**Л.П. Сметанина, Ю.М. Сметанин,
О.В. Максимова**

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ижевск
2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра математического анализа

Л.П. Сметанина, Ю.М. Сметанин, О.В. Максимова

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2025

УДК 517.51(075)
ББК 22.161.я573
С502

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: канд. пед. наук, доцент, зав. каф. алгебры и топологии ин-та математики, информ. технологий и физики ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» **Т.М. Банникова**

Сметанина Л.П., Сметанин Ю.М., Максимова О.В.

С502 Функции многих переменных : учеб.-метод. пособие / Л.П. Сметанина, Ю.М. Сметанин, О.В. Максимова. − Ижевск : Удмуртский университет, 2025. − 62 с. − Текст : электронный.

В учебно-методическом пособии приведены основные теоретические сведения, изложена методика исследования функции многих переменных, методы исследования функции с использованием частных производных, а также представлены варианты индивидуальных заданий.

Данное пособие предназначено для студентов уровня бакалавриата и специалитета всех направлений и всех форм о бучения Института нефти и газа им. М.С. Гуцериева и Института экономики и управления в Удмуртском государственном университете.

УДК 517.51(075)
ББК 22.161.5я73

Содержание

Введение

Данное учебно-методическое пособие подготовлено преподавателями кафедры математического анализа и отражает опыт при проведении занятий и организации самостоятельной работы студентов Института нефти и газа им. М.С.Гуцириева и Института экономики и управления в Удмуртском государственном университете.

Пособие предназначено для методического обеспечения раздела «Функции нескольких переменных» курса «Высшая математика», «Математика», «Математический анализ».

В пособии содержатся краткие теоретические сведения, изложены правила работы с функциями многих переменных, алгоритмы вычисления частных производных первого и высших порядков таких функций и способы применения.

Индивидуальные задания могут быть использованы для организации работы на практических занятиях, а также как индивидуальные домашние задания.

Пособие предназначено обеспечить студентов наглядным вспомогательным материалом и индивидуальными заданиями при изучении курса «Высшая математика» и может быть использовано для студентов других нематематических направлений УдГУ.

1 Область определения функции многих (нескольких) переменных. Линии уровня

Множество всевозможных упорядоченных совокупностей чисел называется n-**мерным координатным пространством** и обозначается $\mathbb{R}^n$. Каждая упорядоченная совокупность называется **точкой** этого пространства и обозначается $M(x_1,\, x_2, \ldots, x_n)$. Числа $x_1,\, x_2, \ldots, x_n$ — **координаты точки** M.

Расстоянием между двумя произвольными точками $M_1(x_1,\, x_2, \ldots, x_n)$ и $M_2(y_1,\, y_2, \ldots, y_n)$ называется число $\rho(M_1,\, M_2)$, определяемое формулой:

$$\rho(M_1,\; M_2) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

Пространство $\mathbb{R}^n$ с введенным расстоянием называется n-**мерным евклидовым пространством**.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ и каждой точке $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \in D$ поставлено в соответствие число $u \in \mathbb{R}$. Тогда говорят, что задана функция n переменных $u = f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$.

Функцию двух переменных обозначают часто $z = f(x,\, y)$, функцию трех переменных — $u = f(x,\, y,\, z)$.

Областью определения функции $z = f(x,\, y)$ называется множество точек $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$, для которых эта функция, заданная аналитически, имеет смысл.

Пример 1. Найти область определения функции $z = \sqrt{\dfrac{y - x^2}{y - 2}}$.

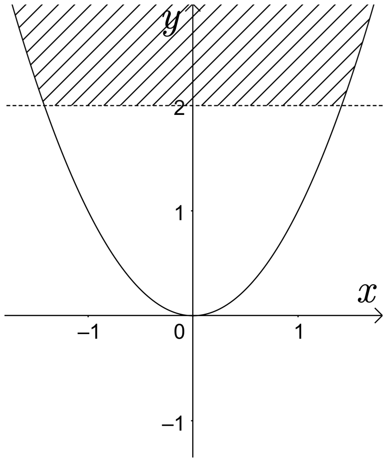
Функция определена во всех точках плоскости, где

$$\begin{cases} \dfrac{y - x^2}{y - 2} \geq 0, \\ y - 2 \neq 0. \end{cases}$$

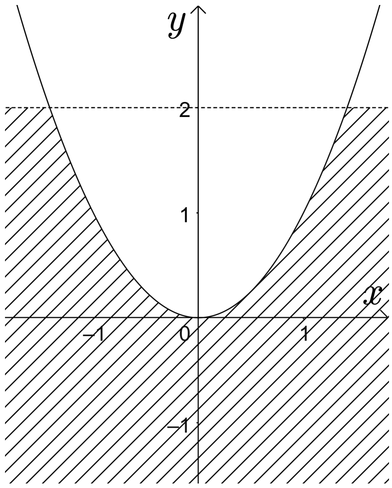
Система неравенств равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y - x^2 \geq 0, \\ y - 2 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y - x^2 \leq 0, \\ y - 2 < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

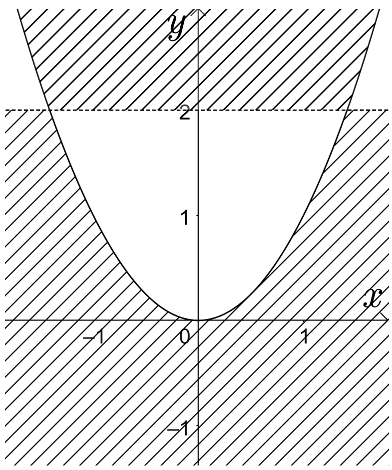
Первой системе удовлетворяют координаты всех точек, лежащих не ниже параболы $y = x^2$ и лежащих в полуплоскости $y > 2$.



Второй системе — лежащие не выше параболы $y = x^2$ и в полуплоскости $y < 2$.



Окончательно:



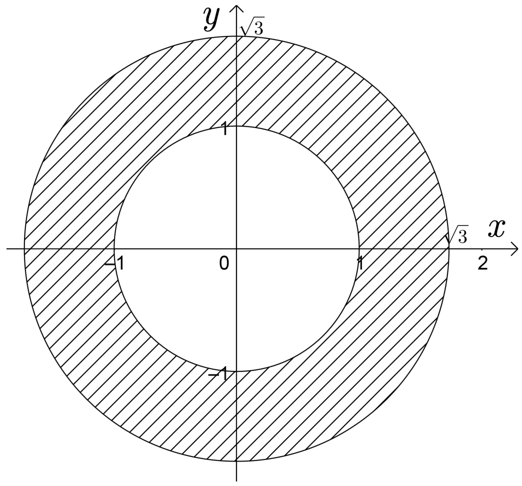
Пример 2. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \arcsin(2 - x^2 - y^2)$.

Исходя из области определения функции $u = \arcsin t$:

$t \in [-1,\, 1]$, получаем

$$-1 \leqslant 2 - x^2 - y^2 \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2 - x^2 - y^2 \leqslant 1, \\ 2 - x^2 - y^2 \geqslant -1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 3. \end{cases}$$

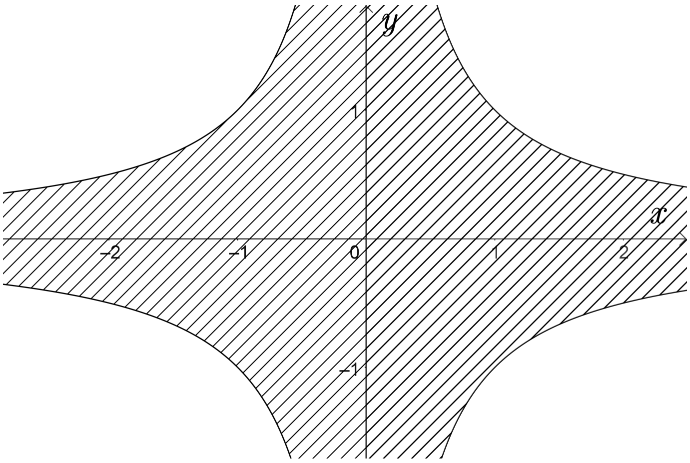
Область заключена между двумя концентрическими окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 3$, включая точки, лежащие на окружностях.



Пример 3. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $z = \arcsin xy$.

$$-1 \leqslant xy \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} xy \leqslant 1, \\ xy \geqslant -1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ y \leqslant \dfrac{1}{x}, \\ y \geqslant -\dfrac{1}{x}, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ y \geqslant \dfrac{1}{x}, \\ y \leqslant -\dfrac{1}{x}, \end{cases} \\ \quad x = 0, \\ \quad y = 0. \end{array}\right.$$

Область определения ограничена двумя сопряженными гиперболами $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = -\dfrac{1}{x}$.



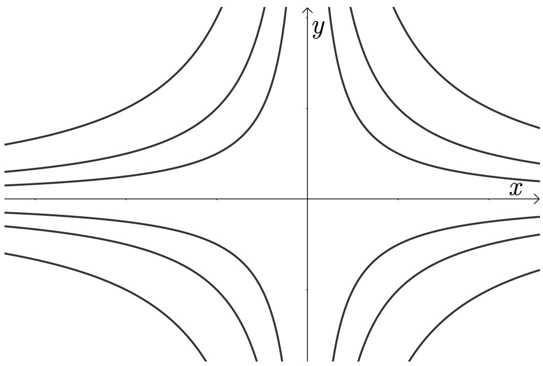
Определение. Линией уровня функции $z = f(x,\ y)$, называется множество точек $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих уравнению $f(x,\ y) = c$, т. е. множество точек, в которых функция принимает одинаковые значения $(c = const)$.

Пример 4. Найти линии уровня $z = xy$.

Если $c > 0$, то линии уровня — гиперболы, расположенные в I и III четвертях,

если $c < 0$ — гиперболы, расположенные во II и IV четвертях,

если $c = 0$, то две прямые: $y = 0$ и $x = 0$.



Пример 5. Построить линии уровня функции $z = \max\{x,\ |y|\}$.

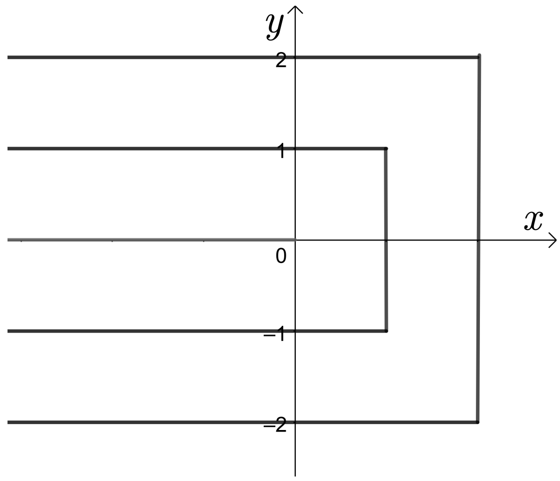
Если $x \geqslant |y|$, то $x = c$.

Если $x \leqslant |y|$, то $|y| = c$.

Очевидно, если $c = 0$, то $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ 0 \geqslant |y|, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ x \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Если $c = 1$, то $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ 1 \geqslant |y|, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \pm 1, \\ x \leq 1. \end{cases} \end{array}\right.$

Если $c = 2$, тогда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ 2 \geqslant |y|\,, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \pm 2, \\ x \leq 2 \end{cases} \end{array}\right.$ и т. д.



2 Частные производные

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$.

Назовем $\Delta_x z$ **частным приращением по переменной** x, где $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$;

аналогично, $\Delta_y z$ — **частное приращение по переменной** y, где $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то он называется **частной производной** $f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ по переменной x и обозначается $\dfrac{\partial z(M)}{\partial x}$ или $z'_x(M)$.

Аналогично, $\dfrac{\partial z(M)}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

Если дана функция трех переменных $u = f(x, y, z)$, то

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} \qquad \big(\text{или} \quad u'_x(M)\big),$$
$$\frac{\partial u(M)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y, z) - u(x, y, z)}{\Delta y} \qquad \big(\text{или} \quad u'_y(M)\big),$$
$$\frac{\partial u(M)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x, y, z + \Delta z) - u(x, y, z)}{\Delta z} \qquad \big(\text{или} \quad u'_z(M)\big).$$

Для нахождения частных производных используют все известные формулы и правила дифференцирования функций одной переменной, считая при этом другую (другие) переменную постоянной величиной.

Пример 1. Дана функция $z = y^x$. Найти частные производные по переменным x и y.

При нахождении частной производной по переменной x считаем $y{=}const$. В данном случае функция будет показательной и следовательно:

$$\underset{(y=const)}{\frac{\partial z}{\partial x}} = y^x \ln y.$$

Если вычисляем частную производную по переменной y, то x считаем постоянной величиной, тогда y^x — степенная функция, следовательно:

$$\underset{(x=const)}{\frac{\partial z}{\partial y}} = xy^{x-1}.$$

Пример 2. Дана функция $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Найти частные производные по переменным x, y и z.

При фиксированных y и z функция u является функцией только переменной x:

$$\underset{\left(\substack{y=const\\z=const}\right)}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Аналогично,

$$\underset{\left(\substack{x=const\\z=const}\right)}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\underset{\left(\substack{x=const\\y=const}\right)}{\frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Определение. Функция $f\,(x,\,y)$ называется **дифференцируемой в точке** $(x_0,\,y_0)$, если существуют числа A и B, такие, что полное приращение функции может быть представлено в виде:

$$\begin{gathered}\Delta f\,(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\,(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x + \beta\,(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y, \quad \text{где}\\ \alpha\,(\Delta x,\Delta y)\to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x\to 0, \quad \Delta y\to 0,\\ \beta\,(\Delta x,\Delta y)\to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x\to 0, \quad \Delta y\to 0.\end{gathered}$$

Главная часть приращения, линейная относительно Δx и Δy, т. е. $A\Delta x + B\Delta y$, называется **полным дифференциалом функции** $f\,(x,\,y)$ в точке $(x_0,\,y_0)$ и обозначается $df\,(x_0,\,y_0)$:

$$df\,(x_0,\,y_0) = A\Delta x + B\Delta y$$

или

$$df\,(x_0,\,y_0) = A\,dx + B\,dy.$$

Если функция $f\,(x,\,y)$ дифференцируема в точке $(x_0,\,y_0)$, то в этой точке существуют частные производные и $f'_x\,(x_0,\,y_0) = A$, $\quad f'_y\,(x_0,\,y_0) = B$.

Если частные производные $f'_x\,(x,\,y)$ и $f'_y\,(x,\,y)$ функции $z = f\,(x,\,y)$ существуют в некоторой окрестности точки $(x_0,\,y_0)$ и непрерывны в точке $(x_0,\,y_0)$, то функция дифференцируема в точке $(x_0,\,y_0)$ и $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}\,dy$.

Для дифференцируемой функции n переменных

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\,dx_n.$$

Пример 3. Найти дифференциал функции $f(x,y,z) = 1 + \dfrac{z}{x^2+y^3}$.

$$\begin{aligned}
\underset{\left(\substack{y=const\\ z=const}\right)}{\frac{\partial f}{\partial x}} &= -\frac{z}{\left(x^2+y^3\right)^2}\cdot 2x,\\
\underset{\left(\substack{x=const\\ z=const}\right)}{\frac{\partial f}{\partial y}} &= -\frac{z}{\left(x^2+y^3\right)^2}\cdot 3y^2,\\
\underset{\left(\substack{x=const\\ y=const}\right)}{\frac{\partial f}{\partial z}} &= \frac{1}{x^2+y^3},
\end{aligned}$$

$$df = -\frac{2xz}{\left(x^2+y^3\right)^2}\,dx - \frac{3zy^2}{\left(x^2+y^3\right)^2}\,dy + \frac{1}{x^2+y^3}\,dz.$$

3 Дифференцирование сложной функции

Пусть функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ дифференцируемы в точке (u_0, v_0), а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), где $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$. Тогда сложная функция $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ дифференцируема в точке (u_0, v_0), и её частные производные выражаются формулами:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Если $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$, то

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Если $z = f(x, y)$, где $y = \psi(x)$, то $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx}$.

Аналогичные формулы можно записать для функций большего числа переменных.

Пример 1.

Дана функция $z = x^3 \ln y$, где $x = \dfrac{u}{v}$; $y = uv$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = 3x^2 \ln y \cdot \frac{1}{v} + \frac{x^3}{y} \cdot v =$$
$$= 3\frac{u^2}{v^2} \ln(uv) \cdot \frac{1}{v} + \frac{u^3}{v^3 uv} \cdot v = \frac{3u^2}{v^3} \ln(uv) + \frac{u^2}{v^3},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = 3x^2 \ln y \left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{x^3}{y} \cdot u =$$
$$= 3\frac{u^2}{v^2} \ln(uv) \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{u^3}{v^3 uv} \cdot u = -\frac{3u^3}{v^4} \ln(uv) + \frac{u^3}{v^4}.$$

Пример 2.

Дана функция $z = x^3 + \sqrt{y}$, где $x = \ln t$; $y = t^3$. Найти $\dfrac{dz}{dt}$.

Здесь x и y зависят от одной переменной t, сложная функция

$f\left(x\left(t\right),\,y\left(t\right)\right)$ — функция одной переменной t,

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=3x^2\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot 3t^2=$$
$$=\frac{3\ln^2 t}{t}+\frac{3t^2}{2\sqrt{t^3}}=3\left(\frac{\ln^2 t}{t}+\frac{\sqrt{t}}{2}\right).$$

Пример 3.

Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если функция $z=e^{xy^2}$, где $y=\cos x$.

В этом примере y зависит от переменной x, сложная функция $f\left(x,\,y\left(x\right)\right)$ зависит от одной переменной x.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=e^{xy^2}\cdot y^2+e^{xy^2}\cdot 2xy\left(-\sin x\right)=$$
$$=e^{xy^2}\cdot y\cdot\left(y-2x\sin x\right).$$

4 Неявная функция

Функция $z=f(x\,y)$ называется **неявной** функцией переменных x и y, если она определяется уравнением $F(x,\,y,\,z)=0$, неразрешенным относительно z.

Если $F(x,\,y,\,z)$ дифференцируема по переменным $x,\,y,\,z$ в некоторой области D и $F'_z(x,\,y,\,z)\neq 0$, то уравнение $F(x,\,y,\,z)=0$ определяет однозначную неявную функцию $z(x,\,y)$, дифференцируемую, причем

$$z'_x=-\frac{F'_x(x,\,y,\,z)}{F'_z(x,\,y,\,z)},\quad z'_y=-\frac{F'_y(x,\,y,\,z)}{F'_z(x,\,y,\,z)}.$$

Пример.

Задана функция $F(x,\,y,\,z)=x^2y+xy^2-xyz+xyz^2$. Найти z'_x, z'_y.

$$F'_x=2xy+y^2-yz+yz^2,\quad F'_y=x^2+2xy-xz+xz^2,$$
$$F'_z=-xy+2xyz,$$
$$z'_x=-\frac{2xy+y^2-yz+yz^2}{-xy+2xyz},\quad z'_y=-\frac{x^2+2xy-xz+xz^2}{-xy+2xyz}.$$

5 Производная функции по направлению

Допустим, что в пространстве задана точка $M_0\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)$ и ненулевой вектор $\bar{l}$.

Пусть $\overline{l^0}$ — орт вектора $\bar{l}$, то есть $\overline{l^0} = \dfrac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \{\cos\alpha,\, \cos\beta,\, \cos\gamma\}$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\bar{l}$.

Производной функции $u = f(x,\, y,\, z) = f(M)$ **в точке** M_0 **в направлении вектора** $\bar{l}$ называется

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial l} = \lim_{M\to M_0} \frac{f\left(M\right) - f\left(M_0\right)}{\left|\overline{M_0 M}\right|}.$$

Для дифференцируемой в точке M_0 функции производная по направлению выражается формулой:

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial l} = \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial z}\cdot\cos\gamma.$$

Пример. Найти производную функции $z = x^3 + y^2$ в точке $A\left(1;\, 1\right)$ в направлении, идущем от точки A к точке $B\left(2;\, 3\right)$.

Воспользуемся аналогом вышеуказанной формулы в случае функции двух переменных: $\dfrac{\partial f}{\partial l} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta$.

$$\bar{l} = \overline{AB} = \left(1;\ 2\right), \qquad \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5},$$
$$\overline{AB^0} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}};\, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2, \qquad \frac{\partial f\left(1;\, 1\right)}{\partial x} = 3,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial f\left(1;\, 1\right)}{\partial x} = 2,$$
$$\frac{\partial f\left(A\right)}{\partial l} = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

6 Градиент функции в точке

Определение.

Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ называется вектор с координатами $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial z}$:

$$grad\, f = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\bar{k}.$$

Часто удобно использовать символический вектор Гамильтона ∇:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}.$$

Производную функции f в направлении вектора $\bar{l}$ можно записать так:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \left(\overline{l^0}, grad\, f\right) = \left|\overline{l^0}\right| \cdot |grad\, f| \cdot \cos\varphi,$$

где φ — угол между ортом $\overline{l^0}$ и вектором $grad\, f$. Из этой формулы следует, что производная дифференцируемой функции по направлению достигает наибольшего значения в направлении градиента.

Пример. Найти угол между градиентами функций $z_1 = \sqrt{x^2+y^2}$ и $z_2 = x - 3y + \sqrt{3xy}$ в точке $M_0(3;\, 4)$.

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial z_1(M_0)}{\partial x} = \frac{3}{5},$$
$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial z_1(M_0)}{\partial y} = \frac{4}{5},$$
$$grad\, z_1(M_0) = \left(\frac{3}{5};\, \frac{4}{5}\right),$$
$$\frac{\partial z_2}{\partial x} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{3xy}} \cdot 3y = 1 + \frac{\sqrt{3}y}{2\sqrt{xy}}, \qquad \frac{\partial z_2(M_0)}{\partial x} = 2,$$
$$\frac{\partial z_2}{\partial y} = -3 + \frac{1}{2\sqrt{3xy}} \cdot 3x = -3 + \frac{\sqrt{3}x}{2\sqrt{xy}}, \qquad \frac{\partial z_2(M_0)}{\partial y} = -\frac{9}{4},$$
$$grad\, z_2(M_0) = \left(2;\, -\frac{9}{4}\right),$$
$$\cos\left(\widehat{grad\, z_1(M_0),\, grad\, z_2(M_0)}\right) = \frac{grad\, z_1(M_0) \cdot grad\, z_2(M_0)}{|grad\, z_1(M_0)| \cdot |grad\, z_2(M_0)|} =$$

$$= \frac{\frac{3}{5}\cdot 2+\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}\cdot\sqrt{2^2+\left(-\frac{9}{4}\right)^2}} = -0,199.$$

7 Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Применение основано на использовании формулы

$$\Delta f\left(x_0,\, y_0\right) \approx df\left(x_0,\, y_0\right),$$

$$\text{или}\quad f(x,\, y) \approx f\left(x_0,\, y_0\right) + \frac{\partial f\left(x_0,\, y_0\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f\left(x_0,\, y_0\right)}{\partial y}\Delta y.$$

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt{(12,01)^2+(4,98)^2}$.

Это выражение можно рассматривать как значение функции $f\left(x,\, y\right)=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке с координатами $(12,01;\ 4,98)$.

Положим $x_0=12,\quad \Delta x=0,01,\quad y_0=5,\quad \Delta y=-0,02.$

$$f\left(12;\ 5\right)=13,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(12;\,5)}=\frac{12}{13},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(12;\,5)}=\frac{5}{13},$$
$$\sqrt{(12,01)^2+(4,98)^2}\approx 13+\frac{12}{13}\cdot 0,01+\frac{5}{13}\cdot\left(-0,02\right).$$

Ответ: $\sqrt{(12,01)^2+(4,98)^2}\approx 13,0015.$

8 Касательная плоскость и нормаль

Рассмотрим некоторую поверхность S в пространстве. Пусть точка M принадлежит поверхности S и существует такая плоскость α, проходящая через точку M, которая содержит все касательные в точке M ко всем кривым, лежащим на поверхности S и проходящим через точку M. Такую плоскость называют **касательной плоскостью к поверхности** S в точке M.

Прямую, проходящую через точку M перпендикулярно к α, называют **нормалью к поверхности** S в точке M.

Пусть поверхность S задана уравнением $F(x, y, z)=0$, точка $M(x_0, y_0, z_0)$.

Уравнение касательной плоскости:

$$\begin{aligned} &F'_x(x_0,\, y_0,\, z_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0,\, y_0,\, z_0)\cdot(y-y_0)+\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+F'_z(x_0,\, y_0,\, z_0)\cdot(z-z_0)=0. \end{aligned}$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,\, y_0,\, z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,\, y_0,\, z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,\, y_0,\, z_0)}.$$

Пример. Найти уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к сфере $x^2+y^2+z^2=9$ в точке $M(1;\, -2;\, 2)$.

Рассмотрим функцию $F(x,\, y,\, z)=x^2+y^2+z^2-9$.

$$F'_x=2x,\quad F'_x(M)=2,\qquad F'_y=2y,\quad F'_y(M)=-4,$$
$$F'_z=2z,\quad F'_z(M)=4.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$2(x-1)-4(y+2)+4(z-2)=0.$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{4}.$$

9 Частные производные высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки $M(x, y)$ имеет частную производную по переменной x. Эта частная производная сама является функцией двух переменных.

Частную производную по переменной x от частной производной по переменной x называют **частной производной второго порядка по переменной** x и обозначают $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ или z''_{xx}:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Частная производная по y от частной производной по y называется **второй частной производной по переменной** y и обозначается $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ или z''_{yy}.

Частная производная по y от частной производной по x называется **частной производной по переменным** x **и** y и обозначается:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad \text{или} \quad z''_{xy}.$$

Аналогично, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ или z''_{yx}.

Если производные берутся по разным переменным, они называются **смешанными**.

Теорема. Пусть функция $z = f(x,\, y)$ определена вместе со своими частными производными z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx} в некоторой окрестности точки $(x_0,\, y_0)$ и смешанные производные z''_{xy}, и z''_{yx} непрерывны в этой точке. Тогда значения смешанных производных равны.

Частные производные более высокого порядка определяются аналогично. Частную производную k-го порядка $(k > 1)$ определяют как частную производную первого порядка от частной производной $(k-1)$-го порядка.

Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

Пример 1. Убедиться в равенстве $z''_{xy} = z''_{yx}$, где $z = x^y$.

Имеем:

$$z'_x = y \cdot x^{y-1}, \qquad z'_y = x^y \ln x,$$
$$z''_{xy} = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x = x^{y-1} \left(1 + y \ln x\right),$$
$$z''_{yx} = y \cdot x^{y-1} \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1} \left(1 + y \ln x\right).$$

Пример 2. Найти производные второго порядка от функции $u = x^y + y^z + \ln(xz)$ в области $D: \; x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$

$$\begin{aligned}
&u'_x = y \cdot x^{y-1} + \frac{1}{x},\\
&u'_y = x^y \ln x + z \cdot y^{z-1},\\
&u'_z = y^z \ln y + \frac{1}{z},\\
&u''_{xx} = y(y-1)x^{y-2} - \frac{1}{x^2},\\
&u''_{xy} = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x,\\
&u''_{xz} = 0,\\
&u''_{yx} = y \cdot x^{y-1} \ln x + x^{y-1},\\
&u''_{yy} = x^y \ln^2 x + z(z-1)y^{z-2},\\
&u''_{yz} = y^{z-1} + z \cdot y^{z-1} \ln y,\\
&u''_{zx} = 0,\\
&u''_{zy} = z \cdot y^{z-1} \ln y + y^{z-1},\\
&u''_{zz} = y^z \ln^2 y - \frac{1}{z^2}.
\end{aligned}$$

Замечание.
Смешанные производные удовлетворяют равенствам

$$u''_{yx} = u''_{xy}, \qquad u''_{xz} = u''_{zx}, \qquad u''_{zy} = u''_{yz}.$$

10 Дифференциалы высших порядков

Дифференциалом второго порядка функции двух переменных называется дифференциал от ее первого дифференциала: $d^2z = d(dz)$.

Если функция дважды непрерывно дифференцируема, то

$$
\begin{aligned}
d^2z &= d\left(z'_x dx + z'_y dy\right) = \left(z'_x dx + z'_y dy\right)'_x dx + \left(z'_x dx + z'_y dy\right)'_y dy = \\
&= z''_{xx}(dx)^2 + z''_{yx} dy dx + z''_{xy} dx dy + z''_{yy}(dy)^2 = \\
&= z''_{xx}(dx)^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy}(dy)^2.
\end{aligned}
$$

Пример 1. Дана функция $z = x^2y^3$.

Найти дифференциал второго порядка этой функции.

$$
\begin{gathered}
z'_x = 2xy^3, \quad z''_{xx} = 2y^3, \\
z'_y = 3x^2y^2, \quad z''_{yy} = 6x^2y, \quad z''_{xy} = 6xy^2 \\
d^2z = 2y^3\,(dx)^2 + 12xy^2 dx dy + 6x^2y\,(dy)^2\,.
\end{gathered}
$$

Дифференциал функции k-го порядка определяется так:

$$d^kz = d\left(d^{k-1}z\right).$$

С помощью оператора $\dfrac{dy}{dx_1}dx_1 + \ldots + \dfrac{dy}{dx_n}dx_n$ дифференциал k-го порядка функции k раз непрерывно дифференцируемой записывается в виде:

$$d^kf = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k f\,(x)\,.$$

Здесь выражение в скобках возводится в степень k по обычным алгебраическим правилам, причем $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}dx_i\right)^m = \dfrac{\partial^m}{\partial x_i^m}(dx_i)^m$.

Пример 2. Дана функция $z = x^3y^4$. Найти d^3z.

$$
\begin{gathered}
z'_x = 3x^2y^4, \quad z''_{xx} = 6xy^4, \quad z'''_{xxx} = 6y^4, \\
z'_y = 4x^3y^3, \quad z''_{yy} = 12x^3y^2, \quad z'''_{yyy} = 24x^3y, \\
z'''_{xxy} = 24xy^3, \quad z'''_{yyx} = 36x^2y^2, \\
d^3z = z'''_{xxx}\,(dx)^3 + 3z'''_{x^2y}\,(dx)^2\,dy + 3z'''_{xy^2} dx (dy)^2 + z'''_{yyy}(dy)^3 = \\
= 6y^4\,(dx)^3 + 72xy^3(dx)^2dy + 108x^2y^2dx(dy)^2 + 24yx^3(dy)^3.
\end{gathered}
$$

11 Формула Тейлора

Пусть функция $z = f(x,\, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x_0,\, y_0)$ и дифференцируема $n+1$ раз в окрестности этой точки, тогда для любой точки $M(x,\, y)$ из этой окрестности справедлива формула:

$$\Delta f\left(M_0\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(M_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(N)}{(n+1)!},$$

где N — некоторая точка, лежащая на отрезке M_0M. Эта формула носит название **формулы Тейлора**. Последнее слагаемое $\dfrac{d^{n+1} f(N)}{(n+1)!} = R_N$ — остаточный член формулы Тейлора.

Пример. Написать формулу Тейлора для функции $f(x,y) = x^y$ в окрестности точки $M_0(1;\, 1)$ при $n = 3$. Имеем: $z = f\,(x,\, y)$,

$$\begin{aligned}
&z'_x = yx^{y-1}, \qquad z'_y = x^y \ln x,\\
&z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \qquad z''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x, \qquad z''_{yy} = x^y \ln^2 x,\\
&z'''_{xxx} = y(y-1)(y-2)x^{y-3}, \quad z'''_{xxy} = (2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2}\ln x,\\
&z'''_{xyy} = 2xy^{-1}\ln x + yx^{y-1}\ln^2 x, \qquad z'''_{yyy} = x^y \ln^3 x.
\end{aligned}$$

Вычисляем значения функции и её частных производных в точке $(1;\, 1)$:

$$\begin{aligned}
&z\,(1;\, 1) = 1, \qquad z'_x\,(1;\, 1) = 1, \qquad z'_y\,(1;\, 1) = 0,\\
&z''_{xx}\,(1;\, 1) = 0, \qquad z''_{xy}\,(1;\, 1) = 1, \qquad z''_{yy}\,(1;\, 1) = 0,\\
&z'''_{xxx}\,(1;\, 1) = 0, \quad z'''_{xxy}\,(1;\, 1) = 1, \quad z'''_{xyy}\,(1;\, 1) = 0, \quad z'''_{yyy}\,(1;\, 1) = 0,\\
&dx = x - 1, \qquad dy = y - 1.
\end{aligned}$$

Запишем выражения для дифференциалов функции первого, второго, третьего порядков:

$$\begin{aligned}
&dz\,(1;\, 1) = (x-1)\,, \qquad d^2 z\,(1;\, 1) = 2\,(x-1)\,(y-1)\,,\\
&d^3 z\,(1;\, 1) = 3\,(x-1)^2\,(y-1)\,,\\
&x^y = 1 + (x-1) + (x-1)\,(y-1) + \frac{1}{2}\,(x-1)^2\,(y-1) + R_3.
\end{aligned}$$

При достаточно малых значениях Δx, Δy формула может быть использована в окрестности точки $(1;\, 1)$ для приближенных вычислений. Например,

$$(1,1)^{1,02} \approx 1 + 0,1 + 0,002 + 0,0001 = 1,1021.$$

12 Экстремум функции в точке

Определение. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Говорят, что функция $f(x, y)$ имеет в точке M_0 **локальный максимум (минимум)**, если существует такая окрестность точки M_0, что для любой точки M из этой окрестности $(M \neq M_0)$ выполнятся неравенство $f(M) < f(M_0) \quad \big(f(M) > f(M_0)\big)$.

Точки локального максимума и локального минимума называются **точками экстремума**.

Необходимое условие экстремума. Если функция дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет в этой точке экстремум, то частные производные в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0.$$

Определение. Точки, в которых частные производные равны нулю, называются **стационарными**.

Достаточное условие экстремума. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — стационарная точка функции $z = f(x, y)$. Обозначим

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2},$$
$$B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y},$$
$$C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

Составим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда,

если $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A < 0 \end{cases}$, то $M_0(x_0, y_0)$ — точка максимума;

если $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases}$, то $M_0(x_0, y_0)$ — точка минимума;

если $\Delta < 0$, то нет экстремума;

если $\Delta = 0$, то сомнительный случай и требуется дополнительное исследование.

Пример 1. Найти экстремумы функции $z = xy\,(3 - x - y)$.
Перепишем функцию в виде $z = 3xy - x^2y - xy^2$.
Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 2xy - y^2 = 0 \\ 3x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(3 - 2x - y) = 0 \\ x(3 - x - 2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} & \Rightarrow M_1(0;\,0), \\ \begin{cases} y = 0 \\ 3 - x - 2y = 0 \end{cases} & \Rightarrow M_2(3;\,0), \\ \begin{cases} 3 - 2x - y = 0 \\ x = 0 \end{cases} & \Rightarrow M_3(0;\,3), \\ \begin{cases} 3 - 2x - y = 0 \\ 3 - x - 2y = 0 \end{cases} & \Rightarrow M_4(1;\,1). \end{array}\right.$$

Получили четыре стационарные точки $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$.
Определим $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3 - 2x - 2y, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x.$
Для каждой стационарной точки находим определители.

$M_1\,(0;\,0)$

$$A_1 = \frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial x^2} = 0, \quad B_1 = \frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial x \partial y} = 3, \quad C_1 = \frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial y^2} = 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0.$$

В точке $M_1\,(0;\,0)$ нет экстремума.

$M_2\,(3;\,0)$

$$A_2 = \frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial x^2} = 0, \quad B_2 = \frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial x \partial y} = -3, \quad C_2 = \frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial y^2} = -6.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -9 < 0.$$

В точке $M_2\,(3;\,0)$ нет экстремума.

$M_3\,(0;\ 3)$

$$A_3 = \frac{\partial^2 z(M_3)}{\partial x^2} = -6, \quad B_3 = \frac{\partial^2 z(M_3)}{\partial x \partial y} = -3, \quad C_3 = \frac{\partial^2 z(M_3)}{\partial y^2} = 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0.$$

В точке $M_3\,(0;\ 3)$ нет экстремума.

$M_4\,(1;\ 1)$

$$A_4 = \frac{\partial^2 z(M_4)}{\partial x^2} = -2, \quad B_4 = \frac{\partial^2 z(M_4)}{\partial x \partial y} = -1, \quad C_4 = \frac{\partial^2 z(M_4)}{\partial y^2} = -2.$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad A_4 = -2 < 0.$$

Точка $M_4\,(1;\ 1)$ — точка локального максимума функции.

$f_{\max} = f\,(1;\ 1) = 1.$

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{x+y}\left(x^2 - 2y^2\right)$.

Находим частные производные z'_x, z'_y:

$$\underset{(\,y=c\,)}{z'_x} = e^{x+y}\left(x^2 - 2y^2\right) + e^{x+y} \cdot 2x = e^{x+y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x\right),$$
$$\underset{(\,x=c\,)}{z'_y} = e^{x+y}\left(x^2 - 2y^2\right) + e^{x+y} \cdot (-4y) = e^{x+y}\left(x^2 - 2y^2 - 4y\right).$$

Составляем систему $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} e^{x+y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x\right) = 0 \\ e^{x+y}\left(x^2 - 2y^2 - 4y\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ x^2 - 2y^2 - 4y \end{cases}, \text{ т. к. } e^{x+y} \neq 0.$$

Из первого уравнения вычитаем второе: $2x + 4y = 0 \;\Rightarrow\; x = -2y$.

Подставляем в первое уравнение $x = -2y$:

$$4y^2 - 2y^2 - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y^2 - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y(y-2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 2.$$

Получили две стационарные точки, подозрительные на экстремум: $M_1(0;\ 0)$ и $M_2(-4;\ 2)$.

Находим z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}.

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(e^{x+y}(x^2 - 2y^2 + 2x)\right)'_x =$$
$$= e^{x+y}(x^2 - 2y^2 + 2x) + e^{x+y}(2x + 2) = e^{x+y}(x^2 - 2y^2 + 4x + 2),$$
$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(e^{x+y}(x^2 - 2y^2 + 2x)\right)'_y =$$
$$= e^{x+y}(x^2 - 2y^2 + 2x) + e^{x+y}(-4y) = e^{x+y}(x^2 - 2y^2 + 2x - 4y),$$
$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(e^{x+y}(x^2 - 2y^2 - 4y)\right)'_x =$$
$$= e^{x+y}(x^2 - 2y^2 - 4y) + e^{x+y}(-4y - 4) = e^{x+y}(x^2 - 2y^2 - 8y - 4).$$

$M_1\,(0;\,0):$

$A_1 = z''_{xx}(M_1) = 2, \quad B_1 = z''_{xy}(M_1) = 0, \quad C_1 = z''_{yy}(M_1) = -4,$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

В точке $M_1\,(0;\,0)$ нет экстремума.

$M_2\,(-4;\,2):$

$A_2 = z''_{xx}(M_2) = -6e^{-2} < 0,$

$B_2 = z''_{xy}(M_2) = -8e^{-2}, \quad C_2 = z''_{yy}(M_2) = -12e^{-2},$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6e^{-2} & -8^e{-2} \\ -8^{-2} & -12e^{-2} \end{vmatrix} = 72e^{-4} - 64e^{-4} = 8e^{-4} > 0.$$

В точке $M_2\,(-4;\,2)$ максимум, $z_{\max} = z\,(M_2) = 8e^{-2}$.

13 Условный экстремум

Точка $M_0\,(x_0,\,y_0)$ называется **точкой условного максимума (минимума)** функции $z = f(x,\,y)$ при условии $\varphi(x,\,y) = 0$ (уравнение связи), если существует окрестность этой точки, что во всех точках из этой окрестности, координаты которых удовлетворяют уравнению $\varphi(x,\,y) = 0$, выполняется неравенство $f(x_0,\,y_0) \geq f(x,\,y)$ $\big(f(x_0,\,y_0) \leq f(x,\,y)\big)$.

Для нахождения условного экстремума выражают одну переменную через другую из уравнения связи, подставляют в функцию $f(x,\,y)$ и решают задачу нахождения экстремума функции одной переменной.

Пример. Среди всех прямоугольников с заданным периметром P найти наибольший по площади.

Пусть $x,\,y$ — длины сторон прямоугольника. Поставим задачу:

$$\begin{cases} S\,(x,\,y) = xy \to \max, \\ x + y = \dfrac{P}{2}, \\ x > 0; \quad y > 0. \end{cases}$$

Выразим из уравнения связи y через x: получаем $y = \dfrac{P}{2} - x$. Подставим найденное выражение в функцию $S\,(x,\,y)$. В результате прейдем к задаче поиска максимума функций одной действительной переменной $S(x) = x\left(\dfrac{P}{2} - x\right)$.

Исходя из естественных ограничений $x > 0$, $y > 0$, находим область изменения аргумента x: $0 < x < \dfrac{P}{2}$.

$$S(x) = \frac{P}{2}x - x^2, \qquad S'_x = \frac{P}{2} - 2x,$$
$$S'_x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{P}{4}.$$

В точке $x = \dfrac{P}{4}$ функция имеет максимум, т. к. при переходе через $\dfrac{P}{4}$ производная меняет знак с «+» на «−».

Итак, среди всех прямоугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

Задача нахождения условного экстремума функции $z = f(x,\,y)$ при условии $\varphi(x,\,y) = 0$ может быть сведена к исследованию на экстремум функции Лагранжа:

$$L\,(x,\,y,\,\lambda) = f(x,\,y) + \lambda \cdot \varphi(x,\,y),$$

λ — множитель Лагранжа.

Необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x,\, y) = 0. \end{cases}$$

Достаточные условия экстремума исследуются с помощью определителя Гесса

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & L''_{xx}(M_0,\, \lambda_0) & L''_{xy}(M_0,\, \lambda_0) \\ \varphi'_y(M_0) & L''_{xy}(M_0,\, \lambda_0) & L''_{yy}(M_0,\, \lambda_0) \end{vmatrix},$$

где $M_0(x_0,\, y_0)$, λ_0 — решение системы (необходимые условия экстремума).

Если

$\Delta < 0$, то $z = f(x,\, y)$ имеет в точке M_0 условный максимум;

$\Delta > 0$, то $z = f(x,\, y)$ имеет в точке M_0 условный минимум.

Пример.

Найти экстремум функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

Функция Лагранжа $L(x,\, y,\, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Система имеет два решения:

$M_1(-1;\, -2)$ при $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ и $M_2(1;\, 2)$ при $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$.

$$\varphi(x,\, y) = x^2 + y^2 - 5, \quad \varphi'_x = 2x, \quad \varphi'_y = 2y,$$
$$\varphi'_x\,(M_1) = -2, \quad \varphi'_y\,(M_1) = -4, \quad \varphi'_x\,(M_2) = 2, \quad \varphi'_y\,(M_2) = 4,$$
$$L''_{xx} = 2\lambda, \qquad L''_{xy} = 0, \qquad L''_{yy} = 2\lambda.$$
$$L''_{xx} = 1,\ L''_{yy} = 1 \ \text{ при } \ \lambda = \frac{1}{2},$$
$$L''_{xx} = -1,\ L''_{yy} = -1 \ \text{ при } \ \lambda = -\frac{1}{2}.$$

$$\Delta_1 = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20, \quad M_1 - \text{точка условного минимума;}$$

$$\Delta_2 = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20, \quad M_2 - \text{точка условного максимума.}$$

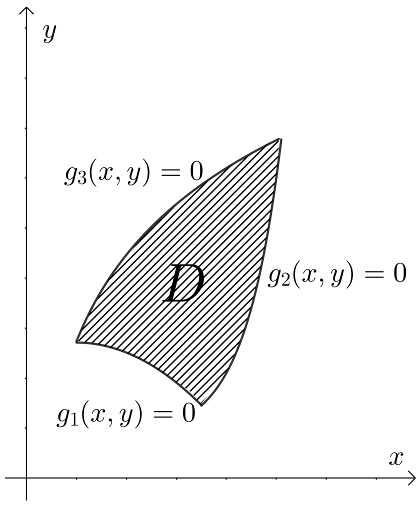
14 Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутом ограниченном множестве D. Тогда она достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

Оно может достигаться во внутренней точке множества, или на одномерной границе, или в угловых точках границы.

Пусть область D ограничена тремя кривыми:

$g_1(x, y) = 0, \quad g_2(x, y) = 0, \quad g_3(x, y) = 0.$



Алгоритм решения задачи:

1. Находим стационарные точки $f(x, y)$, которые являются внутренними для D.

2. Среди точек, подозрительных на условный экстремум в каждой из трех задач

$$a)\begin{cases} f(x, y) \to extr, \\ g_1(x, y) = 0; \end{cases} \quad b)\begin{cases} f(x, y) \to extr, \\ g_2(x, y) = 0; \end{cases} \quad c)\begin{cases} f(x, y) \to extr, \\ g_3(x, y) = 0; \end{cases}$$

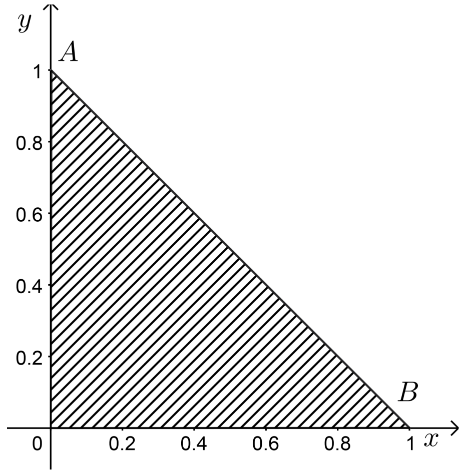
отбираем те, которые лежат на дугах $AC, \ BC, \ AB$.

3. К указанным точкам добавляем $A, \ B, \ C$.

Во всех отобранных точках вычисляем значение функции и по ним выделяем две точки, в которых значение функции является соответственно наибольшим и наименьшим.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$ в области D, заданной неравенствами $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \\ 0 \le x + y \le 1. \end{cases}$

Нарисуем область D:



D — треугольник, ограниченный прямой $y = 1 - x$ и координатными осями.

1. Находим стационарные точки внутри D

$$z'_x = 2x + 2y, \quad z'_y = 2x - 6y + 1,$$
$$\begin{cases} 2x + 2y = 0, \\ 2x - 6y + 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \; x = -\frac{1}{8}, \; y = \frac{1}{8}, \quad M_1\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) \notin D.$$

2. Граница состоит из трех участков OA, AB, OB.

Сначала рассматриваем OA:

$$\begin{cases} z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y \to extr, \\ y = 0, \\ 0 \le x \le 1; \end{cases}$$

$z = x^2$ на OA функция возрастает от 0 до 1.

$z\,(0;\; 0) = 0; \quad z\,(1;\; 0) = 1;$

На AB:

$$\begin{cases} z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y \to extr, \\ y = 1 - x, \\ 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$z = x^2 + 2x \cdot (1 - x) - 3\,(1 - x)^2 + (1 - x)\,,$$

$$z = -4x^2 + 7x - 2;$$

$$z'_x = -8x + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7}{8},\ y = \frac{1}{8};$$

$$z\left(\frac{7}{8};\ \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{16}, \quad z\,(0;\ 1) = -2.$$

На OB:

$$\begin{cases} z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y \to extr, \\ x = 0, \\ 0 \leq y \leq 1; \end{cases}$$

$$z = -3y^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad z'_y = -6y + 1 = 0;$$

$$z'_y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{6};$$

$$z\left(0; \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}.$$

Ответ: $z_{\max} = z\left(\frac{7}{8};\ \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{16}, \quad z_{\min} = z\,(0;\ 1) = -2.$

15 Индивидуальные задания

Вариант 1

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{3xy}{2x - 5y}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \ln\left(y^2 - e^{-x}\right)$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x'(M_0)$, $f_y'(M_0)$, $f_z'(M_0)$ для функции $f(x,\, y,\, z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, в точке $M_0(0; -1; 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = 2x^3y - 4xy^5$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = e^{x-2y}$, где $x = x(t) = \sin t$, $y = y(t) = t^3$, $t_0 = 0$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$, в данной точке $M_0(2;\, 1;\, 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$ в точке $M_0(2;\, 1;\, -1)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = e^{x^2 - y^2}$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли данная функция $u = \dfrac{y}{x}$ уравнению $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\, y) = 3x + y - xy$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями. $y = x$, $y = 4$, $x = 0$.

Вариант 2

1. Найти область определения функции $z = \arcsin(x - y)$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \arcsin\sqrt{xy}$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x'(M_0)$, $f_y'(M_0)$, $f_z'(M_0)$ для функции $f(x,\, y,\, z) = \ln\left(x + \dfrac{y}{2z}\right)$ в точке $M_0(1; 2; 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = x^2 y \sin x - 3y$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = \ln\left(e^x + e^{-y}\right)$, где $x = x(t) = t^2$, $y = y(t) = t^3$, $t_0 = -1$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2$, в данной точке $M_0(-1;\, 0;\, 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности $S : x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy$ в точке $M_0(-2;\, 1;\, 2)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \operatorname{ctg}(x + y)$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли данная функция $u = \ln\dfrac{x}{y} + x^3 - y^3$ уравнению $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3\left(x^3 - y^3\right)$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\, y) = xy - x - 2y$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 3$, $y = x$, $y = 0$.

Вариант 3

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{y^2 - x^2}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \operatorname{arctg}\left(x^2 + y^2\right)$.

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для функции $f(x,\, y,\, z) = (\sin x)^{yz}$ в точке $M_0\left(\dfrac{\pi}{6}; 1; 2\right)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg} x + \sqrt{y}$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = y^x$, где $x = x(t) = \ln(t-1)$, $y = y(t) = e^{t/2}$, $t_0 = 2$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $3x - 2y + z = xz + 5$, в данной точке $M_0(2;\ 1;\ -1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S : $x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7$ в точке $M_0(1;\ 2;\ 1)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \ln\left(x^2 + (y+1)^2\right)$ указанному уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

Вариант 4

1. Найти область определения функции $z = \ln\left(4 - x^2 - y^2\right)$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \cos\left(x^3 - 2xy\right)$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x^{'}(M_0)$, $f_y^{'}(M_0)$, $f_z^{'}(M_0)$ для функции $f(x,\, y,\, z) = \ln\left(x^3 + 2y^3 - z^3\right)$ в точке $M_0\,(2; 1; 0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \arcsin(xy) - 3xy^2$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = e^{y-2x+2}$, где $x = x(t) = \sin t$, $y = y(t) = \cos t$, $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $e^z + x + 2y + z = 4$, в данной точке $M_0\,(1;\ 1;\ 0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S : $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8$ в точке $M_0\,(-1;\ 1;\ 2)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \cos\left(xy^2\right)$. Убедиться в том, что $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = x^y$ уравнению $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\,\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\, y) = 5x^2 - 3xy + y^2$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

Вариант 5

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{2}{6 - x^2 - y^2}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x^3}}$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x^{'}(M_0)$, $f_y^{'}(M_0)$, $f_z^{'}(M_0)$ для функции $f(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$ в точке $M_0(1; 0; 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = 5xy^4 + 2x^2y^7$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y) = x^2e^y$, где $x = x(t) = \cos t$, $y = y(t) = \sin t$, $t = t_0 = \pi$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0$, в данной точке $M_0(1; 1; -1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S : $x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13$ в точке $M_0(2; 1; -1)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \sin\left(x^2 - y\right)$. Убедиться в том, что $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \dfrac{xy}{x + y}$ уравнению $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x - y + 1 = 0$, $x = 3$, $y = 0$.

Вариант 6

1. Найти область определения функции $z=\sqrt{x^2+y^2-5}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z=\operatorname{tg}\left(x^3+y^2\right)$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x^{'}(M_0)$, $f_y^{'}(M_0)$, $f_z^{'}(M_0)$ для функции $f(x,y,z)=\ln\cos\left(x^2y^2+z\right)$ в точке $M_0\left(0;0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z=\cos\left(x^2-y^2\right)+x^3$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u=u(x,\,y)=\ln\left(e^x+e^y\right)$, где $x=x(t)=t^2$, $y=y(t)=t^3$, $t=t_0=1$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\,y)$, заданной неявно $z^3+3xyz+3y=7$, в данной точке $M_0(1;\,1;\,1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S:$ $x^2+y^2+z^2-6y+4z+4=0$ в точке $M_0(2;\,1;\,-1)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z=\operatorname{arctg}(x+y)$. Убедиться в том, что $z_{xy}^{''}=z_{yx}^{''}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u=e^{xy}$ указанному уравнению $x^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z=2x^3+2y^3-6xy+5$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=z(x,\,y)=x^2+y^2-2x-2y+8$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x+y-1=0$.

Вариант 7

1. Найти область определения функции $z = \arccos(x+y)$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \operatorname{ctg}\sqrt{xy^3}$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x'(M_0)$, $f_y'(M_0)$, $f_z'(M_0)$ для функции $f(x,\,y,\,z) = 27\sqrt[3]{x+y^2+z^3}$ в точке $M_0(3;\,4;\,2)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \ln\left(3x^2 - 2y^2\right)$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\,y) = x^y$, где $x = x(t) = e^t$, $y = y(t) = \ln t$, $t = t_0 = 1$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\,y)$, заданной неявно $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \dfrac{3}{2}$, в точке $M_0\left(\dfrac{\pi}{4};\,\dfrac{3\pi}{4};\,\dfrac{\pi}{4}\right)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S : $x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46$ в точке $M_0(1;\,2;\,-3)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \arcsin(x-y)$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \sin^2(x - ay)$ уравнению $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\,y) = 2x^3 - xy^2 + y^2$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 6$.

Вариант 8

1. Найти область определения функции $z = 3x + \dfrac{y}{2 - x + y}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = e^{-x^2+y^2}$.

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для функции $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}\left(xy^2 + z\right)$ в точке $M_0(2; 1; 0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y) = e^{y-2x}$, где $x = x(t) = \sin t$, $y = y(t) = t^3$, $t = t_0 = 0$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно $e^{z-1} = \cos x \cos y + 1$, в точке $M_0\left(0; \dfrac{\pi}{2}; 1\right)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S:$ $x^2 + y^2 - xz - yz = 0$ в точке $M_0(0; 2; 2)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \arccos(2x + y)$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ уравнению $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

Вариант 9

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \ln\left(3x^2 - y^4\right)$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x'(M_0)$, $f_y'(M_0)$, $f_z'(M_0)$ для функции $f(x, y, z) = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{y} - z\right)$ в точке $M_0(2;\,5;\,0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \arcsin(x + y)$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y) = x^2 e^{-y}$, где $x = x(t) = \sin t$, $y = y(t) = \sin^2 t$, $t = t_0 = \dfrac{\pi}{2}$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$, в точке $M_0(1;\,2;\,1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S : $x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2$ в точке $M_0(1;\,1;\,1)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \operatorname{arcctg}(x - 3y)$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 3 = 0$.

Вариант 10

1. Найти область определения функции $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 3\right)$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \arccos\dfrac{x}{y}$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x'(M_0)$, $f_y'(M_0)$, $f_z'(M_0)$ для функции $f(x,\,y,\,z) = \sqrt{z}\sin\dfrac{y}{x}$ в точке $M_0\,(2;\,0;\,4)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\,y) = \ln\left(e^{-x} + e^{y}\right)$, где $x = x(t) = t^2$, $y = y(t) = t^3$, $t = t_0 = -1$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\,y)$, заданной неявно $xy = z^2 - 1$, в точке $M_0\,(0;\,1;\,-1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S : $y^2 - z^2 + x^2 - 2xz + 2x = z$ в точке $M_0\,(1;\,1;\,1)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \ln\left(3x^2 - 2y^2\right)$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = e^{-\cos(x + ay)}$ уравнению $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\,y) = x^2 + 2xy - 10$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $y = 0$, $y = x^2 - 4$.

Вариант 11

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \operatorname{arcctg}\left(xy^2\right)$.

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для функции $f(x,\, y,\, z) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}$ в точке $M_0(-1;\, 1;\, 0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = 7x^3y - \sqrt{xy}$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = e^{y-2x-1}$, где $x = x(t) = \cos t$, $y = y(t) = \sin t$, $t = t_0 = \dfrac{\pi}{2}$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2$, в данной точке $M_0(1;\, 1;\, 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S:$ $z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y$ в точке $M_0(-1;\, -1;\, -1)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = e^{2x^2+y^2}$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = (9x - y)(y - z)(z - x)$ уравнению $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\, y) = xy - 2x - y$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 4$.

Вариант 12

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{4xy}{x - 3y + 1}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x^{'}(M_0),\ f_y^{'}(M_0),\ f_z^{'}(M_0)$ для функции $f(x,\ y,\ z) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{xz}{y^2}\right)$ в точке $M_0\,(2; 1; 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\ y) = \arcsin\dfrac{x}{y}$, где $x = x(t) = \sin t,\ y = y(t) = \cos t,\ t = t_0 = \pi$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\ y)$, заданной неявно $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 5$, в точке $M_0\,(0;\ 2;\ 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S : $z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y$ в точке $M_0\,(1;\ -1;\ 1)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}$. Убедиться в том, что $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = x\ln\dfrac{y}{x}$ уравнению $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\ y) = \dfrac{1}{2}x^2 - xy$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $y = 8,\ y = 2x^2$.

Вариант 13

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \sin\sqrt{x - y^3}$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x'(M_0)$, $f_y'(M_0)$, $f_z'(M_0)$ для функции $f(x, y, z) = \ln\sin\left(x - 2y + \dfrac{z}{4}\right)$ в точке $M_0\left(1; \dfrac{1}{2}; \pi\right)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = e^{x+y-4}$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y) = \arccos\dfrac{2x}{y}$, где $x = x(t) = \sin t$, $y = y(t) = \cos t$, $t = t_0 = \pi$ с точностью до двух знаков после запятой.

6.Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно $x\cos y + y\cos z + z\cos x = \dfrac{\pi}{2}$, в точке $M_0\left(0; \dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности $S: z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y$ в точке $M_0(-1; 1; -1)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \operatorname{tg}\sqrt{xy}$. Убедиться в том, что $z_{xy}'' = z_{yx}''$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ уравнению $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = (x-5)^2 + y^2 + 1$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$.

Вариант 14

1. Найти область определения функции $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \operatorname{tg}\left(x^3y^4\right)$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x'(M_0)$, $f_y'(M_0)$, $f_z'(M_0)$ для функции $f(x,\,y,\,z) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} - \dfrac{x}{z}$ в точке $M_0\,(1;\,1;\,2)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \cos(3x+y) - x^2$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\,y) = \dfrac{x^2}{y+1}$, где $x = x(t) = 1 - 2t$, $y = y(t) = \operatorname{arctg} t$, $t = t_0 = 0$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\,y)$, заданной неявно $3x^3y^2+2xyz^2-2x^3z+4y^3z = 4$, в точке $M_0\,(2;\,1;\,2)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S:$ $x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y = 13$ в точке $M_0\,(3;\,1;\,2)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \cos\left(x^2y^2 - 5\right)$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$ уравнению $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\,y) = 2x^2 + 3y^2 + 1$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $y = 0$, $y = \sqrt{9 - \dfrac{9}{4}x^2}$.

Вариант 15

1. Найти область определения функции $z = \ln\left(y^2 - x^2\right)$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \mathrm{ctg}\,(3x - 2y)$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x'(M_0)$, $f_y'(M_0)$, $f_z'(M_0)$ для функции $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}$ в точке $M_0(1; 2; 2)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \mathrm{tg}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y) = \dfrac{x}{y}$, где $x = x(t) = e^t$, $y = y(t) = 2 - e^{2t}$, $t = t_0 = 0$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0$, в точке $M_0(1;\ 1;\ 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S:$ $4y^2 - z^2 - 4xy - xz + 3z = 9$ в точке $M_0(1;\ -2;\ 1)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \sin\left(\sqrt{x^3 y}\right)$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = e^{yx}$ уравнению $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = -3$, $y = 0$, $x + y + 1 = 0$.

Вариант 16

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{x^3 y}{3 + x - y}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = e^{2x^2 - y^5}$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x^{'}(M_0)$, $f_y^{'}(M_0)$, $f_z^{'}(M_0)$ для функции $f(x,\, y,\, z) = \ln\left(x + y^2\right) - \sqrt{x^2 z^2}$ в точке $M_0\,(5;\, 2;\, 3)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{ctg} \dfrac{y}{x}$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = \ln\left(e^{-x} + e^{-2y}\right)$, где $x = x(t) = t^2$, $y = y(t) = \dfrac{1}{3}t^3$, $t = t_0 = 1$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $x + y + z + 2 = xyz$, в точке $M_0\,(2;\, -1;\, -1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S : $z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2$ в точке $M_0\,(2;\, 1;\, 0)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \arcsin(x - 2y)$. Убедиться в том, что $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x + y}{1 - xy}\right)$ уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\, y) = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 5$, $y = 0$, $x - y - 1 = 0$.

Вариант 17

1. Найти область определения функции $z = \arccos(x + 2y)$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \ln\left(\sqrt{xy} - 1\right)$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x^{'}(M_0)$, $f_y^{'}(M_0)$, $f_z^{'}(M_0)$ для функции $f(x,\, y,\, z) = \sqrt{z} \cdot x^y$ в точке $M_0(1;\, 2;\, 4)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = xy^4 - 3x^2y + 1$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = \sqrt{x + y^2 + 3}$, где $x = x(t)\, x = \ln t$, $y = y(t) = t^2$, $t = t_0 = 1$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2$, в точке $M_0(0;\, 1;\, -1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S:$ $2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3$ в точке $M_0(1;\, 2;\, 1)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \arccos(4x - y)$. Убедиться в том, что $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \ln\left(x^2 + y^2 + 2x + 1\right)$ уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\, y) = 2x^2 + 2xy - \dfrac{1}{2}y^2 - 4x$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $y = 2x$, $y = 2$, $x = 0$.

Вариант 18

1. Найти область определения функции $z = \arcsin(2x - y)$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \arcsin\left(2x^3 y\right)$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x^{'}(M_0)$, $f_y^{'}(M_0)$, $f_z^{'}(M_0)$ для функции $f(x,\, y,\, z) = \dfrac{-z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точке $M_0\left(\sqrt{2};\, \sqrt{2};\, \sqrt{2}\right)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \ln\left(x + xy - y^2\right)$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = \arcsin\dfrac{x^2}{y}$, где $x = x(t) = \sin t$, $y = y(t) = \cos t$, $t = t_0 = \pi$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $e^z - xyz - x + 1 = 0$, в точке $M_0(2;\, 1;\, 0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S : $x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14$ в точке $M_0(3;\, 1;\, 4)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \operatorname{arctg}(5x + 2y)$. Убедиться в том, что $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}$ уравнению $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + u = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = xy(12 - x - y)$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\, y) = x^2 - 2xy + \dfrac{5}{2}y^2 - 2x$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$.

Вариант 19

1. Найти область определения функции $z = \ln\left(9 - x^2 - y^2\right)$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x^{'}(M_0)$, $f_y^{'}(M_0)$, $f_z^{'}(M_0)$ для функции $f(x,\, y,\, z) = \ln\left(x^3 + \sqrt[3]{y} - z\right)$ в точке $M_0\,(2;\ 1;\ 8)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = 2x^2y^2 + x^3 - y^3$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = \dfrac{y^2}{x}$, где $x = x(t) = 1 - 2t$, $y = y(t) = 1 + \operatorname{arctg} t$, $t = t_0 = 0$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0$, в точке $M_0\,(1;\ -1;\ 2)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S : $x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4$ в точке $M_0\,(1;\ 1;\ 2)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$. Убедиться в том, что $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ уравнению $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = xy - x^2 - y^2 + 9$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\, y) = xy - 3x - 2y$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 4$.

Вариант 20

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \cos\left(x - \sqrt{xy^3}\right)$.

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для функции $f(x,\, y,\, z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^4 + y^2}}$ в точке $M_0(2; 3; 25)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$, где $x = x(t) = \sin t$, $y = y(t) = \cos t$, $t = t_0 = \dfrac{\pi}{4}$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычистить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0$, в точке $M_0(0;\, -2;\, 2)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S:$ $x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5$ в точке $M_0(-2;\, 1;\, 0)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \ln\left(4x^2 - 5y^3\right)$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \left(x^2 + y^2\right)\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$ уравнению $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\, y) = x^2 + xy - 2$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $y = 0$, $y = 4x^2 - 4$.

Вариант 21

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \sin\dfrac{x+y}{x-y}$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x^{'}(M_0)$, $f_y^{'}(M_0)$, $f_z^{'}(M_0)$ для функции $f(x,\, y,\, z) = 8\sqrt[5]{x^3 + y^2 + z}$ в точке $M_0\,(3; 2; 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \arcsin\dfrac{x+y}{x}$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = \sqrt{x^2 + y + 3}$, где $x = x(t) = \ln t$, $y = y(t) = t^2$, $t = t_0 = 1$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3$, в точке $M_0\,(1;\ 2;\ 0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S:$ $x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11$ в точке $M_0\,(1;\ 4;\ -1)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = e^{\sqrt{x+y}}$. Убедиться в том, что $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = e^{-(x-3y)} \cdot \sin(x + 3y)$ уравнению $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\, y) = x^2 y\,(4 - x - y)$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $y = 6 - x$.

Вариант 22

1. Найти область определения функции $z = 4x + \dfrac{y}{2x - 5y}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \operatorname{tg} \dfrac{2x - y^2}{x}$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x^{'}(M_0)$, $f_y^{'}(M_0)$, $f_z^{'}(M_0)$ для функции $f(x, y, z) = \ln\left(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z\right)$ в точке $M_0(1;1;1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arcctg}(x - y)$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y) = \arcsin \dfrac{x}{2y}$, где $x = x(t) = \sin t$, $y = y(t) = \cos t$, $t = t_0 = \pi$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно $x^2+y^2+z^2+2xy-yz-4x-3y-z = 0$, в точке $M_0(1;\ -1;\ 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7.Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S:$ $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8$ в точке $M_0(0;\ 2;\ 0)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \arcsin(4x+y)$. Убедиться в том, что $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = xe^{\frac{y}{x}}$ уравнению $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$.

Вариант 23

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{\sqrt{3x-2y}}{x^2+y^2+4}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \operatorname{ctg}\sqrt{\dfrac{x}{x-y}}$.

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для функции $f(x,\, y,\, z) = \dfrac{-2x}{\sqrt{y^2+z^2}}$ в точке $M_0\,(3;\ 0;\ 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \sqrt{3x^2-y^2+x}$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}$, где $x = x(t) = \sin 2t$, $y = y(t) = \operatorname{tg}^2 t$, $t = t_0 = \dfrac{\pi}{4}$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0$, в точке $M_0\,(0;\ 1;\ -1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S:$ $x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0$ в точке $M_0\,(-1;\ -1;\ 1)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \arccos(x-5y)$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\, y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x + 2y = 4$, $x - 2y = 4$, $x = 0$.

Вариант 24

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{5}{4 - x^2 - y^2}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x^{'}(M_0),\ f_y^{'}(M_0),\ f_z^{'}(M_0)$ для функции $f(x,\,y,\,z) = ze^{\frac{-\left(x^2+y^2\right)}{2}}$ в точке $M_0\,(0;0;1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = y^2 - 3xy - x^4$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\,y) = \sqrt{x+y+3}$, где $x = x(t)\,x = \ln t$, $y = y(t) = t^2$, $t = t_0 = 1$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\,y)$, заданной неявно $\sqrt{x^2+y^2} + z^2 - 3z = 3$, в точке $M_0\,(4;\ 3;\ 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S:$ $x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z$ в точке $M_0\,(1;\ 0;\ 1)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \sin\sqrt{xy}$. Убедиться в том, что $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ уравнению $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = xy\,(6 - x - y)$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\,y) = x^2 + 2xy - y^2 - 4$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 3$, $y = 0$, $y = x + 1$.

Вариант 25

1. Найти область определения функции $z = \ln(2x - y)$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \ln\left(3x^2 - y^2\right)$.

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для функции $f(x,\, y,\, z) = \dfrac{\sin(x-y)}{z}$ в точке $M_0\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{3}; \sqrt{3}\right)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \arccos(x + y)$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = \dfrac{y}{x}$, где $x = x(t) = e^t$, $y = y(t) = 1 - e^{2t}$, $t = t_0 = 0$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычистить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 59$, в точке $M_0(3;\, 1;\, 4)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S : $2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ в точке $M_0(1;\, -1;\, 1)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \cos\left(3x^2 - y^3\right)$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \ln\left(x + e^{-y}\right)$ уравнению $\dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y) = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$.

Вариант 26

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{7x^3y}{x-4y}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \arccos\left(x - y^2\right)$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x^{'}(M_0)$, $f_y^{'}(M_0)$, $f_z^{'}(M_0)$ для функции $f(x,y,z) = \sqrt{z} \cdot \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ в точке $M_0(4;1;4)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \ln\left(y^2 - x^2 + 3\right)$,

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = \arcsin\dfrac{2x}{y}$, где $x = x(t) = \sin t$ $y = y(t) = \cos t$, $t = t_0 = \pi$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz = 17$, в точке $M_0(-2;\ -1;\ 2)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S:$ $x^2+y^2-z^2+6xy-z = 8$ в точке $M_0(1;\ 1;\ 0)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \operatorname{arctg}(3x+2y)$. Убедиться в том, что $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$ уравнению $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $y = x + 2$, $y = 0$.

Вариант 27

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{1 - x - y}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \operatorname{arcctg} \dfrac{x^3}{y}$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x^{'}(M_0)$, $f_y^{'}(M_0)$, $f_z^{'}(M_0)$ для функции $f(x,\, y,\, z) = \dfrac{xz}{x - y}$ в точке $M_0\,(3;\, 1;\, 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = \ln\left(e^{2x} + e^{y}\right)$, где $x = x(t) = t^2$, $y = y(t) = t^4$, $t = t_0 = 1$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычистить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $x^3 + 3xyz - z^3 = 27$, в точке $M_0\,(3;\, 1;\, 3)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7.Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S : $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10$ в точке $M_0\,(-1;\, 1;\, 3)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \ln\left(5x^2 - 3y^4\right)$. Убедиться в том, что $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \dfrac{y}{(x^2 - y^2)^5}$ уравнению $\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{u}{y^2}$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = (x - 1)^2 + 2y^2$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\, y) = 4 - 2x^2 - y^2$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $y = 0$, $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Вариант 28

1. Найти область определения функции $z = e^{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \cos\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x^{'}(M_0)$, $f_y^{'}(M_0)$, $f_z^{'}(M_0)$ для функции $f(x,\, y,\, z) = \sqrt{x^2+y^2-2xy\cos z}$ в точке $M_0\left(3;\, 4;\, \dfrac{\pi}{2}\right)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = 7x - x^3y^2 + y^4$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x,\, y) = \operatorname{arctg}(x+y)$, где $x = x(t) = t^2+2$, $y = y(t) = 4-t^2$, $t = t_0 = 1$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычистить значения частных производных функции $z(x,\, y)$, заданной неявно $\ln z = x+2y-z+\ln 3$, в точке $M_0(1;\, 1;\, 3)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S : $z = x^2+y^2-4xy+3x-15$ в точке $M_0(-1;\, 3;\, 4)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \operatorname{arcctg}(x-4y)$. Убедиться в том, что $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ уравнению $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x+y}{x-y}$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x,\, y) = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$.

Вариант 29

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 6}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x+y}}$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x'(M_0)$, $f_y'(M_0)$, $f_z'(M_0)$ для функции $f(x, y, z) = ze^{-xy}$ в точке $M_0(0; 1; 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = e^{y-x}$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 3}$, где $x = x(t) = \ln t$, $y = y(t) = t^3$, $t = t_0 = 1$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 6 = 0$, в точке $M_0(2; 1; 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S : $z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10$ в точке $M_0(-7; 1; 8)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \ln(3x - 4)$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \sqrt{2xy + y^2}$ уравнению $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2y}{u}$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + 3(y+2)^2$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y) = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x + y + 2 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Вариант 30

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{4xy}{x^2 - y^2}$.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы функции $z = e^{-\left(x^3+y^3\right)}$.

3. Вычислить значения частных производных $f_x^{'}(M_0)$, $f_y^{'}(M_0)$, $f_z^{'}(M_0)$ для функции $f(x, y, z) = \arcsin\left(x\sqrt{y}\right) - yz^2$ в точке $M_0(0; 4; 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

4. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$.

5. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y) = \operatorname{arctg}(xy)$, где $x = x(t) = t + 3$, $y = y(t) = e^t$, $t = t_0 = 0$ с точностью до двух знаков после запятой.

6. Вычислить значения частных производных функции $z(x, y)$, заданной неявно $z^2 = xy - z + x^2 - 4$, в точке $M_0(2;\ 1;\ 1)$ с точностью до двух знаков после запятой.

7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S : $z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1$ в точке $M_0(1;\ -1;\ 2)$.

8. Найти вторые частные производные функции $z = \operatorname{tg}\left(xy^2\right)$. Убедиться в том, что $z_{xy}^{''} = z_{yx}^{''}$.

9. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \ln\left(x^2 - y^2\right)$ уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z = 2(x + y) - x^2 - y^2$.

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y) = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Список литературы

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. — 17-е изд. — Москва : Айрис Пресс, 2020. — 602 с.

2. Шипачев, В. С. Высшая математика : учеб. и практикум для бакалавров вузов / В. С. Шипачев, Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова ; под ред. А. Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва : Юрайт, 2014. — 447 с.

3. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. — 22-е изд., перераб. — Санкт-Петербург : Профессия, 2006. - 432 с.

4. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова [и др.]. — 7-е изд., испр. — Москва : ОНИКС : Мир и Образование, 2009. - 368 с.

5. Лунгу, К. Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. : учеб. пособие для вузов, обуч. по направлениям подгот. и спец. в области техники и технологии. Ч. 2 / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. — Москва : Физматлит, 2007. — 381 с.

6. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие : в 4 частях / под общей редакцией А. П. Рябушко. — 6-е изд. — Минск : Вышэйшая школа, [б. г.]. — Часть 2 : Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения — 2014. — 396 с. — ISBN 978-985-06-2466-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/65409 (дата обращения: 27.05.2025).

Учебное издание

Сметанина Людмила Петровна
Сметанин Юрий Михайлович
Максимова Ольга Васильевна

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021.
Тел.: +7 (3412) 916-364 E-mail: editorial@udsu.ru