Это значит, что в первой группе ровно $(k-1)x_{n-2}$ последовательностей.

Получаем рекуррентное соотношение

$$x_n = (k-2)x_{n-1} + (k-1)x_{n-2}$$

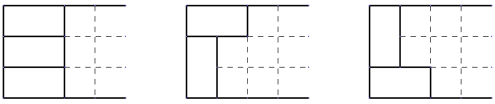
и начальные условия $x_2 = k(k-1)$, $x_3 = k(k-1)(k-2)$.

Решая рекуррентное уравнение, составляем характеристическое: $\lambda^2 - (k-2)\lambda - (k-1) = 0$. Находим $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = (k-1)$. Общее решение имеет вид $x_n^o = C_1(-1)^n + C_2(k-1)^n$. Учитывая начальные условия, получаем, что $C_1 = (k-1)$, $C_2 = 1$. Тогда $x_n = (-1)^n(k-1) + (k-1)^n$. □

Задача 3.6. Сколькими способами можно замостить прямоугольник $3 \times N$ при помощи костей домино 2×1?

Р е ш е н и е. Заметим, что мы можем замостить прямоугольник $3 \times N$ при помощи костей домино только при четном $N = 2n$. Обозначим x_n — количество способов замостить прямоугольник $3 \times 2n$, $n \geqslant 1$ при помощи костей домино. Нетрудно проверить, что $x_1 = 3$.

Левый вертикальный ряд прямоугольника $3 \times 2n$ мы можем замостить тремя различными способами:



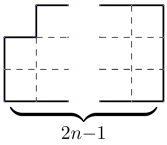
В первом случае оставшийся прямоугольник размера $3 \times 2(n-1)$ мы можем замостить x_{n-1} способом.

Во втором и третьем случае останется замостить прямоугольник размера $3 \times (2n-1)$ без угловой клетки. Эти случаи одинаковы в силу симметрии. Обозначим y_n — количество способов

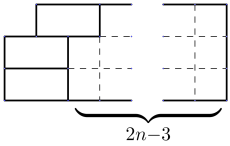
замостить прямоугольник $3 \times (2n-1)$, $n \geqslant 1$ без угловой клетки при помощи костей домино. При $n = 1$ имеем прямоугольник 2×1, значит, $y_1 = 1$.

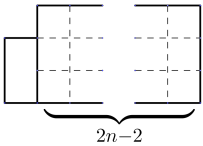
Получаем, что при $n \geqslant 2$ имеем равенство $x_n = x_{n-1} + 2y_n$.

Рассмотрим прямоугольник размера $3 \times (2n-1)$ без верхней левой угловой клетки:



Левый вертикальный ряд фигуры мы можем замостить двумя различными способами: В первом случае нам останется замо-





стить прямоугольник $3 \times (2n-3)$, $n \geqslant 2$ без угловой клетки, таких способов — y_{n-1}. Во втором останется замостить прямоугольник размера $3 \times 2(n-1)$. Получаем, что $y_n = y_{n-1} + x_{n-1}$, $n \geqslant 2$.

Подставив это отношение в первое, получим $x_n = x_{n-1} + 2y_n = x_{n-1} + 2(y_{n-1} + x_{n-1}) = 3x_{n-1} + 2y_{n-1}$.

Таким образом имеем две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, удовлетворяющие матричному отношению

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

и начальным условиям $x_1 = 3$, $y_1 = 1$. Откуда получаем, что

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 2.$$

Выведем рекуррентное отношение для последовательности $\{x_n\}$. Подставим $y_n = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})$ в рвенство $y_n = y_{n-1} + x_{n-1}$:

$$\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) = \frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}) + x_{n-1},$$

$$x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2},$$

$n \geqslant 2$. Из равенства $y_n = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})$ и условий $x_1 = 3$, $y_1 = 1$ получаем, что $x_0 = 1$, так как последовательность $\{x_n\}$ можно построить и для $n \leqslant 0$.

Решая уравнение $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$, $n \geqslant 2$, с начальными условиями $x_0 = 0$, $x_1 = 3$, получаем явный вид:

$$x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right), \quad n \geqslant 0.$$

□

Для решения дальнейших задач мы будем использовать переформулировку условия. Разберем эту идею на уже известной задаче про *ханойскую башню*. Пусть требуется ответить на такой вопрос. Нам дана возможность сделать всего 100 перемещений дисков. Для какого наибольшего числа дисков мы сможем решить эту задачу? Мы умеем отвечать на такой вопрос: если у нас имеется n дисков, то минимальное число перемещений равно $2^n - 1$. Тогда мы имеем такую оценку: $2^n - 1 \leqslant 100$, так как 100 — количество перемещений за которое мы смогли решить здачу для n дисков не может быть меньше минимума пермещений для n дисков. Отсюда следует, что $n \leqslant 6$. Получаем, что нам достаточно уметь решать одну из двух задач:

а) При каком минимальном количестве $x(n)$ перемещений можно решить задачу, если имеется n дисков?

б) Какое максимальное число дисков $y(k)$ мы можем переместить, если мы можем сделать не более k перемещений?

Докажем строго связь этих задач. Введем индикатор $I : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Для $n, k \geqslant 1$ положим $I(n, k) = 1$, если существует

алгоритм, позволяющий переложить n дисков за k перемещений. В остальных случаях $I(n,k) = 0$. Например, $I(1,1) = 1$, $I(2,1) = I(2,2) = 0$, $I(2,3) = 1$.

Тогда $x(n) = \min\{i \in \mathbb{N} : I(n,i) = 1\}$, $y(k) = \max\{j \in \mathbb{N} : I(j,k) = 1\}$.

Заметим, что если $I(n,k) = 1$, то $I(n,i) = 1$ для всех $i \geqslant k$, а если $I(n,k) = 0$, то $I(j,k) = 0$ для всех $j \geqslant n$. Это означает монотонность последовательностей $\{x(n)\}$ и $\{y(k)\}$.

Утверждение 3.1. $y(k) = \max\{n \in \mathbb{N} : x(n) \leqslant k\}$.

Доказательство. Обозначим $N(k) = \max\{n \in \mathbb{N} : x(n) \leqslant k\}$. Тогда для каждого $n \leqslant N(k)$ выполнено $x(n) \leqslant k$, то есть $I(n,k) = 1$, следовательно $y(k) \geqslant N(k)$.

С другой стороны, по определению $y(k)$ имеем, что $I(n,k) = 1$ для всех $n \leqslant y(k)$. Отсюда следует, что $x(n) \leqslant k$ для всех $n \leqslant y(k)$. Так как $N(k)$ — максимальный из номеров с таким свойством, то получаем, что $N(k) \geqslant y(k)$. Следовательно, $N(k) = y(k)$. □

В дальнейшем мы не будем проводить формальное доказательство, делая упор на интуитивное понимание подобного перехода. При этом строгие доказательства существуют.

Задача 3.7. 55 боксёров участвовали в турнире по системе "проигравший выбывает". Бои шли последовательно. Известно, что у участников каждого боя число предыдущих побед отличалось не более чем на 1. Какое наибольшее число боёв мог провести победитель турнира?

Решение. Переформулируем задачу. Пусть победитель провел n боев. Найдем наименьшее возможное число x_n участников такого турнира.

Нетрудно проверить, что $x_1 = 2$, так как в выигранном бою хотя бы два участника.

Найдем x_2. Пусть в последнем бою победитель турнира A выиграл у B. До этого A выиграл 1 раз, значит был еще ровно один

участник, проигравший A. Значит, было не менее трех участников. Пример строится так. Три участника A, B и C. A выигрывает у C, а затем — у B. В момент второго боя у A одно очко, у B — ноль.

Перейдем к общему случаю. Возьмем $n \geqslant 3$. Пусть в последнем бою победитель турнира A выиграл у B. До этого A выиграл $n-1$ раз, значит участник B выиграл не менее $(n-2)$-х боев. Рассмотрим участника A и всех проигравших ему боксеров. В этом подтурнире A набрал $n-1$ очко, значит в нем участвовало не менее x_{n-1} боксеров. Рассмотрим участника B и всех проигравших ему боксеров. В этом подтурнире B набрал не менее $(n-2)$-х очков, значит в нем участвовало не менее x_{n-2} боксеров. Получаем, что всего в турнире было не менее $x_{n-1} + x_{n-2}$ боксеров. Пример турнира, в котром было ровно $x_{n-1}+x_{n-2}$ боксеров строится так. Возьмем турнир, в котором победитель A набрал $n-1$ очко и участвовало x_{n-1} боксеров, объединим его с другим турниром, где победитель B набрал $n-2$ очка и участвовало x_{n-2} боксеров. В финале A победил B. В этом турнире участвовало ровно $x_{n-1} + x_{n-2}$ боксеров и победитель A набрал n очков.

Получаем, что последовательность x_n удовлетворяет условиям $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \geqslant 3$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Это подпоследовательность Фибоначчи: $x_n = F_{n+2}$, то есть $x_3 = 5$, $x_4 = 8$, $x_5 = 13$, $x_6 = 21$, $x_7 = 34$, $x_8 = 55$. Значит, если в турнире участвовало 55 боксеров, то победитель провел не более 8 боев. Как строить пример указано выше. □

Задача 3.8. Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить: «принадлежит ли ему загаданное число?» За ответ «да» надо заплатить 2 рубля, за ответ «нет» — 1 рубль. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка угадать загаданное число?

Р е ш е н и е. Переформулируем задачу. Для имеющейся

суммы $n \geqslant 2$ рублей найдем максимальное число x_n такое, что мы можем гарантированно угадать число, загаданное в множестве $1, 2, \ldots, x_n$.

При $n = 2$ $x_2 = 2$, так как при первом вопросе возможен ответ «да», и второй вопрос нам задать не получится. Значит, после первого вопроса и на ответ «да», и на ответ «нет» должно остаться не больше одного подозрительного числа. Алгоритм: спросить — это 1?

При $n = 3$ $x_3 = 3$. При первом вопросе возможен ответ «да», и второй вопрос нам задать не получится, так как остался 1 рубль. Значит, после первого вопроса на ответ «да», должно остаться не больше одного подозрительного числа. При ответе «нет» остается 2 рубля, а имея в запасе 2 рубля, мы можем угадать число не более, чем из двух загаданных, по предыдущему пункту. Алгоритм: спросить — это 1? Если ответ «да», то загадана 1, если ответ «нет», то спрашиваем — это 2?

При разборе случая $n = 3$ мы получили способ обобщить рассуждение на большее количество денег.

Пусть первым вопросом мы выделяем множество из k чисел. При ответе «да» — у нас останется множество из k подозрительных чисел и $n-2$ рубля, тогда $k \leqslant x_{n-2}$. При ответе «нет» — у нас останется можество из $x_n - k$ подозрительных чисел и $n-1$ рубль, тогда $x_n - k \leqslant x_{n-1}$. Откуда получаем, что $x_n \leqslant x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \geqslant 4$.

При этом понятен алгоритм действия, как отгадывать число из множества $1, 2, \ldots, x_n$, имея n рублей. Первый вопрос — про множество $1, 2, \ldots, x_{n-2}$. В случае ответа «да» — использовать алгоритм для первых x_{n-2} чисел и $n-2$ рублей. В случае ответа «нет» — использовать алгоритм для оставшихся $x_{n-1} = x_n - x_{n-2}$ чисел и $n-1$ рубля.

Получаем подпоследовательность Фибоначчи: $x_n = F_{n+1}$, то есть $x_4 = 5$, $x_5 = 8$, $x_6 = 13$, $x_7 = 21$, $x_8 = 34$, $x_9 = 55$, $x_{10} = 89$,

$x_{11} = 144$. Получаем, что для отгадывания одного из 144 чисел, нам необходимо минимум 11 рублей. □

Задача 3.9. Обезьяна хочет узнать, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У нее есть а) 1; б) 2; в) 3 ореха. Какого наименьшего числа бросков ей заведомо хватит? (Неразбившийся орех можно бросать снова.)

Р е ш е н и е. Переформулируем задачу. Для $k \geqslant 1$ орехов и числа бросков $n \geqslant 1$ будем искать максимальное число $x_n^{(k)}$ этажей в доме, для которого существует алгоритм, позволяющий определить самый низкий этаж, с которого нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился.

Пусть $k = 1$. Так как разбившийся орех не имеет смысла бросать второй раз, то мы будем вынуждены последовательно бросать единственный орех, начиная с 1-го этажа. Получаем, что за n бросков мы сможем определить этаж в не более чем n-этажном доме. Алгоритм последовательных бросков с 1-го, 2-го, ..., n-го этажей дает точность этой оценки. Получаем, что $x_n^{(1)} = n$.

Пусть $k = 2$. За один бросок мы можем точно определить с какого этажа разбивается орех только в 1-этажном доме, то есть $x_1^{(2)} = 1$.

Пусть первый бросок мы делаем с l-го этажа. Если орех разобьется, то у нас останется один орех и $n-1$ бросков. Тогда ниже l-го этажа может находиться не более $x_{n-1}^{(1)}$ этажей, с которыми мы разберемся, используя алгоритм для $x_{n-1}^{(1)}$ этажей. То есть первый бросок мы можем делать не более, чем с $(x_{n-1}^{(1)} + 1)$-го этажа.

Если при первом броске орех не разбивается, то у нас остается $n-1$ бросок и 2 ореха, при помощи котрых мы можем разобраться с $x_{n-1}^{(2)}$ этажами, которые выше $(x_{n-1}^{(1)}+1)$-го этажа. Получаем, что $x_n^{(2)} \leqslant x_{n-1}^{(1)} + 1 + x_{n-1}^{(2)}$, $n \geqslant 2$.

При этом мы получили алгоритм, который позволяет опреде-

лить самый низкий этаж, с которого нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился, для $(x^{(1)}_{n-1} + 1 + x^{(2)}_{n-1})$-этажного дома. А именно: бросаем орех с $(x^{(1)}_{n-1} + 1)$-го этажа. Если при первом броске орех разбивается то для первых $x^{(1)}_{n-1}$ этажей используем алгоритм для 1 ореха и $(n-1)$-го броска. Если при первом броске орех не разбивается то для $(x^{(1)}_{n-1}+1+1)$-го, $(x^{(1)}_{n-1}+1+2)$-го, ..., $(x^{(1)}_{n-1} + 1 + x^{(2)}_{n-1})$-го этажей используем алгоритм для 2 орехов и $(n-1)$-го броска.

Получаем рекуррентное отношение $x^2_n = x^{(1)}_{n-1} + 1 + x^{(2)}_{n-1} = n + x^{(2)}_{n-1}$, $n \geqslant 2$. С условием $x^{(2)}_1 = 1$ получаем решение

$$x^{(2)}_n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Для того, чтобы получить алгоритм для 15-ти этажного дома, нам необходимо выполнение неравенства $\dfrac{(n+1)n}{2} \geqslant 15$, то есть $n \geqslant 5$. Первый бросок необходимо сделать с $x^{(1)}_4 + 1 = 5$ этажа. Второй, в случае если орех не разбился, с $x^{(1)}_4+1+x^{(1)}_3+1 = 9$ этажа. Третий, если орех не разбился, с $x^{(1)}_4+1+x^{(1)}_3+1+x^{(1)}_2+1 = 12$ этажа. Четвретый, если орех не разбился, с $x^{(1)}_4 + 1 + x^{(1)}_3 + 1 + x^{(1)}_2 + 1 + x^{(1)}_1 + 1 = 14$ этажа. И пятый, если орех не разбился, с 15 этажа. Когда орех разбивается, то бросаем второй орех последовательно, начиная с этажа, следующего за предыдущим, с котрого орех не разбился.

Эти рассуждения легко переделать для перехода от последовательности $\{x^{(k-1)}_n\}_{n=1}^{\infty}$ к последовательности $\{x^{(k)}_n\}_{n=1}^{\infty}$. А именно, получаем рекуррентное соотношение $x^{(k)}_n = x^{(k-1)}_{n-1} + 1 + x^{(k)}_{n-1}$, $n \geqslant 2$, с условием $x^{(k)}_1 = 1$. При этом мы получаем и алгоритм поиска этажа.

Заметим, что явный вид последовательности $\{x^{(k)}_n\}_{n,k=1}^{\infty}$ несложно получить, использую понятие количества информации. А именно, результат работы алгоритма для $k \geqslant 1$ орехов и $n \geqslant 1$ бросков можно описать как строку из n "0" и "1", в ко-

торой не больше k "1". "0" на i-м месте означает, что орех не разбился, а "1" — что разбился при i-м броске. Таких строк ровно $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^k$. При этом мы должны различать $(N+1)$ случай для N этажей. $(N+1)$ учитывает, что орех вообще не разбился. Откуда сразу получаем оценку, что $x_n^{(k)}+1 \leqslant C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^k$. Однако, в этом случае непонятно как строить оптимальный алгоритм. А при построении рекуррентного отношения мы еще и получаем способ действовать так, чтобы все неравенства обратились в равенства. □

Задача 3.10. Имеется набор гирь, веса которых в граммах: 1, 2, 4,..., 512 (последовательные степени двойки) — по одной гире каждого веса. Груз разрешается взвешивать с помощью этого набора, кладя гири на обе чашки весов. Сколькими способами можно взвесить вес 171 грамм?

Р е ш е н и е. Пусть у нас имеются гири весом 1, 2, ..., 2^k. Обозначим x_n^k — количество способов взвесить вес в n грамм, имея этот набор гирь.

Заметим, что $x_1^1=2$. Действительно, имея две гири 1 и 2 г., мы можем уравновесить вес 1 г. двумя способами: 1=1 и 1+1=2. $x_1^2=3$: 1=1, 1+1=2, 1+1+2=4. И вообще, $x_1^k=k+1$. Это следует из единственности представления любого числа в двоичной системе.

Заметим, что если n — четное, то мы можем его взвесить только четными гирями, разделив эти номиналы на 2, получим способ взвесить вес $n/2$ гирями 1, 2, ..., 2^{k-1}. Значит, $x_n^k=x_{n/2}^{k-1}$.

Если n — нечетное, то во взвешивании точно использована гиря весом 1 г. Ее мы можем положить либо на одну чашку вместе с весом n, либо на разные. Значит, мы набором 2, ..., 2^{k-1} взвешиваем либо вес $n-1$, либо вес $n+1$. Получаем, что

$$x_n^k=x_{n-1}^k+x_{n+1}^k=x_{\frac{n-1}{2}}^{k-1}+x_{\frac{n+1}{2}}^{k-1}.$$

Для $n = 171$ имеем равенства

$$x_{171}^9 = x_{86}^8 + x_{85}^8 = 2x_{43}^7 + x_{42}^7 =$$
$$= 2(x_{22}^6 + x_{21}^6) + x_{21}^6 = 2x_{22}^6 + 3x_{21}^6 = 3x_{10}^5 + 5x_{11}^5 =$$
$$= 5x_6^4 + 8x_5^4 = 8x_2^3 + 13x_3^3 =$$
$$= 13x_2^2 + 21x_1^2 = 13x_1^1 + 21x_1^2 =$$
$$= 13 * 2 + 21 * 3 = 89.$$

□

Задача 3.11. Шеренга солдат называется *неправильной*, если никакие три подряд стоящих солдата не стоят по росту (ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания). Сколько неправильных шеренг можно построить из n солдат разного роста, если а) $n = 4$; б) $n = 5$?

Р е ш е н и е. Обозначим через x_n — число перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$ таких, что никакие три числа не стоят ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания. Тогда число неправильных шеренг равно x_n. Действительно, каждой перестановке чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ можно поставить в соответствие перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$ с сохранением неравенств между числами. То есть число расстановок солдат ростом $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ зависит только от n, а не от конкретных значений a_i.

Рассмотрим неправильную шеренгу $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, a_{i_l} — рост солдата, стоящего на l-м месте. Пусть самый высокий солдат стоит на k-м месте, $k \in [1, \ldots, n]$. Справа и слева от него будут стоять неправильные шеренги $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{k-1}})$ и $(a_{i_{k+1}}, a_{i_{k+1}}, \ldots, a_{i_n})$. При этом, так как $a_{i_k} = a_n > a_{i_{k-1}}$ и $a_{i_k} = a_n > a_{i_{k+1}}$, то выполнены неравенства $a_{i_{k-2}} > a_{i_{k-1}}$ и $a_{i_{k+1}} < a_{i_{k+2}}$.

Получаем, что каждой расстановке солдат в неправильную шеренгу с самым высоким солдатом, стоящем на k-м месте, соответствует цепочка из трех действий:

1) выбор $(k-1)$-го солдата из $(n-1)$-го (кроме самого высокого солдата);

2) расстановка их в неправильную шеренгу $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{k-1}})$ на первых $(k-1)$-м местах с условием $a_{i_{k-2}} > a_{i_{k-1}}$;

3) расстановка оставшихся $(n-k)$ солдат в неправильную шеренгу $(a_{i_{k+1}}, a_{i_{k+1}}, \ldots, a_{i_n})$ справа от самого высокого с условием $a_{i_{k+1}} < a_{i_{k+2}}$.

Среди всех расстановок $(k-1)$-го солдата в неправильную шеренгу $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{k-1}})$ ровно половина удовлетворяет неравентсву $a_{i_{k-2}} > a_{i_{k-1}}$. Докажем это. Рассмотрим $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-1})$ — перестановку чисел $1, 2, \ldots, k-1$. При помощи соотвествия

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-1}) \leftrightarrow (k-\sigma_1, k-\sigma_2, \ldots, k-\sigma_{k-1})$$

устанавливается биекция между множествами перестановок, в которых $\sigma_{k-2} > \sigma_{k-1}$ и $\sigma_{k-2} < \sigma_{k-1}$. Тоже самое можно сказать для шеренг, стоящих справа.

Положим $x_0 = x_1 = 2$ для того, чтобы количество способов поставить 0 и 1 солдата в неправильную шеренгу с описанными условиями было равно 1.

Тогда

$$x_n = C_{n-1}^0 \cdot \frac{x_0}{2}\frac{x_{n-1}}{2} + C_{n-1}^1 \cdot \frac{x_1}{2}\frac{x_{n-2}}{2} + \ldots + C_{n-1}^{n-1} \cdot \frac{x_{n-1}}{2}\frac{x_0}{2} = \\ = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \cdot \frac{x_{k-1}}{2}\frac{x_{n-k}}{2}$$

Тогда

$$x_2 = C_1^0 \cdot \frac{x_0}{2}\frac{x_1}{2} + C_1^1 \cdot \frac{x_1}{2}\frac{x_0}{2} = 2,$$

$$x_3 = C_2^0 \cdot \frac{x_0}{2}\frac{x_2}{2} + C_2^1 \cdot \frac{x_1}{2}\frac{x_1}{2} + C_2^1 \cdot \frac{x_2}{2}\frac{x_0}{2} = 4,$$

$$x_4 = C_3^0 \cdot \frac{x_0}{2}\frac{x_3}{2} + C_3^1 \cdot \frac{x_1}{2}\frac{x_2}{2} + C_3^2 \cdot \frac{x_2}{2}\frac{x_1}{2} + C_3^3 \cdot \frac{x_3}{2}\frac{x_0}{2} = 10,$$

$$x_5 = C_4^0 \cdot \frac{x_0}{2}\frac{x_4}{2} + C_4^1 \cdot \frac{x_1}{2}\frac{x_3}{2} + C_4^2 \cdot \frac{x_2}{2}\frac{x_2}{2} + \\ + C_4^3 \cdot \frac{x_3}{2}\frac{x_1}{2} + C_4^4 \cdot \frac{x_4}{2}\frac{x_0}{2} = 32.$$

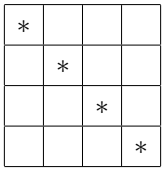
□

Задача 3.12. Напомним, что *беспорядок* (англ. Derangement) — это перестановка чисел от 1 до n, в которой ни один элемент не стоит на своём месте. Количество беспорядков обозначим через D_n. Найдите рекуррентное отношение для D_n.

З а м е ч а н и е. В предыдущем методическом пособии [4] мы нашли явный вид для D_n при помощи формулы включений-исключений.

Р е ш е н и е. Найдем рекуррентное отношение для чисел беспорядков. Любую перестановку можно интерпретировать как расстановку n небьющих друг друга одинаковых ладей на доске $n \times n$. Действительно, возьмем перестановку $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ и сопоставим ей расстановку ладей такую, что в i-ой строке ладья стоит в $\pi(i)$-м столбце. Среди чисел $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$ каждое число от 1 до n встречается ровно по одному разу, поэтому все ладьи стоят в различных столбцах.

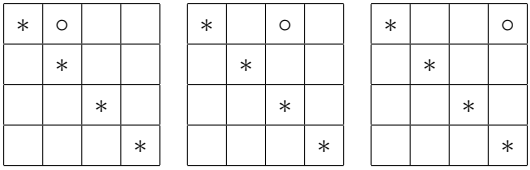
Беспорядку соответствует расстановка n небьющих друг друга одинаковых ладей на доске $n \times n$ без главной диагонали:



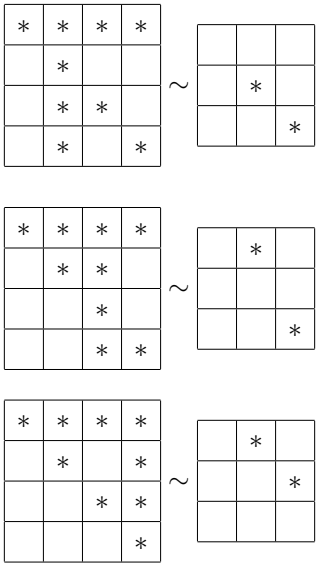
Расстановки одинаковых ладей, небьющих друг друга, в дальнейшем будем называть *правильными*.

Разберем сначала случай для $n = 4$. Все правильные расстановки четырех ладей на доске 4×4 без главной диагонали разбиваются на три группы, в зависимости от положения ладьи в

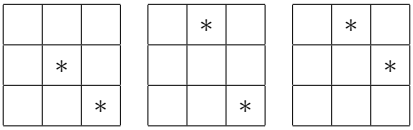
первой строке:



Далее нам нужно правильно расставить трех ладей в оставшейся части доски, что эквивалентно правильной расстановке трех ладей на доске 3×3 с такими запрещенными клетками:

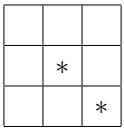


Количество способов правильно расставить трех ладей на досках:

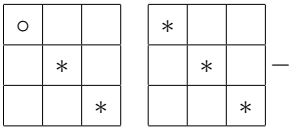


равны между собой. Это устанавливается при помощи взаимнооднозначного соответствия, перестановкой строк. Получаем, что

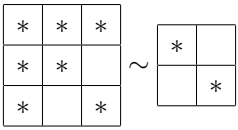
D_4 в три раза больше, чем количество правильных расстановок трех ладей на поле:



Эти расстановки, в свою очередь, делятся на два вида:



либо ладья стоит в левом верхнем углу, либо нет. В первом случае нам останется расставить двух ладей на поле:



Во втором случае количество расстановок равно D_3. Таким образом, $D_4 = 3(D_2 + D_3)$.

Эти рассуждения без труда переносятся на случай произвольного $n \geqslant 3$, и мы получаем рекуррентное отношение:

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}),\ n \geqslant 3.$$

Начальные условия также без труда находятся: $D_1 = 0$, $D_2 = 1$.

В этой задаче получилось линейное разностное уравнение второго порядка с непостоянными коэффициентами. □

Задача 3.13. *Затруднение мажордома.* Однажды мажордом короля Артура обнаружил, что к обеду за круглым столом приглашено 6 пар враждующих рыцарей. Сколькими способами можно рассадить их так, чтобы никакие два врага не сидели рядом? Рассадки, получающиеся друг из друга поворотом стола, считаются одинаковыми.

Р е ш е н и е. Попробуем исследовать последовательность x_n — количество способов рассадить n пар враждующих рыцарей так, чтобы никакие два врага не сидели рядом. Попытаемся вывести x_n через предыдущие. Удалив n-ю пару, мы получим рассадку, при которой количество пар враждующих рыцарей может быть 0, 1, 2, так как образуются ровно две новые пары сидящих рядом рыцарей. Значит, выразить x_n через предыдущие нам не удастся.

Будем рассматривать все рассадки n пар враждующих рыцарей и учитывать количество врагов, сидящих рядом. Обозначим через $x_n(k)$ — количество рассадок n пар враждующих рыцарей таких, что образуется ровно k пар сидящих рядом врагов. Как и в случае биномиальных коэффициентов полагаем, что $x_n(k) = 0$, если $k < 0$ или $k > 2n$. Эту оценку сразу можно уточнить: $x_n(k) = 0$, если $k > n$, так как у нас всего n пар врагов. Обозначим через $X_n(k)$ — множество рассадок n пар враждующих рыцарей таких, что образовалось ровно k пар сидящих рядом врагов. Таким образом, $x_n(k) = |X_n(k)|$.

Выразим $x_{n+1}(k)$ через числа $x_n(i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Добавим $(n+1)$-ю пару враждующих рыцарей к рассадке n пар враждующих рыцарей. Заметим, что при добавлении пары врагов, количество пар врагов может увеличиться максимум на 1, так как новая пара рыцарей враждует только между собой и может добавить только себя в качестве новой пары врагов.

Уменьшиться количество пар врагов может максимум на 2, так как новая пара может разбить не более двух пар врагов.

Таким образом, при добавлении новой пары количество пар врагов меняется на -2, -1, 0 или $+1$. Получаем, что $x_{n+1}(k)$ зависит только от $x_n(k-1)$, $x_n(k)$, $x_n(k+1)$ и $x_n(k+2)$.

При удалении $(n+1)$-й пары получается ровно одна рассадка за столом n пар враждующих рыцарей, которая принадлежит одному из четырех множеств: $X_n(k-1)$, $X_n(k)$, $X_n(k+1)$ или

$X_n(k+2)$.

Найдем, сколько рассадок $(n+1)$-й пары враждующих рыцарей, в которых k пар врагов сидят рядом, получается добавлением пары враждующих рыцарей из одной рассадки n пар враждующих рыцарей, в которых $(k-1)$ пара врагов сидят рядом. Чтобы добавить враждующую пару, мы должны посадить пару враждующих рыцарей между не враждующими рыцарями. Таких мест: $2n-(k-1) = 2n-k+1$. Еще учитываем, что пару можно посадить двумя способами, так как порядок важен. То есть из каждого элемента множества $X_n(k-1)$ получается ровно $2(2n-k+1)$ элемент множества $X_{n+1}(k)$.

Если у нас было ровно k пар врагов, то посадить еще одну пару рыцарей так, чтобы количество пар врагов не изменилось, мы можем двумя различными способами: либо рыцари сели рядом, либо нет. В первом случае нам необходимо, чтобы они сели между враждующими рыцарями (тогда они разобьют одну пару, но добавят себя в качестве врагов). Во втором — необходимо, чтобы они оба сели между не враждующими рыцарями (чтобы не разбить ни одной пары врагов). При первом способе — $2k$ вариантов (учитываем порядок), при втором: $(2n-k)(2n-k-1)$ (порядок уже учтен). Получаем, что каждому элементу множества $X_n(k)$ соответствует ровно $2k+(2n-k)(2n-k-1)$ элемент множества $X_{n+1}(k)$.

Пусть у нас была ровно $k+1$ пара врагов. Чтобы количество пар врагов уменьшилось на 1 нам необходимо посадить еще одну пару рыцарей так, чтобы один сел между враждующими рыцарями, а второй — в промежуток между невраждующими. Таких вариантов — $2(k+1)(2n-(k+1))$. Получаем, что каждому элементу множества $X_n(k+1)$ соответствует ровно $2(k+1)(2n-(k+1))$ элемент множества $X_{n+1}(k)$.

Пусть у нас было ровно $k+2$ пары врагов. Чтобы количество пар врагов уменьшилось на 2 нам необходимо обоих рыцарей по-

садить между врагами. Таких вариантов — $(k+2)(k+1)$. Получаем, что каждому элементу множества $X_n(k+2)$ соответствует ровно $(k+2)(k+1)$ элемент множества $X_{n+1}(k)$.

Таким образом, мы получили рекуррентное соотношение:

$$\begin{gathered} x_{n+1}(k) = 2(2n-k+1)x_n(k-1)+ \\ +(2k+(2n-k)(2n-k-1))x_n(k)+ \\ +2(k+1)(2n-k-1)x_n(k+1)+ \\ +(k+2)(k+1)x_n(k+2). \end{gathered}$$

Начальные данные получаются непосредственным вычислением: $x_2(0) = 2$, $x_2(1) = 0$, $x_2(2) = 4$.

Дальнейшие вычисления громоздки, но мы приведем итог: $x_6(0) = 12\,771\,840$. □

Задача 3.14. Найдите количество n-значных чисел, в записи которых имеются только цифры 1, 2, 3, в которых первая и последняя, а также любые две соседние цифры различны.

У к а з а н и е. Сравните с задачей про раскраску вершин многоугольника.

Задача 3.15. (Журнал "Математический вестник", 1914 г.) Чёрт предложил карточному шулеру: "Каждый раз, как ты перейдешь мост и вернешься обратно, твои деньги в кармане удвоятся, но за это ты мне заплатишь в первый раз 50 руб, во второй — 100 руб, в третий — 150 руб и т.д." Шулер прошел по мосту 17 раз вперед и назад. Сначала он значительно обогащался, однако затем не только спустил то, что приобрел, но даже остался должен чёрту 360 руб 72 коп. Сколько денег у шулера было изначально? Как бы изменилась ситуация, если бы этих денег было на копейку больше?

Задача 3.16. В колонию, состоящую из N бактерий, попадает вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию и делится пополам, а оставшиеся бактерии также делятся пополам. За вторую минуту два вируса уничтожают две бактерии и делятся пополам (всего получается четыре вируса), оставшиеся бактерии также делятся пополам и так далее. Вымрет ли колония бактерий? Если да, то через сколько времени?

Литература

[1] Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. — М.: Просвещение, 2010.

[2] Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. — М.: Просвещение, 2009.

[3] Андерсон Дж.А. Дискретная математика и комбинаторика. — М.: Вильямс, 2003.

[4] Баранов В.Н., Баранова О.В. Элементы дискретной математики. Задачи перечислительной комбинаторики — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2024.

[5] Баранов В.Н., Баранова О.В. Элементы дискретной математики. Метод раскраски. Принцип Дирихле — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2021.

[6] Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2010.

[7] Медников Л.Э., Шаповалов А.В. Турнир городов: мир математики в задачах. — М.: МЦНМО, 2017.

[8] Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2001.

[9] Квант. Научно-популярный физико-математический журнал. Задачник кванта.

[10] www.problems.ru — База задач по математике.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

Баранов Виктор Николаевич
Баранова Ольга Викторовна

Элементы дискретной математики
Рекуррентные соотношения

Учебное пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 24.01.2025. Формат 60 x 84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 3,42. Уч.-изд. л. 2,77.
Тираж 49 экз. Заказ № 158.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, каб. 021
Тел.: +7(3412)916-364. E-mail:editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2
Тел. 68-57-18