# ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Часть 1

Ижевск
2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»

# ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Материалы Всероссийской конференции
с международным участием
«Теория управления и математическое моделирование»,
посвященной памяти
профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова

Часть 1

Ижевск, Россия
16–20 июня 2025 г.

Ижевск
2025

УДК 517.9 (О63)
ББК 22.161.6я431, 22.161.8я431, 22.19я431, 22.181я431
Т338

*Издание подготовлено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.*



Т338 Теория управления и математическое моделирование : материалы Всерос. конф. с междунар. участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 16–20 июня 2025 г.) : в 2 ч. Ч. 1. – Ижевск : Удмуртский университет, 2025. – 200 с.

**ISBN 978–5–4312–1263-5**
**DOI: 10.35634/978–5–4312–1263-5-1-2025-1-200**

В части 1 сборника анонсируются результаты исследований по теории дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений. Представлены следующие научные направления: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, функционально-дифференциальные уравнения, уравнения с дробными производными, теория устойчивости, асимптотическая теория, обратные задачи, краевые задачи.

УДК 517.9 (О63)
ББК 22.161.6я431, 22.161.8я431, 22.19я431, 22.181я431

**ISBN 978–5–4312–1263-5**
**DOI: 10.35634/978–5–4312–1263-5-2025-1-200**

# Содержание

# Improved Bernoulli sub-equation function method for soliton analysis of the M-fractional Kuralay-IIB equation

**V. Ala**
*Mersin, Mersin University, Department of Mathematics, Turkiye*
e-mail: volkanala@mersin.edu.tr

**F. N. Kaya Sağlam**
*Tekirdağ Namık Kemal University, Department of Mathematics, Turkiye*
e-mail: ftmnrtlp@gmail.com

In this study, M-fractional Kuralay-IIB equation (K-IIBE) is dealt with new analytical wave solutions. Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method (IBSEFM) is applicated to get the novel wave solutions of the considered equation. It is demonstrated that IBSEFM provides a powerful mathematical tool for solving nonlinear models in mathematical physics.

**Mathematical analysis of the proposed model.** Assume the K-IIBE, defined as:

$$\begin{aligned} iD^{\alpha,\Upsilon}_{M,x}v + D^{\alpha,\Upsilon}_{M,x}\left(D^{\alpha,\Upsilon}_{M,t}v\right) - hv &= 0, \\ iD^{\alpha,\Upsilon}_{M,x}u - D^{\alpha,\Upsilon}_{M,x}\left(D^{\alpha,\Upsilon}_{M,t}u\right) + hu &= 0, \\ D^{\alpha,\Upsilon}_{M,t}h - 2D^{\alpha,\Upsilon}_{M,x}(uv) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Let us consider the M-truncated fractional K-IIBE for $u = ev^*$, expressed as:

$$
\begin{aligned}
iD_{M,x}^{\alpha,\Upsilon}u + D_{M,x}^{\alpha,\Upsilon}\left(D_{M,t}^{\alpha,\Upsilon}u\right) - hu &= 0, \\
D_{M,t}^{\alpha,\Upsilon}h + 2eD_{M,x}^{\alpha,\Upsilon}\left(|u|^2\right) &= 0. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

By means of wave transformation

$$
\begin{gathered}
h(x,t) = \upsilon(\xi), \\
u(x,t) = U(\xi)\exp\left[i\left(\frac{\Gamma(1+\Upsilon)}{\alpha}\left[\rho x^\alpha + \zeta t^\alpha\right]\right)\right], \qquad (3) \\
\xi = \frac{\Gamma(1+\Upsilon)}{\alpha}\left(sx^\alpha + \eta t^\alpha\right).
\end{gathered}
$$

Insertion of Eq. (3) into Eq. (2) leads to the separation into real and imaginary parts, shown below:

$$
2seU^3 - \eta\left(\zeta\left(\rho+1\right) - c_0\right)U + \eta^2 sU^{''} = 0, \qquad (4)
$$

$$
\left(\eta + \rho\eta + \zeta s\right)U^{'} = 0. \qquad (5)
$$

Eq. (5) gives the velocity of the soliton as

$$
\eta = -\frac{\zeta s}{(1+\rho)}. \qquad (6)
$$

The homogeneous balance principle is applied to initiate the solution process on Eq. (4), and we get $m = 1$.

**Application of the IBSEFM.** To construct the soliton solutions of (1), we will take account the real part as given in (4). When we reconsider (4) for balance principle considering among $U''$ and $U^3$, we get the relationship as follow:

$$
M = n - m + 1. \qquad (7)
$$

(7) shows us different cases of the solutions of (1) and we can obtain some exact solutions. According to the balance, we consider $M = 3$, $m = 1$, $n = 3$ we hold the following equations [1]:

$$
U(\eta) = \frac{a_0 + a_1F(\eta) + a_2F^2(\eta) + a_3F^3(\eta)}{b_0 + b_1F(\eta)} \equiv \frac{\Upsilon(\eta)}{\Psi(\eta)}, \qquad (8)
$$

$$U'(\eta) \equiv \frac{\Upsilon'(\eta)\Psi(\eta) - \Upsilon(\eta)\Psi'(\eta)}{\Psi^2(\eta)}, \tag{9}$$

and

$$U''(\eta) \equiv \frac{\Upsilon'(\eta)\Psi(\eta) - \Upsilon(\eta)\Psi'(\eta)}{\Psi^2(\eta)} -$$

$$-\frac{[\Upsilon(\eta)\Psi'(\eta)]'\,\Psi^2(\eta) - 2\Upsilon(\eta)[\Psi'(\eta)]^2\Psi(\eta)}{\Psi^4(\eta)}, \tag{10}$$

where $F' = \sigma F + dF^3$, $a_3 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $\sigma \neq 0$, $d \neq 0$. Using (8)$-$(10) in (1), we get from coefficients of polynomial of $F$ as follow: The resulting set of solutions can be presented as

***Case* 1.** For $\sigma \neq d$,

$$a_0 = \frac{ib_0\sqrt{\eta}\sqrt{c_0 + \zeta(-\rho) - \zeta}}{\sqrt{2}\sqrt{e}\sqrt{s}}, a_1 = \frac{ib_1\sqrt{\eta}\sqrt{c_0 + \zeta(-\rho) - \zeta}}{\sqrt{2}\sqrt{e}\sqrt{s}},$$

$$a_2 = -\frac{2ib_0 d\eta}{\sqrt{e}},\ a_3 = -\frac{2ib_1 d\eta}{\sqrt{e}};\ \sigma = -\frac{\sqrt{c_0 + \zeta(-\rho) - \zeta}}{\sqrt{2}\sqrt{\eta}\sqrt{s}}.$$

Substituting these coefficients into (8), we obtain the following solution of (1):

$$u_1(x,t) =$$

$$= \frac{i\sqrt{\eta}\,A\,\Phi\left(\epsilon^2 A\,G^2 + 2d^2\eta s\right)}{\sqrt{es}\left(2d^2\eta s \cdot \frac{H}{sx^\alpha + \eta t^\alpha} - 4d\sqrt{\eta s}\epsilon AG + \sqrt{2}\epsilon^2(c_0 - \zeta(\rho+1))^{3/2}G^2\right)},$$

where

$$A = -c_0 + \zeta(\rho + 1),$$

$$H = \sqrt{2c_0 - 2\zeta(\rho+1)} \cdot (sx^\alpha + \eta t^\alpha),$$

$$G = \exp\left(\frac{\Gamma(\Upsilon + 1)}{\alpha\sqrt{\eta}\sqrt{s}} \cdot H\right),$$

$$\Phi = \exp\left(\frac{i\Gamma(\Upsilon+1)(\zeta t^\alpha + \rho x^\alpha)}{\alpha}\right).$$

1. *Bulut H., Yel G., Baskonus H.M.* An Application of Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method to The Nonlinear Time-Fractional Burgers Equation // Turk. J. Math. Comput. Sci. 2016. No. 5. P. 1–7.

# On existence and uniqueness of solutions for retarded functional differential equations with piecewise-continuous initial functions

**A. N. Aliseyko**
*St. Petersburg, St. Petersburg State University*
e-mail: a.aliseyko@spbu.ru

We consider systems of the form

$$\dot{x} = f(t, x_t),$$

where the delay $h > 0$ and $x_t\colon [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ is the state of the system: $x_t(\theta) = x(t + \theta)$. Given a function $\varphi$ defined on $[-h, 0]$ with values in $\mathbb{R}$ and time $t_0 \in \mathbb{R}$, the initial value problem for such systems is to find a function $x(t)$ defined on $[t_0 - h, t_0 + \tau]$, satisfying the system above for all $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, such that $x_{t_0} = \varphi$.

**Definition.** We call a function $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *piecewise-continuous* if it is continuous on $[a, b]$ except at possibly a finite number of points and both left-hand side limit $\varphi(t-)$ and right-hand side limit $\varphi(t+)$ exist at every point $t$ of the interval $[a, b]$. By definition we will assume that $\varphi(a-) = \varphi(a)$ and $\varphi(b+) = \varphi(b)$.

For vectors from $\mathbb{R}^n$ we will use the Euclidean norm $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. The set of all piecewise-continuous functions from $[a, b]$ to $\mathbb{R}^n$ will be denoted as $PC([a, b], \mathbb{R}^n)$, and $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ is the set of all continuous functions. It is not hard to verify that

$$\|\varphi\| = \sup_{t \in [a,b]} \|\varphi(t)\|,$$

defines a norm on both $PC([a, b], \mathbb{R}^n)$ and $C([a, b], \mathbb{R}^n)$.

The following result is well-known [1, 2].

**Theorem 1.** *Let $f\colon [0,\infty) \times C([-h,0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ and suppose that the functional $f$ is uniformly bounded on any bounded subset of $C([-h,0],\mathbb{R}^n)$, continuous, and uniformly Lipschitz continuous in $\varphi$ on any bounded subset of $C([-h,0],\mathbb{R}^n)$. Then for any $\varphi \in X$ and $t_0 \geq 0$ there exists $t_1 > t_0$ such that the system*

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1}$$

*has a unique solution $x(t)$ defined on $[t_0 - h, t_1]$ satisfying $x_{t_0} = \varphi$.*

For linear systems, however, it is necessary to consider discontinuous initial function and for that reason in [2] an attempt was made to show that Theorem 1 still holds if $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ is replaced everywhere by $PC([a,b],\mathbb{R}^n)$. In this contribution we establish that it is, in fact, impossible to preserve Theorem 1 without additional assumptions on the functional $f$.

**Theorem 2.** *There exists a functional $\hat{f}\colon PC([-h,0],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ that is bounded on bounded subsets of $PC([-h,0],\mathbb{R})$, continuous and uniformly 1-Lipschitz continuous such that for any $t_1 > 0$ the equation*

$$\dot{x}(t) = \hat{f}(x_t),$$

*has no solutions $x(t)$ on any interval $[-h, t_1]$ satisfying*

$$x_0(\theta) = \varphi_0(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in [-h, 0), \\ 1, & \theta = 0. \end{cases}$$

Theorem 1 [1, 2] is usually established by considering the integral equation

$$x(t) = \varphi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds \tag{2}$$

instead of examining equation (1) directly. More that that, it is often advantageous to relax the differentiability assumptions on the solutions of (1) and instead assume only that $x(t)$ satisfies equation (2) and the initial condition $x_{t_0} = \varphi$. In the following we show that even in this weaker sense the functional $\hat{f}$ admits no solutions with the initial function $\varphi_0$.

Crucially, when $x(t)$ is continuous on $[t_0 - h, t_1]$, the mapping $s \mapsto x_s$ is continuous on $[t_0, t_1]$ (see [1]). However, it is not the case for piecewise-continuous functions. More precisely, one can show the following result.

**Lemma 1.** *Let $x$ be a function defined on $[t_0 - h, t_1]$, continuous on $[t_0, t_1]$, piecewise-continuous with at least one discontinuity on $[t_0 - h, t_0]$, where $\bar{t}$ is the rightmost discontinuity. Then the mapping $s \mapsto x_s$ is not continuous for any $t_0 \leq s \leq \bar{t} + h$.*

Hence, the main idea behind the proof of Theorem 2 is construct a functional in such a way that $f(s, x_s)$ is not Lebesgue-integrable. We consider the scalar case ($n = 1$) with $\varphi_0$ as given in Theorem 2 and $t_0 = 0$. Along any potential solution with such an initial function its state will have the form

$$x_s(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in [-h, -s), \\ 1, & \theta = -s, \\ \chi(t), & \theta \in (-s, 0], \end{cases}$$

where $\chi$ is continuous and $s \in [0, h]$. For all $s \in [0, h]$ we define $A_s$ as the set of functions from $X$ that are equal to 0 for $\theta < -s$, to 1 at $t = -s$, and are continuous afterwards. Let $A = \bigcup_{[0,h]} A_s$.

**Lemma 2.** *Let $g\colon [0, h] \to \mathbb{R}$ be any function. Define $f_g(\alpha) = g(s)$ for all $\alpha \in A_s$. Then $f_g\colon A \to \mathbb{R}$ is continuous. Moreover, if $g([0, h]) \subset [0, 1]$ then $f_g$ is 1-Lipschitz continuous.*

By McShane's extension theorem [3] for any bounded function $g$ the functional $f_g$ can be extended to some Lipschitz continuous functional $\hat{f}_g$ defined on the whole space $PC([-h, 0], \mathbb{R})$. By construction, $x_s \in A_s$ for $s \in [0, h]$, therefore $\hat{f}_g(x_s) = g(s)$. The remaining step is to pick some function $g$ with particularly pathological properties.

For example, if $g$ is the Dirichlet function, then $f_g(x_s)$ is already not Riemann-integrable, but is still Lebesgue-integrable. Further still, $g$ can be chosen as the characteristic function of a Vitali set [4] so that it will not be integrable on $[0, h]$. Even further, using transfinite induction one can show that there exists a set $\mathcal{N} \subset [0, h]$

such that $\mathcal{N} \cap [0,t]$ is not-measurable for any $t > 0$. Now we can define $g$ as the characteristic function of the set $\mathcal{N}$, then construct the functional $f_g$ and extend it to the functional $\hat{f}$.

But then, to have a solution with the initial function $\varphi_0$ we must have $x(t) = 1 + \int_0^t g(s)ds$, where the integral should be equal to the measure of the set $[0,t] \cap \mathcal{N}$ and thus not defined for any $t$.

The work is supported by Russian Science Foundation, project No. 23–71–10099, https://rscf.ru/project/23-71-10099/

1. *Hale J.K., Verduyn Lunel S.M.* Introduction to Functional Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1993.
2. *Kharitonov V.L.* Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013.
3. *McShane E.J.* Extension of range of functions // Bulletin of the American Mathematical Society. 1934. Vol. 40, no. 12. P. 837–842.
4. *Vitali G.* Sul problema della misura dei Gruppi di punti di una retta. Bologna: Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1905.

# Some new solutions of the loaded combined KdV-MKdV equation by using the improved $G'/G$-expansion method

**I. I. Baltaeva**, **M. M. Khasanov**, **A. D. Azimov**

*Urgench, Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni*

e-mail: iroda-b@mail.ru

This paper is dedicated to find the solutions of the equation of loaded combined KdV-MKdV equation. It is shown that $G'/G$-expansion method is one of the most effective way of finding the solutions.

Consider the following loaded combined KdV-MKdV equation

$$u_t + 6uu_x - 6u^2u_x + u_{xxx} + \gamma(t)u(0,t)u_x = 0, \tag{1}$$

where $u(x,t)$ is an unknown function, $\gamma(t)$ is the given real continuous function, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

## Description of the generalized-expansion method

Let us given a nonlinear partial differential equation in the following form

$$\mathbf{F}(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{tx}, \ldots) = 0 \tag{2}$$

with two independent variables $x$ and $t$. Besides, $u = u(x, t)$ is a unknown function, $\mathbf{F}$ is a polynomial in $u$ and its partial derivatives in which the highest order derivatives and nonlinear terms are involved. Now we give the main steps of the $G'/G$-expansion method [3]:

**Step 1.** We find the solution $u$ in the following form:

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - \Omega(t), \tag{3}$$

where $\xi$ is parameter and $\Omega(t)$ is a continuous function dependent on $t$. We reduce equation (2) to the following nonlinear ordinary differential equation:

$$P(u, u', u'', u''', \ldots) = 0, \tag{4}$$

where $P$ is a polynomial of $u(\xi)$ and its all derivatives $u'(\xi) = \frac{du(\xi)}{d\xi}$, $u''(\xi) = \frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2}, \ldots$.

**Step 2.** We assume that the solution of equation (4) has the form

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{m} a_j \left(\frac{G'}{G}\right)^j, \tag{5}$$

where $G = G(\xi)$ satisfies the following second order ordinary differential equation:

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0, \tag{6}$$

where $G' = \frac{dG(\xi)}{d\xi}$, $G'' = \frac{d^2G(\xi)}{d\xi^2}$ and $\lambda$, $\mu$, $a_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ are constants that can be determined later, provided $a_m \neq 0$.

**Step 3.** We determine the integer number $m$ by balancing the nonlinear terms of the highest order and the partial product of the highest order of (4).

**Step 4.** Substitute (5) along with (6) into (4) and collect all terms in the same order of $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$, then left-hand side of (4) is converted into a polynomial in $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$. Then, equaling each coefficient of this polynomial to zero we derive a set of over-determined partial differential equations for $a_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ and $\xi$.

**Step 5.** Substituting the values $a_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ and $\xi$ and as well as the solutions of equation (6) into (5), we have the exact solutions of equation (2).


1. *Naher H.* Some New Solutions of the Combined KdV-MKdV Equation by Using the Improved $(G'/G)$-Expansion Method // World Applied Sciences Journal. 2012. Vol. 16, no. 11. P. 1559–1570.

2. *Zhang S., Tong J.L., Wang W.* A generalized-expansion method for the mKdV equation with variable coefficients // Physics Letters A. 2008. Vol. 372. P. 2254–2257.

3. *Wang M., Li X., Zhang J.* The $(G'/G)$-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics // Physics Letters A. 2008. Vol. 372. P. 417–423.

4. *Urazboev G.U., Baltaeva I.I., Rakhimov I.D.* A generalized-expansion method for the loaded Korteweg–de Vries equation // Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki. 2021. Vol. 24, no. 4. P. 139–147.

5. *Baltaeva I.I., Rakhimov I.D., Khasanov M.M.* Exact Traveling Wave Solutions of the Loaded Modified Korteweg–de Vries Equation // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2022. Vol. 41. P. 85–95.

# Analysis of soliton wave structure of M-fractional Kuralay-IIB equation

**F. N. Kaya Sağlam**
*Tekirdağ Namık Kemal University, Department of Mathematics, Turkiye*
e-mail: ftmnrtlp@gmail.com

**V. Ala**
*Mersin, Mersin University, Department of Mathematics, Turkiye*
e-mail: volkanala@mersin.edu.tr

In this study, new analytical wave solutions of the M-fractional Kuralay-IIB equation (K-IIBE) are explored using the generalized Arnous method. A variety of soliton solutions such as dark and bright solitons are successfully derived. These analytical solutions are valuable not only for their role in revealing the physical and mathematical structure of the underlying system but also for providing a solid foundation for further theoretical analysis. The generalized Arnous method proves to be a reliable, efficient, and straightforward approach for handling fractional nonlinear partial differential equations.

**Mathematical analysis of the proposed model.** Assume the K-IIBE, defined as:

$$
\begin{aligned}
iD^{\alpha,\Upsilon}_{M,x}v + D^{\alpha,\Upsilon}_{M,x}\left(D^{\alpha,\Upsilon}_{M,t}v\right) - hv &= 0,\\
iD^{\alpha,\Upsilon}_{M,x}u - D^{\alpha,\Upsilon}_{M,x}\left(D^{\alpha,\Upsilon}_{M,t}u\right) + hu &= 0,\\
D^{\alpha,\Upsilon}_{M,t}h - 2D^{\alpha,\Upsilon}_{M,x}(uv) &= 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Let us consider the M-truncated fractional K-IIBE for $u = \varepsilon v^*$, expressed as:

$$
\begin{aligned}
iD^{\alpha,\Upsilon}_{M,x}u + D^{\alpha,\Upsilon}_{M,x}\left(D^{\alpha,\Upsilon}_{M,t}u\right) - hu &= 0,\\
D^{\alpha,\Upsilon}_{M,t}h + 2\varepsilon D^{\alpha,\Upsilon}_{M,x}\left(|u|^2\right) &= 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Through the use of wave transformation

$$h(x,t) = \upsilon(\xi),$$

$$u(x,t) = M(\xi)\exp\left[i\left(\frac{\Gamma(1+\Upsilon)}{\alpha}\left[\rho x^{\alpha} + \zeta t^{\alpha}\right]\right)\right], \tag{3}$$

$$\xi = \frac{\Gamma(1+\Upsilon)}{\alpha}\left(\sigma x^{\alpha} + \eta t^{\alpha}\right).$$

By plugging Eq. (3) into Eq. (2), we obtain the real and imaginary parts, as shown below:

$$2\sigma\varepsilon M^3 - \eta\left(\zeta(\rho+1) - c_0\right)M + \eta^2\sigma M^{''} = 0, \tag{4}$$

$$(\eta + \rho\eta + \zeta\sigma)M^{'} = 0. \tag{5}$$

Eq. (5) gives the velocity of the soliton as

$$\eta = -\frac{\zeta\sigma}{(1+\rho)}. \tag{6}$$

By employing the homogeneous balance principle on Eq. (4), we derive $m = 1$.

**Description of the generalized Arnous method.** In this subsection, the offered method is introduced [1]:

**Step 1.** Let us express the solution of Eq. (1) as:

$$\Theta(\xi) = A_0 + \sum_{i=1}^{j} \frac{A_i + B_i\left[\phi^{'}(\xi)\right]^i}{\left[\phi(\xi)\right]^i}, \tag{7}$$

in which

$$\left[\phi^{'}(\xi)\right]^2 = \left[\phi(\xi) - \varpi\right]\ln(k)^2, \tag{8}$$

and

$$\left[\phi^{(m)}(\xi)\right] = \begin{cases} \phi(\xi)\ln(\kappa)^2, & \text{if } m \text{ is even,} \\ \phi'(\xi)\ln(\kappa)^{m-1}, & \text{if } m \text{ is odd,} \quad m \geq 2, \end{cases}$$

where

$$\phi(\xi) = k\ln(\kappa)\kappa^{\xi} + \frac{\varpi}{4k\ln(\kappa)\kappa^{\xi}}. \tag{9}$$

According to the pre-assumed structures in Eqs. (7) and (9), $k$, $\varpi$, $A_0$, $A_i$ and $B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, j)$ are the arbitrary coefficients to be determined. Furthermore, to find the positive integer $j$, we can utilize established balancing rules from the literature.

**Step 2.** Substituting the solution from Eq. (7) into Eq.(1), gives a polynomial equation of $\frac{1}{\phi(\xi)}\left(\frac{\phi'(\xi)}{\phi(\xi)}\right)$. By collecting all terms of the same power in this polynomial and equating them to zero, we obtain a system of algebraic equations.

**Step 3.** After solving this system, the analytical solutions to Eq. (1) are obtained by substituting the outcomes into the general structure of Eq. (7).

**Extraction of Solution for Generalized Arnous Method.** For $m = 1$, Eq. (7) is written as:

$$M(\xi) = A_0 + \frac{A_1 + B_1\left[\phi'(\xi)\right]}{\phi(\xi)}. \tag{10}$$

To determine the parameter values, we apply Maple software to solve the system of algebraic equations. The resulting set of solutions can be presented as

**Type (1).**

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{c_0(1+\rho)}{-2\ln(\kappa)^2\sigma^2 + (1+\rho)^2}, \quad A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \\ B_1 &= \frac{\sqrt{-\frac{1}{\varepsilon}}c_0\sigma}{-2\ln(\kappa)^2\sigma^2 + (1+\rho)^2}. \end{aligned} \tag{11}$$

As a result, by substituting Eq. (11) along with Eq. (10) into Eq. (3), the aforementioned model solution is expressed as:

$$u_1(x,t) =$$

$$= \frac{\sqrt{-\frac{1}{\varepsilon}} c_0 \sigma \ln(\kappa) \left( -4k^2 \ln(\kappa)^2 \kappa^{2\left(\frac{\Gamma(1+\Upsilon)}{\alpha}(\sigma x^\alpha + \eta t^\alpha)\right)} + \varpi \right)}{\left( 2\ln(\kappa)^2 \sigma^2 - \rho^2 - 2\rho - 1 \right)\left( 4k^2 \ln(\kappa)^2 \kappa^{2\left(\frac{\Gamma(1+\Upsilon)}{\alpha}(\sigma x^\alpha + \eta t^\alpha)\right)} + \varpi \right)}$$

$$\times \exp\left[ i \left( \frac{\Gamma(1+\Upsilon)}{\alpha} [\rho x^\alpha + \zeta t^\alpha] \right) \right].$$

1. *Arnous A.H.* Optical solitons to the cubic quartic Bragg gratings with anti-cubic nonlinearity using new approach // Optik. 2022. Vol. 251. Art. no. 168356.

# Uniform continuity of the Urysohn operator in subspaces of the space of continuous bounded vector functions

**E. V. Molchanova Alves**
*Maputo, Higher Institute of Sciences and Technology of Mozambique*
e-mail: ealves@isctem.ac.mz

**M. J. Alves**, **S. P. Munembe**, **Y. V. Nepomnyashchikh**

*Maputo, Eduardo Mondlane University*
e-mail: manuel.joaquim.alves@uem.ac.mz, joao.munembe@uem.ac.mz, yuriy.nepomnyashchikh@uem.ac.mz

**1. Introduction.** The study of the nonlinear integral Urysohn operator in functional spaces is of interest in the field of nonlinear functional analysis, and finds applications in the theory of functional differential equations [1]. We presented a criterion for the action and uniform continuity of the Urysohn operator from the space of measurable functions with relatively compact image to the space of uniformly continuous functions defined on a precompact uniform space, when the functions take values in Banach spaces, with an exact expression for the modulus of continuity in terms of the kernel of the Urysohn operator. The result generalizes the well-known classical test for the continuity of an Urysohn operator from [2, Chapter X], as well as the authors' results [3]–[5], which were obtained for the space of continuous functions on a compact set.

**2. Basic notations.** Let $(\Omega, \Sigma, \mu)$ be a space with complete $\sigma$-finite measure, where $\Omega$ is a uniform Hausdorff space [6], so that $\Sigma$ contains a Borel $\sigma$-algebra and the measure $\mu$ is lower regular, that is, $\mu B < \infty$ for any compact $B \subset \Omega$ and $\mu A = \sup\{\mu B \colon B \subset A,\ B \text{ is compact}\}$ for any $A \in \Sigma$.

We assume that $X$ and $Y$ are real separable Banach spaces, with the additional condition that $Y$ does not contain a copy of $c_0$. By $B_r[X]$ we will denote the closed ball with center at zero of radius $r$ of the space $X$. The value of the functional $g \in Y^*$ at the point $y \in Y$ will be denoted as $\langle y, g\rangle$.

We denote by $L_\infty(X)$ the Banach space consisting of measurable bounded functions $u \colon \Omega \to X$ with the norm $\|u\| = \sup\limits_{t\in\Omega} \|u(t)\|_X$, and by $L^c_\infty(X)$ and $UC(X)$ the subspaces of the space $L_\infty(X)$ consisting of measurable functions with relatively compact image $u(\Omega)$ in $X$ and uniformly continuous functions, respectively. We denote by $\mathrm{L}_\infty(X)$ and $\mathrm{L}^c_\infty(X)$ the standard quotient spaces of $L_\infty(X)$ and $L^c_\infty(X)$, respectively, consisting of classes of $\mu$-equivalent functions, equipped with the norm $\|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\Omega} \|u(t)\|_X$.

We assume that $k \colon \Omega^2 \times X \to Y$ is a function such that for any $t \in \Omega$, the function $k(t, \cdot, \cdot)$ satisfies satisfy the Carathéodory conditions: the function $k(t, \cdot, x)$ is measurable for each $x \in X$, and the function $k(t, s, \cdot)$ is continuous for almost every $s \in \Omega$.

The main object of our study is the nonlinear integral operator of Urysohn $K$ with kernel $k$, defined by

$$(Ku)(t) = \int_\Omega k(t, s, u(s))\, ds, \qquad t \in \Omega,$$

where the integral is understood in the Pettis sense [7, p. 54].

Let's define, for now formally, the quantity $\omega_r(\delta)$ for arbitrary $r > 0$ and $\delta > 0$ as follows:

$$\omega_r(\delta) =$$

$$\sup_{t\in\Omega;\ g\in B_1[Y^*]} \int_\Omega \sup_{x_1, x_2 \in B_r[X],\ \|x_1 - x_2\|_X \le \delta} |\langle k(t, s, x_1) - k(t, s, x_2), g\rangle|\, ds.$$

From the Carathéodory conditions, it follows that the function under the integral sign is measurable in $s$, which means that the quantity $\omega_r(\delta)$ is defined correctly, but we do not assume a priori that it is finite.

Note that the study of the operator $K$ in the space of uniformly continuous functions covers many specific functional spaces of interest for applications. Particular cases of the space $UC(X)$ with $\Omega = \mathbb{R}$ or $\Omega = [a, \infty)$ are the Banach space of all continuous bounded functions $u\colon \Omega \to X$ and some of its subspaces, such as the space of continuous functions converging to zero at infinity and the space of Bohr almost periodic functions.

**3. The main results.** The following theorems were proven.

**Theorem 1.** *In order for the operator $K$ to act from $\mathrm{L}^c_\infty(X)$ to $UC(Y)$ and to be uniformly continuous on each ball, it is necessary and sufficient that the following conditions be satisfied* (a), (b) *and* (c)*:*

(a) *There is $u \in L^c_\infty(X)$ such that $Ku \in UC(Y)$;*
(b) *For any measurable set $A \subset \Omega$ and $\forall x_1, x_2 \in X$, we have*

$$\int_A \big[k(\cdot, s, x_1) - k(\cdot, s, x_2)\big]\, ds \in UC(Y);$$

(c) *For all $r > 0$, we have $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega_r(\delta) = 0$.*

*Moreover, if $K$ acts from $\mathrm{L}^c_\infty(X)$ to $UC(Y)$ and is uniformly continuous on each ball, then for any $r > 0$ the modulus of continuity of the operator $K$ on the ball $B_r[\mathrm{L}^c_\infty(X)]$ is exactly the function $\omega_r(\cdot)$.*

**Theorem 2.** *Let $K$ be an operator that acts from $UC(X)$ to $UC(Y)$. Then the following statements are true:*

1) *In order for $K$ to be uniformly continuous, it is necessary and sufficient for the condition* (c) *of the Theorem 1 to hold;*

2) *If an operator $K\colon UC(X) \to UC(Y)$ is uniformly continuous on each ball, then $K$ acts from $\mathrm{L}_\infty(X)$ to $L_\infty(Y)$ and is also uniformly continuous on each ball. Moreover, for any $r > 0$, the modulus of continuity of each of the operators $K\colon B_r[UC(X)] \to UC(Y)$ and $K\colon B_r[\mathrm{L}_\infty(X)] \to L_\infty(Y)$ is exactly the function $\omega_r(\cdot)$.*

The work was financially supported by SIDA under the subprogram Capacity Building in Mathematics, Statistics and Its Applications, project No.1.4.2/UEM-Sweden 2017–2024.

1. *Azbelev N.V., Maksimov V.P.,Rakhmatullina L.F.* Introduction to the theory of functional differential equations. Methods and applications. New York: Contemporary Mathematics and Its Applications 3. Hindawi Publishing Corporation, 2007.

2. *Zabrejko P.P., Koshelev A.I., Krasnosel'skii M.A., Mikhlin S.G., Rakovshchik L.S., Stecenko V.J.* Integral equations. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1975.

3. *Alves M.J., Alves E.V., Munembe J.S.P., Nepomnyshchikh Y.V.* Linear and nonlinear integral functionals on the space of continuous vector functions // Vestn. Ross. Univ., Mat. 2023. Vol. 28, no. 142. P. 111–124. (Russian).

4. *Alves M.J., Alves E.V., Munembe J.S.P., Nepomnyshchikh Y.V.* Linear integral operators in spaces of continuous and essentially bounded vector functions // Vestn. Ross. Univ., Mat. 2024. Vol. 29, no. 145. P. 5–19.

5. *Alves E.V., Alves M.J., Munembe J.S.P., Nepomnyshchikh Y.V.* Urysohn operator in subspaces of the space of essentially bounded functions // Proc. of the 8th Intern. School-Seminar on Nonlin. Anal. and Extrem. Probl. 2024. Irkutsk: ISDCT SB RAS. P. 6–7.

6. *Kelley J.L.* General topology. New York-Berlin-Heidelberg: Springer, 1955.

7. *Diestel J.,Uhl J.J.* Vector measures. Providence: AMS, Math. Surveys, Vol. 15, 1977.

## Accessible sets of a system of vector fields

**A. Y. Narmanov**
*Tashkent, National University of Uzbekistan*
e-mail: narmanov@yandex.com

Let $M$ be a smooth manifold of dimension $n$ and $D$ be a (finite or infinite) family of smooth vector fields defined on the manifold $M$.

**Definition 1.** The *orbit* $L(x)$ of a family $D$ of vector fields passing through a point $x$ is defined as the set of points $y$ from $M$ such that there exist real numbers $t_1, t_2, \ldots, t_k$ and vector fields

$X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ from $D$ (where $k$ is an arbitrary positive integer) such that

$$y = X_{i_k}^{t_k}(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}(\ldots(X_{i_1}^{t_1}(x))\ldots)).$$

It is clear that an orbit is a smooth curve (one-dimensional manifold) if $D$ consists of only one vector field.

The topology of the orbit $L(x)$ (the Sussmann topology) is introduced as the strongest topology such that all mappings of the kind $(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k \to X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\ldots(X_1^{t_1}(x))\ldots))$ are continuous for it, where $t_1, t_2, \ldots, t_k$ are real numbers and $X_1, X_2, \ldots, X_k$ are vector fields from the family $D$.

It is well known [1, 2] that each orbit of each family of vector fields (of the class $C^r, r \geq 1$) with the Sussmann topology possesses the differential structure such that, with respect to it, it is a smooth manifold of the class $C^r$ smoothly immersed into $M$.

**Definition 2.** Let $x, y \in M$. We say that the point $y \in L(x)$ is *$T$-accessible* from the point $x \in M$ if

$$y = X_{i_k}^{t_k}(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}(\ldots(X_{i_1}^{t_1}(x))\ldots)) \quad \text{and} \quad \sum t_i = T.$$

Let $A_x(T)$ denote the set of points that are $T$-accessible from the point $x$.

In [2], using Sussmann's ideas, we proved the following assertion.

**Theorem 1.** *For each $x \in M$ and each $T$, the set $A_x(T)$ is a submanifold of $L(x)$ of codimension of one or zero.*

For symmetric systems, the following stronger assertion holds.

**Theorem 2.** *Let the system $D$ be symmetric and contain a compete vector field. Then $A_x(T) = A_x(0) = L(x)$ for each $T \in \mathbb{R}$.*

Recall that a system $D$ of vector fields is said to be symmetric if the relation $X \in D$ implies the relation $-X \in D$.

In [3], the following assertion is proved.

**Theorem 3.** *Let $M$ be a smooth connected manifold of dimension $n \geq 2$. Then there exists a system $D$ consisting of two vector fields and such that $L(x) = M$ for each point $x \in M$.*

Using this theorem, we prove the following one.

**Theorem 4.** *Let $M$ be a smooth connected manifold of dimension $n \geq 2$. Then there exists a system $D$ consisting of three vector fields and such that $A_x(0) = M$ for each point $x \in M$.*

The following result is obtained [3] for manifolds with nonzero Eulerian characteristics.

**Theorem 5.** *Let $M$ be a smooth compact connected manifold of dimension $n \geq 2$ such that its Eulerian characteristic is different from zero. There exists a system $D$ consisting of two vector fields and such that $A_x(0) = M$ for each point $x \in M$.*

Recall that a vector field $X$ on $M$ is called a Killing vector field if the one-parametric group of local transformations $x \to X^t(x)$ generated by the field $X$ consists of isometries.

Note the Lie commutator of two Killing fields yields a Killing field as well and each linear combination of Killing fields over the field of real numbers is a Killing field. Therefore, the set of all Killing vector fields on a manifold $M$ denoted by $K(M)$ forms a Lie algebra over the field of real numbers. Also, it is known that the Lie algebra $K(M)$ of Killing vector fields of each connected Riemannian manifold $M$ is at most $\frac{1}{2}n(n+1)$-dimensional, where $n = \dim M$. If $\dim K(M) = \frac{1}{2}n(n+1)$, then $M$ is a manifold of constant curvature.

Let $A(D)$ denote the least Lie subalgebra of the algebra $K(M)$ containing the set $D$.

Let $f\colon M \to N$ be a differentiable mapping of the greatest rank, where $M$ is a smooth Riemannian manifold of dimension $n$, $N$ is a smooth Riemannian manifold of dimension $m$, and $n > m$. Then, for each point $q \in N$, the set $L_q = \{p \in M\colon f(p) = q\}$ is a manifold of dimension $n - m$.

Let $L$ be a leaf of a foliation $F$ (an orbit of a family $D$), $x \in L$, $T_xL$ be the space tangent to $L$ at the point $x$, and $H(x)$ be the orthogonal complement of $T_xL$. The following two subbundles of the tangent bundle $TM$ of the manifold $M$ arise: $TF\colon x \to T_xL$ and $H\colon x \to H(x)$. In this case, each vector field $X \in V(M)$ can be represented in the form $X = X_F + X_H$, where $X_F$ and $X_H$ are the orthogonal projections of $X$ to $TF$ and $H$, respectively. If $X_H = 0$, then $X$ is called the vertical field (tangent to $F$); if $XF = 0$, then $X$ is called the horizontal field.

The mapping $f\colon M \to N$ is called a *Riemannian submersion* if its differential *df* preserves the lengths of horizontal vectors (see [3]).

Let $B = M/F$ denote the set of leafs of $F$ endowed by the quotient topology. Consider the mapping $\pi\colon M \to F$ such that $\pi(x) = L(x)$, where $L(x)$ is the leaf containing the point $x$. The next theorem shows that orbits are leafs of a Riemannian submersion.

**Theorem 6.** *Let $M = \mathbb{R}^n$, the set $D$ consist of Killing vector fields, and $\dim V_x(D) = k$ for all $x \in M$, where $0 < k < n$. Then the set of leafs $B = M/F$ endowed by the quotient topology possesses a differential structure of a smooth $(n-k)$-dimensional manifold such that the map $\pi\colon M \to B$ is a smooth Riemannian submersion.*

**Corollary 1.** *The curvature of the manifold $B$ is nonnegative.*

**Theorem 7.** Under the assumptions of Theorem 6, the orbits of the family $D$ are parallel planes if and only if $B = M/F$ is a zero-curvature manifold.

**Theorem 8.** Let $M = \mathbb{R}^n$, $D$ consist of Killing vector fields, and the orbit $L(p)$ be a $k$-dimensional plane, where $0 \le k \le n$ and $p \in M$. Then, for all points $q \in L(p)$, the sets $A_q(0)$ either coincide with $L(p)$ or are parallel hyperplanes in $L(p)$.


1. *Narmanov A.Ya., Saitova S.* On the geometry of orbits of Killing vector fields // Differ. Equ. 2014. Vol. 50, no. 12. P. 1582–1589.
2. *Narmanov A.Ya., Saitova S.* On the geometry of the reachable set of vector fields // Differ. Equ. 2017. Vol. 53, no. 3. P. 321–326.
3. *Levitt N., Sussmann H.* On controllability by means of two vector fields // SIAM J. Control. 1975. Vol. 13, no. 6. P. 1271–1281.

# Integration of the loaded negative order modified Korteweg–de Fries equation with time-dependent coefficients in the class of periodic functions

**G. U. Urazboev**, **M. M. Khasanov**

*Urgench, Urgench State University*

e-mail: gayrat71@mail.ru

The negative order KDF equation with a self-consistent source in the class of periodic functions is studied in [1, 2]. In this paper, we study the integration of the loaded negative-order mkdF equation

$$\begin{cases} q_{xt}(x,t) = -2q(x,t)\mu_t(x,t) + a(t)q(x,t) + \gamma(t)q(0,t)q(x,t), \\ \mu_x(x,t) = -q^2(x,t), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

with time-dependent coefficients in the class of periodic functions.

It is required to find a solution of equation (1) satisfying the conditions

$$\begin{aligned} &q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x), \quad \mu(x,t)\big|_{t=0} = \mu_0(t), \\ &[q_x(x,t) - \mu(x,t)]\,\big|_{t=0} = \beta(t), \\ &q(x+\pi,t) = q(x,t), \\ &\mu_t(x+\pi,t) = \mu_t(x,t), \quad t\ge 0, \quad x\in\mathbb{R}; \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &q(x,t)\in C_x^1(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\ge 0), \\ &\mu(x,t)\in C_x^1(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\ge 0), \end{aligned} \tag{3}$$

where $q_0(x)\in C^3(\mathbb{R})$, $\gamma(t)\in C[0,\infty)$, $\mu_0(t)\in C^1[0,\infty)$, $a(t)\in C[0,\infty)$, $\beta(t)\in C[0,\infty)$ are given real functions, $q_0(x)$ has period $\pi$, the functions $\alpha(t)$ and $\beta(t)$ are bounded. When studying the problem (1)-(3), the following Dirac operator is used:

$$L(t)y = B\frac{d}{dx}y + \Omega(x,t)y = \lambda y, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

where

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ q(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x,t) \\ y_2(x,t) \end{pmatrix}.$$

By $\mathbf{s}(x,\lambda) = (s_1(x,\lambda),\ s_2(x,\lambda))^{\mathrm{T}}$ we denote the solution of equation (4) satisfying initial conditions $\mathbf{s}(0,\lambda) = \big(0,1\big)^{\mathrm{T}}$.

The spectrum of the operator (4) consists of the set $E = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[\lambda_{2n},\lambda_{2n+1}]$. The eigenvalues $\xi_n(t)$, $n\in\mathbb{Z}$, of the Dirichlet problem $y_1(0)=0$, $y_1(\pi)=0$ for the system (4), together with the signs

$$\sigma_n(t) = \operatorname{sign}\{s_2(\pi,\xi_n(t),t) - 1/s_2(\pi,\xi_n(t),t)\}\,,\quad n\in\mathbb{Z},$$

are called the spectral parameters of problem (4).

**Theorem.** *Let $q(x,t)$, $\mu(x,t)$ be a solution of the problem* (1) – (3). *Then the spectrum of the Dirac operator with coefficient $q(x+\tau,t)$ does not depend on $\tau$ and $t$, and the spectral parameters $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, satisfy the analog of the system of Dubrovin–Trubowitz equations:*

$$\begin{gathered}\frac{\partial\xi_n}{\partial t} = \frac{1}{\xi_n}(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\times\\ \times\left\{q_t(\tau,t) - \mu_t(\tau,t) + \frac{a(t)}{2} + \frac{\gamma(t)q(0,t)}{2}\right\},\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.\end{gathered}\tag{5}$$

The signs of $\sigma_n(\tau,t) = \pm1$ change each time a point $\xi_n(\tau,t)$ collides with the boundaries of its lacuna $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. In addition, the following initial conditions are satisfied:

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\quad \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau),\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\tag{6}$$

where $\xi_n^0$, $\sigma_n^0$ $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ are spectral parameters of the Dirac operator with coefficient $q_0(x)$. Considering the formulas

$$\begin{gathered}q(\tau,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\,h_n(\xi),\\ q_t(\tau,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\tfrac{\partial h_n(\xi)}{\partial t},\end{gathered}\tag{7}$$

$$\begin{gathered}\mu(\tau,t) = \mu_0(t) - \int_0^\tau q^2(s,t)\,ds,\\ \mu_t(\tau,t) = \mu_0'(t) - 2\int_0^\tau q(s,t)\,q_t(s,t)\,ds,\end{gathered}\tag{8}$$

system (5) can be rewritten in closed form.

**Remark.** Let us show that the pair of functions $q(x,t)$ and $\mu(x,t)$ satisfies equation (1).

For this purpose, we use the Dubrovin–Trubovitz system

$$\begin{gathered}\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \frac{1}{\xi_n}(-1)^n \sigma_n(\tau,t)\, h_n(\xi)\times \\ \times\left(q_\tau(\tau,t) - \mu(\tau,t) + \frac{a(t)}{2} + \frac{\gamma(t)q(0,t)}{2}\right),\end{gathered} \tag{9}$$

$n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, and the second trace formula

$$q^2(\tau,t) + q_\tau(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k+1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau,t)\right). \tag{10}$$

Differentiating by $t$ the formula of traces (10) we obtain

$$2q(\tau,t)q_t(\tau,t) + q_{\tau t}(\tau,t) = -2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi_k(\tau,t)\frac{\partial \xi_k(\tau,t)}{\partial t}. \tag{11}$$

Then, considering the system of equations (9) in (11), we obtain

$$\begin{gathered}2q(\tau,t)q_t(\tau,t) + q_{\tau t}(\tau,t) = \\ = 2\left(q_\tau(\tau,t) - \mu(\tau,t) + \frac{a(t)}{2} + \frac{\gamma(t)q(0,t)}{2}\right)\times \\ \times\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)\, h_k(\xi).\end{gathered}$$

Taking into account equality (7), we conclude that

$$\begin{gathered}2q(\tau,t)q_t(\tau,t) + q_{\tau t}(\tau,t) = \\ = 2q(\tau,t)\left(q_\tau(\tau,t) - \mu(\tau,t)\right) + a(t)q(\tau,t) + \gamma(t)q(0,t)q(\tau,t), \\ q_{\tau t}(\tau,t) = -2q(\tau,t)\mu(\tau,t) + a(t)q(\tau,t) + \gamma(t)q(0,t)q(\tau,t).\end{gathered}$$

Differentiating equality (8) by $\tau$, we find $\mu_\tau(\tau,t) = -q^2(\tau,t)$.

**Corollary.** *The theorem provides an effective method for solving problem* (1)–(3) *based on the inverse spectral problem approach.*

1. *Urazboev G.U., Khasanov M.M.* Integration of the Korteweg–de Vries equation of negative order with a self-consistent source in the class of periodic functions // Vestnik of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2022. Vol. 32, no. 2. P. 228–239.
2. *Urazboev G.U., Khasanov M.M., Baltaeva I.I.* Integration of the Korteweg–de Vries equation of negative order with a source of a special kind // Izvestia Irkutsk State University. Series Mathematics. 2023. Vol. 44. P. 48–56.

# Исследование устойчивости дискретной модели нейронной сети типа small world

**И. А. Аксененко**
*Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический унивеситет*
e-mail: ilya156@list.ru

Рассматривается нейронная сеть, модель которой описывается матричным уравнением

$$y(n) = Ay(n-m) + By(n-k), \quad n \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

где $y(n) = \{y_1(n), y_2(n), \ldots, y_l(n)\}$ — вектор состояния нейронной сети, $A, B - l \times l$ матрицы взаимодействия с запаздыванием на $m$ и $k$ тактов, $m, k, l \in \mathbf{N}$, $m \geq k$. Ставится задача исследовать равномерную и асимптотическую (совпадающую с экспоненциальной) устойчивость системы (1).

Предполагается, что в рассматриваемой задаче для матриц $A, B$ существует невырожденное преобразование $T$, такое что

$$TAT^{-1} = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \ldots, a_l\}, \; TBT^{-1} = \operatorname{diag}\{b_1, b_2, \ldots, b_l\}.$$

Замена переменных $Ty(n) = x(n)$ сводит систему (1) к диагональной системе

$$x_j(n) = b_j x_j(n-m) + a_j x_j(n-k), \quad j = \overline{1, l}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

Таким образом, задача сводится к исследованию набора скалярных уравнений с комплексными коэффициентами $a, b$

$$x(n) + ax(n-m) + bx(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

В соответствии с критерием Шура–Кона [1] задача устойчивости (3) сводится к изучению расположения корней характеристического уравнения

$$\lambda^m = a\lambda^{m-k} + b \tag{4}$$

относительно единичного круга. Будем строить область устойчивости в пространстве коэффициентов $(a, b)$, считая $m, k$ фиксированными.

Для построения области устойчивости воспользуемся методом $D$-разбиения [2]. Так как $a, b \in \mathbf{C}$, то пространство параметров четырехмерно, поэтому сначала рассмотрим случай $a \geq 0$, $b \in \mathbb{C}$. Положим $b = \alpha + i\beta$. Поверхность $D$-разбиения пространства параметров уравнения (4) задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} \alpha = a\cos(k-m)\varphi - \cos k\varphi, \\ \beta = a\sin(k-m)\varphi - \sin k\varphi, \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \end{cases} \tag{5}$$

Эта поверхность разбивает трехмерное пространство $(\alpha, \beta, a)$ на конечное число областей, среди которых следует выбрать область устойчивости. В силу теоремы о связности [3], областью устойчивости является та, которая содержит начало координат. Обозначим через $G_k^m$ открытую область, границы которой определяются равенствами (5) с изменением параметров в пределах $a \in \left[0, \frac{k}{k-m}\right], \varphi \in [-\arccos t_0, \arccos t_0]$, где $t_0$ — первый положительный корень уравнения $aU_{k-m+1}(t) = U_{k-1}(t)$, а $U_k$ — многочлены Чебышёва 2-ого рода.

Через $[G_k^m]$ обозначим замыкание области $G_k^m$.

**Теорема 1.** *Уравнение* (3) *при* $a \geq 0$, $b \in \mathbb{C}$ *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда точка с координатами* $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, a)$ *принадлежит области* $G_k^m$.

Для построения множества равномерной устойчивости из $[G_k^m]$ следует удалить те точки, для которых корни характеристического уравнения лежат на границе единичного круга и являются кратными.

Рассмотрим в пространстве $(\alpha, \beta, a)$ *кривую кратности*

$$\begin{cases} \alpha = m\left(a^k \cdot \dfrac{(k-m)^{k-m}}{k^k}\right)^{1/m}, \\ \beta = 0, \end{cases}$$

точки которой соответствуют параметрам уравнения (4), когда оно имеет кратные корни.

Пусть $p_h$ — точки пересечения границы области $G_k^m$ с кривой кратности (этих точек будет $m$).

**Теорема 2.** *Уравнение* (3) *при* $a \geq 0, b \in \mathbb{C}$ *равномерно устойчиво, если и только если точка с координатами* $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, a)$ *принадлежит множеству* $[G_k^m] \setminus \left\{ \bigcup\limits_{h=1}^{m} p_h \right\}$.

Теперь рассмотрим общий случай $a, b \in \mathbb{C}$. Обозначим $a = |a|e^{i\omega}$, сделаем замену $x(n) = u(n)e^{i\omega n/m}$ в уравнении (3):

$$u(n) + |a|u(n-m) + (be^{-i\omega k/m})u(n-k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (6)$$

Так как $|x(n)| = |u(n)|$, то устойчивость (3) эквивалентна устойчивости уравнения (6), в котором $|a| \geq 0$, следовательно, к уравнению (6) применимы теоремы 1 и 2.

Назовем $G_k^m(\omega)$ область, которая получается путем поворота области $G_k^m$ на угол $\omega k/m$ против часовой стрелки, а через $[G_k^m(\omega)]$ — её замыкание.

**Теорема 3.** *Уравнение* (3) *экспоненциально устойчиво, если и только если точка с координатами* $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, |a|)$ *принадлежит области* $G_k^m(\omega)$.

**Теорема 4.** *Уравнение* (3) *равномерно устойчиво, если и только если точка с координатами* $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b, |a|)$ *принадлежит области*

$$[G_k^m(\omega)] \setminus \{\bigcup_{h=1}^{m} p_h e^{-i\omega k/m}\}.$$

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект №FSNM-2023-0005.

1. *Cohn A.* Uber Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise // Mathematische Zeitschrift. 1922. Vol. 14. S. 110–148.

2. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных). Л.: ЛКВВИА, 1949.

3. *Аксененко И.А., Чудинов К.М.* Об устойчивости линейных автономных разностных уравнений с комплексными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35, вып. 1. С. 3–26.

# Управление группой мобильных агентов на прямой в условиях коммуникационного запаздывания и переключений сетевой топологии

**А. Ю. Александров**, **Н. Р. Андриянова**, **С. Б. Рузин**

*Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет*

e-mail: a.u.aleksandrov@spbu.ru, natasha23062@mail.ru, serruz001@gmail.com

Задачи построения децентрализованных протоколов, обеспечивающих заданное поведение формаций мобильных агентов, представляют собой одно из наиболее актуальных и интенсивно развивающихся направлений современной теории управления [1]. Важным классом таких задач является размещение агентов на отрезке прямой. Некоторые подходы к их решению разработаны в статьях [2, 3, 4, 5]. Следует отметить, что при синтезе управлений, гарантирующих требуемое распределение агентов, необходимо учитывать коммуникационное запаздывание и переключения сетевой топологии (нарушение и восстановление связей межу агентами). В [4] были построены децентрализованные протоколы, обеспечивающие сходимость агентов к равномерному распределению на отрезке при любом постоянном запаздывании и любом допустимом законе переключения.

В докладе изучается случай, когда каждый агент получает информацию о своих расстояниях до других агентов не напрямую, а посредством использования вспомогательных агентов. Такая задача решалась в статье [5]. Однако там не рассматривались переключения сетевой топологии. Предполагалось, что каждому агенту доступна информация о расстояниях до двух его ближайших (по номеру) соседей. Цель данной работы — обеспечить равномерное размещение агентов на отрезке в условиях более сложных структур связей с возможностью их переключения. Кроме того, наряду с задачей равномерного распределения агентов, исследуется задача нелинейно-равномерного распределения (равномерного по отношению к некоторой нелинейной функции).

Предположим, что на прямой задана группа, состоящая из $m$ мобильных агентов, которые представляют собой точки, изменяющие свое положение при изменении времени. Обозначим через $x_1(t),\ldots,x_m(t)$ координаты агентов в момент времени $t$. Пусть на прямой задан отрезок $[\alpha,\beta]$, причем точки $\alpha$ и $\beta$ считаются статичными агентами, т. е. $x_0(t)\equiv\alpha$, $x_{m+1}(t)\equiv\beta$ при $t\geq 0$. Требуется синтезировать децентрализованное управление, обеспечивающее сходимость агентов к равномерному распределению на отрезке. Управление строится на основе информации, получаемой агентами от своих соседей. В данной работе предполагается, что эта информация доступна не напрямую, а через вспомогательных агентов. Например, на практике каждый агент может использовать сенсор, дрон, квадрокоптер или какое-то другое устройство. Пусть $y_1(t),\ldots,y_m(t)$ — координаты вспомогательных агентов в момент времени $t$.

Для моделирования динамики формации будем рассматривать два варианта:

1) интеграторы первого порядка

$$\dot{x}_i(t)=u_i,\quad \dot{y}_i(t)=v_i,\quad i=1,\ldots,m, \tag{1}$$

2) двойные интеграторы

$$\ddot{x}_i(t)+c\dot{x}_i(t)=u_i,\quad \ddot{y}_i(t)+d\dot{y}_i(t)=v_i,\quad i=1,\ldots,m. \tag{2}$$

Здесь $u_i$ — протокол управления для $i$-го основного агента, $v_i$ — протокол управления для $i$-го вспомогательного агента, в уравнениях (2) $c$ и $d$ — положительные постоянные (коэффициенты демпфирования).

Пусть $\sigma(t)\colon [0,+\infty) \mapsto \{1,\ldots,S\}$ — кусочно-постоянная функция, задающая закон переключения сетевых топологий. Будем считать, что эта функция непрерывна справа, причем на каждом ограниченном промежутке она может иметь только конечное число точек разрыва. Сами топологии определяются множествами $\Xi_{il}^{(\sigma(t))}$, $\Xi_{ir}^{(\sigma(t))}$, представляющими собой соответственно множества номеров левых соседей (основных агентов с номерами, меньшими, чем $i$) и номеров правых соседей (основных агентов с номерами, большими, чем $i$), от которых в момент времени $t$ получает информацию $i$-й вспомогательный агент, $i = 1,\ldots,m$. Введем обозначения: $\Xi_i^{(s)} = \Xi_{il}^{(s)} \cup \Xi_{jr}^{(s)}$, $i = 1,\ldots,m$, $s = 1,\ldots,S$.

**Предположение 1.** Пусть $\Xi_{il}^{(s)} \neq \emptyset$, $\Xi_{ir}^{(s)} \neq \emptyset$ при всех $i = 1,\ldots,m$, $s = 1,\ldots,S$.

**Предположение 2.** Каждый $i$-й основной агент в каждый момент времени $t$ получает информацию о значении величины $x_i(t) - y_i(t-\tau)$, где $\tau > 0$ — постоянное запаздывание.

**Предположение 3.** Каждый $i$-й вспомогательный агент в каждый момент времени $t$ получает информацию о значениях величин $y_i(t) - x_j(t-\tau)$, $j \in \Xi_i^{(\sigma(t))}$.

**Предположение 4.** Каждому вспомогательному агенту известно, сколько основных агентов расположено между его основным агентом и теми агентами, от которых он получает информацию.

В данной работе доказано, что при выполнении предположений 1–4 для моделей (1) и (2) можно построить линейные децентрализованные протоколы, гарантирующие сходимость основных агентов к равномерному распределению на отрезке при любом постоянном запаздывании и любом допустимом законе переключения сетевой топологии.

Следует заметить, что в ряде практических задач вместо равномерного распределения агентов необходимо обеспечить нелинейно-равномерное (равномерное относительно некоторой функции) распределение [1]. Поэтому в докладе также исследуется случай, когда на прямой задана непрерывная и строго возрастающая функция $\omega(z)$. Пусть $\tilde{x} = (\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m)^\top$, где для величин $\tilde{x}_i$ выполнены условия

$$\omega(\tilde{x}_i) = \omega(\alpha) + \frac{(\omega(\beta) - \omega(\alpha))i}{m+1}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Таким образом, точки $\omega(\tilde{x}_1), \ldots, \omega(\tilde{x}_m)$ равномерно распределены на отрезке $[\omega(\alpha), \omega(\beta)]$. Теперь протоколы $u_i, v_i$ нужно выбрать так, чтобы при $t \to +\infty$ каждый $i$-й основной агент сходился к соответствующему положению $\tilde{x}_i$, $i = 1, \ldots, m$. В настоящей работе эта задача решена для моделей (1) и (2), причем доказана робастность предложенных протоколов по отношению к запаздываниям и переключениям.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00091, https://rscf.ru/project/24-21-00091/

1. Проблемы сетевого управления / Под ред. А. Л. Фрадкова. М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015.

2. *Wagner I.A., Bruckstein A.M.* Row straightening via local interactions // Circuits Syst. Signal Process. 1997. Vol. 16, no. 2. P. 287–305.

3. *Проскурников А.В., Парсегов С.Э.* Задача равномерного размещения на отрезке для агентов с моделью второго порядка // Автоматика и телемеханика. 2016. № 7. С. 152–165.

4. *Aleksandrov A., Fradkov A., Semenov A.* Delayed and switched control of formations on a line segment: Delays and switches do not matter // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 65, no. 2. P. 794–800.

5. *Aleksandrov A.* A problem of formation control on a line segment under protocols with communication delay // Systems Control Letters. 2021. Vol. 155. Art. no. 104990.

# К вопросу о применении квадратичных функций Ляпунова для исследования устойчивости систем с запаздыванием

**О. Г. Антоновская**
*Нижний Новгород, Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет*
e-mail: olga.antonovsckaja@yandex.ru

Наиболее общим методом исследования устойчивости является прямой метод Ляпунова (или метод функций Ляпунова). В задачах исследования устойчивости по первому приближению систем обыкновенных дифференциальных уравнений прямым методом Ляпунова широкое применение нашли функции Ляпунова в виде положительно определенных квадратичных форм. Столь же широкое применение квадратичные функции Ляпунова могут иметь и в задачах исследования систем с запаздыванием [1, 2].

В натоящем докладе предлагается использовать в качестве функции Ляпунова для системы с запаздыванием квадратичную функцию Ляпунова, построенную для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и удовлетворяющую ограничениям на ее первую производную в силу этой системы [3].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием вида

$$\dot{x} = F(x, x(t-\tau)), \quad x = (x_1, \dots, x_n)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$
$$x(t-\tau) = (x_1(t-\tau), \dots, x_n(t-\tau))^{\text{т}} \in \mathbb{R}^n,$$

где $F(x, x(t-\tau)) = (f_1(x_1, \dots, x_n, x_1(t-\tau), \dots, x_n(t-\tau)), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n, x_1(t-\tau), \dots, x_n(t-\tau)))^{\text{т}}$ — непрерывно дифференцируемые функции своих переменных, удовлетворяющие условию $F(0,0) = 0$, $\tau$ — постоянная величина.

Для того, чтобы положительно определенная квадратичная форма

$$V(x) = x^{\text{т}} K x \quad (K^{\text{т}} = K), \tag{2}$$

(элементы $n \times n$-матрицы $K = (K_{ij})_{ij=1}^{n}$ вещественные) удовлетворяла требованиям теоремы Разумихина [4] об асимптотической устойчивости для системы (1), достаточно [1, 2], чтобы она удовлетворяла требованиям теоремы Разумихина для системы первого приближения

$$\dot{x} = Ax + Bx(t-\tau), \tag{3}$$

где $A = (a_{ij})_{ij=1}^{n}$, $B = (b_{ij})_{ij=1}^{n}$, причем $a_{ij} = \partial f_i/\partial x_j, b_{ij} = \partial f_i/\partial x_j(t-\tau)$ при $x_1 = \ldots = x_n = x_1(t-\tau) = \ldots = x_n(t-\tau) = 0$. То есть должно выполняться условие $\dot{V}(x, x(t-\tau)) < 0$ при $V(x(t-\tau)) \leq V(x)$, или, что то же самое,

$$x^{\text{т}}(A^{\text{т}}K + KA)x + x^{\text{т}}(t-\tau)B^{\text{т}}Kx + x^{\text{т}}KBx(t-\tau) < 0$$

при $x^{\text{т}}(t-\tau)Kx(t-\tau) \leq x^{\text{т}}Kx$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений без запаздывания

$$\dot{x} = Ax. \tag{4}$$

Будем предполагать, что собственные значения матрицы системы имеют отрицательные действительные части, т.е. состояние равновесия системы без запаздывания асимптотически устойчиво. В работе [3] доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть квадратичная форма* (2) *является функцией Ляпунова системы* (4), *и на заданной поверхности уровня* $V(x) = V_0 = \text{const} > 0$ *функции* $V(x)$ *максимальное значение ее первой производной в силу системы* (4) *равно* $\delta V_0$. *Тогда для собственных значений* $\lambda_i$, $i = \overline{1,n}$, *матрицы коэффициентов системы* (4) *справедливо неравенство* $2\max\limits_{i=\overline{1,n}} \operatorname{Re}\lambda_i \leqslant \delta < 0$, *а коэффициенты квадратичной формы* (2) *удовлетворяют равенству*

$$\det(A^{m}K + KA - \mu K) = 0, \tag{5}$$

*в котором* $\mu = \delta$.

Пусть квадратичная форма (2) выбрана в соответствии с требованиями теоремы 1 ($\mu = \delta$). Наряду с уравнением (5) рассмотрим также уравнение

$$\det(B^{\text{т}}K + KB - \mu K) = 0. \tag{6}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть $\delta$ есть наибольший корень уравнения* (5), *а $\tilde{\delta}$ — наибольший корень уравнения* (6). *Если $\delta + \tilde{\delta} < 0$, то квадратичную форму* (2) *с коэффициентами, выбранными в силу* (5), *можно использовать как функцию Ляпунова при исследовании системы с запаздыванием* (3).

1. *Разумихин Б.С.* Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21, № 6. С. 740–748.

2. *Горбунов А.В., Каменецкий В.А.* Метод функций Ляпунова при построении областей притяжения систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2005. № 10. С. 42–53.

3. *Антоновская О.Г.* О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 9. С. 1220–1224.

4. *Разумихин Б.С.* Устойчивость эредитарных систем. М.: Наука, 1988.

# Точные решения и анализ Пенлеве неклассического уравнения в частных производных третьего порядка

**А. И. Аристов**

*Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, ФИЦ «Информатика и управление» РАН, МИРЭА – Российский технологический университет*

e-mail: ai_aristov@mail.ru

Статья посвящена построению точных решений следующего уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + (\lambda; \nabla)u + u(\mu; \nabla u) + \Delta u = 0,$$

где $u$ зависит от пространственной переменной $x \in R^N$ и времени $t \geqslant 0$. Параметры $\lambda \in R^N$ и $\mu \in R^N$ постоянны. Под $(\lambda; \nabla)$

подразумевается оператор

$$(\lambda; \nabla) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

Уравнение может использоваться для моделирования нестационарных процессов в полупроводниковой среде.

Качественной теории уравнений соболевского типа, содержащих суперпозицию дифференцирования по времени и лапласиана, посвящены обширные исследования. В [1] исследованы асимптотики решений задач Коши для многих нелинейных уравнений (и классических, и соболевских), предложена их классификация. В [2, 3] рассмотрены разнообразные начально-краевые задачи для нелинейных уравнений соболевского типа, получены результаты об их однозначной разрешимости и разрушении решения (или отсутствии разрушения). Под разрушением понимается разрешимость задачи на конечном промежутке времени при отсутствии решения на всём луче $t > 0$. С другой стороны, в известной автору литературе о точных решениях (например, [4, 5, 6]) уравнения соболевского типа встречаются редко.

В данной работе построено и проанализировано семь классов точных решений указанного уравнения. В одном из случаев решения выражены через решения обыкновенного дифференциального уравнения, для которого проведён анализ Пенлеве.

А именно, получены следующие результаты. Через $c$ обозначим произвольную действительную постоянную, через $\alpha$ — произвольный постоянный $N$-мерный вектор.

- Во-первых,
  $$u(x;t) = -\frac{6}{25m} \frac{c^2 e^{-2z/5}}{\left(1 - ce^{-z/5}\right)^2}$$
  при условии $l = 6/25$. Здесь $z = (\alpha; x) + t$, $l = (\lambda; \alpha)/(\alpha; \alpha)$, $m = (\mu; \alpha)/(2(\alpha; \alpha))$.

- Во-вторых, имеет место более общее утверждение. Уравнение имеет решение $u(x;t) = f(z)$, где функция $f(\cdot)$ определяется уравнением
  $$f'' + f' + lf + mf^2 = c.$$

Оно проходит тест Пенлеве тогда и только тогда, когда

$$c = \frac{36 - 625l^2}{2500m}.$$

В этом случае

$$f = -\frac{6}{m}(z - z_0)^{-2} + \sum_{n=1}^{6} A_n(z - z_0)^{n-2} + O((z - z_0)^5),$$

при $z \to z_0$. Коэффициенты $A_{1;2;3;4;5}$ можно определить однозначно, тогда как постоянные $A_6$ и $z_0$ произвольны.

- В-третьих, получены решения в виде произведения элементарных функций только от $z$ и только от $t$, где $z = (\alpha; x)$, $|\alpha| = 1$.

- В-четвёртых, если $l = 0$, то $u = e^{qt}w(ze^{qt})$, где $z = (\alpha; x)$, $|\alpha| = 1$, а функция $w(\cdot)$ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением с двумя произвольными параметрами.

- В-пятых,

  $$u = \frac{T(z)}{ce^t - m} - \frac{l}{2m},$$

  где $z = (\alpha; x)$, $|\alpha| = 1$, а функция $T(\cdot)$ — произвольный элемент объединения трёх классов элементарных функций.

- В-шестых, когда простанственная переменная является двумерной, то есть $u = u(x; y; t)$, то

  $$u = c\left(\frac{x}{\mu_1} - \frac{y}{\mu_2}\right) + h(t)$$

  с произвольной функцией $h(\cdot)$ (при условии $\lambda_1/\mu_1 = \lambda_2/\mu_2$).

- В-седьмых, если пространственная переменная двумерна, то есть $u = u(x; y; t)$, то

  $$u = ce^{M(\mu_2 x - \mu_1 y)} + g(t),$$

  где $M = (\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2)/(\mu_1^2 + \mu_2^2)$, а $g(\cdot)$ — произвольныя функция.

Можно показать, что среди построенных решений имеются как разрушающиеся за конечное время, так и ограниченные глобально по времени при любом фиксированном значении пространственной переменной.


1. *Hayashi N., Kaikina E., Naumkin P., and Shishmarev I.* Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations. Berlin–Heidelberg: Springer, 2006.
2. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
3. *Корпусов М.О.* Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М.: УРСС, 2010.
4. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
5. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2002.
6. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2010.


# Об асимптотических свойствах решений линейного автономного дифференциального уравнения с двумя запаздываниями


**А. С. Баландин**

*Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

e-mail: balandin-anton@yandex.ru


Рассмотрим дифференциальное уравнение с двумя запаздываниями

$$\dot{x}(t) + b_1 x(t-1) + b_2 x(t-2) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. При отрицательных значениях аргумента доопределим $x$ начальной функцией.

Перенесём начальную функцию в правую часть $\sigma(t)$ и получим

$$\dot{x}(t) + b_1 x(t-1) + b_2 x(t-2) = \sigma(t), \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $x(\xi) = 0$ при $\xi < 0$. Как известно [1, с. 84], уравнение (2) с заданным начальным условием $x(0)$ однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций и его решение представимо в виде:

$$x(t) = x_0(t)x(0) + \int_0^{\min\{t,2\}} x_0(t-s)\sigma(s)\,ds, \tag{3}$$

где $x_0$ — *фундаментальное решение*. В силу (3) асимптотическое поведение любого решения уравнений (1) и (2) полностью определяется асимптотическими свойствами функции $x_0$, исследование которых сводится к изучению расположения нулей характеристической функции $g$ на комплексной плоскости: $g(p) = p + b_1 e^{-p} + b_2 e^{-2p}, \quad p \in \mathbb{C}$.

**Определение 1.** Уравнение (1) называется *экспоненциально устойчивым*, если найдутся $N, \alpha > 0$, такие что для любого $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство $|x_0(t)| \leqslant Ne^{-\alpha t}$.

Для (1) построена область экспоненциальной устойчивости. Обозначим через $D$ область, ограниченную прямой $u_2 = -u_1$ и кривой $\Gamma$, заданной параметрически:

$$\Gamma = \left\{(u_1, u_2) \colon u_1 = -\tfrac{\theta \cos 2\theta}{\sin \theta}, u_2 = \theta \operatorname{ctg} \theta, \theta \in \left[0, \tfrac{2\pi}{3}\right]\right\}.$$

**Теорема 1.** *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда все нули функции $g$ лежат слева от мнимой оси.*

2. *Уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда $\{b_1, b_2\} \in D$.*

**Определение 2.** Будем называть определённую на положительной полуоси непрерывную функцию *осциллирующей*, если она имеет на положительной полуоси неограниченную справа последовательность нулей.

**Определение 3.** Уравнение (1) назовём *осциллирующим*, если все его решения осциллируют.

Введём функцию $u_2 = \varphi(u_1)$, заданную параметрически

$$u_1 = -(1+2\zeta)e^{\zeta}, \quad u_2 = (1+\zeta)e^{2\zeta}, \quad \zeta \geqslant -1.$$

**Теорема 2.** *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Уравнение* (1) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда функция $g$ не имеет вещественных корней.*

2. *Уравнение* (1) *осциллирующее тогда и только тогда, когда*

$$(b_1, b_2) \in \{(u_1, u_2)\colon u_2 > \varphi(u_1), u_1 \leqslant 1/e\} \cup \\ \cup \{(u_1, u_2)\colon u_2 \geqslant 0, u_1 > 1/e\}.$$

Пункт 1 теоремы 2 доказан в работе [2], пункт 2 — в работе [3].

Пусть уравнение (1) не является осциллирующим, то есть функция $g$ имеет хотя бы один вещественный корень. Если при этом $b_2 \geqslant 0$ и $(b_1, b_2) \in D$, то фундаментальное решение положительно и, более того, имеет двустороннюю экспоненциальную оценку, в которой показатели экспонент и коэффициенты являются точными и легко вычисляемыми.

**Теорема 3** ([4]). *Пусть $b_2 \geqslant 0$, $-\omega$ — наибольший вещественный корень функции $g$, $\omega > 0$ и $g'(-\omega) \neq 0$. Тогда фундаментальное решение уравнения* (1) *имеет двустороннюю оценку*

$$e^{-\omega t} \leqslant x_0(t) < \frac{1}{g'(-\omega)} e^{-\omega t}, \quad t \geqslant 0.$$

Случай $b_2 < 0$ сложнее. Введём функцию

$$u_2 = \psi_1(u_1) = \begin{cases} -u_1 & \text{при } u_1 \leqslant -1 \text{ или } u_1 \in (1/e, 1), \\ \varphi(u_1) & \text{при } u_1 \in (-1, 1/e]. \end{cases}$$

Определим через $P_1$ множество, которому принадлежат точки $(u_1, u_2)$ такие, что $u_2 \leqslant \psi_1(u_1)$.

**Теорема 4.** *Если* $(b_1, b_2) \in P_1$, *то фундаментальное решение* $x_0$ *уравнения* (1) *положительно на* $\mathbb{R}_+$.

Введём функцию $u_2 = \upsilon(u_1)$, заданную параметрически:

$$u_1 = e^{-\frac{\zeta}{2}\left(2\operatorname{ctg}\zeta + \frac{1}{\sin\zeta}\right)}\zeta\operatorname{ctg}\frac{\zeta}{2},$$
$$u_2 = -e^{-\zeta\left(2\operatorname{ctg}\zeta + \frac{1}{\sin\zeta}\right)}\frac{\zeta}{2\sin\zeta}, \quad \zeta \in [0, \pi).$$

Функцию $\varphi$ продолжим при $\zeta \in (-3/2, -1)$. Определим функцию

$$u_2 = \psi_2(u_1) = \begin{cases} \varphi(u_1) & \text{при } u_1 \in (1/e, 2e^{-3/2}], \\ \upsilon(u_1) & \text{при } u_1 \geqslant 2e^{-3/2}. \end{cases}$$

Определим через $P_2$ множество, которому принадлежат точки $(u_1, u_2)$ такие, что $u_2 < \psi_2(u_1)$.

**Теорема 5.** *Если* $(b_1, b_2) \in P_2$, *то найдётся такое* $t_0 \geqslant 0$, *что фундаментальное решение* $x_0$ *уравнения* (1) *положительно при* $t \geqslant t_0$.

**Теорема 6.** *Если* $b_2 > \psi_2(u_1)$, *то фундаментальное решение* $x_0$ *уравнения* (1) *осциллирует.*

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № FSNM-2023-0005.

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

2. *Györi I.,Ladas G.* Oscillation theory of delay differential equations with applications. Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991.

3. *Малыгина В.В.* О построении области осцилляции автономных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Сборник трудов VIII Международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» (ПМТУКТ-2015), 21 – 26 сентября 2015 г. Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2015. С. 223–225.

4. *Malygina V., Sabatulina T.* On estimates of solutions to autonomous differential equations with aftereffect and coefficients of different signs // Functional Differential Equations. 2024. Vol. 31, no. 3–4. P. 191–203.

# Два примера многомерных автономных дифференциальных систем с контрастными сочетаниями свойств устойчивости и неустойчивости разных типов

**А. А. Бондарев**
*Москва, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*
e-mail: albondarev1998@yandex.ru

Доклад посвящен исследованию реализуемости на дифференциальных системах сочетаний контрастирующих друг с другом свойств устойчивости и неустойчивости трех типов: ляпуновского и недавно введенных перроновского [1] и верхнепредельного [2].

Некоторые результаты исследований таких сочетаний для неавтономных систем представлены в работе [3].

В настоящем же докладе представлены примеры, реализующие еще некоторые сочетания подобных свойств, но уже на автономных системах (так сказать, автономные аналоги систем из работы [3], нереализуемых в автономном случае).

Для произвольного числа $n \in \mathbb{N}$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $|\cdot|$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с правой частью $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям

$$f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n), \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Положим

$$\mathring{B}_\rho \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x_0| \leqslant \rho\}, \quad \rho > 0,$$

и для каждого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ через $x(\cdot, x_0)$ обозначим непродолжаемое решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(0, x_0) = x_0$.

**Определение 1.** Скажем, что у системы (1) (точнее, у ее нулевого решения) имеется *ляпуновская, перроновская* или *верхнепредельная* (отмечены ниже индексом $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ соответственно):

1) *устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое начальное значение $x_0 \in \mathring{B}_\delta$ удовлетворяет соответственно требованию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \varliminf_{t \to +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \varlimsup_{t \to +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon; \quad (2)$$

2) *асимптотическая устойчивость*, если: в *перроновском* и *верхнепредельном* случаях — существует такое $\delta > 0$, что каждое начальное значение $x_0 \in \mathring{B}_\delta$ удовлетворяет соответственно требованию

$$\varliminf_{t \to +\infty} |x(t, x_0)| = 0 \quad \text{или} \quad \varlimsup_{t \to +\infty} |x(t, x_0)| = 0, \qquad (3)$$

а в ляпуновском — система обладает ляпуновской устойчивостью и верхнепредельной асимптотической устойчивостью;

3) *$\mu$-устойчивость* при данном значении $\mu \in [0, 1]$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при каждом $\rho \in (0, \delta)$ *относительная мера (Лебега)* mes в шаре $\mathring{B}_\rho$ его подмножества $M_\varkappa(f, \varepsilon, \rho)$ всех значений $x_0 \in \mathring{B}_\rho$, удовлетворяющих требованию (2), не меньше $\mu$, т.е.

$$\operatorname{mes} M_\varkappa(f, \varepsilon, \rho) / \operatorname{mes} \mathring{B}_\rho \geqslant \mu;$$

4) *$\nu$-неустойчивость* при данном значении $\nu \in [0, 1]$, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что при каждом $\rho \in (0, \delta)$ относительная мера в шаре $\mathring{B}_\rho$ его подмножества $N_\varkappa(f, \varepsilon, \rho)$ всех значений $x_0 \in \mathring{B}_\rho$, не удовлетворяющих требованию (2), не меньше $\nu$.

**Замечание 1.** Подчеркнем, что требования (2) и (3) в определении 1 считаются не выполненными для значения $x_0$, в частности, уже в том случае, когда решение $x(\cdot, x_0)$ определено не на всей полуоси $\mathbb{R}_+$.

**Определение 2.** Также будем говорить, что у системы (1) имеется *перроновская* или *верхнепредельная*:

5) *массивная частная устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое начальное значение $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \mathring{B}_\delta$ удовлетворяет соответственно второму или третьему требованию (2);

6) *глобальная устойчивость*, если каждое начальное значение $x_0 \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет соответствующему требованию (3).

**Определение 3.** Для системы (1) при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ назовем *ляпуновской, перроновской* или *верхнепредельной* соответственно:

а) *мерой устойчивости* такое число $\mu_\varkappa(f) \in [0, 1]$, что для каждого $\mu \in [0, \mu_\varkappa(f))$ имеет место $\mu$-устойчивость, а для $\mu \in (\mu_\varkappa(f), 1]$ — нет;

б) *мерой неустойчивости* такое число $\nu_\varkappa(f) \in [0, 1]$, что для каждого $\nu \in [0, \nu_\varkappa(f))$ имеет место $\nu$-неустойчивость, а для $\nu \in (\nu_\varkappa(f), 1]$ — нет.

**Теорема 1.** *Для каждого $n > 1$ существует автономная система (1), которая имеет правую часть $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую условию $f'(0) = 0$, а также обладает следующими двумя свойствами:*

*1) каждое начальное значение $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \mathring{B}_1$ удовлетворяет второму равенству (3);*

*2) для мер устойчивости и неустойчивости системы выполнены равенства*

$$0 = \mu_\varkappa(f) < \nu_\varkappa(f) = 1, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma.$$

**Теорема 2.** *Для каждого $n > 1$ существует автономная система (1), которая имеет правую часть $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую условию $f'(0) = 0$, а также обладает следующими двумя свойствами:*

*1) каждое начальное значение $x_0 \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет второму равенству (3);*

*2) для мер устойчивости и неустойчивости системы выполнены равенства*

$$\begin{aligned} 0 = \mu_\lambda(f) < \mu_\pi(f) = \mu_\sigma(f) = 1, \\ 0 = \nu_\pi(f) = \nu_\sigma(f) < \nu_\lambda(f) = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

**Замечание 2.** Обе системы, представленные в теоремах 1 и 2, *неодномерны.* Более того, при $n = 1$ существование двух начальных значений разных знаков, удовлетворяющих второму равенству (3), эквивалентно [4, теорема 29] наличию у системы асимптотической устойчивости (как перроновской, так и верхнепредельной), а значит, одномерных примеров с такими наборами свойств не существует.

Исследование выполнено при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС», проект № 22-8-10-3-1.

1. *Сергеев И.Н.* Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 636–646.
2. *Сергеев И.Н.* Определение верхнепредельной устойчивости и ее связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 11. С. 1556–1557.
3. *Бондарев А.А.* Два контрастных примера многомерных дифференциальных систем с ляпуновской крайней неустойчивостью // Мат. заметки. 2024. Т. 115, № 1. С. 24–42.
4. *Сергеев И.Н.* О перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойствах устойчивости дифференциальных систем // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2023. Т. 33. С. 353–423.

# Многоточечная краевая задача для нелинейного уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий

**А. Н. Бондарев**
*Могилёв, Белорусско-Российский университет*
e-mail: alex-bondarev@tut.by

Рассматривается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t, X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad t \in I, \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $A$, $B \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in C(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0, \omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t, X)\colon t \in I,\ \|X\| < \tilde\rho\}$; $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \leqslant \infty$, $M_i$ — вещественные постоянные $n \times n$-матрицы. Предполагается, что нелинейная функция $F(t, X)$ удовлетворяет в области $D_{\tilde\rho}$ условию Липшица относительно $X$ (локально), при этом $F(t, 0) \not\equiv 0$.

Работа является продолжением [1] и развитием [2, 3]. Изучается случай сильного вырождения краевых условий [2]:

$$M = \sum_{i=1}^{k} M_i = 0. \tag{3}$$

С помощью метода [4] исследуются вопросы разрешимости и построения решения задачи (1), (2) в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций с нормой $\|X\|_C = \max\limits_{t\in I} \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ — определенная норма матриц в этой алгебре.

Обозначения:

$$D_\rho = \{(t, X)\colon t \in I, \|X\| \leqslant \rho\},\ \Phi = \sum_{j=1}^{k-1} M_j \int\limits_{t_j}^{t_k} A(\tau) d\tau,\ \gamma = \|\Phi^{-1}\|,$$

$$\alpha = \max_{t\in I} \|A(t)\|,\ \beta = \max_{t\in I} \|B(t)\|,\ h = \max_{t\in I} \|F(t, 0)\|,\ m_i = \|M_i\|,$$

$$\tilde m = \sum_{j=1}^{k-1} m_j, \quad \varphi_j = \frac{1}{2}\left[(t_k - t_1)^2 + (t_j - t_1)^2 + (t_k - t_j)^2\right],$$

$$q = \gamma \sum_{j=1}^{k-1} m_j [\alpha(\alpha + \beta + L)\varphi_j + (\beta + L)(t_k - t_j)],$$

$$N = \gamma h \sum_{j=1}^{k-1} m_j [\alpha\varphi_j + (t_k - t_j)],$$

где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $L = L(\rho)$ — постоянная Липшица относительно $X$ функции $F(t, X)$ для области $D_\rho$.

Установлено, что при выполнении условия $\det \Phi \neq 0$ задача (1), (2) эквивалентна интегральной задаче

$$X(t) = \Phi^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} M_j \left[ \int_{t_j}^{t} \int_{t_j}^{\tau} A(\sigma) d\sigma (A(\tau) X(\tau) + X(\tau) B(\tau) + \right.$$

$$+ F(\tau, X(\tau))) d\tau - \int_{t}^{t_k} \int_{\tau}^{t_k} A(\sigma) d\sigma (A(\tau) X(\tau) + X(\tau) B(\tau) + \qquad (4)$$

$$\left. + F(\tau, X(\tau))) d\tau - \int_{t_j}^{t_k} (X(\tau) B(\tau) + F(\tau, X(\tau))) d\tau \right].$$

**Теорема.** *Пусть выполнено условие* (3), *а также* $\det \Phi \neq 0$, $q < 1$, $\frac{N}{1-q} \leqslant \rho$. *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима в области* $D_\rho$; *ее решение* $X = X(t)$ *представимо как предел равномерно сходящейся к решению уравнения* (4) *последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением*

$$X_{p+1}(t) = \Phi^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} M_j \times$$

$$\times \left[ \int_{t_j}^{t} \int_{t_j}^{\tau} A(\sigma) d\sigma (A(\tau) X_p(\tau) + X_{p-1}(\tau) B(\tau) + F(\tau, X_{p-1}(\tau))) d\tau - \right.$$

$$- \int_{t}^{t_k} \int_{\tau}^{t_k} A(\sigma) d\sigma (A(\tau) X_p(\tau) + X_{p-1}(\tau) B(\tau) + F(\tau, X_{p-1}(\tau))) d\tau -$$

$$\left. - \int_{t_j}^{t_k} (X_p(\tau) B(\tau) + F(\tau, X_p(\tau))) d\tau \right], \quad p = 1, 2, \ldots, \qquad (5)$$

$$X_0 = 0, \quad X_1 = -\Phi^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} M_j \int\limits_{t_j}^{t_k} F(\tau, 0) d\tau,$$

*и удовлетворяющих условию* (2)*, при этом справедлива оценка*

$$\|X\|_C \leqslant \frac{N}{1-q}.$$

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (5), при этом получена рекуррентная оценка

$$\|X_{p+2} - X_{p+1}\|_C \leqslant q_1 \|X_{p+1} - X_p\|_C + q_2 \|X_p - X_{p-1}\|_C, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

где

$$q_1 = \gamma \sum_{j=1}^{k-1} m_j \left[\alpha^2 \varphi_j + (\beta + L)(t_k - t_j)\right], \quad q_2 = \gamma \alpha (\beta + L) \sum_{j=1}^{k-1} m_j \varphi_j.$$

Заметим, что $q_1 + q_2 = q$.


1. *Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н.* Анализ многоточечной краевой задачи для нелинейного матричного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 12. С. 1591–1598.

2. *Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н.* Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 6. С. 776–784.

3. *Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н.* Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 423–427.

4. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.

# О разрешимости одной нелокальной краевой задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка

**Е. И. Бравый**
*Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический университет*
e-mail: bravyi@perm.ru

Для функционально-дифференциального уравнения

$$u''(x) = (Tu)(x) + f(x), \quad x \in [0, 1], \tag{1}$$

где $T\colon \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ — линейный ограниченный оператор и $f \in \mathbf{L}[0,1]$, рассматривается краевая задача

$$u'(0) = 0, \tag{2}$$

$$u'(1) = \alpha u(0). \tag{3}$$

Этой задаче удовлетворяет стационарное состояние нагретого стержня в модели теплопроводности, которая описывается уравнением (1). Краевое условие (2) соответствует изолированности стержня на левом конце $x = 0$. Нелокальное краевое условие (3) означает, что тепловой поток на правом конце стержня при $x = 1$ определяется специальным контроллером (термостатом) и с коэффициентом $\alpha \in \mathbb{R}$ пропорционален температуре, измеренной датчиком на левом конце стержня при $x = 0$. Нестационарная постановка линейной задачи теплопроводности с нелокальным краевым условием (3), по-видимому, впервые изучалась в работах [1, 2]. В последние годы появилось множество работ, посвященных задаче (1) – (3) в случае, когда оператор $T$ — оператор Немыцкого [3, 4, 5]. Рассматриваются также и обобщения этих моделей, в частности, модели с дробными производными [6, 7] и с функциональным оператором $T$ [8]. В этих работах для классических и обобщенных моделей найдены условия существования положительного решения задачи (1) – (3).

Здесь задача (1)–(3) рассмотрена для семейств монотонных операторов $T$ с заданной нормой. Мы рассматриваем такие линейные операторы $T$, что или $T$, или $-T$ является положительным, то есть отображает неотрицательные функции в почти всюду неотрицательные. Норма такого оператора $T$ определена равенством $\|T\|_{\mathbb{C}\to\mathbb{L}} = \int_0^1 |(T\mathbf{1})(s)|ds$, где $\mathbf{1}$ — единичная функция.

**Теорема 1.** *Краевая задача* (1)–(3) *имеет единственное решение при всех положительных операторах $T$ с заданной нормой $\mathcal{T}^+$ тогда и только тогда, когда либо выполнены неравенства*

$$0 \le \mathcal{T}^+ \le \begin{cases} 4 + \dfrac{1}{\alpha}, & \text{если } \alpha \le -1/2, \\ \dfrac{1}{1+\alpha}, & \text{если } \alpha > -1/2, \end{cases} \tag{4}$$

*или выполнены неравенсвтва*

$$\alpha \ge \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{\alpha} \le \mathcal{T}^+ \le \begin{cases} 4 + 8(\sqrt{\alpha(1+\alpha)} + \alpha), & \text{если } \alpha \in \left[\frac{1}{8}, \alpha_1\right], \\ 4 + \dfrac{1}{\alpha}, & \text{если } \alpha > \alpha_1, \end{cases} \tag{5}$$

*где*

$$\alpha_1 = \frac{q}{24} + \frac{6}{q} - \frac{1}{12} \approx 0,19, \quad q = (100 + 12\sqrt{69})^{1/3}.$$

**Теорема 2.** *Краевая задача* (1)–(3) *имеет единственное решение при всех таких линейных операторах $T$, что $-T$ — положительный оператор с нормой $\mathcal{T}^-$, тогда и только тогда, когда либо выполнены неравенства*

$$0 \le \mathcal{T}^- \le \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha}, & \text{если } \alpha \le -\frac{1}{4}, \\ 16\alpha + 8, & \text{если } -\frac{1}{4} < \alpha \le \alpha_2, \\ 2 + 2\sqrt{1 + \dfrac{1}{\alpha}}, & \text{если } \alpha > \alpha_2, \end{cases} \tag{6}$$

*где*

$$\alpha_2 = \frac{p}{24} + \frac{1}{2p} - \frac{1}{4} \approx 0,08, \quad p = (108 + 12\sqrt{69})^{1/3},$$

*или выполнены неравенства*

$$\alpha \le -\frac{4}{3}, \quad -\frac{1}{1+\alpha} \le \mathcal{T}^- \le 2 + 2\sqrt{1+\frac{1}{\alpha}}. \tag{7}$$

Сформулируем один из результатов о сохранении знака решений.

**Теорема 3.** *Пусть* $\alpha > 1/2$ *и выполнены условия теоремы* 1*. Тогда все решения задачи* (1) – (3) *сохраняют знак при всех неотрицательных функциях* $f \in \mathbb{L}[0,1]$*, удовлетворяющих условию*

$$\mu \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in[0,1]} f(x) \le \operatorname*{vrai\,inf}_{x\in[0,1]} f(x),$$

*где* $\mu \in [0,1]$*, тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{T}^+ \le 1 + \sqrt{\mu}. \tag{8}$$

*При этом, если выполнены условия* (4)*, то решения неотрицательны, если выполнены условия* (5)*, то решения неположительны.*

Все условия (4) – (8) неулучшаемы. Если они не выполнены, то найдется соответствующий оператор $T$ с данной нормой, для которого исследуемое свойство не выполнено.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № FSNM-2023-0005.

1. *Guidotti P., Merino S.* Hopf bifurcation in a scalar reaction diffusion equation // Journal of Differential Equations. 1997. Vol. 140, no. 1. P. 209–222.

2. *Guidotti P., Merino S.* Gradual loss of positivity and hidden invariant cones in a scalar heat equation // Differential and Integral Equations. 2000. Vol. 13, no. 10–12. P. 1551–1568.

3. *Webb J.R.L.* Optimal constants in a nonlocal boundary value problem // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2005. Vol. 63, no. 5–7. P. 672–685.

4. *Webb J. R. L., Infante G.* Positive solutions of nonlocal boundary value problems: a unified approach // Journal of the London Mathematical Society. 2006. Vol. 74, no. 3. P. 673–693.

5. *Webb J.R.L.* Existence of positive solutions for a thermostat model // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2012. Vol. 13. P. 923–938.

6. *Nieto J.J., Pimentel J.* Positive solutions of a fractional thermostat model // Boundary Value Problems. 2013. 2013:5. 11 pp.

7. *Shen C., Zhou H., Yang L.* Existence of positive solutions of a nonlinear differential equation for a thermostat model // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2018. Vol. 41, no. 16. P. 6145–6154.

8. *Calamai A., Infante G.* Nontrivial Solutions of a Parameter-Dependent Heat-Flow Problem with Deviated Arguments // Topological Methods for Delay and Ordinary Differential Equations: With Applications to Continuum Mechanics. Cham: Springer International Publishing, 2024. P. 141–150.

# Об эллиптической задаче в пространстве различной гладкости по переменным

**А. В. Васильев, В. Б. Васильев, И. О. Шмаль**

*Белгород, Белгородский государственный национальный исследовательский университет*
e-mail: alexvassel@gmail.com, vbv57@inbox.ru, 124797@bsuedu.ru

Обозначив $s = (s_1, s_2)$ и определим пространство Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^3)$ как гильбертово пространство с нормой

$$\|f\|_s = \left( \int\limits_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi'|)^{2s_1} (1 + |\xi_3|)^{s_2} \tilde{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \quad \xi' = (\xi_1, \xi_2).$$

Псевдодифференциальный оператор $A$ определяется формулой

$$(Au)(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{i(x-y)\cdot\xi} \tilde{A}(\xi) u(y)\, dy\, d\xi,$$

и заданная измеримая функция $\tilde{A}(\xi)$ называется символом оператора $A$.

Здесь рассматривается специальная краевая задача, связанная с уравнением

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in C, \tag{1}$$

когда по части переменных не требуется задания граничных условий. Пусть $C \subset \mathbb{R}^3$ — трехгранный угол вида $C = C_2 \times C_1$, где $C_2$ — плоский сектор $\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x = (x_1, x_2, x_3), x_2 > a|x_1|, a > 0,\ x_3 = 0\}$, $C_1$ — положительная полуось $\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x = (x_1, x_2, x_3), x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 > 0\}$. Предполагается, что символ удовлетворяет условию

$$|\tilde{A}(\xi)| \sim (1 + |\xi'|)^{\alpha_1}(1 + |x_3|)^{\alpha_2}, \quad \xi' = (\xi_1, \xi_2),$$

и имеет разные порядки по двум группам переменных, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Решение ищется в пространстве $H^s(C)$, правая часть из пространства $H_0^{s-\alpha}(C)$ [1, 2].

*Радиальной трубчатой областью над конусом* $C$ называется область в многомерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$ следующего вида:

$$T(C) \equiv \{z \in \mathbb{C}^3 \colon z = x + iy,\ x \in \mathbb{R}^3,\ y \in C\}.$$

*Сопряженным конусом* $\overset{*}{C}$ называется такой конус, для всех точек которого выполняется условие

$$x \cdot y > 0, \quad \forall y \in C,$$

$x \cdot y$ обозначает скалярное произведение $x$ и $y$.

**Определение.** *Волновой факторизацией* эллиптического символа $\tilde{A}(\xi)$ относительно конуса $C$ называется его представление в виде $\tilde{A}(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$, где множители $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ должны удовлетворять следующим условиям:

1. $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ определены для всех $\xi \in \mathbb{R}^3$, исключая, возможно, точки $\xi \in \partial \overset{*}{C}$;

2. $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области $T(\overset{*}{C}), T(-\overset{*}{C})$ соответственно, которые удовлетворяют оценкам

$$|A_{\neq}(\xi + i\tau)| \sim (1 + |\xi'| + |\tau'|)^{æ_1}(1 + |\xi_3| + |\tau_3|)^{æ_2},$$

$$|A_{=}(\xi - i\tau)| \sim (1 + |\xi'| + |\tau'|)^{\alpha_1 - æ_1}(1 + |\xi_3| + |\tau_3|)^{\alpha_2 - æ_2},$$

$$\forall \tau = (\tau', \tau_3) \in \overset{*}{C}, \quad æ_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Вектор $æ = (æ_1, æ_2)$ называется *индексом волновой факторизации.*

Выберем граничные условия в форме Дирихле на двух гранях

$$u|_{ax_1 - x_2 = 0} = g_1(ax_1 + x_2, x_3), \quad u|_{ax_1 + x_2 = 0} = g_1(ax_1 - x_2, x_3) \quad (2)$$

и рассмотрим краевую задачу $(1), (2)$.

Введем систему линейных интегральных уравнений

$$\begin{gathered} a_1(t_2, \xi_3)\tilde{C}(t_2, \xi_3) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a(t_1, t_2, \xi_3)\tilde{D}(t_1, \xi_3)dt_1 = \\ = \tilde{g}_1(t_2, \xi_3) - \tilde{f}_1(t_2, \xi_3), \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a(t_1, t_2, \xi_3)\tilde{C}(t_2)dt_2 + a_2(t_1, \xi_3)\tilde{D}(t_1, \xi_3) = \\ = \tilde{g}_2(t_1, \xi_3) - \tilde{f}_2(t_1, \xi_3), \end{gathered} \qquad (3)$$

относительно двух неизвестных функций $\tilde{C}, \tilde{D}$, где коэффициенты, ядра и правые части уравнений определяются по сомножителям волновой факторизации и правым частям уравнения (1) и граничных условий (2).

Система (3) — система с параметром $\xi_3$, причем все компоненты уравнений (3) допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость по переменной $\xi_3$.

**Теорема.** *Пусть $s_1 > 1/2$ и символ $\tilde{A}(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно $C$ с индексом $æ = (æ_1, æ_2)$ таким, что $1/2 < æ_1 - s_1 < 3/2$, $-1/2 < æ_2 - s_2 < 1/2$, $g_{1,2} \in H^{s'}(\mathbb{R}^2_+)$, $s' = (s_1 - 1/2, s_2)$, $v \in H_0^{s-\alpha}(C)$. Тогда однозначная разрешимость краевой задачи (1), (2) в пространстве $H^s(C)$ эквивалентна однозначной разрешимости системы линейных интегральных уравнений (3) относительно неизвестных функций $\tilde{C}, \tilde{D}$.*

Отметим, что аналог этой теоремы с другими значениями индекса волновой факторизации был рассмотрен в работе [3].

1. *Vasil'ev V.B.* Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

2. *Васильев В.Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: УРСС, 2010.

3. *Васильев А.В., Васильев В.Б.* Эллиптические задачи и интегральные уравнения в пространствах различной гладкости по переменным // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 6. С. 735–745.

# О некоторых свойствах топологической энтропии непрерывных отображений множества Кантора

**А. Н. Ветохин**
*Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова*
e-mail: anveto27@yandex.ru

Следуя [1], приведем используемое в дальнейшем определение топологической энтропии [2]. Пусть $d$ — метрика на $X$, для непрерывного отображения $f\colon X \to X$ определим на $X$ дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x,y) = \max_{0\le i\le n-1} d(f^i(x), f^i(y)),$$

$$(f^i \equiv \underbrace{f\circ\dots\circ f}_{i},\ f^0\equiv \mathrm{id}_X), \quad x,\, y\in X,\, n\in\mathbb{N}.$$

Для каждых $n\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon>0$ обозначим через $N_d(f,\varepsilon,n)$ — максимальное количество точек в $X$, попарные $d_n^f$-расстояния между которыми больше, чем $\varepsilon$. Тогда *топологическая энтропия* динамической системы $(X,\ f)$ определяется формулой

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(f,\varepsilon,n). \qquad (1)$$

Отметим, что величина (1) не изменится, если в ее определении метрику $d$ заменить на любую другую, задающую на $X$ ту же, что и $d$, топологию.

Обозначим через $C(X,X)$ множество непрерывных отображений из $X$ в $X$ с метрикой $\rho(f,g)=\max\limits_{x\in X} d(f(x),g(x))$. Рассмотрим функцию

$$f\longmapsto h_{\mathrm{top}}(f). \qquad (2)$$

Обозначим через $E_h(f) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\{h_{\mathrm{top}}(g)\colon \rho(f,g) < \frac{1}{n}\}$ множество *предельно реализуемых* значений топологической энтропии [3], т. е. множество тех значений топологической энтропии, которые получаются при сколь угодно малых равномерных возмущениях отображения $f$, через $\mathcal{K}$ множество Кантора на отрезке $[0,\ 1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой. В работе [3] установлена следующая

**Теорема 1.** *Если $X=\mathcal{K}$, то для каждого непрерывного отображения $f\colon X\to X$ выполнено равенство $E_h(f)=[0;+\infty]$.*

Из этой теоремы и результатов работы [4] следует

**Теорема 2.** *Если $X=\mathcal{K}$, то функция* (2) *принадлежит в точности второму бэровскому классу на пространстве $C(X,X)$.*

Из теоремы 1 и результатов работы [5] получаем

**Теорема 3.** *Если $X=\mathcal{K}$, то*

1. *множество точек непрерывности функции* (2) *пусто;*

2. *множество точек полунепрерывности снизу функции* (2) *является всюду плотным $G_\delta$-множеством и совпадает с множеством нулей функции* (2)*;*

3. *множество точек полунепрерывности сверху функции* (2) *является нигде не плотным* $F_{\sigma\delta}$*-множеством и совпадает с множеством точек, в которых топологическая энтропия бесконечна.*

По метрическому пространству $\mathcal{M}$, непрерывному отображению

$$f\colon \mathcal{M}\times X\to X \tag{3}$$

образуем функцию

$$\mu\mapsto h_{\mathrm{top}}(f(\mu,\cdot),x). \tag{4}$$

Из работ [4, 5] следует, что в случае, когда $\mathcal{M}$ полно, множество точек полунепрерывности снизу функции (4) является всюду плотным в $\mathcal{M}$ $G_\delta$-множеством, а множество точек полунепрерывности сверху функции (4) является $F_{\sigma\delta}$-множеством. Кроме того, в случае $\mathcal{M}=X=\mathcal{K}$ в работе [5] построен пример отображения (3) такого, что множество точек полунепрерывности снизу функции (4) не является множеством типа $F_\sigma$.

В статье [6] установлена следующая

**Теорема 4.** *Если* $\mathcal{M}=X=\mathcal{K}$, *то для каждого всюду плотного подмножества* $A$ *типа* $G_\delta$ *пространства* $\mathcal{M}$ *найдется отображение* (3) *такое, что множество точек полунепрерывности снизу функции* (4) *совпадает со множеством* $A$.

В статье [7] установлена следующая

**Теорема 5.** *Если* $\mathcal{M}=X=\mathcal{K}$, *то найдется отображение* (3) *такое, что множество точек полунепрерывности сверху функции* (4) *пусто.*


1. Динабург Е.И. Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35, № 2. 324–366.
2. Adler R.L., Konheim A.G., McAndrew M.H. Topological entropy // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. 114, 2. P. 309–319.
3. Ветохин А.Н. Множество предельно реализуемых значений топологической энтропии непрерывных отображений отрезка // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. 2023. № 3. С. 35–40.

4. Ветохин А.Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 4. С. 448–453.

5. Ветохин А.Н. Строение множеств точек полунепрерывности топологической энтропии динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. 2019. № 3. С. 69–72.

6. Ветохин А.Н. О некоторых свойствах топологической энтропии и топологического давления семейств динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 10. С. 1319–1327.

7. Ветохин А.Н. Пустота множества точек полунепрерывности сверху топологической энтропии одного семейства динамических систем // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 8. 1152–1153.

# Кратные бифуркации Тьюринга в системе «реакция–диффузия»

**Р. И. Габдрахманов**
*Уфа, Уфимский университет науки и технологий*
e-mail: gabdrahmanov.robert@gmail.com

Рассматривается зависящая от скалярного параметра $\mu$ система «реакция-диффузия»

$$\frac{dw}{dt} = A(\mu)w + D\Delta w + h(w), \quad w \in R^N \,, \tag{1}$$

где $A(\mu)$ — матрица Якоби, $D$ — матрица диффузии с неотрицательными элементами, $\Delta$ — оператор Лапласа, нелинейность $h(w)$ удовлетворяет соотношению: $\|h(w)\| = o(\|w\|)$ при $w \to 0$. Уравнение (1) изучается в параллелипипеде

$$\Omega = \{x: \ 0 \leqslant x_1 \leqslant \pi, \ 0 \leqslant x_2 \leqslant \pi, \ \dots, \ 0 \leqslant x_m \leqslant \pi\} \ .$$

В качестве граничных условий рассматриваются условия Неймана

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{2}$$

Система (1) – (2) имеет пространственно однородную точку равновесия $w = 0$. Устойчивость и бифуркации в окрестности этой точки определяются свойствами спектра линейного оператора

$$S(\mu) = A(\mu) + D\Delta\colon L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$$

с плотной областью определения $G_0$, образованной замыканием в $W_2^2(\Omega)$ множества $C_0^2(\Omega) = \{v(x) \in C^2\colon \left.\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Пусть при некотором $\mu = \mu_0$ оператор $S(\mu_0)$ имеет собственное значение $\lambda = 0$. В этом случае говорят о бифуркации Тьюринга (см. [1]).

Специфика задачи о бифуркации Тьюринга связана с тем, что оператор $S(\mu_0)$ часто имеет кратное собственное $\lambda = 0$, хотя коразмерность бифуркации равна одному. Наличие таких ситуаций существенно усложняет применение стандартных методов исследования бифуркаций (см. [2]).

В настоящем докладе предлагаются подходы для исследования задачи о бифуркации Тьюринга в ситуации, когда кратность собственных значений линеаризованного оператора равна двум, а коразмерность бифуркации равна одному. Подходы основаны на конструировании эквивалентных уравнений, для которых коразмерность бифуркаций и кратности соответствующих собственных значений совпадают.


1. *Свирежсев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.

2. *Юмагулов М.Г., Васенина Н.А., Габдрахманов Р.И.* Операторные методы исследования задач об устойчивости и бифуркациях в системе реакция–диффузия и их приложения // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 61, № 4. С. 545-–562.

# Некоторые особенности применения конечно-разностных методов для систем с линейным запаздыванием

**Б. Г. Гребенщиков**
*Челябинск, Южно-Уральский государственный университет*
e-mail: grebenshchikovbg@susu.ru

**А. Б. Ложников**
*Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Уральский федеральный университет*
e-mail: ABLozhnikov@yandex.ru

Рассматриваются системы $m$-го порядка, содержащие линейное запаздывание $\gamma(t) = (1-\mu)t$, $\mu = \mathrm{const}$, $0 < \mu < 1$, например:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(\mu t), \;\; t \geq t_0 > 0. \tag{1}$$

Здесь $A$ и $B$ — постоянные матрицы размерности $m \times m$, при этом предполагается, что собственные числа $\lambda$ матрицы $A$ имеют отрицательную вещественную часть, При этом производная $k$-го и больших порядков при $t/t_0 \to \infty$ является исчезающей вектор-функцией (при $|\rho_{k,\mu}| < 1 - \varepsilon$, $\rho_{k,\mu}$ — собственные числа матрицы $\mu^k A^{-1} B$, $\varepsilon$ — малое положительное число). Таким свойством обладают и решения более сложных систем вида

$$\frac{dx_{\bar\sigma}(t)}{dt} = A_1 x_{\bar\sigma}(t) + B_1 x_{\bar\sigma}(t-\bar\sigma) + B_2 x_{\bar\sigma}(\mu t), \;\; \bar\sigma = \mathrm{const}, \;\; \bar\sigma > 0 \tag{2}$$

при условии, что все корни $\nu_j$ характеристического уравнения

$$|A_1 + B_1 \exp(-\nu\bar\sigma) - \nu E| = 0, \tag{3}$$

(где $E$ — единичная матрица размерности $m \times m$) имеют отрицательную вещественную часть. Если справедливо также предположение, что корни $\bar\rho$ характеристического уравнения

$$|RB_2 - \bar\rho E| = 0, \;\; R = \lim_{h\to\infty} \mathbf{W}(t,h), \;\; \mathbf{W}(t,h) = \int\limits_h^t \mathbf{Y}_{\bar\sigma}(t-s)ds \tag{4}$$

удовлетворяют следующему неравенству при малом положительном $\bar{\varepsilon}$

$$|\bar{\rho}| < 1 - \bar{\varepsilon}, \tag{5}$$

($\mathbf{Y}_{\bar{\sigma}}(t-s)$ — фундаментальная матрица решений "укороченной" системы, т.е. системы без линейного запаздывания), то система (2) асимптотически устойчива [1].

Очевидно, для $k$-й производной решения системы (2) (при достаточно большом $k$) условие (5) выполняется, и величина $x_{\bar{\sigma}}^{(k)}(t)$ является исчезающей вектор-функцией.

Рассмотрим далее нестационарную систему вида

$$\begin{gathered} dz(\tau)/d\tau = t_0 e^{\tau}[\bar{A}(\tau)z(\tau) + \bar{B}(\tau)z(\tau-\sigma)], \\ \sigma = -\ln(\mu),\ \ \sigma > 0,\ \ \tau \geq 0, z(\eta) = \phi(t_0 e^{\eta}),\ \ \eta \in [\mu t_0, t_0], \\ \bar{A}(\tau) = A(t_0 e^{\tau}),\ \ \bar{B}(\tau) = B(t_0 e^{\tau}). \end{gathered} \tag{6}$$

Полагаем, что матрицы $\bar{A}(\tau), \bar{B}(\tau)$ — достаточное число раз дифференцируемые, периодические (периода $\sigma$), и для корней $\lambda_j(\tau)$ характеристического уравнения $|\bar{A}(\tau) - \lambda E| = 0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\lambda < -2d,\ \ d = \mathrm{const},\ \ d > 0. \tag{7}$$

Система (6) получается из соответствующей нестационарной системы с линейным запаздыванием при замене аргумента $\tau = \ln(t/t_0)$ и эквивалентна счетной системе

$$\begin{gathered} \varepsilon_n dz_{n+1}(\tau)/d\tau = e^{\tau}[\bar{A}(\tau)z_{n+1}(\tau) + \bar{B}(\tau)z_n(\tau)], \\ \varepsilon_n = \frac{\mu^n}{t_0},\ \ n = 0, 1, \ldots, \end{gathered} \tag{8}$$

где $z_{n+1}(\tau) = z(\tau + n\sigma)$, $z_{n+1}(0) = z_n(\sigma)$, $z_0(\tau) = \phi(\tau - \sigma)$. При достаточно малом $\varepsilon_n$ для соответствующей фундаментальной матрицы $Y_n(\tau, s)$ решений системы без запаздывающих членов

$$\begin{aligned} &\varepsilon_n dy_{n+1}(\tau)/d\tau = e^{\tau}\bar{A}(\tau)y_{n+1}(\tau), \\ &y_{n+1}(0) = y_n(\sigma),\ \ n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{9}$$

справедлива оценка при $0 < s \leq \tau \leq \sigma$ [2]

$$\|Y_n(\tau, s)\| \leq M \exp\left(-\frac{d}{\varepsilon_n}(e^{\tau} - e^{s})\right),\ \ M = \mathrm{const},\ \ M > 1. \tag{10}$$

При выполнении условий (7) из оценки (10) следует, что величины $z_{n+1}^{(j)}(\tau)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ для достаточно малых $\varepsilon_n$ удовлетворяют разностным неоднородным системам [3]

$$z_{n+1}^{(j)}(\tau) = (-\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau) + \mathbf{O}(\varepsilon_n))z_n^{(j)}(\tau)) + Y_{n+1}^{j}(\tau, 0, \varepsilon_n)z_n^{(j)}(\sigma) +$$

$$+\Pi_{j,n}^{j}(\tau, \varepsilon_n)z_n^{(j)}(0) + F_{j,n}^{0}(\tau)z_n(\tau) + \Pi_{j,n}^{0}(\tau, \varepsilon_n)z_n(0) +$$

$$+F_{j,n}^{1}(\tau)z_n'(\tau) + \Pi_{j,n}^{1}(\tau, \varepsilon_n)z_n'(0) + \ldots +$$

$$+F_{j,n}^{j-1}(\tau)z_n^{(j-1)}(\tau) + \Pi_{j,n}^{j-1}(\tau, \varepsilon_n)z_n^{(j-1)}(0) +$$

$$+\mathbf{O}(\varepsilon_n)z_n^{(j+1)}(\tau) + \mathbf{O}(\varepsilon_n)\Pi_{j,n}^{j+1}(\tau, \varepsilon_n)z_n^{(j+1)}(0) +$$

$$+\varepsilon_n\mathbf{O}(\varepsilon_n)z_n^{(j+2)}(\tau) + \varepsilon_n\mathbf{O}(\varepsilon_n)\Pi_{j,n}^{j+2}(\tau, \varepsilon_n)z_n^{(j+2)}(0) + \ldots +$$

$$+(\varepsilon_n)^{k-2}\mathbf{O}(\varepsilon_n)z_n^{(j+k-1)}(\tau) + (\varepsilon_n)^{k-2}\mathbf{O}(\varepsilon_n)\Pi_{j,n}^{j+k-1}(\tau, \varepsilon_n)z_n^{(j+k-1)}(0) +$$

$$+\mathbf{O}((\mu^k\hat{q})^n)\sup_{\tau}\|z_0(\tau)\|, \;\; j = 0, 1, \ldots, k.$$

Здесь $F_{l,n}^{j}(\tau)$, $(l = 0, 1, 2, \ldots, j-1)$ — равномерно ограниченные матрицы размерности $m \times m$, $\mu^k\hat{q} \le p$, $p = \text{const}$, $0 < p < 1$, матрицы $Y_{n+1}^{j}(\tau, 0, \bar{\varepsilon}_n)$, $\Pi_{n,\tau}^{j}(\tau, \bar{\varepsilon}_n)$ $(j = 0, 1, \ldots, 2k)$ допускают оценку, аналогичную оценке (10). Отметим, что найденное натуральное число $k$ означает существование и непрерывность производных до $2k$-го порядка включительно.

Все приведенные системы имеют особенность: на их асимптотическое поведение влияют производные до $k$-порядка, что позволяет для нахождения приближенного решения с высокой степенью точности использовать численные методы соответствующего порядка [4].

1. *Гребенщиков Б.Г., Рожков В.И.* Асимптотическое поведение решения одной стационарной системы с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 6. С. 751–758.

2. *Гребенщиков Б.Г.* Об устойчивости нестационарных систем с большим запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания. Сборник научных трудов. Свердловск, 1984. С. 18–29.

3. *Гребенщиков Б.Г., Ложников А.Б.* Асимптотические свойства одного класса систем с линейным запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59, № 5. С. 577–590.

4. *Ким А.В., Пименов В.Г.* $i$-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

# Асимптотика множеств достижимости управляемых систем с ограничениями на управление в $L_p$

**М. И. Гусев**

*Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН*

e-mail: gmi@imm.uran.ru

Рассматриваются множества достижимости управляемых систем на заданном промежутке времени с управлениями из пространства $L_p$ при $1 \leq p \leq \infty$. Ограничения на управления заданы в виде $u(\cdot) \in B_p(\mu)$, где $B_p(\mu) = \{u(\cdot) \in L_p \colon \|u(\cdot)\|_p \leq \mu\}$, $\|u(\cdot)\|_p$ — норма в $L_p$, норма $\|u(\cdot)\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{\|u(t)\| \colon t \in [t_0, t_1]\}$. В докладе исследуется вопрос о зависимости множеств достижимости от параметра $p$.

Пусть управляемая система задана уравнением

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \; t_0 \leq t \leq t_1, \; x(t_0) = x_0, \qquad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — управление, $f_1 \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $f_2 \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n \times r}$ — определены на множестве $[t_0, t_1] \times D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт, начальное состояние $x_0 \in \operatorname{int} D$ фиксировано. Функции $f_1(t, x)$ и $f_2(t, x)$ непрерывны и имеют непрерывные производные по $x$ на $[t_0, t_1] \times D$. Далее мы считаем, что для каждого $u(\cdot) \in B_1(r\mu)$ $(r = \max\{1, t_1 - t_0\})$ решение $x(t, u(\cdot))$ системы (1) определено на $[t_0, t_1]$ и принадлежит множеству $D$.

Определим отображение $F(u(\cdot)) = x(t_1, u(\cdot))$, сопоставляющее управлению $u(\cdot)$ правый конец траектории системы. Это отображение является липшицевым на $B_1(r\mu)$ при сделанных предположениях. *Множеством достижимости* системы (1) при ограничении $u(\cdot) \in B_p(\mu)$ назовем множество

$$R_p(\mu) = \{F(u(\cdot)) \colon u(\cdot) \in B_p(\mu)\}.$$

Так как $B_p(\mu) \subset B_1(r\mu)$, $R_p(\mu) \subset D$ $\forall p \in [1, \infty]$. Эти множества компактны при всех $p$, за исключением $p = 1$. Множество $R_p(\mu)$ предкомпактно, его замыканием служит множество достижимости в классе импульсных управлений. В докладе исследуется непрерывность многозначного отображения $p \to R_p(\mu)$ и, в частности, изучается его асимптотика при $p \to 1$ и при $p \to \infty$. Справедлива

**Теорема 1.** *Отображение $p \to R_p(\mu)$ непрерывно по Хаусдорфу для всех $1 \leq p \leq \infty$.*

Теорема следует из результатов [1, 2, 3], где изучалась зависимость шаров в $L_p$ от параметра $p$. При $1 < p \leq \infty$ в этих работах доказана непрерывность отображения $p \to B_p(\mu)$ по Хаусдорфу относительно метрики пространства $L_1$, откуда, с учетом липшицевости $F$, вытекает непрерывность $R_p(\mu)$. В точке $p = 1$ $B_p(\mu)$ не обладает свойством полунепрывности снизу, для него справедливо более слабое свойство полунепрерывности снизу по Виеторису [3]. С учетом конечномерности пространства состояний системы этого достаточно, чтобы доказать непрерывность $R_p(\mu)$.

В случае линейной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x^0, \qquad (2)$$

можно доказать, что отображение $p \to R_p(\mu)$ при $1 < p < \infty$ удовлетворяет условию Липшица и получить оценки для погрешности аппроксимации при $p \to 1$ и при $p \to \infty$. Будем считать, что система (2) вполне управляема на $[t_0, t_1]$, начальный вектор считаем для упрощения выкладок равным нулю. Множества достижимости в этом случае являются выпуклыми компактами при $1 < p \leq \infty$, содержащими при всех $p$ шар $B(\delta)$ радиуса $\delta > 0$.

Хаусдорфово расстояние $h$ между множествами достижимости вычисляется через их опорные функции по известной формуле

$$h(R_{p_1}(\mu), R_{p_2}(\mu)) = \max_{\|s\|=1} |\psi(p_1, s) - \psi(p_2, s)|.$$

Здесь $\psi(p, s) = \mu\|v(\cdot, s)\|_q$ — опорная функция $R_p(\mu)$, $q = q(p) = p/(p-1)$, $v(t, s) = B^\top(t)X^\top(t_1, t)$, $X^\top(t_1, t)$ — фундаментальная матрица системы, $s \in \mathbb{R}^n$ [4]. Обозначим $\phi(q, s) = \mu\|v(\cdot, s)\|_q$, тогда $\psi(p, s) = \phi(q(p), s)$.

**Лемма 1.** *Функция $\psi(p, s)$ дифференцируема по $p \in (1, \infty)$. Ее частная производная по $p$ непрерывна по $p, s$ и для любых $p \in [\bar{p}, \infty)$, $\|s\| = 1$ удовлетворяет неравенству*

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial p}(p, s)\right| \leq C\frac{1}{p^2}.$$

*Здесь $\bar{p} > 1$, $C$ — константа, зависящая от $\bar{p}$, но не зависящая от $s$.*

**Теорема 2.** *Отображение $p \to R_p(\mu)$ является локально липшицевым при $1 < p < \infty$. Для каждого $\bar{p} > 1$ существует константа $C$ такая, что*

$$h(R_p(\mu), R_\infty(\mu)) \leq C\frac{1}{p}, \forall p \geq \bar{p}.$$

Для получения асимптотики $R_p(\mu)$ при $p \to 1$ леммы 1 недостаточно. В этом случае мы воспользуемся оценками для разности норм функции в пространствах $L_p$ и $L_\infty$. Пусть $\mathcal{F}$ — множество неотрицательных функций на $[t_0, t_1]$, все элементы которого удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой $L$. Справедлива

**Лемма 2.** *Существует константа $K_1 > 0$ такая, что*

$$\|f\|_q - \|f\|_\infty \leq K_1\frac{1}{q}, \quad \forall f \in B_\infty(\mu).$$

*Существует константа $K_2 > 0$ такая, что для любых $\varepsilon > 0$, $q > 1$, $f \in \mathcal{F}$ выполняется неравенство*

$$\|f\|_\infty - \|f\|_q \leq \varepsilon + K_2\left|\ln\left(\frac{\varepsilon}{2L}\right)\right|\frac{1}{q}.$$

Применяя лемму 2 к множеству $\mathcal{F}$, состоящему из функций вида $f = \|v(\cdot, s)\|$, $\|s\| = 1$, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 3.** *Существуют константы $K > 0$, $\bar{p} > 1$ такие, что*

$$h(R_p(\mu), R_1(\mu)) \leq K\left|\ln(p-1)\right|(p-1), \quad 1 < p \leq \bar{p}. \qquad (3)$$

Оценка (3) справедлива для любых управляемых систем из рассматриваемого класса. Для конкретных систем оценку можно улучшить, заменив, например, $\ln(p-1)$ на $\ln(\sqrt{p-1})$.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 25–11–00269.

1. *Huseyin A., Huseyin N., Guseinov K.G.* Continuity of $L_p$ Balls and an Application to Input-Output Systems // Math. Notes. 2022. Vol. 111, no. 1. P. 58–70.

2. *Huseyin N., Huseyin A.* On the continuity properties of the $L_p$ balls // J. Appl. Anal. 2023. Vol. 29, no. 1. P. 151–159.

3. *Huseyin A.* On the Vietoris semicontinuity property of the $L_p$ balls at $p = 1$ and an application // Arch. Math. 2023. Vol. 121, no. 2. P. 171–182.

4. *Гусев М.И.* О некоторых свойствах множеств достижимости нелинейных систем с ограничениями на управление в $L_p$ // Тр. ИММ УрО РАН. 2024. Т. 30, № 3. С. 99–112.

# Квадратичные функционалы Ляпунова–Красовского с конечномерными операторами для линейных систем с запаздыванием

**Ю. Ф. Долгий**
*Екатеринбург, ИММ УрО РАН, УрФУ*
e-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru

Рассматривается линейная автономная система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau), \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $x\colon [-\tau, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, $A, B$ — постоянные матрицы, запаздывание $\tau > 0$. Для обобщенных решений системы (1) $x(t, \varphi)$, $t \in \mathbb{R}^+$, задачи Коши с начальными функциями $\varphi \in \mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\tau, 0), \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ функциональные элементы решений $\mathbf{x}_t(\vartheta, \varphi) = x(t + \vartheta, \varphi)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $t \in \mathbb{R}^+$, принадлежат гильбертову пространству $\mathbb{H}$ со скалярным произведением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_H = \mathbf{y}^\top(0)\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^{0} \mathbf{y}^\top(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$. Эволюция элементов в функциональном пространстве состояний определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t, \tag{2}$$

где неограниченный оператор $\mathbf{A}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ с областью определения $D(\mathbf{A}) = \mathbb{W}_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, задается формулами [1]

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{x}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathbf{A}\mathbf{x})(0) = A\mathbf{x}(0) + B\mathbf{x}(-\tau).$$

Общее представление ограниченного квадратичного функционала $v$ в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ задается формулой $v(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{V}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_H$, в которой $\mathbf{V}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ — линейный ограниченный самосопряженный оператор. Производная квадратичного функционала в силу дифференциального уравнения (2)

$$\frac{dv(\mathbf{x}_t)}{dt} = \langle (\mathbf{V}\mathbf{A} + \mathbf{A}^*\mathbf{V})\, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle_H = -\langle \mathbf{W}\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle_H$$

определяет линейный неограниченный самосопряженный оператор
$\mathbf{W}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ с областью определения $D(\mathbf{W}) = \mathbb{W}_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$.

Для конструктивной реализации второго метода Ляпунова для линейных систем дифференциальных уравнений с последействием полезно описать классы квадратичных функционалов $v$ Ляпунова–Красовского с известными их аналитическими представлениями, для которых в задаче асимптотической устойчивости второй метод Ляпунова обратим. Указанная проблема решалась в работах [2, 3, 4]. Использовался обратный метод нахождения классов квадратичных функционалов $v$ Ляпунова–Красовского для заданных классов квадратичных функционалов $w$. В работе [2] рассматривался класс функционалов $w$, порождаемых ограниченными самосопряженными операторами $\mathbf{W}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, а соответствующий класс функционалов Ляпунова–Красовского $v$ определялся ограниченными самосопряженными операторами $\mathbf{V}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ специального вида. В [3] рассматривался класс функционалов $w$, порождаемых конечномерными самосопряженными операторами $\mathbf{W}$ специального вида, а соответствующий класс функционалов Ляпунова–Красовского $v$ определялся вполне непрерывными самосопряженными операторами специального вида. В [4] рассматривался класс функционалов $w$, порождаемых самосопряженными операторами $\mathbf{W}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ Гильберта–Шмидта, а соответствующий класс функционалов Ляпунова–Красовского $v$ определялся самосопряженными операторами $\mathbf{V}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ Гильберта–Шмидта специального вида. В настоящей работе рассматривается класс функционалов $w$, порождаемых самосопряженными операторами $\mathbf{W}\colon \mathbb{H}_\tau \to \mathbb{H}_\tau$ Гильберта–Шмидта в новом гильбертовом пространстве со скалярным произведением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{H_\tau} = \mathbf{y}^\top(0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{y}^\top(-\tau)\mathbf{x}(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} \mathbf{y}^\top(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}_\tau$. Аналитические представления таких операторов определяются формулами

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{W}\mathbf{x})(\vartheta) &= M(\vartheta,0)\mathbf{x}(0) + M(\vartheta,-\tau)\mathbf{x}(-\tau)+ \\
&+ \int_{-\tau}^{0} M(\vartheta,s)\mathbf{x}(s)ds, \quad \vartheta \in [-\tau,0], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}_\tau,
\end{aligned} \tag{3}
$$

с соответствующими условиями гладкости коэффициентов представлений.

**Утверждение.** *Представления операторов Ляпунова–Красовского, соответствующих операторам* (3), *определяются форму-*

*лами*

$$(\mathbf{V}\mathbf{x})(\vartheta) = C(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta) + K(\vartheta,0)\mathbf{x}(0) + \int\limits_{-\tau}^{0} K(\vartheta,s)\mathbf{x}(s)ds, \qquad (4)$$
$$\vartheta \in [-\tau,0], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

*в которых коэффициенты представлений находятся из решения обратной задачи второго метода Ляпунова.*

Применение второго метода Ляпунова для линейных автономных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием связано с необходимостью решения сложных спектральных задач для самосопряженных операторов. Спектральные задачи упрощаются, если в представлениях (3), (4) симметричные ядра интегральных операторов $M(\cdot,\cdot)$, $K(\cdot,\cdot)$ вырожденные, а $C(\vartheta) = \mathrm{const}$, $\vartheta \in [-\tau,0]$. Для вырожденных ядер можно записать представления $M(\vartheta,s) = \sum\limits_{k,m=1}^{M} \beta_{km}\psi_k(\vartheta)\psi_m^\top(s)$, $K(\vartheta,s) = \sum\limits_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}\varphi_i(\vartheta)\varphi_j^\top(s)$, $-\tau < \vartheta, s < 0$, где матрицы $\{\beta_{km}\}_{k,m=1}^{M}$ и $\{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$ симметричны, а системы функций $\{\psi_k(\cdot)\}_{k=1}^{M}$ и $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=1}^{N}$ линейно независимы. Условие вырожденности ядра $K(\cdot,\cdot)$ реализуется, если все компоненты системы векторных функций $\{\psi_k(\cdot)\}_{k=1}^{M}$ являются квазиполиномами. Тогда все компоненты системы векторных функций $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=1}^{N}$ также являются квазиполиномами.


1. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

2. *Долгий Ю.Ф.* Квадратичные функционалы Ляпунова–Красовского для линейных автономных систем с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 48–56.

3. *Kharitonov V.L.* Time-Delay Systems: Lyapunov Functional and Matrices. Basel, Switzerland: Birkhäuser, 2013.

4. *Долгий Ю.Ф.* Вычисление квадратичных функционалов Ляпунова–Красовского для линейных автономных систем с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 95–106.

# Матрица Ляпунова как инструмент исследования устойчивости систем с запаздыванием

**А. В. Егоров**
*Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет, кафедра теории управления*
e-mail: alexey.egorov@spbu.ru

Доклад посвящён применению функциональных матриц Ляпунова для исследования линейных стационарных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием общего вида.

Рассматриваем вещественную систему, правая часть которой представлена в виде интеграла Римана–Стилтьеса

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^{0} d\eta(\theta)\, x(t+\theta). \qquad (1)$$

Здесь $\eta$ — заданная на $[-h, 0]$ функция со значениями в $\mathbb{R}^{n\times n}$, каждая компонента которой имеет ограниченную вариацию, $h > 0$ — запаздывание, вектор $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$. При формулировании задачи Коши начальный момент времени считаем нулевым, начальные функции $\varphi$, как и решения $x(t, \varphi)$ уравнения (1), предполагаются всюду непрерывными. Таким образом, рассматриваемое уравнение является наиболее общим случаем линейного стационарного уравнения с запаздыванием, так как любой линейный ограниченный функционал на пространстве непрерывных функций $\mathbf{C}^{(0)}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ может быть представлен в указанной форме. Состоянием системы в момент времени $t \geqslant 0$ при заданной начальной функции $\varphi$ будем называть отображение $x_t(\varphi) : \theta \in [-h, 0] \to x(t+\theta, \varphi)$.

В работе [1] для системы (1) был введён аналог матрицы Ляпунова для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы, следуя более поздней традиции, транспонируем матрицу из статьи [1].

**Определение 1.** *Матрицей Ляпунова* для системы (1) будем называть непрерывную функциональную матрицу $U(\tau) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\tau \in [-h, h]$, удовлетворяющую

1. динамическому свойству

$$U'(\tau) = \int_{-h}^{0} U(\tau+\theta)\, d\eta(\theta), \;\; \tau \in (0,h),$$

2. свойству симметрии

$$U(\tau) = U^T(-\tau), \;\; \tau \in [-h,h],$$

3. алгебраическому свойству

$$U'(+0) - U'(-0) = -W.$$

Здесь $U'(\tau)$ обозначает классическую производную функции $U$ в точке $\tau$, $U'(+0)$, $U'(-0)$ — правую и левую производные функции $U$ в нуле соответственно.

По указанной матрице в работе [1] был построен непрерывный функционал $v_0(\varphi)$, $\varphi \in \mathbf{C}^{(0)}([-h,0],\mathbb{R}^n)$, с заданной квадратичной производной вдоль решений системы (1)

$$\mathcal{D}^{+}_{(1)} v_0(\varphi) = \lim_{\alpha\to+0} \frac{v_0(x_\alpha(\varphi)) - v_0(\varphi)}{\alpha} = -\varphi^T(0) W \varphi(0).$$

В недавней работе [2] было показано (пока только для скалярного случая), что функционал $v_0$ можно сделать функционалом полного типа, добавив к нему соответствующее слагаемое. Как известно [3, 4], для некоторых частных случаев системы (1) функционалы полного типа позволяют в предположении экспоненциальной устойчивости системы строить оценки решений, исследовать робастную устойчивость. Кроме того, с помощью функционалов полного типа удалось [5] предложить критерии экспоненциальной устойчивости стационарных систем с запаздыванием, выраженные через матрицу Ляпунова.

В настоящем докладе делается первый шаг на пути к обобщению упомянутого критерия на случай системы общего вида. Первый и ключевой элемент исследования — это новая формула для матрицы Ляпунова: $U(\tau) = \widehat{\Phi}(0,\tau)$, где $\widehat{\Phi}(\cdot,\tau)$, $\tau \in [-h,h]$, — аналитическое продолжение функции

$$\Phi(s,\tau) = \int_0^\infty e^{-st} K^T(t) W K(t+\tau)\, dt, \;\; \mathrm{Re}(s) > 2\sigma,$$

на множество $\mathbb{C}\setminus\mathcal{P}$. Здесь $\sigma$ — спектральная абсцисса системы (1), $\mathcal{P}$ — множество всех попарных сумм собственных чисел системы, $K$ — фундаментальная матрица, соответствующая начальному условию $K(t) = 0$, $t \in [-h, 0)$, $K(0) = I$.

С помощью новой формулы для матрицы Ляпунова и функционала полного типа можно достаточно легко получить семейство необходимых условий экспоненциальной устойчивости для системы (1).

**Теорема.** *Если система* (1) *экспоненциально устойчива, то блочная матрица*

$$[U(\tau_j - \tau_i)]_{i,j=1}^{r} \tag{2}$$

*положительно определена для любых попарно различных* $\tau_1, \ldots,$ $\tau_r \in [0, h]$.

Следующим шагом будет выделение из этого семейства необходимых условий достаточного условия экспоненциальной устойчивости. Таким образом будет получена конкретная матрица вида (2) с известным $r$ и заданными равномерно распределёнными на отрезке $[0, h]$ точками $\tau_1, \ldots, \tau_r$, положительная определённость которой эквивалентна экспоненциальной устойчивости системы (1).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10099, https://rscf.ru/project/23-71-10099/.

1. *Huang W.* Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1989. Vol. 142, no. 1. P. 83–94.
2. *Rychkov A.S., Egorov A.* Complete Type Lyapunov–Krasovskii Functionals for the Scalar Case of General Linear Delay Systems // Представлена на конференцию "64th IEEE Conference on Decision and Control", 9–12 декабря 2025. Рио-де-Жанейро, Бразилия.
3. *Kharitonov V.L., Zhabko A.P.* Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. Vol. 39, no. 1. P. 15–20.
4. *Kharitonov V.L.* Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Basel, Switzerland: Birkhäuser, 2013.
5. *Mondié S., Egorov A., Gomez M.A.* Lyapunov stability tests for linear time-delay systems // Annual Reviews in Control. 2022. Vol. 54. P. 68–80.

# О существовании глобально определённых сильных решений уравнений химически реагирующих смесей вязких жидкостей

**А. А. Жалнина**, **Н. А. Кучер**

*Кемерово, Кемеровский государственный университет*

e-mail: qwert1776@yandex.ru, nakycher@rambler.ru

Разнообразные технологические процессы (сжигание топлива, выращивание кристалов) протекают с участием многокомпонентных химически активных потоков, и поэтому существует потребность исследования математической структуры и свойств решений соответствующих уравнений, анализа их математической структуры и свойств.

Для описания движения химически реагирующей смеси сжимаемых вязких жидкостей (газов) в общем случае используется полная система уравнений Навье–Стокса–Фурье, дополненная уравнениями реакции диффузии [1, 2]. Эта система уравнений выражает физические законы сохранения массы, импульса, полной энергии смеси, а также баланса масс компонентов.

Определённые результаты о свойствах математических моделей таких смесей представлены в работах [3, 4] и касаются в основном секвенциальной устойчивости слабых решений. Результаты о существовании слабых решений в целом по времени многоскоростных моделей смеси вязких сжимаемых жидкостей анонсированы в работе [5].

Настоящая работа посвящается доказательству существования и единственности глобально определённых сильных обобщённых и классических решений начально краевой задачи для уравнений бинарной химически реагирующей смеси вязких сжимаемых жидкостей в случае двумерного движения [1, 2]:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0, \tag{1}$$

$$\partial_t(\rho \vec{u}) + \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p - \operatorname{div} \sigma S = 0, \tag{2}$$

$$\partial_t(\rho c) + \operatorname{div}(\rho c \vec{u}) + \operatorname{div} F = \rho\, \omega. \tag{3}$$

Здесь $\rho_1, \rho_2, \rho = \rho_1 + \rho_2$ соответственно плотности компонент и полная плотность смеси; $c = \frac{\rho_1}{\rho}$ — массовая концентрация первой компоненты; $\vec{u}$ — среднемассовое поле скоростей (барицентрическая скорость) смеси, определённое по формуле $\rho\vec{u} = \rho_1\vec{u}^{(1)} + \rho_2\vec{u}^{(2)}$, $\vec{u}^{(i)}$ — поле скоростей $i$-й компоненты. Поле давлений смеси $p = p(\rho, c)$ представляется в виде $p = p_c(\rho) + p_m(\rho, c)$, где слагаемое $p_c(\rho) = \rho^\gamma$, $\gamma > 1$, ("холодное давление") зависит только от плотности $\rho$ и отвечает за баротропность смеси. Компонента $p_m = p_m(\rho, c)$ является классическим молекулярным давлением смеси, которое определяется по закону Бойля–Мариотта как сумма парциальных давлений: $p_m(\rho, c) = \alpha_2\rho + \alpha_1(\rho c)^{\gamma_1},\ \gamma_1 > 1$. Вязкая часть $\sigma$ тензора напряжений подчиняется реологическому закону $\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{D}(\vec{u}) + \lambda\,\mathrm{div}(\vec{u})\cdot\mathbf{I}$, где $\mathbf{D}(\vec{u}) = \dfrac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T\right)$, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, $\mu$ и $\lambda$ — коэффициенты динамической (сдвиговой) и объемной вязкости — в общем случае являются функциями термодинамических переменных и удовлетворяют условиям $\mu > 0,\ 2\mu + 3\lambda \geq 0$. Диффузионный поток $\vec{F}(\rho, c)$ определяется по формуле [2]: $\vec{F} = -æ\nabla(\rho c), \kappa > 0$. Функция $\omega = \omega(c)$, входящая в уравнение (3) — химический источник (называемый также скоростью производства компоненты) — есть заданная функция.

Подход, предложенный в работе [6], послужил основой вывода новых априорных оценок, обеспечивающих существование "в целом" сильных обобщённых решений системы уравнений (1)–(3). Предполагается, что функции $\lambda(\rho)$, $\mu(\rho)$, $æ(\rho)$ и $\omega(c)$ определены на $[0, +\infty)$ и $[0, 1]$ соответственно и удовлетворяют условиям: $\mu(\rho) = \mathrm{const} > 0$, $\lambda(\rho) = \rho^\beta$, $\beta > 3$, $æ = \mathrm{const} > 0$, $\omega(c) = -\omega_0 c$, $\omega_0 = \mathrm{const} > 0$.

Пусть, для простоты, область течения представляет собой прямоугольник $\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in R^2 : 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\right\}$. Пусть $T > 0$ — произвольное число. Для $t \in (0, T]$ введем обозначения $Q_t = \Omega \times (0, t)$. Через $\overline{\Omega}$, $\overline{Q_t}$ обозначаем замыкания соответствующих множеств.

**Постановка задачи и основные результаты.**

В начальный момент времени известно распределение скорости $\vec{u}$, плотности $\rho$ и концентрации $c$:

$$\vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x, y),\ \rho\,|_{t=0} = \rho_0(x, y),\ c|_{t=0} = c_0(x, y),\ (x, y) \in \overline{\Omega}, \quad (4)$$

причём начальные плотность и концентрация — строго положительные ограниченные функции.

На границе области течения задана нормальная компонента вектора скорости и завихренность

$$\vec{u} \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{u}|_{\partial\Omega} = 0 \;\; t \in [0, T]. \tag{5}$$

Кроме того, ставится условие непроницаемости границы для одной из компонент смеси:

$$\nabla(\rho c) \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0, \; t \in [0, T]. \tag{6}$$

Под сильным обобщённым решением задачи (1)–(6) подразумевается обобщённое решение, все производные которого, входящие в уравнения (1)–(3), являются регулярными обобщенными функциями, и уравнения (1)–(3) выполняются почти всюду в $Q_T$.

Основным результатом статьи является следующая теорема (используются стандартные обозначения пространств Соболева).

**Теорема.** *Если начальные данные $\vec{u}_0$, $\rho_0$, $\sigma_0 = \rho_0 c_0$ таковы, что*

$$\vec{u}_0 \in W_2^2(\Omega), \; \rho_0 \in W_q^1(\Omega), \; q > 2, \; \sigma_0 \in W_2^2(\Omega),$$

*и выполнены условия согласования первого порядка*

$$\vec{u}_0 \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0, \; \operatorname{rot} \vec{u}_0|_{\partial\Omega} = 0, \; \nabla\sigma_0 \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0,$$

*то существует единственное сильное обобщённое решение задачи (1)–(6) в $Q_T$, удовлетворяющее условиям $\vec{u} \in W_q^{2,1}(Q_T)$, $\rho \in W_{q,\infty}^{1,1}(Q_T)$, $\sigma \in W_q^{2,1}(Q_T)$, и существуют такие константы $m_1, M_1, k_1, K_1$, что $0 < m_1 \le \rho \le M_1 < +\infty$, $0 < k_1 \le c \le K_1 < 1$ в $Q_T$.*


1. *Chapman S., Cowling T.* The mathematical theory of non-uniform gases. An account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases. London: Cambridge University Press, 1970.

2. *Giovangigli V.* Multicomponent flow modeling. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Boston: Birkhäuser Boston Inc., 1999.

3. *Zatorska E.* On a steady flow of multicomponent, compressible, chemically reacting gas // Nonlinearity. 2011. Vol. 24, no. 11. P. 3267–3278.

4. *Zatorska E.* On the flow of chemically reacting gaseous mixture // J. Differential Equations. 2012. Vol. 253, iss. 12. P. 3471–3500.

5. *Kucher N.A., Zhalnina A.A.* On the existence of global solution to equations for mixtures of compressible viscous fluids // Journal of physics: Conference Series. 2017. Vol. 894. Art. no. 012048.

6. *Vaigant V.A., Kazhikhov A.V.* On existence of global solutions to the two-dimensional Navier–Stokes equations for a compressible viscous fluid // Sibirsk. Mat. Zh. 1995. Vol. 899, no. 1. P. 1283–1316.

# О порядковых свойствах множеств решений дифференциальных уравнений

**Е. С. Жуковский, А. С. Патрина**

*Тамбов, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина*

e-mail: zukovskys@email.com, lanina.anastasiia5@mail.ru

В докладе рассматриваются порядковые свойства множества решений задачи Коши с условием

$$x(0) = A, \tag{1}$$

для дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

в котором правая часть — функция $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ не предполагается непрерывной по фазовой переменной. Дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью описывают, в частности, динамику электрической активности мозга (так называемые модели нейронных систем типа Хопфилда [1, 2]).

Пусть $T > 0$. Решением уравнения (2), определенным на $[0,T]$, называем абсолютно непрерывную на этом отрезке функцию, удовлетворяющую (2) при п.в. $t \in [0,T]$. Будем обозначать через $AC^n_{[0,T]}$ и $L^n_{[0,T]}$ пространства абсолютно непрерывных и суммируемых (по Лебегу) функций $[0,T] \to \mathbb{R}^n$. Будем полагать, что во всех рассматриваемых здесь и ниже классах функций задан «обычный» порядок. Множество решений задачи (1), (2) обозначим символом $\mathcal{R}_{[0,T]} \subset AC^n_{[0,T]}$, а производных решений — символом $\mathcal{R}'_{[0,T]} \subset L^n_{[0,T]}$. В докладе представлены утверждения о дифференциальном неравенстве, о существовании в множествах $\mathcal{R}'_{[0,T]}$ и $\mathcal{R}_{[0,T]}$ наименьшей и наибольшей функций, об устойчивости этих множеств к положительным возмущениям правой части и их монотонной зависимости от таких возмущений.

Сформулируем более точно рассматриваемые вопросы и основные результаты.

Для вектора $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $i = \overline{1,n}$ будем обозначать через $x_{-i} \in \mathbb{R}^{n-1}$ вектор, полученный из $x$ удалением одной его компоненты $x_i$, а сам исходный вектор будем обозначать через $x = (x_i, x_{-i})$. Это обозначение не означает перемещение $x_i$ на первое место, он остается на исходном $i$-ом месте. Определим класс $\mathfrak{K}^{\mathbf{r}}$ функций $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таких, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ функция $f(\cdot, x)$ измерима (по Лебегу), а при п.в. $t \in \mathbb{R}_+$, любом $i = \overline{1,n}$ и произвольном $x_{-i} \in \mathbb{R}^{n-1}$ функция $f(t, \cdot, x_{-i})$ непрерывна справа. Отметим, что для любой функции $f \in \mathfrak{K}^{\mathbf{r}}$ и любой измеримой (и, тем более, непрерывной) функции $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ композиция $f(\cdot, x(\cdot))\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ измерима (см., например, [3]). На множестве $\mathfrak{K}^{\mathbf{r}}$ определим «обычный» для векторных функций порядок.

Пусть при некотором $T > 0$ существуют функции $v, w \in AC^n_{[0,T]}$, удовлетворяющие неравенствам

$$v(0) \le A \le w(0), \quad v(t) \le w(t), \quad \dot{v}(t) \le f(t, v(t)), \\ \dot{w}(t) \ge f(t, w(t)) \ \text{ п.в. на } [0,T]. \tag{3}$$

Теперь определим множество $[\dot{v}, \dot{w}]_{L^n} = \{y \in L^n_{[0,T]} : \dot{v} \le y \le \dot{w}\}$.

**Теорема 1.** *Пусть $f \in \mathfrak{K}^{\mathbf{r}}$ и при п.в. $t \in \mathbb{R}_+$, любом $i = \overline{1,n}$ и произвольном $x_{-i} \in \mathbb{R}^{n-1}$ функция $f(t, \cdot, x_{-i})$ (нестрого) возрас-*

*тает. Пусть справедливы неравенства* (3). *Тогда*

$$\mathcal{R}'_{[0,T]} \cap [\dot{v}, \dot{w}]_{L^n} \neq \emptyset, \tag{4}$$

*и в этом множестве имеются наибольший и наименьший элементы.*

Отметим, что близкие теореме 1 результаты о существовании и оценке решений дифференциального уравнения получены в [4, § 6.2], а для неявного дифференциального уравнения — в [5, § 2.1].

Пусть теперь задана убывающая последовательность функций $f_k \in \mathfrak{K}^{\mathbf{r}}$, $k \in \mathbb{N}$, такая, что для любой убывающей последовательности $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, имеющей инфимум $x = \inf\{x_k\}$, выполнено $f(\cdot, x) = \inf\{f_k(\cdot, x_k)\}$, где $f \in \mathfrak{K}^{\mathbf{r}}$. Пусть также задана убывающая последовательность векторов $A_k \in \mathbb{R}^n$ такая, что существует $A = \inf\{A_k\} \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{R}_{k[0,T]} \subset AC^n_{[0,T]}$ множество определенных на $[0, T]$ решений задачи Коши

$$\dot{x} = f_k(t, x), \quad t \geq 0, \quad x(0) = A_k,$$

и через $\mathcal{R}'_{k[0,T]} \subset L^n_{[0,T]}$ множество производных этих решений.

Следующее утверждение показывает, что множество решений задачи Коши монотонно и непрерывно (относительно порядка) зависит от правой части дифференциального уравнения и начального значения.

**Теорема 2.** *Пусть при некотором* $T > 0$ *существуют функции* $v, w \in AC^n_{[0,T]}$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$v(t) \leq w(t), \quad \dot{v}(t) \leq f(t, v(t)), \quad \dot{w}(t) \geq f_1(t, w(t)) \ \text{ п.в. на } [0, T],$$
$$v(0) \leq A, \quad A_1 \leq w(0).$$

*Тогда*

1) *при любом* $k \in \mathbb{N}$ *множество* $\mathcal{R}'_{k[0,T]} \cap [\dot{v}, \dot{w}]_{L^n}$ *не пусто, в нем существуют наибольший и наименьший элементы;*

2) *для любого* $k_0 \in \mathbb{N}$ *и любого* $y \in \mathcal{R}'_{k_0[0,T]} \cap [\dot{v}, \dot{w}]_{L^n}$ *при каждом* $k \in \mathbb{N}$ *существует* $y_k \in \mathcal{R}'_{k[0,T]} \cap [\dot{v}, \dot{w}]_{L^n}$ *такое, что последовательность* $\{y_k\}$ *убывает и* $y_{k_0} = y$;

3) *для любой убывающей последовательности* $\{y_k\}$ *с элементами* $y_k \in \mathcal{R}'_{k[0,T]} \cap [\dot{v}, \dot{w}]_{L^n}$, $k \in \mathbb{N}$, *существует* $y_0 = \inf\{y_k\}$ *и* $y_0 \in \mathcal{R}'_{[0,T]} \cap [\dot{v}, \dot{w}]_{L^n}$;

4) *если* $\overline{y}_k$ *— наибольший в* $\mathcal{R}'_{k[0,T]} \cap [\dot{v}, \dot{w}]_{L^n}$ *элемент,* $k \in \mathbb{N}$, *то последовательность* $\{\overline{y}_k\}$ *убывает и* $\overline{y}_0 = \inf\{\overline{y}_k\}$ *есть наибольшая точка в* $\mathcal{R}'_{[0,T]} \cap [\dot{v}, \dot{w}]_{L^n}$.

В заключение отметим, что утверждаемыми в теоремах 1 и 2 порядковыми свойствами множества $\mathcal{R}'_{[0,T]} \cap [\dot{v}, \dot{w}]_{L^n}$ обладает также и множество $\mathcal{R}_{[0,T]} \cap [v, w]_{AC^n}$, поскольку

$$\mathcal{R}_{[0,T]} \cap [v, w]_{AC^n} = \Big\{ x = A + \int_0^{(\cdot)} y(s)ds, \ y \in \mathcal{R}'_{[0,T]} \cap [\dot{v}, \dot{w}]_{L^n} \Big\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00272, https://rscf.ru/project/24-21-00272/.

1. *Hopfield J.J.* Neural networks and physical systems with emergent collective computational properties // Proc. Nat. Acad. Sci. 1982. Vol. 79. P. 2554–2558.

2. *Ланина А.С., Плужникова Е.А.* О свойствах решений дифференциальных систем, моделирующих электрическую активность головного мозга // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27, № 139. С. 270–283.

3. *Серова И.Д.* Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26, № 135. С. 305–314.

4. *Жуковский Е.С.* Эволюционные функционально-дифференциальные уравнения. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Тамбов, 2006 / Институт математики и механики УрО РАН.

5. *Жуковский Е.С., Серова И.Д.* Метод сравнения в исследовании уравнений и включений. Санкт-Петербург: Сциентиа, 2024.

# Решения с нулевыми фронтами для нелинейной эволюционной параболической системы

**А. Л. Казаков**, **А. А. Лемперт**

*Иркутск, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН*

e-mail: kazakov@icc.ru, lempert@icc.ru

В научной школе академика РАН А.Ф. Сидорова [1] уже около 40 лет исследуются нетривиальные решения с нулевыми фронтами для нелинейных (квазилинейных) уравнений и систем. Впервые они были получены для уравнения нелинейной теплопроводности (фильтрации), а в дальнейшем перенесены на случай систем «реакция-диффузия» в работах авторов [2]. Такие решения интересны тем, что описывают распространение возмущений по покоящемуся (нулевому) фону с конечной скоростью. Хорошо известно, что для параболических уравнений в линейном и полулинейном случаях подобное невозможно [3].

В монографии [4] в качестве математической модели популяционной динамики «хищник-жертва» была предложена следующая эволюционная параболическая система реакционно-диффузионного типа:

$$u_t - [(\alpha_1 + \beta_1 v_x)u]_x = F(u, v), \quad v_t - [(\alpha_2 - \beta_2 u_x)v]_x = G(v, u), \tag{1}$$

для которой решения с нулевым фронтом допускают простую и естественную интерпретацию с точки зрения предметной области: убегающие жертвы и преследующие их хищники имеют конечную скорость движения, и их стаи образуют уединенные волны. Будем для простоты предполагать, что нулевые фронты для обеих искомых функций известны и совпадают, т. е. рассмотрим для системы (1) краевые условия вида

$$u|_{x=f(t)} = 0, \quad v|_{x=f(t)} = 0. \tag{2}$$

Ранее для задачи (1), (2) была доказана теорема существования и единственности решения в классе аналитических функций [5].

Рассмотрим теперь вопрос о построении для системы (1) нетривиальных точных решений, удовлетворяющих условию (2). Выполним в уравнении (1) обобщенное разделение переменных. Пусть

$$u = \psi(t)p(z),\ v = \psi(t)q(z), \quad z = \chi(t)x + \eta(t). \tag{3}$$

Ранее подобные конструкции неоднократно использовались авторами при построении и исследовании точных решений нелинейных параболических уравнений [6] и систем [5]. В результате подстановки представления (3) в (1) получаем переопределенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которая в некоторых частных случаях является совместной. При этом выражения для $\psi(t), \psi(t), \chi(t), \eta(t)$ выписываются в явном виде, а для нахождения $p(z), q(z)$ имеем систему двух ОДУ второго порядка, причем (2) переходит в условие $p(0) = 0, q(0) = 0$, а $p'(0), q'(0)$ определяются при решении системы двух квадратных уравнений.

Далее рассмотрим многомерное обобщение задачи (1), (2)

$$\begin{cases} u_t = \mathbf{a_1} \cdot \mathrm{div} u + \beta_1(u\Delta v + \nabla u \nabla v) + F(u, v), \\ v_t = \mathbf{a_2} \cdot \mathrm{div} v - \beta_2(v\Delta u + \nabla u \nabla v) + G(u, v). \end{cases} \tag{4}$$

$$u|_{x1=f(t,x_2,\ldots,x_n)} = 0, \quad v|_{x1=f(t,x_2,\ldots,x_n)} = 0. \tag{5}$$

Здесь $u = u(t, \mathbf{x})$, $v = v(t, \mathbf{x})$— искомые функции; $t$ и $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — независимые переменные; $\mathbf{a_i} = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})$, $i = 1, 2$ — константы.

Для случаев $n = 2, 3$ задача (4), (5) допускает понятную и естественную интерпретацию с точки зрения предметной области: взаимодействие популяций на плоскости или в пространстве (птицы, летающие насекомые). Если же $n > 3$, то прикладное значение постановки неочевидно, однако она может быть рассмотрена как математический объект.

Под *аналитической* здесь и далее понимается вещественная функция, совпадающая в некоторой области со своим тейлоровским разложением.

**Теорема.** *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $F(u,v), G(u,v)$ — *аналитические функции в некоторой окрестности точки* $u=0, v=0$, *и* $F(0,0)=G(0,0)=0$*;*

2) $f(t,x_2,\ldots,x_n)$ — *аналитическая функция в некоторой окрестности точки* $t=0, x_2=0,\ldots,x_n=0$*;*

3) *справедливы неравенства*

$$a_{i,1}+f_t|_{t=0}-\sum_{k=2}^{n}a_{i,k}f_{x_k}|_{t=0}\neq 0,\ \ i=1,2;\quad \beta_1\neq 0,\beta_2\neq 0. \qquad (6)$$

*Тогда задача* (4), (5) *имеет единственное нетривиальное аналитическое решение в некоторой окрестности гиперповерхности* $x_1=f(t,x_2,\ldots,x_n)$.

Доказательство теоремы выполняется по традиционной для авторов схеме [5]: вначале строится решение в виде рядов по степеням переменной $z=x_1-f(t,x_2,\ldots,x_n)$, коэффициенты которых определяются по рекуррентным формулам, причем условия (6) обеспечивают возможность их однозначного получения. Затем доказывается сходимость построенных рядов с помощью метода мажорант, причем строится общая мажорантная задача, подпадающая под действие теоремы Коши–Ковалевской [3], для обоих уравнений системы.

**Замечание 1.** Легко убедиться в том, что при выполнении условий теоремы задача (4), (5) имеет также тривиальное решение $u\equiv 0, v\equiv 0$.

**Замечание 2.** В работе [7] анонсировано построение решения задачи (4), (5) в частном случае, когда $n=2$, в виде рядов, однако ни формулировка теоремы, ни какие-либо детали процедуры построения не приводятся.

Исследования выполнены в рамках госзадания Минобрнауки России, проект «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа», № гос. регистрации: 121041300058-1.

1. *Сидоров А.Ф.* Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.

2. *Kazakov A., Kuznetsov P., Lempert A.* Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // Symmetry. 2020. Vol. 12, no. 6. Art. no. 999.

3. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

4. *Мюррей Дж.Д.* Математическая биология. Том II. Пространственные модели. и их приложения в биомедицине. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2011.

5. *Казаков А.Л., Кузнецов П.А.* Аналитические решения с нулевым фронтом для нелинейной вырождающейся параболической системы // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 11. С. 1461–1470.

6. *Казаков А.Л., Орлов С.С.* О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 112–123.

7. *Кузнецов П.А.* Об одной краевой задаче с вырождением для параболической системы «хищник-жертва» // Материалы конференции «Ляпуновские чтения», 2 – 6 декабря 2024. Иркутск. ИДСТУ СО РАН, 2024. С. 122.

# Анализ краевой задачи Валле–Пуссена для обобщения нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка

**А. И. Кашпар**

*Могилев, Белорусско-Российский университет*

e-mail: alex.kashpar@tut.by

В настоящей работе, которая продолжает и обобщает [1, 2], с использованием конструктивного метода [3], изучены вопросы разрешимости и построения решения краевой задачи Валле–Пуссена для обобщения нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$

непрерывных матриц-функций с нормой $\|\mathbf{X}\|_C = \max\limits_{t\in I} \|\mathbf{X}(t)\|$, где $\|\cdot\|$ — норма матрицы в рамках определения этой алгебры, например одна из норм, описанных в [4, с. 21].

Исследуется краевая задача типа [1, 2] и др.

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t) +$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\mathbf{A}_i(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}_i(t) + \sum_{i=1}^{k}\mathbf{C}_i(t)\mathbf{X}\mathbf{D}_i(t) + \mathbf{F}\left(t, \mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{dt}\right), \tag{1}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}, \tag{2}$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i \in \mathbb{C}\,(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $\mathbf{F} \in \mathbb{C}\,(D, \mathbb{R}^{n\times n})$, $D = \{(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})\colon t \in I, \|\mathbf{X}\| < \tilde{\rho}_1, \|\mathbf{Y}\| < \tilde{\rho}_2\}$ $(\mathbf{Y} = d\mathbf{X}/dt)$, $r, k \in \mathbb{N}$; $0 < \tilde{\rho}_i \leq \infty$, $I = [0,\ \omega]$, $\omega > 0$; $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ — заданные вещественные матрицы. Предполагается также, что функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ удовлетворяет относительно $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ в области $D$ условию Липшица (локально); кроме того, считается, что $\mathbf{F}\,(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ не содержит линейных относительно $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ слагаемых коэффициентов, зависящих от $t$.

Введены следующие обозначения и необходимые сведения, получаемые по методике [3]:

$$h_1 = \max_{t\in I}\left\|\mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0})\right\|,$$

$$h_2 = \max_{t\in I}\left\|\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0})\right\|,$$

$$h = \max_{t\in I}\left\|\mathbf{F}(t, 0, 0)\right\|,\ \gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|,\ \lambda_U = \max_{0\leq s\leq\tau\leq\omega}\left\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\right\|,$$

$$\lambda_V = \max_{0\leq s\leq\tau\leq\omega}\left\|\mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{V}(\tau)\right\|,\ a_i = \max_{t\in I}\left\|\mathbf{A}_i(t)\right\|,\ b_i = \max_{t\in I}\left\|\mathbf{B}_i(t)\right\|,$$

$$d_i = \max_{t\in I}\left\|\mathbf{D}_i(t)\right\|,\ c_i = \max_{t\in I}\left\|\mathbf{C}_i(t)\right\|,$$

$$G = \{(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})\colon t \in [0, \omega], \|\mathbf{X}\| \leq \rho_1, \|\mathbf{Y}\| \leq \rho_2\},$$

$$\tilde{G} = \{(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t))\colon \|\mathbf{X}\|_C \leq \rho_1, \|\mathbf{Y}\|_C \leq \rho_2\},$$

$$p_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3 \left(\sum_{i=1}^{k} c_i d_i + L_1\right),$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2 \left(\sum_{i=1}^{k} c_i d_i + L_1\right),$$

$$q_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3 \left(\sum_{i=1}^{r} a_i b_i + L_2\right),$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2 \left(\sum_{i=1}^{r} a_i b_i + L_2\right),$$

$$\mathbf{Z}_C = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X}\|_C \\ \|\mathbf{Y}\|_C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

где $0 < \rho_i < \tilde{\rho}_i$; $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ — интегральные матрицы уравнений

$$d\mathbf{U}/dt = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}\ (\mathbf{U}(0) = \mathbf{E}), \quad d\mathbf{V}/dt = \mathbf{V}\mathbf{B}(t)\ (\mathbf{V}(0) = \mathbf{E}),$$

$\mathbf{E}$ — единичная матрица;

$$\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) = \int_0^t \mathbf{U}(\tau)\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M})\mathbf{V}(\tau)d\tau,$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M})\mathbf{V}(t);$$

$\mathbf{\Phi}$ —линейный оператор,

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}(t) = \int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau,\ \mathbf{Z}(t) = \mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t)\mathbf{V}^{-1}(t);$$

$L_i = L_i(\rho_1, \rho_2),\ (i = 1, 2)$ — постоянные Липшица для $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ в области $G$; $\mathcal{L}_1,\ \mathcal{L}_2$ — интегральные операторы

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1} \left(\int_0^\omega \mathbf{U}(\tau) \left(\int_\tau^\varphi \mathbf{U}^{-1}(s)\times\right.\right.$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{r}\mathbf{A}_i(s)\mathbf{Y}(s)\mathbf{B}_i(s)+\sum_{i=1}^{k}\mathbf{C}_i(s)\mathbf{X}(s)\mathbf{D}_i(s)+\mathbf{F}(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s))\right)\times$$
$$\times\ \mathbf{V}^{-1}(s)ds\Big)\,\mathbf{V}(\tau)d\tau\Big)\,\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,$$

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y})=\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\left(\sum_{i=1}^{r}\mathbf{A}_i(s)\mathbf{Y}(s)\mathbf{B}_i(s)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{i=1}^{k}\mathbf{C}_i(s)\mathbf{X}(s)\mathbf{D}_i(s)+\mathbf{F}\left(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)\right)\right)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t).$$

Вместо задачи $(1),(2)$ рассматривается эквивалентная ей интегральная задача

$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{M}+\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t)+\mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}),\qquad(3)$$

$$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t)+\mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}).\qquad(4)$$

**Лемма 1.** *Для того чтобы в случае однозначной обратимости оператора* $\mathbf{\Phi}$ *пара функций* $(\mathbf{X}(t),\,\mathbf{Y}(t)):[0,\omega]\to\mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}^{n\times n}$ *представляла собой решение задачи* $(1),(2)$*, необходимо и достаточно, чтобы эти функции являлись решением системы интегральных уравнений* $(3),(4)$*.*

**Лемма 2.** *Пусть выполнены условия*

$$p_1\rho_1+q_1\rho_2+h_1\le\rho_1,\ \ p_2\rho_1+q_2\rho_2+h_2\le\rho_2,\ \ p_1+q_2<1.\qquad(5)$$

*Тогда задача* $(3),(4)$ *однозначно разрешима на множестве* $\tilde{G}$*, при этом справедлива оценка*

$$\mathbf{Z}_C\le(\mathbf{E}-\mathbf{P})^{-1}\mathbf{H}.\qquad(6)$$

**Теорема.** *Пусть оператор* $\mathbf{\Phi}$ *однозначно обратим и выполнены условия* $(5)$*. Тогда задача* $(1),(2)$ *однозначно разрешима в области* $G$*, при этом справедлива оценка* $(6)$*.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [2].

В случае, когда

$$\mathbf{A}_i(t) \equiv 0, \quad \mathbf{B}_i(t) \equiv 0, \quad \mathbf{C}_i(t) \equiv 0, \quad \mathbf{D}_i(t) \equiv 0, \tag{7}$$

из приведенной теоремы следует указанная теорема из [2].

Для построения решения задачи (1), (2) используется классический метод последовательных приближений применительно к эквивалентной системе интегральных уравнений (3), (4):

$$\mathbf{X}_m(t) = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_{m-1}, \mathbf{Y}_{m-1})(t),$$

$$\mathbf{Y}_m(t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_{m-1}, \mathbf{Y}_{m-1})(t), \ m = 1, 2, \ldots,$$

где в качестве начального приближения $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{Y}_0$ принимаются произвольные матрицы-функции из $\mathbb{C}\,(I, \, \mathbb{R}^{n \times n})$, принадлежащие множеству $\tilde{G}$.


1. *Кашпар А.И., Лаптинский В.Н.* О разрешимости и построении решения задачи Валле–Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фіз.-матэм. навук. 2019. Т. 55, № 1. С. 50–61.

2. *Кашпар А.И., Лаптинский В.Н.* Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 5. С. 570–583.

3. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.

4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

# Конструктивный метод динамической регуляризации для систем с последействием

**А. В. Ким**

*Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН*

e-mail: avkim@imm.uran.ru

$i$-гладкий анализ [1] – раздел функционального анализа, в рамках которого исследуются свойства инвариантной производной и её приложения. В приложении к теории ФДУ $i$-гладкий анализ основывается на использовании: 1) конструкций инвариантной производной; 2) *концепции разделения конечномерных и бесконечномерных составляющих* в структуре ФДУ и свойствах их решений; 3) *принципа соответствия*: если последействие исчезает, то результаты и формулы теории ФДУ переходят в конечномерные результаты и формулы теории ОДУ.

Методы теории ФДУ, удовлетворяющие *принципу соответствия*, называются *конструктивными*, так как могут быть эффективно реализованы по аналогии с ОДУ, используя конструкции, аналогичные ОДУ, по конечномерной составляющей, и специальную «технику обработки» последействия. На основе такого конструктивного подхода для систем с последействием полностью аналогично ОДУ разработана качественная теория ФДУ, включая, в частности, численные методы и теорию АКОР [1]. В настоящей работе такой подход используется для изложения конструктивного метода динамической регуляризации [2] в приложении к ФДУ.

Рассматривается процесс, динамика которого описывается системой

$$x'(t) = f(t, x, y_t(\cdot))u(t) + g(t, x, y_t(\cdot)), \;\; 0 \le t \le T, \tag{1}$$

где $t$ — время; $x = x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ — фазовый вектор; $y_t(s) = x(t+s) \in Q[-\tau, 0)$ — последействие, где $-\tau \le s < 0$; $Q[-\tau, 0)$ — пространство ограниченных и кусочно-непрерывных слева на $[-\tau, 0)$ $n$-мерных функций; $H = R^n \times Q[-\tau, 0)$; $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t)) \in L^\infty_r(0, T)$ — управление, значения которого для п.в. $t \in [0,T]$ принадлежат замкнутому выпуклому ограниченному множеству $P \subset R^r$; $U$ — множество всех допустимых управлений; $f(t,x,y_t(\cdot)) = \{f_{ij}(t,x,y_t(\cdot))\}$ и $g(t,x,y_t(\cdot)) = \{g_i(t,x,y_t(\cdot))\}$, где $i = 1,\ldots,n$ и $j = 1,\ldots,r$ — матрицы порядка $n \times r$ и $n \times 1$ соответственно; момент времени $T > 0$, запаздывание $\tau > 0$ и начальное состояние $h_0 = \{x(0), y_0(\cdot)\} \in H$ заданы; $U_* = \{u \in U\colon x(t,u) = x(t), 0 \le t \le T\}$.

В заданные дискретные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$ известно приближенное решение $\widetilde{x}(t)$, $-\tau \le t \le T$, точного решения $x(t)$ системы (1), построенное исходя из значений $\widetilde{x}_{h,i} = \widetilde{x}(t_i)$, $0 \le i \le N-1$, и с дискретной предысторией модели [1], удовлетворяющее условию

$$\|\widetilde{x}_h(t_i) - x_h(t_i)\|_H \le \delta, \;\; 0 \le i \le N-1, \;\; 0 < \delta \le \delta_0, \;\; \delta_0 > 0, \qquad (2)$$

где шаг сетки $\eta = \eta(\delta) = \max\limits_{0 \le i \le N-1}(t_{i+1} - t_i) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$; $\widetilde{y}_{h,t}(s) = \widetilde{x}(t+s)$, $-\tau \le s < 0$; $\widetilde{x}_h(t) = \{\widetilde{x}(t), \widetilde{y}_{h,t}(\cdot)\}$; $x_h(t) = \{x(t), y_t(\cdot)\}$.

**1. Обратная задача.** Требуется, зная $\widetilde{x}(t)$ в (2), построить допустимое управление $u = u_{\eta(\delta)}$, $0 \le t \le T$, такое, что

$$\lim_{\delta \to 0} \|u_{\eta(\delta)} - u_*\|_{L_r^2} = 0, \qquad (3)$$

где управление $u_* = u_*(t)$, $0 \le t \le T$, называется нормальным решением обратной задачи, если $u_* \in U_*$ и $\|u_*\|_{L_r^2} = \inf\limits_{u \in U_*} \|u\|_{L_r^2}$.

**2. ФДУ метод динамической регуляризациии.** Итак, наблюдается траектория $x(t)$, $-\tau \le t \le T$, системы (1), соответствующая некоторому неизвестному допустимому управлению $u(t)$. Предполагается, что величины $\widetilde{x}_h(t_i) = \{\widetilde{x}_{h,i}, \widetilde{y}_{h,t_i}(\cdot)\}$ определяются и становятся известными последовательно во времени, и управление $u_{\eta(\delta)}$ также строится последовательно на каждом интервале $[t_0,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $(t_2,t_3]$, $\ldots$, причём для построения $u_{\eta(\delta)}$ на каждом $i$-том частичном интервале используются лишь значения $\widetilde{x}_h(t_0), \ldots, \widetilde{x}_h(t_i)$.

Сформулированная обратная задача, как известно, является неустойчивой к возмущениям. Ниже для ФДУ (1) описан аналог метода динамической регуляризации для конечномерных систем [2].

Выберем $\alpha = \alpha(\delta) > 0$. Пусть $i = 0$ и известны начальные наблюдаемое значение и последействие $\{\widetilde{x}_{h,0}, \widetilde{y}_{h,0}(\cdot)\}$ точной траектории $x(t)$. Положим $z_\eta(0) = z_0 = \widetilde{x}_{h,0}$, и, решая вспомогательную задачу минимизации

$$t_0(u) = 2\langle z_0 - \widetilde{x}_{h,0}, f(0, \widetilde{x}_{h,0}, \widetilde{y}_{h,0}(\cdot))u\rangle_{R^n} + \alpha\|u\|^2_{R^n} \to \inf, \ \ u \in P, \tag{4}$$

находим точку $u_0 \in P$ такую, что $t_0(u_0) = \inf\limits_{u\in P} t_0(u)$. Затем при $t \in [t_0, t_1]$ полагаем

$$u_\eta(t) = u_0, z_\eta(t) = z_\eta(0) + [f(0, \widetilde{x}_{h,0}, \widetilde{y}_{h,0}(\cdot))u_0 + g(0, \widetilde{x}_{h,0}, \widetilde{y}_{h,0}(\cdot))]t. \tag{5}$$

Пусть для некоторого $0 < i \le N-1$ уже определены $u_\eta(t)$, $z_\eta(t)$, $0 \le t \le t_i$, и пусть нам стало известно измерение $\{\widetilde{x}_{h,i}, \widetilde{y}_{h,t_i}(\cdot)\}$ в момент $t = t_i$. Тогда, решая вспомогательную задачу минимизации

$$t_i(u) = 2\langle z_\eta(t_i) - \widetilde{x}_{h,i}, f(t_i, \widetilde{x}_{h,i}, \widetilde{y}_{h,t_i}(\cdot))u\rangle_{R^n} + \alpha\|u\|^2_{R^n} \to \inf, \ \ u \in P, \tag{6}$$

находим точку $u_i \in P$ такую, что $t_i(u_i) = \inf\limits_{u\in P} t_i(u)$. Затем при $t \in (t_i, t_{i+1}]$ полагаем

$$\begin{aligned} &u_\eta(t) = u_i, \\ &z_\eta(t) = z_\eta(t_i) + [f(t_i, \widetilde{x}_{h,i}, \widetilde{y}_{h,t_i}(\cdot))u_i + g(t_i, \widetilde{x}_{h,i}, \widetilde{y}_{h,t_i}(\cdot))](t - t_i). \end{aligned} \tag{7}$$

Далее, когда становятся известны величины $\{\widetilde{x}_{h,i+1}, \widetilde{y}_{h,t_{i+1}}(\cdot)\}$, $\ldots, \{\widetilde{x}_{h,N-1}, \widetilde{y}_{h,t_{N-1}}(\cdot)\}$, последовательно определяются $u_\eta(t)$ и $z_\eta(t)$ на промежутках $(t_{i+1}, t_{i+2}]$, $\ldots, (t_{N-1}, t_N]$.

Важно, что в точном определении точек минимума $u_i$ в задачах (4), (6) нет необходимости. Пусть $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, тогда достаточно найти $u_i$ из условий

$$t_i(u_i) \le \inf_{u\in P} t_i(u) + \varepsilon. \tag{8}$$

**Теорема.** *Пусть функционалы $f$ и $g$ удовлетворяют условию Липшица по совокупности аргументов $(t, h) \in [0, T] \times H$; допустимые значения управлений вложены в замкнутое выпуклое ограниченное множество; приближенная траектория удовлетворяет условию (2); параметры $\eta = \eta(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, $\alpha = \alpha(\delta)$ положительны и стремятся к 0 при $\delta \to 0$ согласованно в смысле равенства $\lim\limits_{\delta\to 0} \frac{\delta+\eta(\delta)+\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} = 0$. Тогда функции $u_\eta(t)$ и $z_\eta(t)$*

*при* $0 \le t \le T$, *определённые методом* (4)–(8), *таковы, что* $\|u_{\eta(\delta)} - u_*\|_{L^2_r(0,T)} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$ *и* $\|z_{\eta(\delta)} - x\|_{C_n[0,T]} \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$.


1. *Kim A.V.* *i*-Smooth Analysis. Theory and Applications. New Jersey, Wiley, 2015.
2. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П, Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: МГУ, 1999.
3. *Ким А.В.* Динамическое моделирование возмущений в задаче колебаний маятника // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика (принята в печать).


# Обобщенное уравнение типа Монжа–Ампера и его многомерные точные решения


**А. А. Косов**, **Э. И. Семенов**

*Иркутск, ИДСТУ СО РАН им. В.М. Матросова*

e-mail: kosov_idstu@mail.ru, semenov@gmail.com


Рассматривается многомерное обобщенное уравнение Монжа–Ампера вида

$$\det H(u) = f\left(\mathbf{x}, u, \nabla u, \Delta u\right), \tag{1}$$

где $u \triangleq u(\mathbf{x})$ — искомая функция переменной $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$; $H(u) = \left(\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j\right)$ — матрица Гессе $n$-го порядка; $\det H(u)$ — определитель матрицы Гессе (гессиан), который будем также называть оператором Монжа–Ампера; $\nabla u$ — градиент; $\Delta u$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Уравнение (1) есть $n$-мерный аналог уравнения

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}),$$

которое включает в себя, как частный случай, классическое уравнение Монжа–Ампера [1, 2]

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + d,$$

и уравнение вида

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = G(x, y, u, u_x, u_y), \tag{2}$$

где $u(x, y)$ — искомая функция, $a \triangleq a(x, y, u, u_x, u_y)$, $b \triangleq b(x, y, u, u_x, u_y)$, $c \triangleq c(x, y, u, u_x, u_y)$, $d \triangleq d(x, y, u, u_x, u_y)$, $G(x, y, u, u_x, u_y)$ — заданные функции. Уравнение (2) встречается в дифференциальной геометрии [3], в задачах газовой и гидродинамики [4–7], а также многих других математических моделях естествознания. В справочниках [6, 7] приведены точные решения уравнения (2) для некоторых $G(x, y, u, u_x, u_y)$. Подробная сводка новых результатов по методу редукции и точным решениям для нестационарного уравнения Монжа–Ампера представлена в работах [8, 9].

В докладе предложено строить точные решения уравнения (1) в виде суперпозиции квадратичной формы и решений обыкновенных дифференциальных уравнений, порождаемых исходным уравнением в частных производных. При этом используется метод редукции, который базируется на следующей лемме.

**Лемма 1.** *Пусть $F(z)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция. Тогда для любой симметрической матрицы $A$, задающей квадратичную форму $\xi = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$, для гессиана функции $F(\xi) = F\left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})\right)$ справедлива формула*

$$\det\left(\frac{\partial^2 F(\xi)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}} = \det A \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2}\right],$$

*где $\det A$ — определитель матрицы $A$.*

Доказательство этой леммы приведено в [10]. Приводится целый ряд примеров точных решений, как радиально симметричных, так и анизотропных, выражающихся через комбинации элементарных функций.

Работа выполнена за счет субсидии Минобрнауки России в рамках проектов № 121041300058-1 и № 121032400051-9.

1. *Монж Г.* Приложение анализа к геометрии. М.-Л.: ОНТИ. 1936. (пер. с фр. Monge G. Feuilles d'analyse appliquée *à* la géométrie. Paris. 1795).
2. *Ampère A.* Application de la théorie sur les intégrales des équations aux différentielles partielles du premier et second ordre // J. de l'Ecole Polytechnique. 1820. Vol. 11. P. 1–188.
3. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974.
4. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
5. *Мелешко С.В., Пухначев В.В.* Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье–Стокса // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 24–33.
6. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of nonlinear partial differential equations. Second edition. Boca Raton. CRC Press, 2012.
7. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Нелинейные уравнения математической физики. Часть 2. Учебное пособие для вузов. М.: Изд-во «Юрайт», 2023.
8. *Аксенов А.В., Полянин А.Д.* Групповой анализ, редукции и точные решения уравнения Монжа–Ампера // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 6. С. 750–763.
9. *Polyanin A.D., Aksenov A.V.* Unsteady Magnetohydrodynamics PDE of Monge–Ampère Type: Symmetries, Closed-Form Solutions, and Reductions // Mathematics. 2024. Vol. 12. Art. no. 2127.
10. *Косов А.А., Семенов Э.И.* О точных решениях многомерного обобщенного уравнения Монжа–Ампера // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 10. С. 1334–1349.

# О бифуркации циклов и бифуркации на бесконечности в системах с однородными нелинейностями

**М. Н. Кунгиров**
*Уфа, Уфимский университет науки и технологий*
e-mail: mamur.qongirov@mail.ru

Рассматривается зависящая от малого параметра $\alpha$ динамическая система

$$\frac{dx}{dt} = B_0 x + \alpha f(x)\,, \quad x \in R^2\,, \tag{1}$$

в которой $B_0$ — квадратная (порядка 2) вещественная матрица, $f(x)$ — вектор-функция, компоненты которой являются непрерывно дифференцируемыми функциями. Предполагается, что матрица $B_0$ имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\lambda = \pm\omega_0 i$ ($\omega_0 > 0$). В силу указанного предположения фазовый портрет линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = B_0 x\,, \quad x \in R^2\,, \tag{2}$$

имеет тип "центр", все ее решения являются $T_0$-периодическими; здесь $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

В системе (1) возможны разные сценарии бифуркаций, связанные с возникновением в ней периодических решений при малых ненулевых значениях параметра $\alpha$. В настоящей работе рассматриваются два сценария бифуркаций (см., например, [1]).

Первый сценарий бифуркации связан с возникновением у системы (1) периодических орбит, ответвляющихся от некоторого цикла линейной системы (2). Пусть $x = C_0\varphi_0(t)$ — некоторое ненулевое периодическое решение системы (2); обозначим через $\Upsilon_0$ соответствующую траекторию в фазовом пространстве этой системы. Значение $\alpha = 0$ будем называть *точкой бифуркации циклов* системы (1), ответвляющихся от цикла $\Upsilon_0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое ненулевое $\alpha(\varepsilon) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, что система (1) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ имеет изолированное периодическое решение $x(t,\varepsilon)$ периода $T(\varepsilon)$, причем $\max\limits_t \|x(t,\varepsilon) - C_0\varphi_0(t)\| < \varepsilon$ и $|T(\varepsilon) - T_0| < \varepsilon$.

Второй сценарий бифуркации связан с возникновением у системы (1) периодических орбит больших амплитуд. Значение $\alpha = 0$ называют *точкой бифуркации Андронова–Хопфа на бесконечности*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое ненулевое $\alpha(\varepsilon) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, что система (1) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ имеет изолированное периодическое решение $x(t,\varepsilon)$ периода $T(\varepsilon)$, причем $\max\limits_t \|x(t,\varepsilon)\| > \varepsilon^{-1}$ и $|T(\varepsilon) - T_0| < \varepsilon$.

Будем предполагать, что функция $f(x)$ в системе (1) имеет вид $f(x) = B_1x + b_q(x)$, в котором $B_1$ — квадратная (порядка 2) вещественная матрица, а нелинейность $b_q(x)$ является однородной порядка $q$ ($q \geqslant 2$). Соответственно, система (1) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = B_0x + \alpha[B_1x + b_q(x)], \quad x \in R^2. \tag{3}$$

**Теорема.** *Бифуркация циклов в системе* (3) *может иметь место только в случае, когда $q$ нечетно, т. е. когда в системе* (3) *нелинейность $b_q(x)$ является однородной нечетного порядка. Бифуркация на бесконечности может иметь место только в случае, когда $q$ четно.*

В статье предлагаются также новые достаточные признаки бифуркаций циклов и бифуркаций на бесконечности. Статья развивает исследования, начатые в [2].


1. *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Имангулова Э.С.* Главные асимптотики в задаче о бифуркации Андронова–Хопфа и их приложения // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 12. С. 1627–1643.
2. *Kungirov M.N.* Bifurcation of periodic oscillations arising from a closed phase curve in systems with odd nonlinearities // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. Vol. 45, no. 6. P. 2739–2745.


# О полноте системы ортонормированных собственных векторов четырёхмерного оператора Дирака в классах Соболева


**У. С. Мадрахимов**, **А. М. Ражапова**, **С. Ш. Матекубова**

*Ургенчский государственный университет имени Абу Райхана Беруни, Ургенч, Узбекистан*

e-mail: umadraximov@mail.ru, us.madrakhimov@gmail.com


В работе рассмотрены вопросы полноты системы ортонормированных собственных векторов четырёхмерного оператора

Дирака в классах Соболева.

Рассмотрим задачу на собственные значения для четырёхмерной стационарной системы Дирака [2]

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial x}+\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}\frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial y}+$$
$$+\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial z}+\lambda\psi(x,y,z)=0. \tag{1}$$

Предположим, что вектор-функция $\psi = (\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4)^T$ в системе (1) рассматривается в параллелепипеде $T^3 = [0,a]\times[0,b]\times[0,c]$, где $\psi_k(x,y,z)\in C^1([0,a]\times[0,b]\times[0,c])$, $a,\ b,\ c\in\mathbb{R},\ k=\overline{1,4}$.

В связи с системой (1) рассмотрим следующие краевые условия:

$$\begin{cases}\alpha_k\psi_k(0,y,z)+\beta_k\psi_k(a,y,z)=0,\\ \beta_k\dfrac{\partial\psi_k(0,y,z)}{\partial x}+\alpha_k\dfrac{\partial\psi_k(a,y,z)}{\partial x}=0,\ k=\overline{1,4},\end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases}\gamma_k\psi_k(x,0,z)+\delta_k\psi_k(x,b,z)=0,\\ \delta_k\dfrac{\partial\psi_k(x,0,z)}{\partial y}+\gamma_k\dfrac{\partial\psi_k(x,b,z)}{\partial y}=0,\ k=\overline{1,4},\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}\chi_k\psi_k(x,y,0)+\sigma_k\psi_k(x,y,c)=0,\\ \sigma_k\dfrac{\partial\psi_k(x,y,0)}{\partial z}+\chi_k\dfrac{\partial\psi_k(x,y,c)}{\partial z}=0,\ k=\overline{1,4}.\end{cases} \tag{4}$$

Краевая задача (1)–(4) называется: периодической, если $\alpha_k=-\beta_k\neq 0$, $\gamma_k=-\delta_k\neq 0$, $\chi_k=-\sigma_k\neq 0$, $k=1,2,3,4$; антипериодической, если $\alpha_k=\beta_k\neq 0, \gamma_k=\delta_k\neq 0$, $\chi_k=\sigma_k\neq 0$, $k=1,2,3,4$; полупериодической, если $|\alpha_k|\neq|\beta_k|$, $\alpha_k\neq 0$, $\beta_k\neq 0$, $k=1,2,3,4$ и $|\gamma_k|\neq|\delta_k|$, $\gamma_k\neq 0$, $\delta_k\neq 0$, $k=1,2,3,4$ и $|\chi_k|\neq|\sigma_k|$, $\chi_k\neq 0$, $\sigma_k\neq 0$, $k=1,2,3,4$ (см., например, [3, 4]). Чтобы несколько упростить вычисления, ограничимся случаем

$|\alpha_k| \neq |\beta_k|$, $\alpha_k \neq 0$, $\beta_k \neq 0$ и $|\gamma_k| \neq |\delta_k|$, $\gamma_k \neq 0$, $\delta_k \neq 0$ и $|\chi_k| \neq |\sigma_k|$, $\chi_k \neq 0$, $\sigma_k \neq 0$.

Справедлива следующая

**Теорема 1.** *Пусть*

$$X_{k,n}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \frac{\beta_k \cos \mu_{k,n} \frac{\pi}{a} x + \varepsilon_{k,n} \operatorname{sign}(\beta_k^2 - \alpha_k^2) \alpha_k \sin \mu_{k,n} \frac{\pi}{a}}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \cdot \sqrt{1 + |\mu_{k,n}|^{2s}}},$$

$$Y_{k,m}(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \cdot \frac{\delta_l \cos \tau_{l,m} \frac{\pi}{b} y + \bar{\varepsilon}_{k,m} \operatorname{sign}(\delta_k^2 - \gamma_k^2) \gamma_k \sin \tau_{k,m} \frac{\pi}{b} y}{\sqrt{\gamma_k^2 + \delta_k^2} \cdot \sqrt{1 + |\tau_{k,m}|^{2s}}},$$

*и*

$$Z_{k,l}(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \cdot \frac{\sigma_k \cos \rho_{k,l} \frac{\pi}{c} z + \bar{\bar{\varepsilon}}_{k,l} \operatorname{sign}(\sigma_k^2 - \chi_k^2) \chi_k \sin \rho_{k,l} \frac{\pi}{c} z}{\sqrt{\chi_k^2 + \sigma_k^2} \cdot \sqrt{1 + |\rho_{k,l}|^{2s}}},$$

$n, m, l \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, 3, 4$ *— полные ортонормированные системы собственных функций в* $W_2^s(0,a)$, $W_2^s(0,b)$ *и* $W_2^s(0,c)$ *соответственно. Тогда системы собственных функций* $\psi_{k,n,m,l}(x,y,z) = X_{k,n}(x) \cdot Y_{k,m}(y) \cdot Z_{k,l}(z)$, $k = 1, 2, 3, 4$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$, *отвечающие вспомогательным одномерным спектральным задачам соответственно, ортонормированы и полны в пространстве* $W_2^s([0,a] \times [0,b] \times [0,c])$, *где* $\varepsilon_{k,n} = \pm 1$, $,\bar{\varepsilon}_{k,m} = \pm 1$, $\bar{\bar{\varepsilon}}_{k,l} = \pm 1$.

Тем самым мы получаем следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть* $|\alpha_k| \neq |\beta_k|$, $\alpha_k \neq 0$, $\beta_k \neq 0$ *и* $|\gamma_k| \neq |\delta_k|$, $\gamma_k \neq 0$, $\delta_k \neq 0$ *и* $|\chi_k| \neq |\sigma_k|$, $\chi_k \neq 0$, $\sigma_k \neq 0$, $k = 1, 2, 3, 4$, *и пусть* $\omega = \max\limits_k \{\max\{\omega_k, \bar{\omega}_k, \bar{\bar{\omega}}_k\}\} < 1$. *Тогда система нормированных собственных векторов* $\{\psi_{k,n,m,l}\}$, $k = 1, 2, 3, 4$, $n, m, l \in \mathbb{Z}$ *четырёхмерного оператора Дирака* (1)–(4) *является четырёхкратной полной ортонормированной системой в классах Соболева* $W_2^s([0,a] \times [0,b] \times [0,c])$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, *где*

$$\omega_k = \sqrt{\theta_k^2 + 2\left(\frac{\theta_k}{\sqrt{2}} + (\varphi_k + 1)^s - 1\right)^2} \cdot \phi(s),$$

$$\theta_k = \sqrt{2} \max_{x\in[0,a]} \left| e^{i\varphi_k \frac{\pi}{a} x} - 1 \right|, \quad \varphi_k = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\alpha_k \beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2},$$

$$\bar{\omega}_k = \sqrt{\bar{\theta}_k^2 + 2\left( \frac{\bar{\theta}_k}{\sqrt{2}} + (\bar{\varphi}_k + 1)^s - 1 \right)^2} \cdot \phi(s),$$

$$\bar{\theta}_k = \sqrt{2} \max_{y\in[0,b]} \left| e^{i\bar{\varphi}_k \frac{\pi}{b} x} - 1 \right|, \quad \bar{\varphi}_k = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\gamma_k \delta_k}{\gamma_k^2 + \delta_k^2},$$

$$\bar{\bar{\omega}}_k = \sqrt{\bar{\bar{\theta}}_k^2 + 2\left( \frac{\bar{\bar{\theta}}_k}{\sqrt{2}} + (\bar{\bar{\varphi}}_k + 1)^s - 1 \right)^2} \cdot \phi(s),$$

$$\bar{\bar{\theta}}_k = \sqrt{2} \max_{z\in[0,c]} \left| e^{i\bar{\bar{\varphi}}_k \frac{\pi}{c} x} - 1 \right|, \quad \bar{\bar{\varphi}}_k = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\chi_k \sigma_k}{\chi_k^2 + \sigma_k^2},$$

$\phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\phi(s) = 1$ *при* $s = 1, 2, \ldots$.


1. *Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К.* О полноте системы ортонормированных собственных векторов обобщенной спектральной задачи $Au = \lambda u$ в классах Соболева // Узбекский математический журнал. 2009. № 2. С.101–111.

2. *Годунов С.К., Золотарева Е.В.* Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1974.

3. *Костюченко А.Г., Саргсян И.С.* Распределение собственных значений. М.: Наука, 1979.

4. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.

# Условия достижимости старшего центрального показателя в классе возмущений с фиксированным множеством нулей

**Е. К. Макаров, А. Д. Ковалькова**

*Минск, Институт математики НАН Беларуси*

e-mail: jcm@im.bas-net.by

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов $A$ такой, что $\|A(t)\| \leq M < +\infty$ для всех $t \geq 0$. Обозначим матрицу Коши системы (1) через $X_A$, а ее старший показатель через $\lambda_n(A)$. Вместе с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей возмущений $Q$. Старший показатель системы (2) обозначим через $\lambda_n(A+Q)$.

Точной верхней границей подвижности старшего показателя системы (1) называется число

$$\Omega'(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} \lambda_n(A+Q).$$

Старшим центральным показателем системы (1) называется [1, с. 157], [2, с. 46] величина

$$\Omega(A) = \lim_{T \to +\infty} \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{1}{mT} \sum_{k=1}^{m} \ln \|X_A(kT, kT-T)\|.$$

В [3] доказано, что старший центральный показатель достижим, то есть выполнено равенство

$$\Omega'(A) = \Omega(A).$$

Достижимость старшего центрального показателя доказана в [3] в предположении отсутствия каких-либо ограничений на множество значений, принимаемых возмущением $Q$ в произвольной точке положительной полуоси. Это условие может быть ослаблено для классов возмущений, обращающихся в нуль на некотором заданном множестве.

**Определение.** Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное множество ограниченных кусочно-непрерывных возмущений $Q$. Будем говорить, что старший центральный показатель *достижим в классе малых возмущений из* $\mathfrak{M}$, если выполнено равенство

$$\Omega(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\|Q\|\le\varepsilon} \{\lambda_n(A+Q)\colon Q \in \mathfrak{M}\}.$$

Возьмем произвольное множество $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}$, характеристическая функция которого кусочно-непрерывна, и рассмотрим множество $\mathfrak{B}(\mathcal{Z})$ всех кусочно-непрерывных ограниченных возмущений $Q$, тождественно обращающихся в нуль на $\mathcal{Z}$.

**Теорема 1.** *Если существуют числа $b > \delta > 0$ и последовательность $t_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, такие что $\delta < t_{k+1} - t_k < b$ и $\mathcal{Z} \cap [t_k, t_k + \delta] = \varnothing$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то старший центральный показатель достижим в классе малых возмущений из $\mathfrak{B}(\mathcal{Z})$.*

**Теорема 2.** *Если существуют такие стремящиеся к $+\infty$ последовательности положительных чисел $t_k$ и $s_k$, $k \in \mathbb{N}$, что $\mathcal{Z} \supset [t_k, t_k + s_k]$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то старший центральный показатель недостижим в классе малых возмущений из $\mathfrak{B}(\mathcal{Z})$.*

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Конвергенция–2025.

1. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

2. *Изобов Н.А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.

3. *Миллионщиков В.М.* Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 1. С. 99–104.

# Проверка корректности нового определения матрицы Ляпунова для уравнения в частных производных с запаздыванием

**П. Е. Маковеева**
*Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет, кафедра теории управления*
e-mail: p.e.makoveeva@spbu.ru

Классический метод Ляпунова может быть обобщён для уравнений с запаздыванием посредством метода функционалов Ляпунова–Красовского, считающегося эффективным подходом для изучения устойчивости таких систем. В последние два десятилетия интенсивно развивается теория функционалов с заданной производной, применяемая к линейным и квазилинейным системам с запаздыванием [1]. Эти функционалы позволяют проводить анализ устойчивости и робастной устойчивости систем. Центральным элементом данного подхода является матрица Ляпунова — функция, заданная на некотором отрезке и определяемая набором свойств.

Уравнения в частных производных с запаздыванием находят широкое применение в прикладных задачах. В частности, в биологии подобные уравнения применяются для описания динамики популяций [2] и могут быть представлены в виде системы

$$\begin{cases} u_t(x,\ t) = au_{xx}(x,\ t) + bu(x, t-h), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \\ u(0,\ t) = u(l,\ t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,\ \theta) = \varphi(x,\ \theta), \quad \theta \in [-h, 0], \quad x \in [0, l]. \end{cases} \tag{1}$$

Она состоит из уравнения запаздывающего типа с распределенными параметрами, однородных граничных и соответствующих начальных условий. Здесь $\varphi$ — начальная функция, для простоты мы предполагаем, что она абсолютно непрерывна; $a > 0$, $b \neq 0$ — параметры модели, $h > 0$ — запаздывание. В дальнейшем мы предполагаем, что длина отрезка $l = 1$, так как задача может быть сведена к этому случаю путем масштабирования координаты $x$.

Из работы [4] известно, что функционал, построенный по системе (1), имеет вид

$$v_0(\varphi) = \int_0^1 \varphi(y_2,0)\int_0^1 U(0,y_1,y_2)\varphi(y_1,0)dy_1dy_2+$$

$$+2b\int_0^1 \varphi(y_1,0)\int_0^1\int_{-h}^0 U(-h-\theta,y_1,y_2)\varphi(y_2,\theta)d\theta dy_2dy_1+ \qquad (2)$$

$$+b^2\int_0^1\int_{-h}^0 \varphi(y_1,\theta_1)\int_0^1\int_{-h}^0 U(\theta_1-\theta_2,y_1,y_2)\varphi(y_2,\theta_2)d\theta_2dy_2d\theta_1dy_1.$$

Производная этого функционала вдоль решений системы (1) задается неположительной квадратичной формой

$$\frac{d}{dt}v_0(\varphi)\Big|_{(1)} = -\left\|\varphi(\cdot,0)\right\|^2_{\mathcal{L}_2}. \qquad (3)$$

Функционал $v_0$ строится по функции $U$, которую мы далее будем называть матрицей Ляпунова.

**Определение 1.** *Матрица Ляпунова $U$* — это функция

$$U(\tau,y_1,y_2) = 2\sum_{i=1}^{\infty}\sin(\pi i y_1)\sin(\pi i y_2)u_i(|\tau|), \qquad (4)$$

где $\tau\in[-h,h]$, явный вид $u_i(|\tau|)$ представлен в теореме 2 работы [3]. В частности, для достаточно больших $i$, при которых выполнены условия $\mu_i>|b|$, $b\cosh(\lambda_i h)-\mu_i\neq 0$, где $\lambda_i=\sqrt{\mu_i^2-b^2}$ и $\mu_i=a(\pi i)^2$,

$$u_i(\tau)=\frac{b\sinh\lambda_i(h-\tau)+\mu_i\sinh\lambda_i\tau-\lambda_i\cosh\lambda_i\tau}{2\lambda_i(b\cosh\lambda_i h-\mu_i)},\quad \tau\in[0,h].$$

Далее можно сформулировать альтернативное определение матрицы Ляпунова, в котором она задаётся через восемь свойств.

**Определение 2.** Функция $U(\tau, y_1, y_2)$, $\tau \in [-h, h]$, $y_1, y_2 \in [0, 1]$, называется *матрицей Ляпунова системы* (1), если она удовлетворяет следующему набору свойств:
1. Симметричность:

$$U(\tau, y_1, y_2) = U(\tau, y_2, y_1),\ \tau \in [-h, h],\ y_1, y_2 \in [0, 1],$$

2. $U$ является четной функцией относительно переменной $\tau$:

$$U(\tau, y_1, y_2) = U(-\tau, y_1, y_2),\ \tau \in [-h, h],\ y_1, y_2 \in [0, 1],$$

3. Однородность граничных условий:

$$U(\tau, 1, y) = U(\tau, 0, y) = 0,\ \tau \in [-h, h],\ y \in [0, 1],$$

4. Динамическое свойство при $\tau \neq 0$:

$$\frac{\partial U(\tau, y_1, y_2)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 U(\tau, y_1, y_2)}{\partial y_1^2} + bU(\tau - h, y_1, y_2),$$

$$\tau \in (0, h),\ y_1, y_2 \in (0, 1),$$

5. Динамическое свойство при $\tau = 0$:

$$a\frac{\partial^2 U(0, y_1, y_2)}{\partial y_1^2} + bU(-h, y_1, y_2) = 0,$$

$$y_1 \in (0, 1),\ y_2 \in (0, y_1) \cup (y_1, 1),$$

6. Скачок производной вдоль прямой $y_1 = y_2$ при $\tau = 0$:

$$\frac{\partial U(0, y + 0, y)}{\partial y_1} - \frac{\partial U(0, y - 0, y)}{\partial y_1} = -\frac{1}{2a}, \quad y \in (0, 1),$$

7. Непрерывность производной при $\tau \neq 0$:

$$\frac{\partial U(\tau, y + 0, y)}{\partial y_1} = \frac{\partial U(\tau, y - 0, y)}{\partial y_1}, \quad \tau \in (0, h),\ y \in (0, 1).$$

В работе [4] было показано, что если функция $U(\tau, y_1, y_2)$ является матрицей Ляпунова, удовлетворяющей всем свойствам альтернативного определения 2, и функционал представлен в виде (2), то производная данного функционала вдоль решений системы (1) принимает вид квадратичной формы (3). Мы показали, что два представленных определения совместимы. Функция (4) из определения 1 удовлетворяет всем свойствам из определения 2. Ряд (4) абсолютно и равномерно сходится, однако этого недостаточно для проверки свойств из определения 2. Нами замечено, что (4) можно разбить на несколько частей, для некоторых из которых существует возможность почленного дифференцирования, а для остальных ряд можно суммировать явно, а затем уже дифференцировать полученную функцию. Таким образом, новое представление функции (4) позволяет доказать, что функция из определения 1 удовлетворяет альтернативному определению 2. Кроме того, стоит подчеркнуть, что альтернативное определение может помочь при вычислении матрицы Ляпунова. В дальнейшем систему свойств из определения 2 можно будет решить методами теории дифференциальных уравнений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10099, https://rscf.ru/project/23-71-10099/

1. *Kharitonov V.L.* Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Basel: Birkhauser, 2013.

2. *Othmer H.G., ed.* Nonlinear Oscillations in Biology and Chemistry // Proc. Univ. of Utah, May 9–11, 1985. Vol. 66. Dordrecht: Springer, 2013.

3. *Egorov A.V., Mondie S.* Stability criterion for delay equation via Lyapunov matrix // Vestn. St. Petersburg Univ., Ser. 10: Appl. Math. Comput. Sci. Control. 2013. No. 1. P. 106–115.

4. *Makoveeva P., Egorov A.* Lyapunov-Krasovskii functional with a prescribed derivative and Lyapunov matrix for delay system with distributed parameters // Under review for publication.

# К периодической краевой задаче для обобщения матричного уравнения Риккати с параметром

**О. А. Маковецкая**
*Могилев, Белорусско-Российский университет*
e-mail: olya.makzi@gmail.com

Исследуется краевая задача типа [1, 2]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + \lambda XQ(t)X + \lambda F(t, X), \tag{1}$$

$$X(0, \lambda) = X(\omega, \lambda), \tag{2}$$

где $(t, X) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $A, B, Q \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n}), F \in C(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что $Q(t) \not\equiv 0$, функция $F(t, X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X)\colon t \in I,\ \|X\| < \tilde{\rho}\}$ удовлетворяет относительно $X$ условию Липшица (локально), $F(t, 0) \not\equiv 0$; $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \le \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

При $Q(t) \equiv 0$, $\lambda = 1$ эта задача конструктивными методами [3] изучалась в [4, 5] и др.; в этом случае с помощью качественных методов задача (1), (2) в области $I \times \mathbb{R}^{n\times n}$ рассматривалась в работе [6]. Предлагаемая работа является продолжением и развитием [1, 2, 7, 8]. Задача (1), (2) исследуется в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t\in I} \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ — определенная норма матриц в этой алгебре, например, любая из норм, приведенных в [9].

Обозначения:

$$D_\rho = \{(t, X)\colon 0 \le t \le \omega, \|X\| \le \rho\},$$

$$M = \int_0^\omega A(\tau)d\tau,\ N = -\int_0^\omega B(\tau)d\tau,$$

$$\gamma = \|\Phi^{-1}\|,\ \alpha = \max_t \|A(t)\|,\ \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$\delta = \max_t \|Q(t)\|, \; h = \max_t \|F(t,0)\|, \; \varepsilon = |\lambda|,$$

$$q(\rho,\varepsilon) = q_1(\rho)\varepsilon + q_2(\rho), \; \varphi(\rho,\varepsilon) = \varphi_1(\rho)\varepsilon + \varphi_2(\rho),$$

$$q_1(\rho) = \gamma\delta\omega[(\alpha+\beta)\omega + 2]\rho + \gamma\omega L[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega],$$

$$q_2(\rho) = \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2,$$

$$\varphi_1(\rho) = \gamma\delta\omega[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega]\rho^2 + [1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega](L\rho + h)\gamma\omega,$$

$$\varphi_2(\rho) = \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2\rho, \; \varepsilon_1 = \frac{\rho - \varphi_2(\rho)}{\varphi_1(\rho)}, \; \varepsilon_2 = \frac{1 - q_2(\rho)}{q_1(\rho)},$$

$\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ — постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области $D_\rho$, $\Phi$ — линейный матричный оператор, $\Phi Z = MZ - ZN$, $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

**Теорема.** *Пусть выполнены условия: матрицы $M, N$ не имеют общих характеристических чисел, $\varphi_2(\rho) < \rho$, $q_2(\rho) < 1$. Тогда при $|\lambda| < \varepsilon_0$ решение задачи* (1), (2) *в области $D_\rho$ существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_C \le \varphi(\rho,\varepsilon)$.*

Для построения решения задачи (1), (2) предложен алгоритм с явной вычислительной схемой

$$X_{k+1}(t,\lambda) =$$

$$= \Phi^{-1}\Big\{ \int\limits_0^\omega A(\tau)d\tau \int\limits_\tau^t [A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda) + X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma) +$$

$$+\lambda X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda) + \lambda F(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda))]d\sigma +$$

$$+ \int\limits_0^\omega \Big( \int\limits_\tau^t [A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda) + X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma) + \qquad (3)$$

$$+\lambda X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda) + \lambda F(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda))]d\sigma\Big) B(\tau)d\tau -$$

$$-\int\limits_0^\omega [\lambda X_k(\tau,\lambda)Q(\tau)X_k(\tau,\lambda)+\lambda F(\tau,X_k(\tau,\lambda))]d\tau\Big\},\ k=1,2,\dots,$$

где $X_0=0,\ X_1=-\lambda\Phi^{-1}\int\limits_0^\omega F(\tau,0)d\tau$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (3), при этом получена оценка

$$\|X-X_{k+1}\|_C\le\frac{q\|X_{k+1}-X_k\|_C+q_2\|X_k-X_{k-1}\|_C}{1-q},\ k=1,2,\dots \tag{4}$$

Оценка (4) дополнена следующими соотношениями:

$$\|X_1-X_0\|_C\le\gamma\omega\varepsilon h;$$

$$\|X_2-X_1\|_C\le\frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\omega^2[(\alpha+\beta)\rho+\varepsilon h]+\gamma\omega(\varepsilon\delta\rho^2+\varepsilon L\rho),$$

которые позволяют выразить оценку (4) через исходные данные задачи.


1. *Маковецкая О.А.* Алгоритмы построения решений периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати // Весці нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 1. С. 43–50.

2. *Лаптинский В.Н., Маковецкая О.А.* Построение и структурные свойства решений периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнения Ляпунова и Риккати // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 7. С. 937–946.

3. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.

4. *Лаптинский В.Н., Маковецкий И.И., Пугин В.В.* Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати. Могилев: Белорусско-Российский университет, 2012.

5. *Лаптинский В. Н.* О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.

6. *Murty K.N., Howell G.W., Sivasundaram S.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems — exisence and uniqueness // J. of Anal. and Appl. 1992. Vol. 167. P. 505–515.

7. *Маковецкая О.А.* К конструктивному анализу периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати с параметром // Материалы междунар. науч. конф. “Еругинские чтения-2019”. Минск, 2019. Т. 1. С. 83–84.

8. *Маковецкая О.А.* Периодическая краевая задач для обобщенного матричного уравнения Риккати с параметром // XIV Белорусская математическая конференция, посвященная 65-летию Института математики НАН Беларуси, Минск, 2024. Часть 2. С. 55–56.

9. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

# Решение двухточечной краевой задачи для возмущенного матричного уравнения Риккати

**И. И. Маковецкий**
*Могилев, Белорусско-Российский университет*
e-mail: imi.makzi@gmail.com

Рассматривается задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t,X), \qquad (1)$$

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \qquad (2)$$

где $A, B, Q \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in C(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0,\omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t,X)\colon t \in I,\ \|X\| < \tilde\rho\}$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \le \infty$, функция $F(t,X)$ удовлетворяет в области $D_{\tilde\rho}$ условию Липшица относительно $X$ (локально), $M$ и $N$ — вещественные $n\times n$-матрицы. Следует отметить, что в работе [1] эта задача изучалась только при $Q(t) \equiv 0$, $\tilde\rho = \infty$.

При $Q(t) \equiv 0$ в работе [2] установлена принципиальная возможность получения алгоритмов с неявными вычислительными схемами построения приближенных решений задачи (1), (2) (в частности, периодической) в классе допустимых функций, то есть функций класса $C^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, которые подчинены условию (2).

Задача (1), (2) изучается, как и в [3], в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ — какая-либо норма матрицы в рамках определения этой алгебры.

Обозначения:

$$\tilde{H}(\omega) = \int_0^\omega H(\tau)d\tau,\ H \in \{A, B\},$$

$$D_\rho = \{(t, X)\colon t \in I,\ \|X\| \le \rho < \tilde{\rho}\},$$

$$R = M^{-1}(M\tilde{A}(\omega) - M - N),\ S = -\tilde{B}(\omega),$$

$$\Psi(t)X = A(t)X + XB(t),\ \Phi X = RX - XS,$$

$$m = \|M^{-1}(M+N)\|,\ \gamma = \|\Phi^{-1}\|,\ \alpha = \max_{t\in I}\|A(t)\|,$$

$$\beta = \max_{t\in I}\|B(t)\|,\ \delta = \max_{t\in I}\|Q(t)|,\ h = \max_{t\in I}\|F(t,0)|,$$

$$q = q(\rho) = \gamma\omega[(\alpha+\beta+2\delta\rho+L)(m+2^{-1}(\alpha+\beta)\omega) + 2\delta\rho + L],$$

$$p = \gamma\omega h(m + 2^{-1}(\alpha+\beta)\omega + 1),$$

где $L = L(\rho)$ — постоянная Липшица функции $F(t, X)$ в области $D_\rho$, при этом оператор $\Phi$ и при каждом $t \in I$ оператор $\Psi(t)$ — линейные операторы $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Данная работа дополняет результаты статей [2, 3] и развивает исследования [4] в рамках условия $\det M \ne 0$ в задаче (1), (2).

**Теорема.** *Пусть выполнены следующие условия:* $\det M \ne 0$, *матрицы $R$ и $S$ не имеют общих характеристических чисел, $q < 1$, $p/(1-q) \le \rho$.*

*Тогда в области $D_\rho$ решение $X = X(t)$ задачи* (1), (2) *существует и единственно. Это решение представимо в виде предела равномерно сходящейся на отрезке $I$ последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением с неявной вычислительной схемой и удовлетворяющих условию* (2), *при этом справедлива оценка $\|X\|_C \le p/(1-q)$.*

По аналогии с [3] вводится оператор

$$\mathcal{L}(X(t),Y(t)) =$$
$$= M^{-1}(M+N)\int_t^{\omega}(\Psi(\tau)X(\tau)+Y(\tau)Q(\tau)Y(\tau)+F(\tau,Y(\tau)))d\tau+$$
$$+\int_0^{\omega}[K_A(t,\tau)(\Psi(\tau,X(\tau)+Y(\tau)Q(\tau)Y(\tau)+F(\tau,Y(\tau)))+$$
$$+(\Psi(\tau)X(\tau)+Y(\tau)Q(\tau)Y(\tau)+F(\tau,Y(\tau)))K_B(t,\tau)]d\tau-$$
$$-\int_0^{\omega}\big(Y(\tau)Q(\tau)Y(\tau)+F(\tau,Y(\tau))\big)d\tau,$$

где

$$K_H(t,\tau)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\tau}H(\sigma)d\sigma,\ 0\le\tau\le t\le\omega,\\ \displaystyle-\int_{\tau}^{\omega}H(\sigma)d\sigma,\ 0\le t<\tau\le\omega,\end{cases}$$
$$\mathcal{L}\colon C(I,\mathbb{R}^{n\times n})\to C^1(I,\mathbb{R}^{n\times n}).$$

Согласно предположению, матрицы $R$ и $S$ не имеют общих характеристических чисел, поэтому на основании [5] линейный оператор $\Phi$ однозначно обратим. Тогда можно установить, что задача (1), (2) эквивалентна интегральному уранению $X(t) = \Phi^{-1}\mathcal{L}(X(t),X(t))$.

Для построения решения разработан алгоритм типа [2, 3]

$$X_k(t)=\Phi^{-1}\mathcal{L}(X_k(t),X_{k-1}(t)),$$

где в качестве начальной функции $X_0$ может быть взята любая функция из пространства $C(I,\mathbb{R}^{n\times n})$ такая, что $\|X_0\|_C\le\rho$. По аналогии с [3] можно установить, что приближения $\{X_k(t)\}_0^{\infty}$ являются допустимыми, а также доказать, что все члены последовательности $\{X_k(t)\}_0^{\infty}$ однозначно определяются алгоритмом (3) и принадлежат шару $\|X\|_C\le\rho$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма, при этом получены оценки

$$\|X-X_m\|_C\le\frac{\tilde{q}^m\|\Delta_0\|_C}{1-\tilde{q}},\ \|X\|_C\le\|X_0\|_C+\frac{\|\Delta_0\|_C}{1-\tilde{q}},\qquad(4)$$

где

$$\tilde{q} = \frac{q - \tilde{q}_1}{1 - \tilde{q}_1} < q,$$

$$\tilde{q}_1 = \gamma(\alpha+\beta)\omega[m + 2^{-1}(\alpha+\beta)\omega] < q.$$

Как и в работе [3], при $X_0 = 0$ оценки (4) существенно упрощаются, а именно

$$\|X - X_m\|_C \le \frac{\tilde{q}^m}{1-\tilde{q}} \frac{p}{1-\tilde{q}_1}, \quad \|X\|_C \le \frac{p}{1-q}.$$


1. *Murty K.N., Howell G.W., Sivasundaram S.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems — exisence and uniqueness // J. of Anal. and Appl. 1992. Vol. 167. P. 505–515.

2. *Лаптинский В.Н., Маковецкий И.И.* К построению решения двухточечной краевой задачи для нелинейного матричного уравнения Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 1. С. 137–141.

3. *Маковецкий И.И.* К построению решения двухточечной краевой задачи для матричного уравнения ляпуновского типа // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 3. С. 429–432.

4. *Лаптинский В.Н., Маковецкий И.И., Пугин В.В.* Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати. Могилев: Белорусско-Российский университет, 2012.

5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 1967.


# Теория абстрактного функционально-дифференциального уравнения и системы с дробной производной


**В. П. Максимов**

*Пермь, Пермский государственный национальный исследовательский университет*

e-mail: maksimov@econ.psu.ru


Разработанная руководителями Пермского Семинара Николаем Викторовичем Азбелевым и Линой Фазыловной Рахматуллиной теория абстрактного функционально-дифференциального уравнения (АФДУ) [1] изучает уравнения/системы с фазовым пространством $\mathbf{D}$, изоморфным прямому произведению банахова пространства $B$ и конечномерного пространства $\mathbb{R}^m$ ($\mathbf{D} \simeq B \times \mathbb{R}^m$). В рамках общей теории АФДУ получены результаты о краевых задачах, задачах управления, вариационных задачах и задачах устойчивости решений. Центральная идея приложений теории АФДУ состоит в рациональном выборе пространства $\mathbf{D}$ для каждого конкретного класса моделей и каждой из упомянутых задач. Такой выбор при наличии общей теории позволяет применять стандартные схемы и теоремы анализа к задачам, исследование которых требовало ранее индивидуального подхода и специальных построений. Значительная свобода выбора пространства $\mathbf{D}$ позволила к настоящему моменту охватить содержательными результатами следующие классы функционально-дифференциальных уравнений с обыкновенными производными целого порядка: системы с последействием, сингулярные системы, системы с импульсным воздействием, гибридные системы [2, 3].

В последние 5-10 лет обращает на себя внимание активный и неослабевающий интерес исследователей к уравнениям с дробными производными, находящим самые разнообразные приложения. В последнее время появляются работы о применении моделей с дробными производными в задачах экономической динамики. Представляется целесообразным развитие теории уравнений с дробными производными на основе теории АФДУ применительно к краевым задачам и задачам управления. Ниже описывается класс систем с дробной производной Капуто, для которого получены результаты о разрешимости краевых задач и задач управления.

Пусть $\mathbf{L}_\infty$ — пространство измеримых и ограниченных в существенном функций $z\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|z\|_{\mathbf{L}_\infty} = \operatorname{vraisup}(|z(t)|_{\mathbb{R}^n} : t \in [0,T]),$$

$\mathbf{AC}_\infty$ — пространство абсолютно непрерывных функций $y\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ с ограниченной в существенном производной $\dot{y}$ и нормой

$$\|y\|_{\mathbf{AC}_\infty} = \|\dot{y}\|_{\mathbf{L}_\infty} + |y(0)|_{\mathbb{R}^n}.$$

Зафиксируем дискретный набор точек $t_k \in (0,T)$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < T$. Рассмотрим пространство $\mathbf{DS}_\infty(m)$ функций $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$, представимых в виде

$$x(t) \,=\, \int_0^t z(s)\,ds \,+\, x(0) \,+\, \sum_{k=1}^m \chi_{[t_k,T]}(t)\Delta x(t_k),$$

где $z \in \mathbf{L}_\infty$, $\Delta x(t_k) = x(t_k) - x(t_k - 0)$, $\chi_{[t_k,T]}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[t_k, T]$.

Обозначим через $\mathcal{D}^\alpha\colon \mathbf{DS}_\infty(m) \to \mathbf{L}_\infty$ оператор дробного дифференцирования Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$ (см., например, [4]):

$$(\mathcal{D}^\alpha x)(t) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{(t-s)^\alpha}\,ds,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — Гамма-функция Эйлера.

Рассмотрим систему

$$\mathcal{D}^\alpha x \,=\, \mathcal{T}x \,+\, f, \tag{1}$$

где $\mathcal{T}\colon \mathbf{DS}_\infty(m) \to \mathbf{L}_\infty$ — линейный ограниченный вольтерров оператор, $f \in \mathbf{L}_\infty$.

В докладе предлагаются теоремы об условиях разрешимости краевых задач и задач имульсного управления для системы (1). Здесь мы ограничимся теоремой об однозначной разрешимости общей линейной краевой задачи для системы (1) с краевыми условиями

$$\ell x \,=\, \beta \in \mathbb{R}^{n+mn}, \tag{2}$$

где $\ell\colon \mathbf{DS}_\infty(m) \to \mathbb{R}^{n+mn}$ — линейный ограниченный вектор-функционал.

В [5] показано, что при естественных ограничениях относительно оператора $\mathcal{T}$ абсолютно непрерывное решение системы (1) с нулевым начальным значением имеет представление

$$x(t) \,=\, (Cf)(t) \,=\, \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds,$$

где $C(t,s)$ — матрица Коши.

Введем обозначения

$$\mathcal{A}^k(t) = (\mathcal{T}(E\chi_{[t_k,T]}))(t), \quad k = 0, \dots, m;$$

$$X^k(t) \;=\; \chi_{[t_k,T]}(t)E \;+\; \int_0^t C(t,s)\mathcal{A}^k(s)\,ds, \quad k = 0, \dots, m.$$

**Теорема.** *Необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости краевой задачи* (1), (2) *является обратимость* $(n + mn) \times (n + mn)$*-матрицы*

$$\Lambda \;=\; (\ell X^0, \ell X^1, \dots, \ell X^m).$$


1. *Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F.* Theory of linear abstract functional differential equations and applications // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1996. Vol. 8. P. 1–102.
2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерн. иссл., 2002.
3. *Bravyi E.I., Maksimov V.P., Simonov P.M.* Some economic dynamics problems for hybrid models with aftereffect // Mathematics. 2020. Vol. 8. Art. no. 1832.
4. *Нахушев А.И.* Элементы дробного исчисления и их приложения. Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2000.
5. *Максимов В.П.* Матрица Коши для системы с дробной производной и последействием // Прикладная математика и вопросы управления. 2024. № 3. С. 53–63.


# О точных оценках экспоненциально устойчивых дифференциально-разностных уравнений


**В. В. Малыгина**

*Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

e-mail: mavera@list.ru


Определение экспоненциальной устойчивости для линейных дифференциальных уравнений с последействием есть обобщение классического определения экспоненциальной устойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Оно означает существование таких постоянных $N, \gamma > 0$, что для любого решения, определяемого начальной функцией $\varphi$, справедлива оценка $|x(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}\|\varphi\|$. Число $\gamma$ характеризуют скорость, с которой решение стремится к нулю. Вычисление или точная его оценка — сложная задача. Тем не менее, решать ее необходимо, т. к. без этого вопрос об экспоненциальной устойчивости уравнений с последействием не может считаться исследованным до конца.

Рассмотрим дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) + \sum_{j=0}^{J} b_j (S_{h_j} x)(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $b_j \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant h_0 < h_1 < \ldots < h_J$, $J \in \mathbb{N}_0$, функция внешнего возмущения $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ предполагается суммируемой на каждом конечном отрезке, а $S_h$ — *оператор сдвига*, действующий в пространстве непрерывных (кусочно-непрерывных, суммируемых) функций по правилу

$$(S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h \geqslant 0, \\ 0, & t-h < 0; \end{cases}$$

для $h = 1$ примем обозначение $S_1 = S$.

Под *решением* уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, удовлетворяющую (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

Как известно [1, с. 84], уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t-s) f(s) ds, \tag{2}$$

где $X$ называется *фундаментальным решением.* Его удобно считать заданным на всей оси, доопределив нулем на отрицательной полуоси.

При исследовании устойчивости уравнения (1) оказывается полезной функция

$$g(p) = p + \sum_{j=0}^{J} b_j e^{-ph_j}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Эту функцию назовем *характеристическим квазиполиномом.*

Уравнение (1) назовем *экспоненциально устойчивым*, если существуют такие постоянные $N, \gamma > 0$, что при всех $t \geqslant 0$ справедлива экспоненциальная оценка $|X(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}$.

Для фундаментального решения уравнения (1) существует предел [2]:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln|X(t)|}{t} = -\omega < \infty. \tag{3}$$

Назовем число $\omega$ *точным показателем фундаментального решения.* Очевидно, что уравнение (1) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда $\omega > 0$. Следующие две теоремы дают идею вычисления точного показателя фундаментального решения.

**Теорема 1.** *Точный показатель фундаментального решения уравнения* (1) *равен* $\omega$ *тогда и только тогда, когда равен нулю точный показатель фундаментального решения уравнения*

$$\dot{y}(t) - \omega y(t) + \sum_{k=0}^{K} b_k e^{\omega h_k} (S_{h_j} y)(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

**Теорема 2.** *Пусть* $\omega$ *— точный показатель уравнения* (1)*. Фундаментальное решение уравнения* (1) *имеет экспоненциальную оценку с показателем* $\gamma = \omega$ *тогда и только тогда, когда характеристический квазиполином уравнения* (4) *не имеет нулей в открытой правой полуплоскости, а корни, лежащие на мнимой оси, простые.*

Применение теоремы 2 эффективно, если для уравнения (4) известен коэффициентный (аналитический или геометрический) критерий устойчивости: зная границы области устойчивости, мы строим поверхность, которая (возможно, в неявном виде) выражает точный показатель $\omega$ через параметры исходного уравнения.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + (a + ib)(Sx)(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

в котором $a, b \in \mathbb{R}$. Выбор запаздывания $h = 1$ не является ограничением, т.к. любое уравнение с одним ненулевым запаздыванием $h$ может быть сведено к виду (6) заменой аргумента $t \mapsto th$. Запишем для данного примера уравнение (4)

$$\dot{y}(t) - \omega y(t) + (a + ib)e^{\omega}(Sy)(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

и воспользуемся тем, что для этого уравнения известен [3, 4] критерий экспоненциальной устойчивости и построена область устойчивости.

В пространстве $O\xi\eta\zeta$ зададим семейство однозначно определенных поверхностей $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ равенствами $\xi = (\theta \sin\theta + \zeta\cos\theta)e^{-\zeta}$, $\eta = (\theta\cos\theta - \zeta\sin\theta)e^{-\zeta}$, $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$, где $\theta_0 \in (0, \pi)$ — корень уравнения $\zeta = \theta\,\mathrm{ctg}\theta$. График поверхности $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ при $\zeta > 0$ имеет вид криволинейного конуса с вершинами в точках $(e^{-1}, 0, 1)$.

**Теорема 3.** *Если уравнение* (5) *экспоненциально устойчиво, то его точный показатель определяется равенством* $\omega = \zeta(a, b)$.

**Теорема 4.** *Пусть уравнение* (5) *экспоненциально устойчиво и* $a + ib \neq e^{-1}$. *Тогда для фундаментального решения уравнения* (5) *справедлива оценка* $|X(t)| \leqslant Ne^{-\omega t}$, *где* $\omega = \zeta(a, b)$.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, проект FSNM–2023–0005.

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

2. *Зубов В.И.* К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Матем. 1958. № 6. С. 86–95.

3. *Рехлицкий З.И.* Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве // ДАН СССР. 1956. Т. 111, № 1. С. 29–32.

4. *Khokhlova T., Kipnis M., Malygina V.* The stability cone for a delay differential matrix equation // Appl. Math. Lett. 2011. Vol. 24, no. 5. P. 742–745.

# О мажорантах старшего показателя Ляпунова неограниченных систем

**Н. Л. Марголина**, **К. Е. Ширяев**
*Кострома, ФГБОУ ВО Костромской государственный университет*
e-mail: nmargolina@mail.ru, shiryaev4@yandex.ru

Для любого натурального $n$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

где функция $A\colon \mathbf{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbf{R}^n$ непрерывна или кусочно-непрерывна, $x \in \mathbf{R}^n$. Оператор Коши системы (1) обозначим $X_A(\cdot\,,\cdot)$.

Старший показатель Ляпунова системы (1) задается формулой [1]

$$\lambda_1(A) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\ln\|X_A(t,0)\|}{t}.$$

Верхний центральный и верхний особый показатели определяются дискретным способом [2] соответственно как

$$\Omega_d(A) = \inf_{T>0} \varlimsup_{m\to+\infty} \frac{1}{mT}\sum_{j=1}^{m} \ln\|X_A(jT,(j-1)T)\|,$$

$$\Omega_d^0(A) = \inf_{T>0} \sup_{m\in\mathrm{N}} \frac{1}{T}\ln\|X_A(mT,(m-1)T)\|.$$

Эти же показатели в [2] определяются методом стекловских усреднений соответственно как

$$\Omega(A) \equiv \inf_{T>0} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{tT}\int\limits_0^t \ln\|X_A(\tau+T,\tau)\|d\tau,$$

$$\Omega^0(A) = \inf_{T>0} \sup_{t>0} \frac{1}{T} \ln \|X_A(t+T,t)\|$$

В [2] указано, что в случае интегрально-ограниченной оператор-функции $A(t)$, т.е. если $\sup\limits_{t\geq 0} \int\limits_t^{t+1} \|A(\tau)\| d\tau \leq M$, всегда выполняются соотношения $\lambda_1(A) \leq \Omega^0(A) = \Omega_d^0(A)$ и $\lambda_1(A) \leq \Omega(A) = \Omega_d(A)$, причем знак inf в формулах центрального и особого показателей может быть заменен на предел при $T \to +\infty$. То есть верхние центральный и особый показатели являются мажорантами старшего показателя Ляпунова.

**Теорема 1.** *Для любой системы вида* (1) *с интегрально-неограниченной функцией* $A(t)$ *верхний особый показатель* $\Omega^0(A)$, *определяемый методом стекловских усреднений, является мажорантой старшего показателя Ляпунова.*

**Теорема 2.** *Верхний центральный показатель, определяемый методом стекловских усреднений и дискретным способом, верхний особый показатель, определяемый дискретным способом, систем вида* (1) *с интегрально-неограниченной функцией* $A(t)$ (*показатели* $\Omega(A), \Omega_d(A), \Omega_d^0(A)$ ) *не являются, вообще говоря, мажорантами старшего показателя Ляпунова.*


1. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

2. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

# Аналитические по малому параметру решения слабо нелинейных краевых задач теории упругости

**Д. А. Маслов**
*Москва, Национальный исследовательский университет «МЭИ»*
e-mail: maslovdma@mpei.ru

Ряд нелинейных стационарных задач теории упругости может быть представлен в виде дифференциального уравнения в банаховом пространстве [1], обозначим его $E$, в котором линейный оператор возмущается полилинейным оператором следующим образом

$$Au = \varepsilon B(Gu, Hu, Hu) + f, \tag{1}$$

где $\varepsilon$ — малый параметр; $A$ — линейный неограниченный оператор; $B : E \times E \times E \to E$ — полилинейный ограниченный оператор (3-линейный оператор); линейные операторы $G$ и $H$ могут быть как ограниченными, так и неограниченными; функция $f \in E$.

Пусть выполнено условие ($\alpha$):
*Оператор $A$ является замкнутым неограниченным оператором с областью определения $D_A$ и имеет непрерывный обратный оператор $A^{-1}$.*

Будем искать решение уравнения (1) в виде ряда по степеням малого параметра

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots + \varepsilon^n u_n + \ldots. \tag{2}$$

Ставится задача определить достаточные условия, при которых ряд (2) является сходящимся к решению задачи (1), и, таким образом, представляет аналитическое по малому параметру решение задачи (1).

Аналитичность решений при возмущении операторов играет важную роль как в теории дифференциальных уравнений с малым параметром, так и в задачах математической физики, и в линейном случае подробно описана в [2, 3]. В данной работе рассматривается нелинейная задача.

Используя правило Коши перемножения рядов с методом неопределенных коэффициентов и условие $(\alpha)$, определим коэффициенты ряда (2):

$$u_0 = A^{-1} f,$$

$$u_1 = A^{-1} B(Gu_0, Hu_0, Hu_0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_n = A^{-1} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{k} B(Gu_{n-1-k}, Hu_j, Hu_{k-j}) \right) \right],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Доказаны теоремы об аналитической зависимости от малого параметра $\varepsilon$ решения уравнения (1), представимого рядом (2).

**Теорема 1.** *Если выполнено условие* $(\alpha)$ *и операторы* $G$ *и* $H$ *являются ограниченными, то уравнение* (1) *имеет единственное аналитическое в точке* $\varepsilon = 0$ *решение.*

**Теорема 2.** *Если выполнено условие* $(\alpha)$ *и операторы* $G$ *и* $H$ *являются замкнутыми неограниченными с областями определения* $D_G \supset D_A$, $D_H \supset D_A$, *то уравнение* (1) *имеет единственное аналитическое в точке* $\varepsilon = 0$ *решение.*

**Пример.** Рассмотрим краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения статической балки [4]:

$$\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} = \varepsilon \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} \left( \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \right)^2 + f, \qquad x \in (0,1), \tag{3}$$

с краевыми условиями жёсткого закрепления

$$u(0) = \frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x} = u(1) = \frac{\mathrm{d}u(1)}{\mathrm{d}x} = 0, \tag{4}$$

где функция $u(x)$ описывает нормализованный прогиб балки, $f(x)$ — функция распределённой нагрузки, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, характеризующий нелинейные свойства материала балки.

Записывая задачу (3), (4) в банаховом пространстве непрерывных функций $C([0,1])$ в операторном виде, соответствующем (1), получим:

$A = \dfrac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}$, $D_A = \{v(x) \in C^4([0,1]),\ v(0) = \dfrac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}x} = v(1) = \dfrac{\mathrm{d}v(1)}{\mathrm{d}x} = 0\}$,

$G = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$, $D_G = \{v(x) \in C^2([0,1]),\ v(0) = v(1) = 0\}$,

$H = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $D_H = \{v(x) \in C^1([0,1]),\ v(0) = v(1)\}$.

Оператор $A$ является непрерывно обратимым, операторы $G$ и $H$ являются замкнутыми неограниченными, области определения $D_A \subset D_G \subset D_H$. Тогда, согласно теореме 2, краевая задача (3), (4) имеет единственное аналитическое в точке $\varepsilon = 0$ решение, представимое в виде ряда (2), коэффициенты которого можно получить, используя функцию Грина $G(x,\xi)$ задачи (3), (4), записанной при $\varepsilon = 0$,

$$u_0(x) = \int\limits_0^1 G(x,\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi,$$

$$u_1(x) = \int\limits_0^1 G(x,\xi) \frac{\mathrm{d}^2 u_0}{\mathrm{d}\xi^2} \left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 \mathrm{d}\xi,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n(x) = \int\limits_0^1 G(x,\xi) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{d}^2 u_{n-1-k}}{\mathrm{d}\xi^2} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}\xi} \frac{\mathrm{d}u_{k-j}}{\mathrm{d}\xi}\right) \mathrm{d}\xi,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Описанный алгоритм может также использоваться без определения функции Грина с применением численных методов для построения приближённых решений.


1. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
4. *Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

# Абсолютная асимптотическая устойчивость дробно-дифференциального уравнения с запаздыванием

**М. В. Мулюков**
*Пермь, Пермский государственный национальный исследовательский университет*
e-mail: mulykoff@gmail.com

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение

$$({}^C D^\alpha x)(t) + ax(t) + bx(t-h) = 0, \tag{1}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $h > 0$. При $\alpha \in (0;1)$ численный анализ этого уравнение рассматривался в [1]. В настоящей работе рассмотрен случай $\alpha \in (1;2)$. Символом ${}^C D^\alpha$ обозначена дробная производная по Капуто:

$$({}^C D^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(s)}{(t-s)^{\alpha-1}}\, ds.$$

Для корректной постановки задачи Коши для уравнения (1) требуется задать начальные значения $x(0) = \beta$, $\dot{x}(0) = \gamma$ и начальную функцию $\psi = \psi(t)$ на интервале $[-h, 0)$.

**Определение 1.** Уравнение (1) называется *асимптотически устойчивым*, если $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = 0$ для любых вещественных $\beta, \gamma$ и любой суммируемой функции $\psi$.

Заметим, что эквивалентное определение асимптотической устойчивости можно сформулировать в терминах матрицы Коши (см. [2]).

**Определение 2.** Уравнение (1) называется *абсолютно асимптотически устойчивым*, если оно асимптотически устойчиво для любого $h > 0$.

**Теорема.** *Для того, чтобы уравнение* (1) *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно выполнения неравенства*

$$a > |b| \sin\frac{\alpha\pi}{2}.$$

*Доказательство.* Применение преобразования Лапласа приводит к характеристической функций:

$$F(z) = z^\alpha + a + be^{-hz}.$$

Как известно [1, 3], для того, чтобы уравнение (1) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все корни функции $F$ лежали слева от мнимой оси.

Воспользуемся методом $D$-разбиения: подставим в $F(z) = 0$ корень на мнимой оси $z = i\varphi$:

$$\varphi^\alpha e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} + a + be^{-i\varphi} = 0.$$

Разделим вещественную и мнимую части последнего уравнения, получаем систему:

$$\begin{cases} \varphi^\alpha \cos\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right) + a + b\cos(\varphi h) = 0, \\ \varphi^\alpha \sin\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right) + b\sin(\varphi h) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Предварительно разрешив (2) относительно $a$ и $b$ и исключив $h$ из (2), перепишем данную систему в эквивалентном виде (3), (4):

$$-\frac{a}{b}\sin\frac{\alpha\pi}{2} = \sin\left(\varphi h + \frac{\alpha\pi}{2}\right), \tag{3}$$

$$\varphi^{2\alpha} + p\varphi^\alpha + q = 0, \tag{4}$$

где $p = 2a\cos(\alpha\pi/2)$ и $q = a^2 - b^2$.

Рассмотрим (4) как квадратное уравнение относительно $\varphi^\alpha$. Его дискриминант равен $D = 4b^2 - 4a^2\sin^2(\alpha\pi/2)$.

Разобьём плоскость $(a, b)$ на три пересекающихся множества:

$$\Omega_1 = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \quad a + b \le 0\right\}.$$

$$\Omega_2 = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \quad a > |b| \operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2}\right\},$$

$$\Omega_3 = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \quad b > 0, \quad -b < a \le b\operatorname{cosec}\frac{\alpha\pi}{2}\right\}.$$

Рассмотрим четыре альтернативных случая.

1) Пусть $a + b \leq 0$. Тогда $F(0) \leq 0$ и $\lim\limits_{z\to+\infty} F(z) = +\infty$ при $z \in \mathbb{R}$. Следовательно, функция $F$ имеет положительный вещественный корень.

2) Пусть $|b| < |a| \sin(\alpha\pi/2)$. Тогда $D < 0$ и система (3) неразрешима в области $\Omega_1$, и, следовательно, количество корней справа от мнимой оси остаётся постоянным.

3) Пусть $b > |a|$. Тогда $q < 0$, поэтому уравнение (4) имеет ровно один положительный корень.

4) Пусть $a > 0$ и $a \sin(\alpha\pi/2) \geq b \geq a$. Тогда $p < 0$, поэтому уравнение (4) имеет хотя бы один положительный корень.

Область $\Omega_2$ содержит точки $b = 0$, $a > 0$. Докажем, что для таких точек все корни функции $F$ лежат слева от мнимой оси:

$$F(z) = (z^{\alpha/2} + i\sqrt{a})(z^{\alpha/2} - i\sqrt{a}). \tag{5}$$

Известно [4], что все корни уравнения $z^\delta + \lambda = 0$, где $0 < \delta < 1$, лежат слева от мнимой оси в том и только том случае $|\arg\lambda| > \pi\delta/2$.

Для обоих множителей уравнения (5) это условие выполняется:

$$\left|\arg(\pm i\sqrt{a})\right| = \frac{\pi}{2} > \frac{\pi\alpha}{4}.$$

В области $\Omega_3$ выполняеются условия 3) и 4). Обозначим через $\varphi^*$ положительный корень уравнения (4). Подставив $\varphi = \varphi^*$ в уравнение (3), разрешим его относительно $h$ — при этом значении $h$ функция $F$ имеет корень $\pm i\varphi^*$.

Если $(a, b) \in \Omega_1$, то уравнение (1) при любых значениях $h$ не является асимптотически устойчивым,

Если $(a, b) \in \Omega_2$, то при любых значениях $h > 0$ уравнение (1) асимптотически устойчиво,

Если $(a, b) \in \Omega_3$, то существует $h$, при котором уравнение (1) не является асимптотически устойчивым. □


1. *Brandibur O., Kaslik E.* Analytical and numerical methods for the stability analysis of linear fractional delay differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2012. Vol. 236, no. 16. P. 4027–4041.

2. *Максимов В.П.* Матрица Коши для системы с дробной производной и последействием // Прикладная математика и вопросы управления. 2024. № 3. С. 53–63.

3. *Brandibur O., Kaslik E.* Stability analysis of multi-term fractional-differential equations with three fractional derivative // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2021. Vol. 495, iss. 2. Art. no. 124751.

4. *Matignon D.* Stability Results For Fractional Differential Equations With Applications To Control Processing // Computational Engineering in Systems Applications. 1996. P. 963–968.

# Примеры решения дифференциальных уравнений, содержащих функцию Хевисайда, $\delta$-функцию Дирака и их производные

**О. А. Мыльцина**, **Д. Д. Шабанова**

*Саратов, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

e-mail: omyltcina@yandex.ru, shabanovadaria04@gmail.com

Решение дифференциальных уравнений, содержащих функцию Хевисайда и ее производные, связано с трудностями интегрирования произведений таких функций на аналитические. В [1] описано несколько способов решения таких сингулярных дифференциальных уравнений, при которых получаются замкнутые интегралы. В работе показан один из методов решения уравнений, при котором получается аналитическое решение.

Цель работы: показать аналитический метод решения дифференциальных уравнений, содержащих функции Хевисайда и ее производные.

**Пример 1.** Решить сингулярное дифференциальное уравнение

$$y'' + k^2 y H(x - x_1) = q. \tag{1}$$

Здесь $k$, $q$ — константы.

Общий вид решения:

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)H(x_1 - x_2). \tag{2}$$

Найдем производные 1-ого и 2-ого порядков в решении (2) и подставим в (1). Получим:

$$\begin{gathered} y_1'' + (y_2'' - y_1'')H + \delta(x - x_1)(y_2'(x_1) - y_1'(x_1)) + \\ +\delta'(x - x_1)(y_2(x_1) - y_1(x_1)) + k^2 y_2 H(x - x_1) = q. \end{gathered} \tag{3}$$

Из уравнения (3) получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} y_1'' = q, \\ y_2'' - y_1'' + k^2 y_2 = 0, \end{cases} \tag{4}$$

и условия сопряжения:

$$\begin{cases} y_2'(x_1) = y_1'(x_1), \\ y_2(x_1) = y_1(x_1). \end{cases} \tag{5}$$

Решение системы (4) имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = C_1 x + C_2 + \dfrac{qx^2}{2}, \\ y_2 = D_1 \cos(kx) + D_2 \sin(kx) + \dfrac{q}{k^2}. \end{cases} \tag{6}$$

Через условия сопряжения выразим константы $C_1$ и $C_2$ через $D_1$ и $D_2$. Из

$$\begin{cases} C_1 + qx_1 = -D_1 k \sin(kx_1) + D_2 k \cos(kx_1), \\ C_1 x_1 + C_2 + \dfrac{qx_1^2}{2} = D_1 \cos(kx_1) + D_2 \sin(kx_1) + \dfrac{q}{k^2}, \end{cases}$$

получим

$$\begin{gathered} C_1 = -D_1 k \sin(kx_1) + D_2 k \cos(kx_1) - qx_1, \\ C_2 = D_1(\cos(kx_1) + kx_1 \sin(kx_1)) + \\ +D_2(\sin(kx_1) - kx_1 \cos(kx_1)) + \frac{q}{k^2} + \frac{qx_1^2}{2}. \end{gathered} \tag{7}$$

Решение (2) при виде (6) для $y_1$ и $y_2$ с коэффициентами (7) примет вид:

$$y = D_1\Big(k\sin(kx_1)(x_1-x)+\cos(kx_1)+$$

$$+\big(\cos(kx)-\cos(kx_1)+k\sin(kx_1)(x-x_1)\big)H(x-x_1)\Big)+$$

$$+D_2\Big(\sin(kx)+\cos(kx_1)(x-x_1)+$$

$$+\big(\sin(kx)-\sin(kx_1)+\cos(kx_1)(x_1-x)\big)H(x-x_1)\Big).$$

**Пример 2.** Найти фундаментальную систему решений для ДУ

$$y''+k^2y+\delta(x-x_1)y+H(x-x_2)y'=0. \tag{9}$$

Здесь $x_2>x_1$. Общий вид решения:

$$y=y_1+(y_2-y_1)H(x_1-x_2)+(y_3-y_2)H(x-x_2). \tag{10}$$

Найдем производные 1-го и 2-го порядков решения (10), подставим в (9) и получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1''+k^2y_1=0,\\ y_2''+k^2y_2=0,\\ y_3''+y_3'+k^2y_3=0 \end{cases} \tag{11}$$

и условия сопряжения:

$$\begin{cases} y_2(x_1)-y_1(x_1)=0,\\ y_3(x_2)-y_2(x_2)=0.\\ y_3'(x_2)-y_2'(x_2)=0,\\ y_2'(x_1)-y_1'(x_1)+y_1(x_1)=0. \end{cases} \tag{12}$$

Решения системы (11) при $k=1$ имеет вид:

$$\begin{cases} y_1=A_1\cos x+A_2\sin x,\\ y_2=B_1\cos x+B_2\sin x,\\ y_3=C_1e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+C_2e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right). \end{cases} \tag{13}$$

Подставим в условия сопряжения (12) полученные выражения (13), произведем алгебраические преобразования и получим представление коэффициентов $A_i$ и $B_i$ через $C_i$ в виде

$$B_1 = C_1 e^{-\frac{x_2}{2}} \left( \cos \frac{\sqrt{3}x_2}{2} \cos x_2 + \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}x_2}{2} \right) \sin x_2 \right) +$$

$$+ C_2 e^{\frac{x_2}{2}} \left( \sin \frac{\sqrt{3}x_2}{2} \cos x_2 + \sin \left( \frac{\sqrt{3}x_2}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \sin x_2 \right);$$

$$B_2 = C_1 e^{-\frac{x_2}{2}} \left( \cos \frac{\sqrt{3}x_2}{2} \sin x_2 - \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}x_2}{2} \right) \cos x_2 \right) +$$

$$+ C_2 e^{\frac{x_2}{2}} \left( \sin \frac{\sqrt{3}x_2}{2} \sin x_2 + \sin \left( \frac{\sqrt{3}x_2}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \cos x_2 \right); \qquad (14)$$

$$A_1 = B_1 (1 - \cos x_1 \sin x_1) - B_2 \sin^2 x_1;$$

$$A_2 = B_1 \cos^2 x_1 + B_2 (1 + \sin x_1 \cos x_1).$$

Таким образом, подстановка (13) и (14) в решение (10) и соответствующих преобразований приводит к аналитическому решению дифференциального уравнения.

В работах [2] и [3] приведены решения задач, при решении которых появляются дифференциальные уравнения, содержащие функции Хевисайда и ее производные.


1. *Белосточный Г.Н.* Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // Доклады академии военных наук. 1999. № 1. С. 14–26.

2. *Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А.* К вопросу статической устойчивости композиции из различных, по геометрическим свойствам, оболочек вращения // Доклады академии военных наук. 2012. № 5 (54). С. 21–25.

3. *Гук К.О., Мыльцина О.А.* Метод решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в виде функции Хевисайда // Труды Московского физико-технического института (национального исследовательского университета). 2021. Т. 13, № 3 (51). С. 41–47.

# К вопросу о существовании периодических решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

**А. Н. Наимов**
*Вологда, ВоГУ*
e-mail: naimovan@vogu35.ru

В работе исследован вопрос о существовании $\omega$-периодических решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x' = Q(x, y),\ y' = P(x, y) + f(t, x, y),\ t \in \mathrm{R},\ x \in \mathrm{R}^{n_1},\ y \in \mathrm{R}^{n_2}. \quad (1)$$

Здесь $\mathrm{R} = (-\infty, +\infty)$, $n_1$, $n_2$ — натуральные числа, отображения $Q\colon \mathrm{R}^{n_1+n_2} \mapsto \mathrm{R}^{n_1}$, $P\colon \mathrm{R}^{n_1+n_2} \mapsto \mathrm{R}^{n_2}$, $f\colon \mathrm{R}^{1+n_1+n_2} \mapsto \mathrm{R}^{n_2}$ непрерывны и при некоторых $m > 1$, $\omega > 0$ удовлетворяют следующим условиям:
1) $P(\lambda y_1, \lambda y_1) \equiv \lambda^m P(y_1, y_2)$ при всех $\lambda > 0$ (условие положительной однородности);
2) $(|y_1| + |y_2|)^{-m} |Q(y_1, y_2)| \to 0$ при $|y_1| + |y_2| \to \infty$;
3) $f(t + \omega, y_1, y_2) \equiv f(t, y_1, y_2)$;
4) $(|y_1| + |y_2|)^{-m} \max\limits_{t\in[0,\omega]} |f(t, y_1, y_2)| \to 0$ при $|y_1| + |y_2| \to \infty$.
В системе уравнений (1) слагаемое $P(x, y)$ считается главной нелинейной частью, а $f(t, x, y)$ — возмущение. Решение $(x, y) \in C^2(\mathrm{R}\colon \mathrm{R}^{n_1+n_2})$ системы уравнений (1) называется *$\omega$-периодическим*, если $x(t + \omega) \equiv x(t)$, $y(t + \omega) \equiv y(t)$.

К системе вида (1) приводятся, например, системы уравнений с высшими производными

$$\begin{gathered} x^{(l)} = P_l(x, x', \ldots, x^{(l-1)}) + g(t, x, x', \ldots, x^{(l-1)}), \\ t \in \mathrm{R},\ x \in \mathrm{R}^n,\ l \geq 2, \end{gathered} \quad (2)$$

в которых выделена главная положительно однородная нелинейная часть $P_l$. В работах [1–3] исследованы априорная оценка и существование $\omega$-периодических решений для систем уравнений вида (2) при $l = 2$, учитывающие структуру множества нулей

$$O(P_2) = \{(y_1, y_2)\colon P_2(y_1, y_2) = 0\}$$

главной нелинейной части $P_2$. В связи с этим представляется актуальным обобщение результатов указанных работ применительно к системе уравнений (1) с учетом структуры множества нулей $O(P)$ главной нелинейной части $P$.

В настоящей работе система уравнений (1) исследована в случае, когда $O(P) = \{(0,0)\}$. Найдены условия, обеспечивающие априорную оценку $\omega$-периодических решений при любом возмущении $f$. *Априорной оценкой* называется неравенство

$$\max_{t\in[0,\omega]} (|x(t)| + |y(t)|) < M, \tag{3}$$

которое должно выполняться для всех $\omega$-периодических решений системы уравнений (1) с числом $M$, зависящим лишь от $P$, $Q$ и $f$. Доказано, что если выполнены условия априорной оценки, то система уравнений (1) не при всех возмущениях $f$ имеет $\omega$-периодические решения.

Наряду с условиями $1-4$ рассмотрим условие
5) система уравнений $z' = P(x_0, z)$, $z \in \mathrm{R}^{n_2}$ при любом фиксированном $x_0 \in \mathrm{R}^{n_1}$ не имеет ограниченных решений $z(t)$ таких, что

$$|x_0| + |z(t)| \le |x_0| + |z(0)| = 1, \quad t \in \mathrm{R}.$$

Из условия 5 следует, что $O(P) = \{(0,0)\}$. Следовательно, в силу положительной однородности $P$ и теоремы 4.2 [4, с. 20], при любом фиксированном $y_1 \in \mathrm{R}^{n_1}$ имеем $\gamma(P(y_1,\cdot)) = 0$, где $\gamma(P(y_1,\cdot))$ — вращение (степень отображения) векторного поля $P(y_1,\cdot)\colon \mathrm{R}^{n_2} \mapsto \mathrm{R}^{n_2}$ на сфере $|y_2| = 1$ пространства $\mathrm{R}^{n_2}$.

Условие 5 при $n_2 \le 2$ равносильно условию
6) $O(P) = \{(0,0)\}$ и система уравнений $z' = P(0,z)$, $z \in \mathrm{R}^{n_2}$ не имеет ненулевых ограниченных решений.

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Если выполнены условия* $1-5$, *то для* $\omega$*-периодических решений системы уравнений* (1) *верна априорная оценка* (3).

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия* 1, 2 *и* 5. *Тогда при некотором возмущении* $f_0(y_1, y_2)$ *и при всех* $\mu \in (0, \mu_0)$ *система уравнений*

$$x' = \mu^m Q(\mu^{-1}x, \mu^{-1}y), \quad y' = P(x, y) + \mu^m f_0(\mu^{-1}x, \mu^{-1}y), \quad (4)$$

*не имеет* $\omega$*-периодических решений.*

**Теорема 3.** *Пусть в системе уравнений* (2) *главная нелинейная часть* $P_l$ *положительно однородна* (*порядка* $m > 1$ ) *и пусть система уравнений*

$$z' = P_l\left(x_1^0, \ldots, x_{l-1}^0, z\right), \quad z \in \mathrm{R}^n,$$

*при любых фиксированных* $x_1^0, \ldots, x_{l-1}^0 \in \mathrm{R}^n$ *не имеет ограниченных решений* $z(t)$, *удовлетворяющих условию*

$$|x_1^0| + \ldots + |x_{l-1}^0| + |z(t)| \leq |x_1^0| + \ldots + |x_{l-1}^0| + |z(0)| = 1, \quad t \in \mathrm{R}.$$

*Тогда система уравнений* (2) *не при всех возмущениях* $g$ *имеет* $\omega$*-периодические решения.*

Теорема 2 доказана по схеме работы [5, с. 716] с применением теоремы Хопфа [4, с. 24]. Доказательство теоремы 3 основано на теореме 2 и свойстве инвариантности существования $\omega$-периодических решений при непрерывном изменении главной нелинейной части. В теореме 3 фактически доказана справедливость теоремы 2 для системы уравнений (2) при любом $\mu > 0$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 23-21-00032.

1. *Мухамадиев Э., Наимов А.Н.* Об априорной оценке периодических решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Изв. вузов. Математика. 2024. № 8. С. 45–54.

2. *Мухамадиев Э., Наимов А.Н.* О разрешимости периодической задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 3. С. 312–321.

3. *Мухамадиев Э., Наимов А.Н.* О разрешимости периодической задачи для двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2024. № 2. С. 46–58.

4. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

5. *Наимов А.Н., Быстрецкий М.В.* О существовании периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с квазиоднородной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 5. С. 714–720.

# Моделирование трансформации социобиофизических процессов предикативными вычислительными структурами

**А. Ю. Переварюха**
*Санкт-Петербург, СПБ ФИЦ РАН*
e-mail: madelf@rambler.ru

В докладе рассматривается задача развития методологии моделирования на основе гибридных структур, включающих событийно реализуемые трансформации вычислительного аппарата, как параметрические изменения, так и формы нелинейности функций в правых частях уравнений. Актуальность задачи связана с современным аспектом, когда наблюдаемое непрерывное развитие в реальных биосистемах и социуме процессов распространения колебаний (эпидемических или информационных волн) достаточно ограниченное во времени явление. Плавно протекающие процессы в экодинамике, биофизике или информационном обществе довольно редки и представляют скорее исключение. Гладкие переходы, логистические кривые роста и гармонические циклы на самом деле нельзя считать общим случаем развития социобиофизических процессов. Типичными при взаимодействии организмов и их среды являются процессы с изменениями: со стадийностью, пороговыми состояниями и событийными переходными режимами [1]. Стадийное развитие с резкими переходами характерно и для биофизики, например, стадии выработки иммунного ответа, и для процессов на фондовых рынках, и для социальных сетей со стремительным распространением информационных вбросов. Важна задача описания импульсного возникновения и затухания флуктуаций. Сложные колебательные и апериодические режимы возможно получить в одновидовых непрерывных моделях с включением нелинейной запаздывающей регуляции $dN/dt = rF(N(t-\tau)) - \mathfrak{F}(N(t-h), N(t))$. Логистическое уравнение $dN/dt = rN(t)(1-N(t)/K)$ с монотонным приближением к порогу ниши $\forall t, r, N(0) < K\colon N(t) \leqslant K, \lim_{t\to\infty} N(r,t) = K$ актуально для обобщения с целью моделирования сценариев регулярных колебаний, но не для пульсирующих вспышек и агрессивных инвазий. Например, можно получить затухающий циклический режим [2] в варианте уравнения с зависящей от плотности популяции обратной связью:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\frac{(1-N(t-\tau)}{K} - \theta\frac{N(t)^2}{(E^2 + N(t-\tau_1)^2)}. \qquad (1)$$

Для описания динамики нерегулярных колебаний лабораторных насекомых при сосуществовании имаго и всех стадий личинок предложено уравнение со сосредоточенным запаздыванием $\mathfrak{h}$ и с постоянной смертностью $q$:

$$\frac{d\,N}{d\,t} = rN(t-\mathfrak{h})\exp\left(-bN(t-\mathfrak{h})\right) - N(t)q, \quad r, b, q, \tau > 0. \qquad (2)$$

В решении с ростом $r\mathfrak{h}$ появляется цикл релаксационной формы и при увеличении значений апериодическая динамика большой амплитуды. Подобные уравнения сохраняют важный недостаток для популяционных прогнозов:

$$\exists\, \hat{t},\ \lim_{t\to\hat{t}} \min N_*(r\mathfrak{h} > B, t) = 0 + \epsilon,$$

так как если минимумы цикла $N_*(r\mathfrak{h})$ стремятся к нулю, то длительный режим флуктуаций численности нереалистичен. При небольших $r\mathfrak{h}$ в (2) можно получить временное перенасыщение со стабилизацией роста:

$$\exists\, t, r,\ \mathfrak{h} \forall\, N(0)\colon N(t, r\mathfrak{h}) > \mathcal{K}\colon \lim_{t\to\infty} N(rh, t) = \mathcal{K}.$$

Величина экологической ниши $K$ нетождественна действующему уровню насыщения лабораторных условий $\mathcal{K}$. С целью моделирования ситуации появления адаптивного воздействия у атакуемой вселенцем среды предложим модификацию модели с $-F(N(t-\mathfrak{h}))$ и с действующим на биотическую среду порогом $A$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t-\mathfrak{h})\exp\left(-bN(t-\mathfrak{h})\right) - \frac{\theta N^2(t-\mathfrak{h})}{(A-N(t-\mathfrak{h}))^2}. \qquad (3)$$

Предложенная модификация описывает актуальную для инвазий ситуацию — однократного прохождения состояния малой приближающейся к критическому порогу выживания численности. Кризисные явления при инвазиях связаны со стремительно адаптивно возникшим ростом активного биотического противодействия, что можно использовать для выработки мер подавления опасных видов. Форма нелинейности в разных экологических ситуациях должна быть разная. Для задач анализа инвазий логично подбирать соответствующие ситуации функции $\mathfrak{F}(N-l(h))$, чем менять и дополнять параметры модели. Свойства реальных вспышек трудно описать даже моделями с $F(N(t-h_1),\ldots,(N(t-l(h_j)))$. Запаздывающая регуляция — важное свойство многих биофизических процессов, например, выработки иммунного ответа. Включение запаздывания $x_{n+1}=\psi(x_n)\varphi(x_{n-i})$ или $x_{n+1} = ax_n\exp(-\sum_{i=0}^{m} b_j x_{n-j}) - qx_n$ нарушает важный критерий из теоремы Дж. Синжера о единственности $\omega$-предельного множества траектории унимодальной $\psi^n(x_0)$, но появление альтернативных притягивающих циклов — динамический эффект в тонком диапазоне параметров.

Для описания волн заражений COVID-19 с учетом эволюции вируса и появления его новых штаммов мы развиваем способ усовершенствания вариантов поведения траектории модели волн эпидемии COVID-19. В новой модели получен вариант разрушения колебаний без необходимости дальнейшего увеличения $r$, $H=1/3K$:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1-\frac{N(t-\tau\times\sigma)}{\mathcal{K}}\right)\left(H-N(t-\gamma)\right), \gamma<\tau. \qquad (4)$$

Модель была основана на нашей идее, что для механизмов контроля имеет значение переход $N(t-\gamma)$ через предкритический порог $H$. Величина $H$ трактовалось как мягкое пороговое состояние преднасыщения среды [3], когда при $N(t) \to H + \epsilon$ популяция вселенца уже начинает разрушительно воздействовать на среду. В сценарии на динамику инвазионного процесса оказывает влияние отклонения $[H - N(t - \gamma)]$, притом величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной. В иммунологической трактовке при такой вирусной нагрузке организм через небольшой интервал задержки сталкивается опасными симптомами. Модель описала вычислительный сценарий с выбросом траектории из окрестности цикла. После образования колебаний при превышении значения в момент $\max N_*(t_{max}; r\tau\gamma)$ предельного для экосистемы уровня траектория $N(t) \to \infty$ с остановкой расчетов. В модели релаксационный цикл оказывается переходным режимом существования, а образование неограниченной траектории оценено нами как катастрофическая динамика. Включение запаздывания — удобный способ описания цикличности в непрерывных моделях. Инвазионные процессы состоят из нескольких стадий и вариативны, потому целесообразно включать алгоритмически переопределяемые структуры в правых частях уравнений.

Исследование выполнено по бюджетной теме СПБ ФИЦ РАН FFZF-2025-0006.

1. *Переварюха А. Ю.* Хаотические режимы в моделях теории формирования пополнения популяций // Нелинейный мир. 2009. Т. 10, № 4. С. 925–932.

2. *Переварюха А. Ю.* Интерпретация поведения моделей динамики биоресурсов и моментальная хаотизация в новой модели // Нелинейный мир. 2012. Т. 10, № 4. С. 255–262.

3. *Mikhailov V. V.* Computational Modeling of the Nonlinear Metabolism Rate as a Trigger Mechanism of Extreme Dynamics of Invasion Processes // Technical Physics Letters. 2022. Vol. 48, no. 12. P. 301–304.

# Теоремы Эрмита и Данфорда в общем случае

**А. И. Перов, И. Д. Коструб**

*Воронеж, Воронежский государственный университет*

e-mail: anperov@mail.ru, ikostrub@yandex.ru

**Основные понятия.** Пусть $\mathbf{B}$ — комплексная банахова алгебра, состоящая из линейных ограниченных операторов, действующих в комплексном банаховом пространстве. Пусть $n$ — произвольное фиксированное натуральное число. Обозначим через $\mathbf{B}^n$ комплексное банахово пространство столбцов $\mathbf{X}$ с компонентами $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ из $\mathbf{B}$ и нормой $\|\mathbf{X}\| = \max\{\|\mathbf{X}_j\|, 1 \leq j \leq n\}$. Обозначим через $\mathbf{B}^{n\times n}$ комплексную банахову алгебру $n\times n$-матриц $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{jk})$, где $\mathbf{A}_{jk}$ из $\mathbf{B}\,(1 \leq j, k \leq n)$. Она изометрически изоморфна комплексной банаховой алгебре линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathbf{B}^n$, причем норма в $\mathbf{B}^{n\times n}$ определяется как операторная $\|\mathbf{A}\| = \sup\,\{\|\mathbf{AX}\|, \mathbf{X} \in \mathbf{B}^n, \|\mathbf{X}\| \leq 1\}$. $S(\mathbf{X})$ — спектр оператора $\mathbf{X}$ (непустое ограниченное замкнутое множество), $\mathbf{E}$ — единичный оператор.

**Матрица Вандермонда.** Пусть $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ из $\mathbf{B}$. Поставим им в соответствие матрицу из $\mathbf{B}^{n\times n}$

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} & \ldots & \mathbf{E} \\ \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \ldots & \mathbf{X}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{X}_1^{n-1} & \mathbf{X}_2^{n-1} & \ldots & \mathbf{X}_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

которую естественно назвать *матрицей Вандермонда* порядка $n$. Для нас важно знать, когда эта матрица имеет обратную

$$\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n) \equiv \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{11} & \ldots & \mathbf{W}_{1n} \\ \mathbf{W}_{21} & \ldots & \mathbf{W}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{W}_{n1} & \ldots & \mathbf{W}_{nn} \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем важную роль играют коэффициенты

$$\mathbf{W}_j \equiv \mathbf{W}_{jn},\;\; 1 \leq j \leq n.$$

В рассматриваемом случае они являются обратимыми.

Мы скажем, что система $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ *лежит в общем положении*, если построенная по ней матрица Вандермонда является обратимой. Необходимое условие обратимости состоит в том, что выполнено *условие разделенности*

$$(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_k)^{-1} \ \text{ при } \ j \neq k.$$

Это условие заведомо выполнено, если выполнено *условие спектральной разделенности*

$$S(\mathbf{X}_j) \cap S(\mathbf{X}_k) = \varnothing \ \text{ при } \ j \neq k, \ \ 1 \leq j \leq n.$$

**Теорема Эрмита.** Рассмотрим следующую формулу:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\sigma} f(\lambda)(\lambda^n + \mathbf{P}_1 \lambda^{n-1} + \ldots + \mathbf{P}_{n-1}\lambda + \mathbf{P}_n)^{-1} d\lambda = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{X}_j)\mathbf{W}_j.$$

Здесь $f(\lambda)$ – аналитическая функция, заданная на открытом множестве $G$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ — корни алгебраического уравнения порядка $n$

$$\mathbf{X}^n + \mathbf{P}_1 \mathbf{X}^{n-1} + \ldots + \mathbf{P}_{n-1}\mathbf{X} + \mathbf{P}_n = 0,$$

при этом предполагается, что $S(\mathbf{X}_j) \subset G$, $1 \leq j \leq n$. Будем считать, что система корней $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ лежит в общем положении; $\mathbf{W}_j$, $1 \leq j \leq n$ элементы последнего столбца матрицы $\mathbf{W}$. Функция $f(\mathbf{X})$ определяется с помощью интеграла

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\sigma} f(\lambda)(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{X})^{-1} d\lambda \ \ (S(\mathbf{X}) \subset G).$$

Введем понятие *разделенной разности порядка $n-1$ для функции $f(\mathbf{X})$, отвечающей системе узлов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$, лежащей в общем положении*:

$$\Delta^{n-1} f(\mathbf{X})(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n) = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{X}_j)\mathbf{W}_j.$$

Поэтому изучаемая нами формула принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\sigma} f(\lambda)(\mathbf{E}\lambda^n + \mathbf{P}_1\lambda^{n-1} + \ldots + \mathbf{P}_n)^{-1}d\lambda =$$
$$= \Delta^{n-1}f(\mathbf{X})(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n).$$

Она соответствует теореме Эрмита, дающей интегральное представление разделенной разности.

**Теорема Данфорда.** В условиях предыдущей теоремы имеет место включение

$$S\left(\Delta^{n-1}f(\mathbf{X})(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n)\right) \subseteq$$

$$\subseteq \Delta^{n-1}f(\lambda)\left(S(\mathbf{X}_1), S(\mathbf{X}_2), \ldots, S(\mathbf{X}_n)\right) \equiv$$

$$\equiv \left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{f(\lambda_j)}{(\lambda_j - \lambda_1)\ldots(\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1})\ldots(\lambda_j - \lambda_n)} :\right.$$

$$\left. \lambda_j \in S(\mathbf{X}_j), 1 \leq j \leq n \right\}.$$

При этом предполагается, что корни $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ спектрально разделены.


1. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
2. *Перов А.И., Коструб И.Д.* Дифференциальные уравнения в банаховых алгебрах // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2020. Т. 491, № 1. С. 73–77.
3. *Перов А.И., Коструб И.Д.* Матрица Вандермонда в коммутативном случае // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2024. Т. 157, № 3. С. 33–37.
4. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1970.
5. *Перов А.И., Коструб И.Д.* Матрица Вандермонда в общем случае // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2025. Т. 521, № 1. С. 81–87.

# К вопросу о знакопостоянстве функции Грина функционально-дифференциального уравнения, заданного на геометрическом графе

**В. П. Плаксина**
*Пермь, ПНИПУ*
e-mail: vpplaksina@list.ru

В предлагаемой работе обсуждаются условия знакоопределенности решения функционально-дифференциального уравнения, заданного на геометрическом графе.

Рассмотрим систему $\Gamma$ из $n$ струн $A_iB_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Концы $A_i$ всех струн жестко закреплены, концы $B_i$ связаны между собой. Пусть характеристики упругости каждой струны таковы, что ее деформация определяется как решение дифференциального уравнения $\ddot{x} + Tx = f$, где свойства оператора $T$ будут приведены ниже.

В монографии [1] доказано, что решение дифференциального уравнения, заданного на геометрическом графе, соответствующем системе струн $\Gamma$, может быть найдено с помощью интегрального оператора Грина, и приведены свойства функции Грина. Условия знакопостоянства функции Грина получены с помощью теоремы из работы [2].

Рассмотрим несвязное множество $\Theta = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \big[a_i, b_i\big]$, соответствующее системе связанных струн. Пусть параметр $t \in \big[a_i, b_i\big]$ определяет положение точки на струне $A_iB_i$, причем значение $t = a_i$ соответствует концу $A_i$ струны, $t = b_i$ — концу $B_i$.

Тогда закрепленным концам будут соответствовать условия

$$x\big(a_i\big) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{1}$$

условия непрерывного соединения струн примут вид

$$x\big(b_i\big) - x\big(b_j\big) = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \qquad i \neq j. \tag{2}$$

Кроме того, имеется условие связи

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{x}\big(b_i\big) = 0. \tag{3}$$

Уравнения

$$\ddot{x}(t) + (Tx)(t) = f(t), \qquad t \in \big[a_i, b_i\big], \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

будем рассматривать как уравнения в пространствах $W^2\big[a_i, b_i\big]$ абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций $x\colon \big[a_i, b_i\big] \to \mathbb{R}$, имеющих суммируемую вторую производную. Операторы $T\colon W^2\big[a_i, b_i\big] \to L\big[a_i, b_i\big]$ вполне непрерывны; здесь $L\big[a_i, b_i\big]$ — пространство суммируемых на $\big[a_i, b_i\big]$ функций.

Пусть $W^2\big(\Theta\big)$ – пространство абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций $x\colon \Theta \to \mathbb{R}$, $L\big(\Theta\big)$ — пространство суммируемых функций $z\colon \Theta \to \mathbb{R}$.

Полуэффективные условия однозначной разрешимости задачи (1) – (4) получены в работе [3].

Для получения эффективных условий рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\ddot{x}(t) = z(t), \qquad t \in \Theta, \tag{5}$$

с краевыми условиями (1)–(3). Можно видеть, что задача (5), (1)–(3) однозначно разрешима и ее решение имеет вид $x(t) = \big(\Lambda z\big)(t) \equiv \int\limits_{\Theta} \Lambda(t,s) z(s)\, ds$, функция $\Lambda(t,s)$ линейна по $t$ и линейна по $s$ при $t \in \big[a_i, b_i\big]$, $s \in \big[a_j, b_j\big]$, $i, j = 1, 2 \ldots, n$.

Применим оператор $\Lambda$ к обеим частям равенств (4). Получим эквивалентное уравнение $x - Ax = \Lambda f$.

С помощью оценки нормы оператора $A = \Lambda T$ доказывается

**Лемма.** *Пусть* $\big\|T\big\|_{L(\Theta)} < \dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\big(b_i - a_i\big)\right)^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{b_i - a_i}$. *Тогда задача* (1) – (4) *однозначно разрешима при любой правой части* $f \in L\big(\Theta\big)$.

Пусть $\big(Gf\big)(t) = \int\limits_{\Theta} G(t,s)f(s)\,ds$ — оператор Грина задачи (1) – (4).

Рассмотрим $W_s^2\big(\Theta\big)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x\colon \Theta \to \mathbb{R}$, производная которых абсолютно непрерывна при $t \in \Theta\backslash\big\{s\big\}$; в точке $s \in \Theta$, $s \neq a_i$, $s \neq b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, производная $\dot{y}$ функций $y \in W_s^2\big(\Theta\big)$ может терпеть разрыв первого рода; $\ddot{y} \in L\big(\Theta\big)$. Функция Грина $G(t,s)$ задачи (1) – (4) при фиксированном $s \in \Theta$ принадлежит пространству $W_s^2\big(\Theta\big)$. Согласно теореме 2.2 [2, с. 140] можно показать, что функция $G(\cdot, s)$ не обращается в 0 на интервалах $\big(a_i, b_i\big)$, $i = 1, 2, \dots, n$, тогда и только тогда, когда при всех $\tau \in \big(a_i, b_i\big)$, $s \in \big(a_j, b_j\big)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, в пространстве $W_s^2\big(\Theta\big)$ задача

$$\ddot{y}(t) + \big(T_s y\big)(t) = 0, \qquad t \in \big[a_i, b_i\big], \qquad i = 1, 2, \dots, n; \tag{6}$$

$$y\big(a_i\big) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \tag{7}$$

$$y\big(b_i\big) - y\big(b_j\big) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j; \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{y}\big(b_i\big) = 0; \qquad y(\tau) = 0 \tag{9}$$

имеет только тривиальное решение.

Здесь $T_s\colon W_s^2\big(\Theta\big) \to L\big(\Theta\big)$ — вполне непрерывное распространение оператора $T\colon W^2\big(\Theta\big) \to L\big(\Theta\big)$ на пространство $W_s^2\big(\Theta\big)$.

Для краткости условия однозначной разрешимости задачи (6) – (9) приведем для случая, когда длины отрезков $\big[a_i, b_i\big]$ постоянны и равны $\delta$.

**Теорема.** *Пусть задача* (1) – (4) *однозначно разрешима и выполнено неравенство* $\big\|T\big\|_{L(\Theta)} < \dfrac{2}{(n+2)\delta^2}$. *Тогда функция Грина задачи* (1) – (4) *сохраняет знак на* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \big(a_i, b_i\big)$.

1. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2005.

2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

3. *Плаксина В.П.* О разрешимости функционально-дифференциального уравнения на геометрическом графе // Тезисы докладов Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVII: Теория операторов и дифференциальные уравнения», 29 июня – 5 июля 2023. Владикавказ. Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук и Правительства Республики Северная Осетия-Алания, 2023. С. 206–207.

4. *Bravyi E.I., Plaksina I.M.* On the Cauchy problem for singular functional differential equations // Advances in Difference Equations. 2017. Art. no. 91 (2017).

# О разрешимости одного сингулярного уравнения второго порядка

**И. М. Плаксина**
*Пермь, ПНИПУ*
e-mail: impl@list.ru

В работе получены условия разрешимости линейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения

$$\big(\mathcal{L}x\big)(t) \equiv \ddot{x}(t) + \frac{m}{t^2}x(t) + (Tx)(t) = f(t), \qquad t \in [0,\infty) \qquad (1)$$

на пространстве $W_0^{2,p}$. Здесь $f \in L^p$; оператор $T\colon W_0^{2,p} \to L^p$ линеен и вполне непрерывен; $W_0^{2,p}$ — пространство абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, таких что $\ddot{x} \in L^p$ и $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, с нормой $\|x\|_{W_0^{2,p}} = \|\ddot{x}\|_{L^p}$; $\|z\|_{L^p}^p \equiv \int\limits_0^\infty |z(t)|^p\,dt < \infty$; $1 < p < \infty$; $p' = \dfrac{p}{p-1}$ — сопряженный к $p$ индекс; $m \in \mathbb{R}$, $m \neq m_0 \equiv -\dfrac{1}{p'} - \dfrac{1}{(p')^2}$.

Пространства $W_0^{2,p}$ и $L^p$ изоморфны. Изоморфизм определяется равенствами

$$z(t) = \big(\delta x\big)(t) \equiv \ddot{x}(t), \qquad x(t) = \big(\Lambda z\big)(t) \equiv \int\limits_0^t (t-s)z(s)\,ds. \quad (2)$$

Рассмотрим вспомогательные операторы $\mathcal{L}_0\colon W_0^{2,p} \to L^p$ и $\mathcal{M}_0\colon L^p \to L^p$ вида

$$\big(\mathcal{L}_0 x\big)(t) = \ddot{x}(t) + \frac{m}{t^2}x(t),\ \mathcal{M}_0 = I + m\big(\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1\big).$$

Здесь $I$ – тождественный оператор, обобщенный оператор Чезаро $\mathcal{A}_\alpha\colon L^p \to L^p$ определяется равенством $\big(\mathcal{A}_\alpha z\big)(t) = \int\limits_0^t \frac{s^\alpha}{t^{\alpha+1}}z(s)\,ds$ при $\alpha > -\frac{1}{p'}$ и $\big(\mathcal{A}_\alpha z\big)(t) = -\int\limits_t^\infty \frac{s^\alpha}{t^{\alpha+1}}z(s)\,ds$ при $\alpha < -\frac{1}{p'}$. При $\alpha = -\frac{1}{p'}$ оператор $\mathcal{A}_\alpha$ не действует в пространство $L^p$. Оператор $\mathcal{A}_\alpha\colon L^p \to L^p$ не обладает свойством полной непрерывности, но ограничен, $\big\|\mathcal{A}_\alpha\big\|_{L^p\to L^p} \leqslant \left|\left(\alpha + \frac{1}{p'}\right)^{-1}\right|$.

**Лемма 1.** *Оператор $\mathcal{M}_0$ обратим, и $\mathcal{M}_0^{-1} = I + k_1\mathcal{B}$, где $k_1 = \frac{m}{b}$, $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{(1+b)/2} - \mathcal{A}_{(1-b)/2}$, $b = \sqrt{1-4m}$ при $m \neq \frac{1}{4}$; $k_1 = -\frac{1}{4}$, $\big(\mathcal{B}z\big)(t) = \int\limits_0^t \sqrt{\frac{s}{t^3}}z(s)\ln\frac{t}{s}\,ds$ при $m = \frac{1}{4}$.*

Действительно, при $\alpha \neq \beta$ имеет место равенство $\mathcal{A}_\alpha\mathcal{A}_\beta = \mathcal{A}_\beta\mathcal{A}_\alpha = \frac{1}{\alpha-\beta}\big(\mathcal{A}_\beta - \mathcal{A}_\alpha\big)$, доказанное в статье [1] для случая $\alpha, \beta > -\frac{1}{p'}$ и аналогично доказываемое для случая $\alpha > -\frac{1}{p'}$, $\beta < -\frac{1}{p'}$.

**Замечание 1.** При $m > \dfrac{1}{4}$ после преобразований получаем $k_1 = -\dfrac{2m}{\operatorname{Im} b}$, $\big(\mathcal{B}z\big)(t) = \int\limits_0^t \sqrt{\dfrac{s}{t^3}} \sin\left(\dfrac{\operatorname{Im} b}{2} \ln \dfrac{t}{s}\right) z(s)\, ds$.

**Лемма 2.** *Для правого обратного оператора к оператору $\mathcal{L}_0$ справедливо представление $\big(\mathcal{L}_{0,r}^{-1} z\big)(t) = k_2 t^2 \big(\mathcal{B}z\big)(t)$, где $k_2 = -\dfrac{1}{b}$ при $m < \dfrac{1}{4}$; $k_2 = 1$ при $m = \dfrac{1}{4}$; $k_2 = \dfrac{2}{\operatorname{Im} b}$ при $m > \dfrac{1}{4}$.*

**Лемма 3.** *Оператор $\mathcal{B}$ изотонен при $m < m_0$, $m = \dfrac{1}{4}$; антитонен при $m_0 < m < \dfrac{1}{4}$.*

**Лемма 4.** *Справедлива оценка $\big\|\mathcal{B}\big\| \leqslant B$, где*

$$B = \left|\frac{3+b}{2} - \frac{1}{p}\right|^{-1} + \left|\frac{3-b}{2} - \frac{1}{p}\right|^{-1}$$

*при $m < \dfrac{1}{4}$; $B = \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{p}\right)^{-2}$ при $m = \dfrac{1}{4}$; $B = \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{p}\right)^{-1}$ при $m > \dfrac{1}{4}$.*

Оценка нормы оператора $\mathcal{A}_\alpha \colon L^p \to L^p$ и величина $B$ вычисляются с помощью теста Шура [2, с. 33; 3] при пробных функциях $u(t) = t^{-1/p'}$, $v(s) = s^{-1/p}$.

**Теорема.** *Пусть $\big\|T\big\| < \Big(1 + \big|k_1\big|B\Big)^{-1}$. Тогда уравнение* (1) *однозначно разрешимо при любой правой части.*

Пусть функция $r(t,s)$ измерима в первом квадранте; при каждом $s \in [0,\infty)$ функция $r(\cdot,s)$ как функция первого аргумента принадлежит пространству $L^p$; при каждом $t \in [0,\infty)$ функция $r(t,\cdot)$ имеет ограниченную вариацию на $[0,\infty)$; полная вариация $\operatorname{var}_{s=0}^{\infty} r(\cdot,s)$ по второму аргументу суммируема со степенью $p$; $\lim\limits_{s\to\infty} r(t,s) \equiv 0$. Определим оператор $T_r \colon W_0^{2,p} \to L^p$ равенством $\big(T_r x\big)(t) = \int\limits_0^\infty x(s)\, d_s r(t,s)$.

Пусть, далее, функция $q(t)$ принадлежит пространству $L^p$; функция $h(t)$ измерима; $x_h(t) = \begin{cases} x\bigl[h(t)\bigr], & \text{если } h(t) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } h(t) < 0. \end{cases}$ Определим оператор $T_q \colon W_0^{2,p} \to L^p$ равенством $\bigl(T_q x\bigr)(t) = q(t)x_h(t)$. Также определим функцию $\sigma_h(t) = \theta\bigl[h(t)\bigr]$, где $\theta$ — функция Хевисайда.

**Замечание 2.** Оператор $T_q$ является [4, с. 58] частным случаем оператора $T_r$ при $r(t,s) = q(t)\chi_h(t,s)$, где $\chi_h(t,s)$ — характеристическая функция множества $\bigl\{(t,s) \in [0,\infty)\times[0,\infty) : 0 \leqslant h(t) \leqslant s\bigr\}$.

**Следствие 1.** *Пусть оператор $T$ содержит сосредоточенное отклонение: $T = T_q$. Пусть, далее, $\bigl\|q\sigma_h\bigr\|_{L^p} < \Bigl(1 + \bigl|k_1\bigr|B\Bigr)^{-1}$. Тогда уравнение* (1) *однозначно разрешимо при любой правой части.*

**Следствие 2.** *Пусть оператор $T$ содержит распределенное отклонение: $T = T_r$. Пусть, далее, $\bigl\|\mathrm{var}_{s=0}^{\infty} r(\cdot,s)\bigr\|_{L^p} < \Bigl(1+\bigl|k_1\bigr|B\Bigr)^{-1}$. Тогда уравнение* (1) *однозначно разрешимо при любой правой части.*

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, проект № FSNM–2023–0003.


1. *Плаксина В.П., Плаксина И.М., Плехова Э.В.* О разрешимости задачи Коши для квазилинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения // Известия вузов. Математика. 2016. № 2. С. 54–61.

2. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах $L^2$. М.: Наука, 1985.

3. *Абдуллаев А.Р., Плаксина И.М.* Об оценке спектрального радиуса одного сингулярного интегрального оператора // Известия вузов. Математика. 2015. № 2. С. 3–9.

4. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

# Об экспоненциальной устойчивости линейных функциональных уравнений с запаздыванием

**И. Ю. Постаногова**
*Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический университет*
e-mail: ipostanogova@psu.ru

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных, $\mathbb{R}$ – вещественных, $\mathbb{C}$ – комплексных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Через $L_p(E)$ и $L_\infty(E)$ будем обозначать соответственно лебеговы пространства суммируемых со степенью $p$ и ограниченных в существенном функций, заданных на множестве $E$, с естественными нормами. Если $E = \mathbb{R}_+$, для сокращения записи будет писать просто $L_p$ или $L_\infty$.

Пусть $I$ — тождественный оператор, $S_h$ — оператор сдвига на число $h > 0$, $S$ — оператор внутренней суперпозиции, действующий на пространстве кусочно-непрерывных функций, определяемые формулами [1]

$$S = \sum_{k=1}^{K} a_k S_{h_k}; \quad (S_h y)(t) = \begin{cases} y(t-h), \ t \geq h; \\ 0; \ t < h, \end{cases}$$

где $a_k \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим функциональное уравнение

$$(I - S)\, y = f, \tag{1}$$

где функция $f$ предполагается суммируемой на каждом конечном отрезке. Из определения оператора $S$ следует, что решение уравнения (1) существует и единственно при любой локально суммируемой функции $f$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим функциональное уравнение

$$y(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k y\,(t - h_k), \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

При отрицательных значениях $t$ решение доопределяется начальной функцией $\varphi \in L_\infty([-h_K, 0])$. Уравнение (2) приводится к операторному виду (1), если положить $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{K} a_k \varphi(t - h_k)$.

**Определение 1.** Уравнение (2) называется *экспоненциально устойчивым*, если существуют такие константы $M, \gamma > 0$, что при любой начальной функции $\varphi \in L_\infty([-h_K, 0])$ и любом $t \in \mathbb{R}_+$ для его решения $y$ справедлива оценка $|y(t)| \le Me^{-\gamma t}\|\varphi\|$.

Назовём *характеристическим* уравнение

$$1 - \sum_{k=1}^{K} a_k e^{-h_k p} = 0,\ p \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Обозначим через $y_0$ решение уравнения $((I - S)y)(t) = \theta(t)$, где $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

**Теорема 1.** *Для любой локально суммируемой функции $f$ решение уравнения (1) представимо в виде*

$$y(t) = \sum_{t_s \le t} f\left(t_s\right)\left(y_0\left(t - t_s + 0\right) - y_0\left(t - t_s - 0\right)\right),$$

*где суммирование проводится по всем таким точкам $t_s$, что $t - t_s$ является точкой разрыва функции $y_0$.*

**Теорема 2.** *Если корни уравнения (3) лежат слева от мнимой оси и отделены от неё, то существуют такие положительные числа $M, \gamma$ и многочлен $P(t)$, что для функции $y_0$ и её вариации на любом отрезке длины $h_K$ справедливы оценки*

$$\left|y_0(t) - \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{K} a_k}\right| \le Me^{-\gamma t},\ V_{t-h_K}^{t}\left[y_0\right] \le P(t)e^{-\gamma t},\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

**Теорема 3.** *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Оператор $I - S$ имеет в пространстве $L_p$ хотя бы при одном $1 \le p \le \infty$ ограниченный обратный.*

2. *Оператор $I - S$ имеет в пространстве $L_p$ при всех $1 \leq p \leq \infty$ ограниченный обратный.*

3. *Все корни уравнения* (3) *лежат слева от мнимой оси и отделены от неё.*

4. *Для функции $y_0$ справедливы оценки* (4).

5. *Уравнение* (2) *экспоненциально устойчиво.*

6. *Для любой ограниченной в существенном правой части $f \in L_\infty$ решение уравнения* (1) *также ограничено в существенном: $y \in L_\infty$.*

Для некоторых классов функциональных уравнений можно получить эффективные критерии проверки условий теоремы 3. Для кратных запаздываний справедливо следующее утверждение, вытекающее из теоремы 3 и критерия Шура–Кона [2, 3].

**Следствие 1.** *Пусть в операторе $S$ запаздывания соизмеримы: $h_k = k$, $k = 1, \ldots, K$. Тогда следующие утверждения эквивалентны между собой и эквивалентны любому из утверждений теоремы* 3.

1. *Уравнение $y(t) - \sum_{k=1}^{K} a_k y(t-k) = 0$, $t > 0$, с начальной функцией $y(t) = \varphi(t)$, $t \in [-K, 0)$, экспоненциально устойчиво.*

2. *Уравнение $y_n = \sum_{k=1}^{K} a_k y_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$, с начальными условиями $y_{-1}, \ldots, y_{-K}$ экспоненциально устойчиво.*

3. *Все корни многочлена $1 - \sum\limits_{k=1}^{K} a_k z^k$ лежат вне единичного круга.*

**Определение 2.** Числа $h_1, h_2, \ldots, h_K$ называются *линейно независимыми* (относительно целых чисел), если равенство $l_1 h_1 + l_2 h_2 + \ldots + l_K h_K = 0$, где $l_1, l_2, \ldots, l_K \in \mathbb{Z}$, возможно лишь при $l_1 = l_2 = \ldots = l_K = 0$.

**Следствие 2** ([4])**.** *Пусть запаздывания $h_k$ в операторе $S$ линейно независимы. Тогда любое из утверждений теоремы* 3 *эквивалентно условию $\sum\limits_{k=1}^{K} |a_k| < 1$.*

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. *Schur I.* Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises beschrankt sind // J. Reine Angew. Math. 1918. Vol. 148. S. 122–145.
3. *Cohn A.* Über die Anzahl der Wurzein einer algebraische Gleichung in einem Kreise // Math. Zeit. 1922. Vol. 14. S. 111–148.
4. *Postanogova I.* On Invertibility of the Operator at the Derivative in a Neutral Type Differential Equation with Linearly Independent Delays // Functional Differential Equations. 2024. Vol. 31, no. 3–4. P. 233–253.

# О бэровском классе слабых показателей колеблемости корней и гиперкратных корней

**В. А. Похачевский**, **В. В. Быков**

*Москва, Московский гос. университет им. М.В. Ломоносова*

e-mail: pokhachevskiy@gmail.com, vvbykov@gmail.com

Наряду с оценками роста решений дифференциальных уравнений и систем, их колебательные свойства представляют большой интерес.

Для заданного числа $t > 0$ обозначим через $\nu^{\varkappa}(y,t)$ в зависимости от значения $\varkappa$ количество у функции $y$ на полуинтервале $[0,t)$: смен знака, если $\varkappa = -$; нулей, если $\varkappa = 0$; корней (т.е. нулей с учетом их кратности), если $\varkappa = +$; гиперкратных корней, если $\varkappa = *$. В последнем случае простой нуль функции $y$ учитывается один раз, а кратный — бесконечно много раз, независимо от его кратности. Напомним [1] следующее

**Определение 1.** *Верхняя (нижняя) частота Сергеева знаков, нулей, корней или гиперкорней* скалярной функции $y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — это величина $\hat{\nu}^{\varkappa}[y] = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^{\varkappa}(y,t)$ ($\check{\nu}^{\varkappa}[y] = \underline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{\pi}{t}\nu^{\varkappa}(y,t)$), при $\varkappa = -,0,+,*$ соответственно.

Обобщение понятия частоты на случай вектор-функции дано в [2].

**Определение 2.** *Слабый верхний* (*нижний*) *показатель колеблемости знаков, нулей, корней или гиперкорней* вектор-функции $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ — это величина

$$\hat{\nu}_\circ^\varkappa[x] = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{a\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\varkappa(\langle x,a\rangle,t) \ (\check{\nu}_\circ^\varkappa[x] = \underline{\lim_{t\to+\infty}} \inf_{a\in\mathbb{R}^n_*} \frac{\pi}{t}\nu^\varkappa(\langle x,a\rangle,t)),$$

при $\varkappa = -,0,+,*$ соответственно, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение, а звездочка в нижнем индексе обозначает выкалывание нуля.

Для заданного $n\in\mathbb{N}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами и компактно-открытой топологией. Через $\widetilde{\mathcal{E}}^n$ будем обозначать подмножество $\widetilde{\mathcal{M}}^n$, состоящее из систем, соответствующих линейным однородным уравнениям $n$-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t\in\mathbb{R}_+.$$

И. Н. Сергеев установил [3], что наименьшая верхняя частота знаков уравнения $a\in\widetilde{\mathcal{E}}^n$, задаваемая равенством $\omega_1(a) = \inf_{y\in\mathcal{S}_*(a)}\hat{\nu}^-[y]$, $a\in\widetilde{\mathcal{E}}^n$, где $\mathcal{S}_*(A)$ — множество ненулевых решений системы $A$, принадлежит второму классу Бэра. В [4, 5] частоты Сергеева рассматриваются как функционалы на декартовом произведении пространства уравнений $\widetilde{\mathcal{E}}^n$ и пространства $\mathbb{R}^n_*$ начальных условий. Показано, что нижние частоты знаков и нулей и верхние частоты корней и нулей принадлежат третьему классу Бэра, а нижняя частота корней и верхняя частота знаков — второму.

И. Н. Сергеев также доказал [6], что наибольший нижний показатель колеблемости гиперкорней $\hat{\zeta}^*(A) \equiv \sup_{x\in\mathcal{S}_*(A)}\check{\nu}_\circ^*[x]$, $A\in\widetilde{\mathcal{M}}^n$, принадлежит в точности второму классу Бэра.

Вопрос о классификации по Бэру других характеристик колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений и систем до сих пор оставался открытым. В нашем докладе приведены некоторые результаты в этом направлении.

Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — классы подмножеств метрического пространства $M$. Скажем [7, с. 223–224], что функция $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(\mathcal{M},^*)$ (или $(^*,\mathcal{N})$), если для любого $r \in \mathbb{R}$ выполняется включение $f^{-1}((r,+\infty]) \in \mathcal{M}$ (соответственно, $f^{-1}([r,+\infty]) \in \mathcal{N}$). Напомним, что $F_\sigma$ обозначает класс всех счетных объединений замкнутых множеств, а $F_{\sigma\delta}$ — класс счетных пересечений множеств из класса $F_\sigma$. Кроме того, будем обозначать через $X_A(\cdot,\cdot)$ оператор Коши системы $A$.

**Теорема 1.** *Для любого $n \geq 2$ справедливы следующие утверждения:*
1) *функционал $(A,\xi) \mapsto \check{\nu}_\circ^*[X_A(\cdot,0)\xi]$, действующий из $\widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}^n_*$ в $\overline{\mathbb{R}}$, принадлежит классу $(F_\sigma,^*)$, а значит, второму классу Бэра;*
2) *функционал $(A,\xi) \mapsto \hat{\nu}_\circ^*[X_A(\cdot,0)\xi]$, действующий из $\widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}^n_*$ в $\overline{\mathbb{R}}$, принадлежит классу $(^*,F_{\sigma\delta})$, а значит, третьему классу Бэра.*

**Следствие 1.** *Для любой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ ее спектры слабых показателей колеблемости гиперкорней — множества*

$$\{\check{\nu}_\circ^*[X_A(\cdot,0)\xi]\colon \xi \in \mathbb{R}^n_*\} \text{ и } \{\hat{\nu}_\circ^*[X_A(\cdot,0)\xi]\colon \xi \in \mathbb{R}^n_*\}$$

*— являются суслинскими подмножествами $\overline{\mathbb{R}}$.*

Обозначим через $\mathcal{C}^\infty\widetilde{\mathcal{M}}^n$ множество систем (1) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и метрикой

$$\rho(A,B) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \min\left\{|A^{(k)}(t) - B^{(k)}(t)|, (t+1)^{-1}\right\}.$$

**Теорема 2.** *Для любого $n \geq 2$ справедливы следующие утверждения:*
1) *функционал $(A,\xi) \mapsto \check{\nu}_\circ^+[(X_A(\cdot,0)\xi]$, действующий из $\mathcal{C}^\infty\widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}^n_*$ в $\overline{\mathbb{R}}$, принадлежит классу $(F_\sigma,^*)$, а значит, второму классу Бэра;*

2) *функционал* $(A,\xi)\mapsto\hat\nu_\circ^+[X_A(\cdot,0)\xi]$, *действующий из* $\mathcal{C}^\infty\widetilde{\mathcal{M}}^n\times\mathbb{R}_*^n$ *в* $\overline{\mathbb{R}}$, *принадлежит классу* $(^*,F_{\sigma\delta})$, *а значит, третьему классу Бэра;*
3) *функционал* $A\mapsto\sup_{x\in\mathcal{S}_*(A)}\check\nu_\circ^+[x]$, *действующий из* $\mathcal{C}^\infty\widetilde{\mathcal{M}}^n$ *в* $\overline{\mathbb{R}}$, *принадлежит классу* $(F_\sigma,^*)$, *а значит, второму классу Бэра.*

**Следствие 2.** *Для любой системы* $A\in\mathcal{C}^\infty\widetilde{\mathcal{M}}^n$ *ее спектры слабых показателей колеблемости корней, т. е. множества*

$$\{\check\nu_\circ^+[X_A(\cdot,0)\xi]\colon \xi\in\mathbb{R}_*^n\}\ \text{и}\ \{\hat\nu_\circ^+[X_A(\cdot,0)\xi]\colon \xi\in\mathbb{R}_*^n\}$$

*являются суслинскими подмножествами* $\overline{\mathbb{R}}$.

Исследование второго автора выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-03-2024-074/5 по проекту «Исследование асимптотических характеристик колеблемости дифференциальных уравнений и систем, а также оптимизационных методов».

1. *Сергеев И.Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.

2. *Сергеев И.Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, № 1. С. 149–172.

3. *Сергеев И.Н.* О классах Бэра характеристических частот линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 41, № 6. С. 852.

4. *Быков В.В.* О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 52, № 4. С. 419–425.

5. *Барабанов Е.А., Войделевич А.С.* К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 10. С. 1302–1320.

6. *Сергеев И.Н.* Класс Бэра крайних гиперчастот линейных систем // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1569–1570.

7. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.–Л.: ОНТИ, 1937.

# Конструктивный анализ периодической краевой задачи для возмущённой системы матричных уравнений Риккати (левосторонняя регуляризация)

**Д. В. Роголев**
*Могилёв, Белорусско-Российский университет*
e-mail: d-rogolev@tut.by

Исследуется краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = G_1(t, X, Y), \tag{1}$$

$$\frac{dY}{dt} = G_2(t, X, Y), \tag{2}$$

$$X(0) = X(\omega), \quad Y(0) = Y(\omega), \tag{3}$$

где

$$G_1(t, X, Y) = A_1(t)X + XB_1(t) + X(S_1(t)X + S_2(t)Y) + F_1(t, X, Y),$$

$$G_2(t, X, Y) = A_2(t)Y + YB_2(t) + Y(P_1(t)X + P_2(t)Y) + F_2(t, X, Y),$$

$t \in I$, $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$; $X(t), Y(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, матрицы $A_i(t)$, $B_i(t)$, $S_i(t)$, $P_i(t)$ $(i = 1, 2)$ определены и непрерывны на промежутке $I$; $F_i(t, X, Y) \in \mathbb{C}\left(D, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, где

$$D = \left\{(t, X, Y) : t \in I, \|X\| \leqslant \rho_1, \|Y\| \leqslant \rho_2\right\}.$$

Предполагается также, что функции $F_i(t, X, Y)$ удовлетворяют относительно $X, Y$ в области $D$ условию Липшица (локально), $F_1(t, 0, 0) \not\equiv 0$ либо $F_2(t, 0, 0) \not\equiv 0$.

Обозначения:

$$\tilde{A}_i(\omega) = \textstyle\int_0^\omega A_i(\tau)d\tau, \quad \gamma_i = \left\|\tilde{A}_i^{-1}(\omega)\right\|, \quad \alpha_i = \max\limits_t \|A_i(t)\|,$$
$$\beta_i = \max\limits_t \|B_i(t)\|, \quad \delta_i = \max\limits_t \|S_i(t)\|, \quad \mu_i = \max\limits_t \|P_i(t)\|,$$
$$h_i = \max\limits_t \|F_i(t, 0, 0)\|, \quad \|T\|_C = \max\limits_t \|T(t)\|,$$

$$
\begin{gathered}
q_{11} = \gamma_1 \left[0{,}5\alpha_1 \left(\alpha_1 + \beta_1 + L_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2\right)\omega^2 + \right.\\
\left. + \left(\beta_1 + L_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2\right)\omega\right],\\
q_{12} = \gamma_1 \left(L_2 + \delta_2\rho_1\right)\left(0{,}5\alpha_1\omega + 1\right)\omega,\\
q_{21} = \gamma_2 \left(K_1 + \mu_1\rho_2\right)\left(0{,}5\alpha_2\omega + 1\right)\omega,\\
q_{22} = \gamma_2 \left[0{,}5\alpha_2 \left(\alpha_2 + \beta_2 + K_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2\right)\omega^2 + \right.\\
\left. + \left(\beta_2 + K_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2\right)\omega\right],
\end{gathered}
$$

где $t \in I$, $\rho_1, \rho_2 > 0$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц ($\|ST\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|$), $L_i = L_i(\rho_1, \rho_2), K_i = K_i(\rho_1, \rho_2)$ – постоянные Липшица соответственно для функций $F_1(t, X, Y)$, $F_2(t, X, Y)$ в области

$$
\tilde{D} = \left\{(X, Y) : \|X\| \leqslant \rho_1, \|Y\| \leqslant \rho_2\right\}.
$$

Задача (1) – (3) рассматривается в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой

$$
\|T\|_C = \max_t \|T(t)\|,\ T \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right).
$$

В случае, когда коэффициенты в (1), (2) постоянные, получим систему типа [1], играющую важную роль в теории управления.

Данная работа является обобщением и развитием [2, 3].

**Теорема.** *Пусть выполнены следующие условия:*
1) $\det \tilde{A}_i(\omega) \neq 0$ $(i = 1, 2)$,
2) *справедливы неравенства*

$$
\gamma_1 \left\{0,5\alpha_1 \left[\left(\alpha_1 + \beta_1 + L_1\right)\rho_1 + L_2\rho_2 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 + h_1\right]\omega^2 + \right.
$$

$$
\left. + \left[(\beta_1 + L_1)\rho_1 + L_2\rho_2 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 + h_1\right]\omega\right\} \leqslant \rho_1,
$$

$$
\gamma_2 \left\{0{,}5\alpha_2 \left[K_1\rho_1 + \left(\alpha_2 + \beta_2 + K_2\right)\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 + h_2\right]\omega^2 + \right.
$$

$$
\left. + \left[K_1\rho_1 + (\beta_2 + K_2)\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 + h_2\right]\omega\right\} \leqslant \rho_2,
$$

3) $q_{11} < 1$, $\det(E - A) > 0$, *где* $E = \operatorname{diag}(1, 1)$, $A = (q_{ij})$.

*Тогда задача* (1) – (3) *однозначно разрешима в области* $D$.

С помощью метода регуляризации [4] установлено, что задача (1) – (3) эквивалентна интегральной задаче

$$X(t)=\tilde{A}_1^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A_1(\sigma)d\sigma\right)G_1\left(\tau,X(\tau),Y(\tau)\right)d\tau-\right.$$

$$-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A_1(\sigma)d\sigma\right)G_1\left(\tau,X(\tau),Y(\tau)\right)d\tau-$$

$$\left.-\int_0^\omega\left[G_1\left(\tau,X(\tau),Y(\tau)\right)-A_1(\tau)X(\tau)\right]d\tau\right\}, \qquad (4)$$

$$Y(t)=\tilde{A}_2^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A_2(\sigma)d\sigma\right)G_2\left(\tau,X(\tau),Y(\tau)\right)d\tau-\right.$$

$$-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A_2(\sigma)d\sigma\right)G_2\left(\tau,X(\tau),Y(\tau)\right)d\tau-$$

$$\left.-\int_0^\omega\left[G_2\left(\tau,X(\tau),Y(\tau)\right)-A_2(\tau)Y(\tau)\right]d\tau\right\}. \qquad (5)$$

Показано, что из условий 2 – 3 теоремы следует выполнение модификации [4] обобщённого принципа Каччопполи–Банаха сжимающих отображений на множестве $\tilde{D}$. На основании этого сделан вывод, что решение $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ интегральной задачи (4) – (5) на множестве $\tilde{D}$ существует и единственно, а это означает, что задача (1) – (3) однозначно разрешима в области $D$.

Для построения решения данной задачи разработан алгоритм

$$X_k(t)=\tilde{A}_1^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A_1(\sigma)d\sigma\right)G_1\left(\tau,X_{k-1}(\tau),Y_{k-1}(\tau)\right)d\tau-\right.$$

$$-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A_1(\sigma)d\sigma\right)G_1\left(\tau,X_{k-1}(\tau),Y_{k-1}(\tau)\right)d\tau-$$

$$\left.-\int_0^\omega\left[G_1\left(\tau,X_k(\tau),Y_k(\tau)\right)-A_1(\tau)X_k(\tau)\right]d\tau\right\}, \qquad (6)$$

$$Y_k(t)=\tilde{A}_2^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A_2(\sigma)d\sigma\right)G_2\left(\tau,X_{k-1}(\tau),Y_{k-1}(\tau)\right)d\tau-\right.$$

$$-\int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A_2(\sigma)d\sigma\right) G_2\left(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)\right) d\tau -$$

$$\left.-\int_0^\omega \left[G_2\left(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)\right) - A_2(\tau)Y_k(\tau)\right] d\tau \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad (7)$$

при этом в качестве начального приближения $X_0, Y_0$ приняты постоянные матрицы, определяемые из соответствующих условий периодичности решений $X_1(t), Y_1(t)$, то есть из системы

$$C_1 = -\tilde{A}_1^{-1}(\omega) \int_0^\omega \left[C_1 B_1(\tau) + C_1\left(S_1(\tau)C_1 + S_2(\tau)C_2\right) + \right.$$

$$\left. + F_1(\tau, C_1, C_2)\right] d\tau,$$

$$C_2 = -\tilde{A}_2^{-1}(\omega) \int_0^\omega \left[C_2 B_2(\tau) + C_2\left(P_1(\tau)C_1 + P_2(\tau)C_2\right)\right.$$

$$\left. + F_2(\tau, C_1, C_2)\right] d\tau,$$

которая однозначно разрешима на множестве $\tilde{D}$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (6), (7).


1. *Jodar L.* Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games // Applied Mathematics Letters, 1990. Vol. 3, no. 4. P. 9–12.

2. *Лаптинский В.Н., Роголев Д.В.* Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 10. С. 1412–1420.

3. *Лаптинский В.Н., Роголев Д.В.* О разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати // Веснік Магілёўскага дзярж. ун-та імя А. А. Куляшова. Сер. B, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2010. № 1 (35). Могилёв: МГУ, 2010. С. 12–23.

4. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси, 1998.

# Об экспоненциальной устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с последействием

**Т. Л. Сабатулина**
*Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический университет*
e-mail: tlsabatulina@list.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x}(t) + \int_0^{\omega} x(t-s)\,dq(s) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $q\colon [0,\omega] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации, $q(0) = 0$, интеграл понимаем в смысле Римана–Стилтьеса, оператор $T$ предполагаем линейным, изотонным, вольтерровым и на каждом конечном отрезке действующим из пространства непрерывных функций в пространство локально суммириуемых функций, функция $f$ локально суммируема. Запись дифференциального уравнения в виде (1) с использованием интеграла Римана–Стилтьеса включает в себя уравнения с разными видами последействия, например, уравнения с сосредоточенным запаздыванием и уравнения с распределённым запаздыванием.

Под *решением* уравнения (1) будем понимать локально абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую этому уравнению почти всюду.

Как показано в [1], решение уравнения (1) с заданным начальным условием $x(0)$ существует, единственно и имеет представление:

$$x(t) = C(t,0)x(0) + \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds. \tag{2}$$

Функция $C$ называется *функцией Коши.* Из (2) следует, что поведение любого решения полностью определяется свойствами функции Коши.

**Определение.** Уравнение (1) *экспоненциально устойчиво*, если при некоторых положительных $N$ и $\gamma$ для любого $t$ и почти всех $s$ таких, что $t \geqslant s \geqslant 0$, справедлива оценка

$$|C(t,s)| \leqslant Ne^{-\gamma(t-s)}.$$

Уравнение, которое определяется левой частью (1)

$$\dot{x}(t) + \int_0^{\omega} x(t-s)\,dq(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

назовём *уравнением сравнения.* Для фундаментальных решений уравнений вида (3) в работах [2, 3] были получены точные двусторонние оценки. Приведём здесь эти результаты. Через $x_0 = x_0(t)$ будем обозначать фундаментальное решение уравнения (3).

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \int_0^{\omega} x(t-s)\,dr(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, $r$ — функция ограниченной вариации, $r(0) = 0$.

Характеристическая функция уравнения (4) имеет вид

$$F(\lambda) = \lambda + a + \int_0^{\omega} e^{-\lambda s}\,dr(s), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

В случаях, когда $r$ монотонна, для фундаментального решения уравнения (4) удаётся получить двустороннюю экспоненциальную оценку.

**Теорема 1** ([2]). *Если в уравнении* (4) *функция* $r$ *неубывающая, а для характеристической функции при некотором вещественном* $\zeta > 0$ *выполнены условия* $F(-\zeta) = 0$, $F'(-\zeta) > 0$, *то фундаментальное решение уравнения* (4) *имеет двустороннюю оценку*

$$e^{-\zeta t} \leqslant x_0(t) \leqslant \frac{1}{F'(-\zeta)} e^{-\zeta t}, \quad t \geqslant 0, \tag{5}$$

*и, кроме того,* $\lim\limits_{t\to\infty} x_0(t)e^{\zeta t} = \frac{1}{F'(-\zeta)}$.

**Теорема 2** ([2]). *Если в уравнении* (4) *функция* $r$ *невозрастающая и при некотором вещественном* $\zeta > 0$ *справедливо равенство* $F(-\zeta) = 0$, *то фундаментальное решение уравнения* (4) *имеет двустороннюю оценку*

$$me^{-\zeta t} \leqslant x_0(t) \leqslant e^{-\zeta t}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{6}$$

*и, кроме того,* $\lim\limits_{t\to\infty} x_0(t)e^{\zeta t} = \frac{1}{F'(-\zeta)}$.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - \int_0^h x(t-s)\,dr_1(s) + \int_h^\omega x(t-s)\,dr_2(s) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{7}$$

где $0 \leqslant h \leqslant \tau$, функции $r_1\colon [0,h] \to \mathbb{R}_+$ и $r_2\colon [h,\omega] \to \mathbb{R}_+$ не убывают, $r_1(0) = r_2(h) = 0$. Характеристическая функция уравнения (7) имеет вид

$$F(\lambda) = \lambda - \int_0^h e^{-\lambda s}\,dr_1(s) + \int_h^\omega e^{-\lambda s}\,dr_2(s), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

**Теорема 3** ([3]). *Пусть* $-\zeta$ — *наибольший вещественный корень функции* $F$, $\zeta > 0$ *и* $F'(-\zeta) \neq 0$. *Тогда фундаментальное решение уравнения* (7) *имеет двустороннюю оценку*

$$e^{-\zeta t} \leqslant x_0(t) < \frac{1}{F'(-\zeta)} e^{-\zeta t}, \quad t \geqslant 0. \tag{8}$$

Оценки $(5), (6), (8)$ имеют вид:

$$N_1 e^{-\zeta t} \leqslant x_0(t) \leqslant N_2 e^{-\zeta t}, \tag{9}$$

где $N_1, N_2 > 0$. Введём

$$H(\gamma) = 1 - \frac{\sup_{\xi\in\mathbb{R}_+}(e^{\gamma\xi} T(e^{-\gamma\xi}))}{F(-\gamma)}, \quad \gamma \in [0,\zeta].$$

**Замечание.** Показатели экспоненты и постоянные $N_1, N_2$ в оценках $(5), (6), (8)$ являются точными.

**Теорема 4.** *Пусть для фундаментального решения уравнения сравнения выполнены оценки* (9), $H(0) > 0$, $\gamma_0$ *— первый положительный нуль уравнения* $H(\gamma) = 0$. *Тогда для функции Коши уравнения* (1) *при всех* $\gamma \in [0, \gamma_0)$ *справедлива оценка*

$$N_1 e^{-\gamma(t-s)} \leqslant C(t,s) \leqslant H^{-1}(\gamma) N_2 e^{-\gamma(t-s)}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № FSNM-2023-0005.

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

2. *Малыгина В.В., Чудинов К.М.* О точных двусторонних оценках устойчивых решений автономных функционально-дифференциальных уравнений // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 360–378.

3. *Malygina V., Sabatulina T.* On estimates of solutions to autonomous differential equations with aftereffect and coefficients of different signs // Functional Differential Equations. 2024. Vol. 31, no. 3–4. P. 191–203.

# Об асимптотической устойчивости по выходу для систем с запаздыванием

**Н. О. Седова**

*Ульяновск, Ульяновский государственный университет*

e-mail: sedovano@ulsu.ru

Одной из важнейших задач анализа динамической системы является исследование ее устойчивости в том или ином смысле. «Классическое» определение устойчивости начала координат по Ляпунову в последние десятилетия получило дополнение в виде различных видов устойчивости, которые обобщают свойства систем, важные для приложений. Одним из таких определений является устойчивость по выходу. Широко известным частным случаем этого определения является устойчивость по части переменных [1, 2]. Такая постановка особенно актуальна при проектировании систем управления и наблюдения: например, в случае адаптивного управления состояние замкнутой системы включает как состояние управляемого объекта (которое требуется привести к началу координат), так и вектор ошибок оценки параметров (который может, вообще говоря, к нулю не сходиться); при проектировании наблюдателя, напротив, малой должна быть ошибка наблюдения, при этом к состоянию может никаких требований не предъявлятся. К задаче устойчивости по выходу сводятся также, например, задачи практической устойчивости и устойчивости компактного множества, которым также посвящены обширные исследования.

Задачу устойчивости по выходу рассмотрим для нелинейной системы, описываемой дифференциальным уравнением запаздывающего типа:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1a}$$

$$y(t) = h(x_t), \tag{1b}$$

где $t \in R^+$, $x(t) \in R^n$, функционал $f$ удовлетворяет условиям типа Каратеодори [3] и $f(t, 0) = 0$ для всех $t \in R^+$.

Здесь и далее используем следующие стандартные обозначения: $R^+ = [0, +\infty)$, $R^n$ – $n$-мерное пространство векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ с нормой $|x|$, $C = C([-r, 0], R^n)$ – банахово пространство с супремум-нормой $\| \cdot \|$. Для непрерывной функции $x(t) \in C([t_0 - r, t_0 + T), R^n)$ ($t_0 \in R^+$, $T > 0$) элемент $x_t \in C$ определяется для любого $t \in [t_0, t_0 + T)$ формулой $x_t(s) = x(t + s)$, $-r \le s \le 0$, $\dot{x}(t)$ обозначает правостороннюю производную функции $x(t)$ в точке $t$. Предполагаем также, что функция $h\colon C \to R^p$ ($p \le n$) в (1b) липшицева на ограниченных множествах и $h(0) = 0$. Для любого начального значения $t_0 \in R^+$ и начальной функции $x_0 \in C$ обозначим $x(t; t_0, x_0)$ соответствующее решение, $y(t; t_0, x_0) = h(x_t(t_0, x_0))$.

**Определение.** Система (1a) – (1b) называется *глобально равномерно асимптотически устойчивой по выходу*, если существует функция $\beta \in \mathcal{KL}$, такая что для всех $x_0 \in C$, $t_0 \in R^+$ выполняется условие

$$\|y(t; t_0, x_0)\| \le \beta(\|x_0\|, t - t_0), \quad \forall t \ge 0. \tag{2}$$

Очевидно, что глобальная асимптотическая устойчивость по выходу сводится к классической глобальной асимптотической устойчивости, когда $h(x_t) = x(t)$. Для обыкновенных дифференциальных уравнений понятия устойчивости по выходу были рассмотрены в [4, 5] в рамках задачи устойчивости от входа к состоянию (ISS). В более общей постановке (устойчивость по двум мерам) похожее свойство было изучено в [6]. Для систем с запаздыванием определение глобальной асимптотической устойчивости по выходу было введено (для случая правой части, не зависящей от времени) в [7].

Для нелинейных систем основным инструментом анализа различных свойств устойчивости остается прямой метод. При этом для систем с запаздыванием строится либо функционал Красовского, либо «классическая» конечномерная функция, для которой при оценке производной используется либо условие Разумихина, либо условие типа неравенства Халаная [8]. Основной вопрос при формулировке достаточных условий по выходу связан с допустимостью оценок для функционала и его производной, зависящих от выхода, а не от всего состояния системы. Например, знакоопределенность производной функции Ляпунова при подходящих условиях на саму функцию гарантирует глобальную равномерную асимптотическую устойчивость начала координат. В то же время, для глобальной равномерной асимптотической устойчивости по части переменных знакоопределенность производной только по этим переменным оказывается в общем случае недостаточной, даже для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений; демонстрирующий это пример предложен в [9]. Требования к функционалу, используемому для анализа системы с запаздыванием, могут отличаться также выбранными в оценках нормами состояния или выхода [8]. В случае применения условия Разумихина возникает дополнительная вариативность; см. обсуждение этого вопроса для устойчивости по части переменных в [10].

В данной работе предлагаются новые достаточные условия асимптотической устойчивости по выходу в терминах функций Ляпунова–Разумихина. Обсуждаются различные возможности оценок как для самой функции, так и для ее производной в силу системы (1a) и следствия для частных случаев функции $h$.

1. *Воротников В.И.* К частичной устойчивости и детектируемости функционально-дифференциальных систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 2020. № 2. С. 3–17.

2. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control. Boston: Birkhäuser, 1998.

3. *Седова Н.О.* К вопросу о принципе сведения для нелинейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 74–86.

4. *Sontag E.D., Wang Y.* Notions of input-to-output stability // Systems & Control Letters. 1999. Vol. 38. P. 235–248.

5. *Teel A.R., Praly L.* A smooth Lyapunov function from a class-$\mathcal{KL}$ estimate involving two positive semidefinite functions // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2000. Vol. 5. P. 313–367.

6. *Lakshmikantham V., Liu X.Z.* Stability analysis in terms of two measures. World Scientific, 1993.

7. *Karafyllis I., Pepe P., Jiang Z.-P.* Global output stability for systems described by retarded functional differential equations: Lyapunov characterizations // European Journal of Control. 2008. Vol. 14, no. 6. P. 516–536.

8. *Chaillet A., Karafyllis I., Pepe P., Wang Y.* The ISS framework for time-delay systems: a survey // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 2023. Vol. 35, no 2. P. 237–306.

9. *Orlowski J., Chaillet A., Sigalotti M.* Counterexample to a Lyapunov condition for uniform asymptotic partial stability // IEEE Control Systems Letters. 2020. Vol. 4, no. 2. P. 397–401.

10. *Sedova N.* Razumikhin conditions in partial stability problem for delay systems // In 2016 International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference). IEEE, 2016. P. 1–4.

# Осцилляционные свойства дифференциальной системы и их меры

**И. Н. Сергеев**
*Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова*
e-mail: igniserg@gmail.com

Для области $G$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ с мерой Лебега mes рассмотрим дифференциальную систему вида

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad 0, x \in G, \tag{1}$$

где $f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G)$. Обозначим $\mathbb{B}_\delta \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x| \leqslant \delta\}$, а $x_f(\cdot, x_0)$ — решение системы (1) с начальным значением $x_f(0,x_0) = x_0$.

Расматриваемые ниже свойства развивают понятия и идеи из работ [1, 2] и являются осцилляционными аналогами массивных стабильностных свойств дифференциальной системы.

**Определение 1.** Скажем, что система (1) обладает *осцилляционным* свойством — *блуждаемостью, колеблемостью*, *вращаемостью*, если при *ассоциированных* $\varkappa = \rho, \nu, \theta$ и $\mathrm{K} = \mathrm{P}, \mathrm{N}, \Theta$ выполнено неравенство

$$\varkappa(f) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \varliminf_{x_0\to 0} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\mathrm{K}(t, Lx_f(\cdot, x_0)) > 0, \tag{2}$$

или противоположным *осцилляционным* свойством — *неблуждаемостью, неколеблемостью*, *невращаемостью*, если выполнено равенство

$$\bar{\varkappa}(f) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} \varlimsup_{x_0\to 0} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\mathrm{K}(t, Lx_f(\cdot, x_0)) = 0, \tag{3}$$

где для каждого $t > 0$ *функционалы блуждаемости*, *колеблемости* и *невращаемости* от $x \in C^1([0,t], \mathbb{R}^n_*)$ определим соответственно так:

а) $\mathrm{K}(t,x) = \mathrm{P}(t,x) \equiv \int_0^t |(x(\tau)/|x(\tau)|)^{\cdot}|\, d\tau$ — *вариация следа* функции $x$ на единичной сфере за время от 0 до $t$;

b) $\mathrm{K}(t,x)=\mathrm{N}(t,x)$ — *нормированное* (т. е. умноженное на $\pi$) *число нулей* на промежутке $(0,t]$ функции $P_1x$, где $P_1$ — ортогональный проектор на фиксированную прямую в $\mathbb{R}^n$, причём если хотя бы один из нулей $\tau\in[0,t]$ *кратен*, то считаем выражение $\mathrm{N}(t,x)$ *неопределённым*;

c) $\mathrm{K}(t,x)=\Theta(t,x)\equiv|\varphi(t,P_2x)|$ — модуль непрерывного по $t$ *ориентированного угла* $\varphi(t,P_2x)$ с начальным значением $\varphi(0,P_2x)\equiv 0$ между вектором $P_2x(t)$ и начальным вектором $P_2x(0)$, где $P_2$ — ортогональный проектор на фиксированную плоскость в $\mathbb{R}^n$, причём если $P_2x(\tau)=0$ хотя бы при одном $\tau\in[0,t]$, то считаем выражение $\Theta(t,x)$ *неопределённым.*

**Определение 2.** Для системы (1) при *ассоциированных* $\varkappa$ и K назовем *мерой блуждаемости, колеблемости, вращаемости* или соответственно *неблуждаемости, неколеблемости, невращаемости* величину

$$\mu_{\varkappa}(f)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varlimsup_{t\to+\infty}\varlimsup_{\delta\to+0}\frac{\operatorname{mes}\mathrm{M}_{\varkappa}(f,\varepsilon,t,\delta)}{\operatorname{mes}\mathbb{B}_{\delta}}$$

или

$$\mu_{\bar\varkappa}(f)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varliminf_{t\to+\infty}\varliminf_{\delta\to+0}\frac{\operatorname{mes}\mathrm{M}_{\bar\varkappa}(f,\varepsilon,t,\delta)}{\operatorname{mes}\mathbb{B}_{\delta}},$$

где при $\varepsilon\geqslant 0$ через $\mathrm{M}_{\varkappa}(f,\varepsilon,t,\delta)$ или $\mathrm{M}_{\bar\varkappa}(f,\varepsilon,t,\delta)$ обозначены множества всех значений $x_0\in\mathbb{B}_{\delta}$, удовлетворяющих соответственно условию

$$\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n}\mathrm{K}(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t)\geqslant\varepsilon t,\qquad \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n}\mathrm{K}(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t)<\varepsilon t.$$

Изучим связи введенных свойств как друг с другом, так и с их мерами.

**Теорема 1.** *Система* (1) *обладает блуждаемостью, колеблемостью или вращаемостью тогда и только тогда, когда для ассоциированного* K *при некоторых* $\varepsilon,T>0$ *и каждом* $t>T$ *для некоторого* $\delta>0$ *выполнены равенства*

$$\mathrm{K}(t,Lx_f(\,\cdot\,,x_0))\geqslant\varepsilon t,\quad x_0\in\mathbb{B}_{\delta},\quad L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n,$$

**Теорема 2.** *Система* (1) *обладает неблуждаемостью, неколеблемостью или невращаемостью тогда и только тогда, когда для ассоциированного* K *при любом* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $T > 0$, *что при каждом* $t > T$ *для некоторого* $\delta > 0$ *выполнены неравенства*

$$\mathrm{K}(t, Lx_f(\,\cdot\,, x_0)) < \varepsilon t, \quad x_0 \in \mathbb{B}_\delta, \quad L = L(x_0) \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n.$$

**Теорема 3.** *Для любой системы* (1) *показатели* (2) *и* (3) *удовлетворяют соотношениям*

$$0 \leqslant \varkappa(f) \leqslant \bar{\varkappa}(f), \quad \varkappa = \rho, \nu, \theta,$$

$$\theta(f) \leqslant \nu(f) = \rho(f), \quad \bar{\theta}(f) \geqslant \bar{\nu}(f) = \bar{\rho}(f).$$

**Теорема 4.** *Никакая система* (1) *не обладает никакими двумя противоположными осцилляционными свойствами одновременно.*

**Теорема 5.** *Система* (1) *обладает блуждаемостью (неблуждаемостью) тогда и только тогда, когда она обладает колеблемостью (соответственно, неколеблемостью).*

**Теорема 6.** *Если система* (1) *обладает вращаемостью, то обладает также блуждаемостью и колеблемостью, а если обладает неблуждаемостью или неколеблемостью, то обладает также и невращаемостью.*

**Теорема 7.** *Для любой системы* (1) *меры осцилляционных свойств существуют и удовлетворяют соотношениям*

$$\mu_\varkappa(f), \mu_{\bar{\varkappa}}(f) \in [0, 1], \quad 0 \leqslant \mu_\varkappa(f) + \mu_{\bar{\varkappa}}(f) \leqslant 1, \quad \varkappa = \rho, \nu, \theta,$$

$$\mu_\theta(f) \leqslant \mu_\nu(f) = \mu_\rho(f), \quad \mu_{\bar{\theta}}(f) \geqslant \mu_{\bar{\nu}}(f) = \mu_{\bar{\rho}}(f).$$

**Теорема 8.** *Если система* (1) *обладает некоторым осцилляционным свойством, то мера этого свойства равна* 1, *а противоположного —* 0.

**Теорема 9.** *При* $n = 2$ *существует такая система* (1), *что ее меры блуждаемости и колеблемости равны* 1, *но ни одним из этих свойств она не обладает.*

**Теорема 10.** *При* $n = 2$ *существует такая линейная система* (1), *что ее меры сразу всех осцилляционных свойств равны* 0 *и ни одним из этих свойств она не обладает.*

**Теорема 11.** *При* $n = 2$ *для любой линейной системы* (1) *справедлива ровно одна из следующих трех цепочек соотношений*

$$\mu_\theta(f) = \mu_\nu(f) = \mu_\rho(f) = 1 > 0 = \mu_{\bar\theta}(f) = \mu_{\bar\nu}(f) = \mu_{\bar\rho}(f),$$

$$\mu_\theta(f) = 0 < 1 = \mu_{\bar\theta}(f), \quad \mu_\theta(f) = 0 = \mu_{\bar\theta}(f) = \mu_{\bar\nu}(f) = \mu_{\bar\rho}(f).$$

**Теорема 12.** *При* $n = 2$ *и любом* $\mu \in [0, 1]$ *для каждой из трех цепочек теоремы* 11 *существует линейная система* (1), *удовлетворяющая именно этой цепочке, а если эта цепочка — одна из двух последних, то выполнены еще и равенства* $\mu = \mu_\nu(f) = \mu_\rho(f)$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № 075-03-2024-074/5.

1. *Сергеев И.Н.* Исследование полных свойств колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы по первому приближению // Мат. заметки. 2024. Т. 115, № 4. С. 610–618.

2. *Сергеев И.Н.* Определение и свойства мер колеблемости, блуждаемости и вращаемости дифференциальной системы // Мат. заметки. 2025. Т. 117, № 2. С. 305–314.

# Существование и оценки решений периодической краевой задачи для неявного дифференциального включения

**И. Д. Серова**

*Тамбов, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина*

e-mail: Irinka_36@mail.ru

Через $X \doteq (X, \preceq)$, $Y \doteq (Y, \preceq)$ будем обозначать частично упорядоченные пространства. Пусть заданы элементы $v, w \in X$

и множество $X_0 \subset X$. Обозначим $\mathcal{O}_X(w) \doteq \{x \in X\colon x \preceq w\}$, $\mathcal{O}_X(X_0) \doteq \bigcup_{\forall w \in X_0} \mathcal{O}_X(w)$.

Напомним, что многозначное отображение $F : X \rightrightarrows Y$ называют *изотонным* (*антитонным*) на множестве $X_0 \subset X$, если для любых $v, w \in X_0$ таких, что $w \preceq v$, и для любого $y \in F(v)$ существует $z \in F(w)$, удовлетворяющий неравенству $z \preceq y$ (соответственно, $z \succeq y$). Изотонное (*антитонным*) на всем $X$ отображение называют *изотонным* (*антитонным*).

Отображение $F : X \rightrightarrows Y$ называют *упорядоченно накрывающим множество* $Y_0 \subset Y$ (см. [1]), если для любого $v \in X$ выполнено вложение $\mathcal{O}_Y\big(F(v)\big) \cap Y_0 \subset F\big(\mathcal{O}_X(v)\big)$.

Обозначим через $W^n$ пространство измеримых (по Лебегу) функций $[a, b] \to \mathbb{R}^n$ с «обычным» покоординатным порядком. Для обозначения действия многозначного отображения, имеющего компактные в $\mathbb{R}^m$ значения, будем использовать символ $\to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$.

Пусть заданы многозначные отображения $\mathbf{G} : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m),\ B : [a, b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ и диагональная $n \times n$ матрица $\lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ такая, что $\lambda_i \neq 0$, $\forall i = \overline{1, n}$. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\mathbf{G}(t, x, \dot{x}, \dot{x}) \ni 0,\ t \in [a, b], \tag{1}$$

при дополнительном ограничении на искомую функцию

$$(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(t) - \lambda x(t) \in B(t),\ t \in [a, b]. \tag{2}$$

Обозначим $L^n \subset W^n$ — пространство суммируемых функций $[a, b] \to \mathbb{R}^n$, $AC^n$ — пространство таких абсолютно непрерывных функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, что $\dot{x} \in L^n$. Определим подмножество $L(B)$ пространства $L^n$, содержащее все суммируемые сечения многозначного отображения $B : [a, b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$, и подмножество $AC_{\mathcal{L}}(B)$ пространства $AC^n$ таких абсолютно непрерывных функций, что $\mathcal{L}x \in L(B)$.

Решением системы включений (1), (2) будем называть всякую функцию $x \in AC_{\mathcal{L}}(B)$, удовлетворяющую включению (1) при п.в. $t \in [a, b]$.

Пусть задан вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим периодическую краевую задачу для системы (1), (2) с условием

$$x(a) - x(b) = \gamma. \tag{3}$$

Будем обозначать множество ее решений через $\mathcal{R}$, $\mathcal{R} \subset AC_{\mathcal{L}}(B)$. Для рассматриваемого отображения со значениями $\mathbf{G}(t,x,v,w)$ сделаем замену переменных $v = z+\lambda x$, $w = y+\lambda x$. Тем самым по заданному отображению $\mathbf{G}$ определим отображение $\mathbf{G}^{\lambda} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$, $\mathbf{G}^{\lambda}(t,x,z,y) = \mathbf{G}(t,x,z+\lambda x, y+\lambda x)$.

Отметим, что для многозначного отображения $\mathbf{G}^{\lambda}$ не предполагается выполнение условий Каратеодори. Тем не менее, наложенные ниже на $\mathbf{G}^{\lambda}$ и $B$ условия обеспечат его суперпозиционную измеримость (см. [2]):

• *при любых* $x, z, y \in \mathbb{R}^n$ *отображение* $\mathbf{G}^{\lambda}(\cdot, x, z, y) : [a,b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *измеримо*;

• *при п.в.* $t \in [a,b]$ *и любых* $y \in \mathbb{R}^n$ *отображение* $\mathbf{G}^{\lambda}(t,\cdot,\cdot,y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *непрерывно справа по каждому скалярному аргументу* $x_1, \ldots, x_n$ *и* $z_1, \ldots, z_n$;

• *при п.в.* $t \in [a,b]$ *и любых* $x, z \in \mathbb{R}^n$ *отображение* $\mathbf{G}^{\lambda}(t,x,z,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *непрерывно*;

• *множество измеримых сечений многозначного отображения* $B : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *не пусто и интегрально ограничено снизу.*

При произвольных $q = (q_1, \ldots, q_n) \in L^n$, $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим вспомогательную линейную краевую задачу

$$\mathcal{L}x = q, \quad x(a) - x(b) = c.$$

Так как $\lambda_i \neq 0$, $\forall i = \overline{1,n}$, то эта задача при любых $q \in L^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ имеет единственное решение $x = (x_1, \ldots, x_n) \in AC^n$, определяемое формулой

$$x = \mathsf{W}(q,c),$$

где отображение $\mathsf{W} : L^n \times \mathbb{R}^n \to AC^n$ – это интегральный оператор $\mathsf{W}(q,c) = (\mathsf{W}_1(q_1,c_1), \ldots, \mathsf{W}_n(q_n,c_n))$, компоненты которого определяются соотношениями

$$(\mathsf{W}_i(q_i,c_i))(t) = X_i(t)c_i + \int_a^b \mathcal{W}_i(t,s)q_i(s)ds, \quad t \in [a,b],$$

$$X_i(t) = \frac{e^{\lambda_i t}}{1-e^{\lambda_i}}, \quad \mathcal{W}_i(t,s) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda_i(t-s)}}{1-e^{\lambda_i}}, & a \le s \le t \le b, \\[2ex] \dfrac{e^{\lambda_i(t-s+1)}}{1-e^{\lambda_i}}, & a \le t < s \le b, \end{cases} \qquad i = \overline{1,n}.$$

Обозначим $D(t) \doteq \{(\mathsf{W}(q,\gamma))(t) : q \in W(B)\} \subset \mathbb{R}^n$, $t \in [a,b]$, $\mathbf{\Omega} \doteq \{(t,x,z,y) : t \in [a,b],\ x \in D(t),\ z \in B(t),\ y \in B(t)\}$ и определим сужение $\mathbf{G}^{\lambda}_{\mathbf{\Omega}} : \mathbf{\Omega} \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ многозначного отображения $\mathbf{G}^{\lambda}$ на множество $\mathbf{\Omega}$.

**Теорема.** *Пусть задана функция $\eta_0 \in AC_{\mathcal{L}}(B)$ такая, что*

$$\mathbf{G}(t,\eta_0(t),\dot{\eta_0}(t),\dot{\eta_0}(t)) \cap \mathbb{R}^m_+ \neq \emptyset, \quad t \in [a,b], \quad \eta_0(a) - \eta_0(b) \geq \gamma.$$

*Пусть также выполнены следующие условия:*
• *при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $x \in D(t)$, $z \in B(t)$ многозначное отображение $\mathbf{G}^{\lambda}_{\mathbf{\Omega}}(t,x,z,\cdot) : B(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ упорядоченно накрывает $\{0\} \subset \mathbb{R}^m$;*
• *для п.в. $t \in [a,b]$ и любых $z,y \in \mathbb{R}^n$, при $i = \overline{1,n}$ таких, что $\lambda_i > 0$, многозначное отображение $\mathbf{G}^{\lambda}(t,x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\ldots,z,y) : \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ изотонно, а при $i = \overline{1,n}$ таких, что $\lambda_i < 0$, многозначное отображение $\mathbf{G}^{\lambda}(t,x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\ldots,z,y) : \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ антитонно;*
• *при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $x,y \in \mathbb{R}^n$ многозначное отображение $\mathbf{G}^{\lambda}(t,x,\cdot,y) : \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ антитонно.*

*Тогда задача* (1), (2), (3) *разрешима, и в множестве $\mathcal{LR} \subset L(B)$ существует минимальный элемент $\mathcal{L}x$, $x \in \mathcal{R}$, для которого при п.в. $t \in [a,b]$ выполнено $(\mathcal{L}x)(t) \leq (\mathcal{L}\eta_0)(t)$.*

Близкие данной теореме результаты о дифференциальном неравенстве для двухточечной краевой задаче были получены в [3, §3.3].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда № 23–11–20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/.

1. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. Vol. 179, no. 1. P. 13–33.

2. *Серова И.Д.* Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26, № 135. С. 305–314.

3. *Жуковский Е.С., Серова И.Д.* Метод сравнения в исследовании уравнений и включений. Санкт-Петербург: Издательский дом "Сциентиа", 2024.

# Майорановские состояния в модели Китаева с мнимым потенциалом

**Т. С. Тинюкова**
*Ижевск, УдГУ*
e-mail: ttinyukova@mail.ru

**Ю. П. Чубурин**
*Ижевск, УдмФИЦ УрО РАН*
e-mail: chuburin@ftiudm.ru

Действие гамильтониана $H_0$ на функции

$$\Psi(n) = (\psi_1(n), \psi_2(n))^T,$$

где $T$ — транспонирование, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, определяется формулой

$$(H_0\Psi)(n) =$$

$$= \begin{pmatrix} -t(\psi_1(n+1) + \psi_1(n-1)) + \Delta(\psi_2(n+1) - \psi_2(n-1)) - \mu\psi_1(n) \\ t(\psi_2(n+1) + \psi_2(n-1)) - \Delta(\psi_1(n+1) - \psi_1(n-1)) + \mu\psi_2(n) \end{pmatrix},$$

$t \in \mathbb{R}, \Delta \in \mathbb{R}$. Компоненты $\psi_1(n)$ и $\psi_2(n)$ функции $\Psi(n)$ описывают, соответственно, электроны и дырки. Положим $\varepsilon = 2t - \mu$. Далее будем предполагать, что $t > 0$, $\Delta > 0$, $t \neq \Delta$, $0 < \varepsilon \ll \max\{\Delta, t\}$.

Неэрмитовый потенциал $V$ определим его действием на функции

$$V \begin{pmatrix} \psi_1(n) \\ \psi_2(n) \end{pmatrix} = i\gamma \begin{pmatrix} \delta_{n,0}\psi_1(0) - \delta_{n,N}\psi_1(N) \\ \delta_{n,0}\psi_2(0) - \delta_{n,N}\psi_2(N) \end{pmatrix},$$

где $\gamma$ — вещественный параметр неэрмитовости, $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера, $N \geqslant 1$.

Для нахождения и исследования майорановских состояний (МС) гамильтониана $H_0 + V$ будем использовать уравнение

$$\Psi(n) = -H_0^{-1} V \Psi(n),$$

полученное из уравнения $(H_0 + V)\Psi(n) = E\Psi$ при $E = 0$.

**Теорема 1.** *При выполнении условия*

$$\gamma = \pm 2\Delta \left(e^{ik_+N} - e^{ik_-N}\right)^{-1},$$

*где*

$$e^{ik_+} = \frac{\Delta - t}{\Delta + t} + O(\varepsilon), \quad e^{ik_-} = -1 + \frac{\varepsilon}{2\Delta} + O(\varepsilon^2),$$

*существуют два МС, которые описываются функциями*

$$\psi_1(n) = \frac{i\gamma}{4\Delta}\Big( \left(e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|}\right)(1 + \operatorname{sgn}(n)) \mp$$

$$\mp i \left(e^{ik_+|n-N|} - e^{ik_-|n-N|}\right)(1 - \operatorname{sgn}(n-N))\Big),$$

$$\psi_2(n) = -\frac{i\gamma}{4\Delta}\Big( \left(e^{ik_+|n|} - e^{ik_-|n|}\right)(1 + \operatorname{sgn}(n)) \pm$$

$$\pm i \left(e^{ik_+|n-N|} - e^{ik_-|n-N|}\right)(1 - \operatorname{sgn}(n-N))\Big).$$

Работа Ю. П. Чубурина поддержана ФТИ УрО РАН, регистрационный номер ЕГИСУ НИОКТР: 124021900019-5. Работа Т. С. Тинюковой финансируется Министерством науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

1. *Tinyukova T.S., Chuburin Yu.P.* Majorana States Near an Impurity in the Kitaev Infinite and Semi-Infinite Model // Theoretical and Mathematical Physics. 2019. Vol. 200, no. 1. P. 1043–1052.

# Построение приближенных фазовых траекторий управляемых систем с многозначными импульсными воздействиями

**О. В. Филиппова**
*Тамбов, ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»*
e-mail: philippova.olga@rambler.ru

Доклад посвящен построению приближенных решений управляемых дифференциальных систем, подверженных многозначным импульсным воздействиям, и нахождению оценок погрешности таких приближений. Рассматриваются аналитические оценки точности аппроксимаций. Предполагается наличие известного множества возможных управлений, которое зависит как от времени, так и от состояния фазовой траектории в этот момент времени. Фазовая траектория системы описывает путь, проходимый системой во времени, и определяется начальным состоянием и выбранными управлениями. Часто найти фазовую траекторию для управляемой системы с многозначными импульсными воздействиями в явном виде не представляется возможным. Поэтому составляют аппроксимирующую задачу, решение которой является приближенной фазовой траекторией. Погрешность приближенной фазовой траектории характеризует отклонение реального поведения системы от вычисленного приближенного решения.

Существует два основных подхода к построению приближенных фазовых траекторий: численные методы (включают использование конечно-разностных схем, метода конечных элементов и др.) и аналитические методы, основанные на асимптотическом анализе (позволяют получать формулы оценки погрешности).

В данной работе, при использовании аналитического метода, доказана теорема, которая позволяет получить приближенное решение управляемой системы с многозначными импульсными воздействиями, а также оценку погрешности такого приближенного решения.

Рассмотрим управляемую систему для дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [a, b], \quad x(a) = \mathrm{x}.$$

Это дифференциальное уравнение подвергается мгновенным скачкообразным (импульсным) воздействиям. Значения таких импульсов могут варьироваться в некоторой замкнутой области, которая, в свою очередь, также может меняться в зависимости от состояния текущего процесса. Таким образом, предполагается, что в заданный момент времени $t_k \in (a, b), k = 1, 2, \ldots, m$, решение $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (фазовая траектория) терпит разрыв, величина которого принадлежит непустому компакту $I_k(x(t_k)) \subset$

$\mathbb{R}^n$. При этом на каждом из промежутков $(t_{k-1}, t_k]$ фазовая траектория $x$ является абсолютно непрерывной функцией. Функция управления предполагается измеримой. Ее значения выбираются в каждый момент времени из соответствующего компактного множества допустимых управлений

$$u(t) \in U(t, x(t)), \quad t \in [a, b].$$

В докладе доказана теорема об оценке расстояния от заданной кусочно абсолютно непрерывной функции $y\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ до множества фазовых траекторий системы при всех начальных значениях из окрестности вектора x. Предполагается, что при заданном начальном значении x решения $x$ множество фазовых траекторий априорно ограничено. Теорема позволяет путем подбора функции $y$ получить приближенное решение управляемой системы, а также оценку погрешности такого приближенного решения. Таким образом, возникает задача о наилучшем выборе $y$ из некоторого класса кусочно-непрерывных функций. В данной работе эта задача рассматривается для функций, линейных на каждом промежутке $(t_{k-1}, t_k]$.

При доказательстве теоремы используется понятие совокупной априорной ограниченности решений и применяются методы, рассмотренные в [1]. Близкие подходы с применением априорных неравенств для нахождения оценок решений использовались в [2] при изучении дифференциальных включений с управлением.

В заключение отметим, что современные исследователи уделяют значительное внимание вопросам оценки погрешности управляемых систем с импульсными воздействиями. Например, в работах Ю. И. Малышева рассмотрены методы анализа устойчивости систем с многошаговыми алгоритмами управления (см. [3]). А. В. Глушков в работе [4] предложил методику построения оптимальной управляющей стратегии с оценкой максимальной допустимой погрешности. В работе [5] X. Liang и др. предложены адаптивные алгоритмы управления, позволяющие минимизировать влияние погрешности путём введения компенсирующих членов. P. Huo и др. разработали теоретический аппарат для оценки погрешности стохастических процессов с импульсными возмущениями (см. [6]).

Таким образом, построение приближенных фазовых траекторий дифференциальных уравнений с многозначными импульсными воздействиями и оценка погрешности таких приближений являются актуальными задачами в теории управления. Предложенные в данной работе методы и полученные результаты применимы к различным классам управляемых систем.


1. *Булгаков А.И., Филиппова О.В.* Импульсные функционально-дифференциальные включения с отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2014. Вып. 1 (43). С. 3–48.

2. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН СССР. 1985. № 169. С. 194–252.

3. *Малышев Ю.И., Смирнова О.А.* Анализ устойчивостии управляемых систем // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2018. № 3. С. 7–15.

4. *Глушков А.В.* Оптимальное управление с оценкой погрешности // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 4. С. 34–41.

5. *Liang X., Zhang Y., Chen W.* Adaptive control for impulsive systems with bounded disturbances // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 65, no. 3. P. 1268–1275.

6. *Huo P., Sun J., Wu Q.* Stochastic processes and impulse effects in dynamic systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2021. Vol. 498, issue 1. Article ID 124956.


# О методе предельных дифференциальных включений


**И. А. Финогенко**

*Иркутск, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН*

e-mail: fin@icc.ru


Развивается метод исследования асимптотического поведения решений неавтономных систем, представленных в форме дифференциальных включений. Полученные результаты носят форму обобщений принципа инвариантности Ла-Салля.

Принципом инвариантности обычно называют теорему Ла-Салля для автономных дифференциальных уравнений, в которой (в рамках прямого метода Ляпунова) предполагается, что производная функции Ляпунова неположительна. Вывод, который из этого следует, состоит в том, что правые предельные множества решений принадлежат наибольшему инвариантному подмножеству из множества нулей производной функции Ляпунова. Для неавтономных уравнений на этом пути возникают трудности, связанные с отсутствием свойств типа инвариантности правых предельных множеств решений, а также с описанием множества нулей производной функций Ляпунова, так как эта производная зависит не только от $x$, но также и от переменной $t$.

Попытки перенести принцип инвариантности на неавтономные уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

привели к понятиям предельных уравнений, порождаемых сдвигами (или трансляциями) $f^\tau(t, x) = f(t + \tau, x)$ функций $f(t, x)$. Сейчас этот подход известен как метод предельных уравнений, который в сочетании с прямым методом Ляпунова позволяет эффективно исследовать асимптотическое поведение решений неавтономных систем. Эти исследования восходят к работам Дж. Селла [1] и З. Артштейна [2] по топологической динамике неавтономных дифференциальных уравнений.

Метод предельных уравнений основан на том, что если $x(t)$ — решение уравнения (1), то равномерный предел $y(t)$ последовательности функций $y_k(t) = x(t + t_k)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x} = f'(t, x) \tag{2}$$

при условии, что $f(t + t_k, x) \to f'(t, x)$ при $t_k \to +\infty$. Тогда свойства типа инвариантности правых предельных множеств решений и аналог теоремы Ла-Салля для уравнения (1) может быть записан в терминах уравнения (2).

При распространении метода предельных уравнений на неавтономные дифференциальные включения

$$\dot{x} \in F(t, x) \tag{3}$$

прежде всего должен быть решен вопрос о структуре и методах построения предельных дифференциальных соотношений. Относительно переменной $t$ предполагается лишь то, что для каждого фиксированного $x$ многозначное отображение $t \to F(t,x)$ имеет измеримый селектор. В частности, это имеет место в теории разрывных систем при определении решения в смысле А.Ф. Филиппова. В этой ситуации при построении предельных отображений возникают трудности принципиального характера, и возможности использования каких-либо теорем и фактов математического (в том числе многозначного) анализа о сходимости функциональных последовательностей многозначных отображений неочевидны. В наших исследованиях используются предельные дифференциальные включения

$$\dot{x} \in F'(t,x), \tag{4}$$

где

$$F'(t,x) = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k\geq n} F(t+t_k, x).$$

Производная функции Ляпунова $V\colon R^1 \times R^n \to R^1$ в силу включения (3) задается в виде

$$\dot{V}^+(t,x) = \sup_{y\in F(t,x)} (\langle \nabla_x V, y\rangle + V_t),$$

где $\nabla_x V$ — градиент функции $V$ по переменной $x$, $V_t$ — частная производная по $t$, $\langle \cdot,\cdot \rangle$ — знак скалярного произведения.

Пусть $w(t,x) \geq 0$ — измеримая по $t$ и непрерывная по $x$ функция, такая, что $\dot{V}^+(t,x) \leq -w(t,x)$. Обозначим

$$\alpha(x) = \lim_{t\to+\infty} \inf_{t\in(b,+\infty)} w(t,x).$$

Аналог принципа инвариантности может быть записан в терминах включения (4) и множества $E_w = \{x\colon \alpha(x) = 0\}$. Впервые это было представлено в статье [3], на основе которой в дальнейшем изучались неавтономные функционально-дифференциальные включения [4], дифференциальные уравнения с разрывной правой частью с приложениями к механическим системам с сухим трением в форме уравнений Лагранжа 2-го рода [5].

Для уравнения (1) отображение

$$F'(t,x) = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k\geq n} f(t+t_k,x)$$

будет, вообще говоря, многозначным. Но, в отличие от метода предельных уравнений, оно определено при весьма общих условиях, и в равной степени может использоваться для исследования неавтономных дифференциальных уравнений. Сравнительный анализ показывает, что если последовательность сдвигов $f^{t_k}(t,x)$ сходится хотя бы поточечно при каждых фиксированных $(t,x)$ к функции $f'(t,x)$, то $f'(t,x) = F'(t,x)$. Тем более это будет иметь место в случае сходимости последовательности $\{f^{t_k}(t,x)\}$, например, в компактно-открытой топологии. Если при каждом фиксированном $x$ эта последовательность сходится слабо в пространстве $L_1(T,R^n)$ классов эквивалентности функций, измеримых по Лебегу на каждом отрезке $T=[a,b]$, то $f'(t,x) \in F'(t,x)$. Таким образом, переход к предельным дифференциальным включениям обобщает известные методы для неавтономных дифференциальных уравнений.

Исследование проведено в рамках госзадания Минобрнауки России (проект № 1210401300060-4).

1. *Sell G.R.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2 // Trans. Amer. Vath. Soc. 1967. Vol. 22. P. 241–283.

2. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equation // J. Differ. Equations. 1977. Vol. 23. P. 216–223.

3. *Финогенко И.А.* Предельные дифференциальные включения и принцип инвариантности неавтономных систем // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 2. С. 454–471.

4. *Финогенко И.А.* Принцип инвариантности для неавтономных функционально-дифференциальных включений // Труды ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 271–284.

5. *Finogenko I.A.* Attraction for Mechanical Systems with friction // Doklady Mathematics. 2021. Vol. 104, No. 2. P. 306–310.

# Уточнение теорем Мышкиса о 3/2

**К. М. Чудинов**
*Пермь, Пермский национальный исследовательский политехнический университет*
e-mail: cyril@list.ru

Рассмотрим линейное неавтономное уравнение с одним сосредоточенным запаздыванием аргумента

$$\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

где $a(t) \geq 0$ и $h(t) \leq t$. Асимптотические свойства решений уравнения (1) естественным образом выражаются через его *функцию Коши* [1, с. 115], которую обозначим через $C(t,s)$.

Работа [2] дает ясные представления об условиях устойчивости линейного неавтономного уравнения с запаздывающим аргументом, идущих от известных теорем А. Д. Мышкиса «о 3/2» [3]. Основные результаты работы [2] применительно к уравнению (1) приобретают следующий вид.

**Предложение 1.** *Если* $\sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds \leq 3/2$, *то функция Коши уравнения* (1) *ограничена.*

**Предложение 2.** *Если* $\int\limits_{0}^{+\infty} a(s)\,ds = +\infty$ *и* $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds < 3/2$, *то для некоторых* $N, \gamma > 0$ *справедлива оценка функции Коши уравнения* (1)

$$|C(t,s)| \leq Ne^{-\gamma \int_s^t a(\tau)\,d\tau}. \tag{2}$$

Заданное Мышкисом направление исследований не следует считать исчерпанным. Представим условия устойчивости, существенно уточняющие результаты работы [2].

Пусть $\mu(\tau) \doteq \begin{cases} \tau, & \tau \in [0,1], \\ 1, & \tau > 1. \end{cases}$ Заметим, что $\int\limits_0^{3/2} \mu(\tau)\,d\tau = 1.$

**Теорема 1.** *Если* $\sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \int_t^{+\infty} \mu\left(\int_{h(s)}^t a(\xi)\,d\xi\right) a(s)\,ds \le 1$, *то функция Коши уравнения* (1) *ограничена.*

Проиллюстрируем некоторые преимущества теоремы 1 перед предложением 1, которое является ее следствием.

**Пример 1.** Положим $a(t)\equiv 1$ и $h(t)=\begin{cases} t-c, & n\in\mathbb{N},\\ t, & n\notin\mathbb{N}.\end{cases}$ Решение уравнения (1) с такими параметрами ведет себя как решение уравнения без запаздывания. Если $c>3/2$, то предложение 1 не выявляет ограниченности решений уравнения. Теорема 1 нечувствительна к подобным скачкам функции $h$.

**Пример 2.** Положим $a(t)\equiv 1$ и $h(t)=2n$ для $t\in[2n,2n+2)$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда решения уравнения (1) ограничены:

$$x(t)=C(-1)^n(1-(t-2n)),\quad t\in[2n,2n+2),\quad n\in\mathbb{N}.$$

При этом $\sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \int_{h(t)}^t a(s)\,ds = \int_{2n-2}^{2n} ds = 2 > 3/2$, но

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \int_t^{+\infty} \mu\left(\int_{h(s)}^t a(\xi)\,d\xi\right) a(s)\,ds = \\ = \int_{2n+1}^{2n+2} \mu\left(\int_{2n}^{2n+1} d\xi\right) ds = 1 \le 1.$$

Таким образом, теорема 1 выявляет ограниченность решений уравнения, предложение 1 — нет.

Замена нестрогого неравенства в теореме 1 строгим и наложение условия несуммируемости коэффициента $a(t)$ на полуоси не гарантируют оценки функции Коши (2). Уточнение вытекающих из предложения 2 условий устойчивости уравнения (1) требует дополнительных требований к параметрам уравнения.

**Определение.** Уравнение (1) называется

- *асимптотически устойчивым*, если для любого фиксированного $s\ge 0$ имеем $C(t,s)\to 0$ при $t\to+\infty$;

- *экспоненциально устойчивым*, если для некоторых $N, \gamma > 0$ при $t \geq s \geq 0$ имеем $|C(t,s)| \leq Ne^{-\gamma(t-s)}$.

Обозначим:

(A) $h(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$,

(B) $\int_0^{+\infty} a(s)\,ds = +\infty$,

(C) $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \int_t^{+\infty} \mu\left(\int_{h(s)}^t a(\xi)\,d\xi\right) a(s)\,ds < 1$.

**Теорема 2.** *Если выполнены условия* (A), (B) *и* (C), *то уравнение* (1) *асимптотически устойчиво.*

Выполнение никаких двух из условий (A), (B) и (C) не является достаточными для асимптотической устойчивости. Выполнение всех трёх условий не гарантирует справедливости оценки (2). Обозначим:

(A1) $t - h(t) \leq R$ для некоторой константы $R > 0$,

(B1) $a(t) \geq m$ для некоторой константы $m > 0$.

**Теорема 3.** *Если выполнены условия* (A1), (B) *и* (C), *то для функции Коши уравнения* (1) *выполнена оценка* (2).

**Теорема 4.** *Если выполнены условия* (A1), (B1) *и* (C), *то уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво.*

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, проект FSNM–2023–0005.

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

2. *Малыгина В.В.* Теорема Мышкиса о 3/2 и ее обобщения // Сиб. матем. журн. 2023. Т. 64, № 2. С. 1248–1262.

3. *Мышкис А.Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Мат. сб. 1951. Т. 28. С. 641–658.

# Инварианты систем со многими степенями свободы с диссипацией

**М. В. Шамолин**
*Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова*
e-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к четномерному многообразию. При этом силовое поле (генератор сдвига в системе) разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Как известно, нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов) [1, 2, 3] облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью. Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для них коэффициенты искомых инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [4, 5, 6]). Наш подход заключается в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка $m$ надо знать $m-1$ независимый нетривиальный тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий.

Ранее [5, 7] важные случаи интегрируемых систем с конечным числом степеней свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались автором. При этом упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Понятия “консервативность”, “силовое поле”, “диссипация” и др. для систем классической механики вполне естественны. Поскольку в работе изучаются системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Исследование “в целом” начинается с изучения приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой ускорение движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, рассматриваются как обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать “силовые поля”. Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат касательного пространства (по одной из квазискоростей системы), получим силовое поле (генератор сдвига) с диссипацией разного знака.

Словосочетание “диссипация разного знака” несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация «со знаком “плюс”» — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация «со знаком “минус”» — это своеобразная “подкачка” энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В предлагаемой работе силовое поле (генератор сдвига системы) разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела.

В данной работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем произвольного нечетного порядка, в которых может быть выделена система с конечным числом степеней свободы на своем четномерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией переменного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

1. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. Gauthier–Villars, Paris. 1912.

2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93, № 5. С. 763–766.

3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74, № 1(445). С. 117–148.

4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53, № 3. С. 209–210.

5. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2015. Т. 464, № 6. С. 688–692.

6. *Шамолин М.В.* Инварианты однородных динамических систем седьмого порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2024. Т. 516, № 1. С. 65–74.

7. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. 2015. Т. 461, № 5. С. 533–536.

# О некоторых свойствах геодезических отображений слоеного многообразия

**А. С. Шарипов**, **З. Ю. Усмонхужаев**

*Ташкент, Национальный университет Узбекистана*

e-mail: asharipov@inbox.ru, zokusm@gmail.com

Проблему геодезических отображений впервые поставил Бельтрами в 1865 году, рассмотрев случай отображения двумерного риманова многообразия на евклидову плоскость. Его работа положила начало изучению таких отображений также для слоеных многообразий. Они имеют большое значение в дальнейшем изучении римановой геометрии, а также в теоретической физике, в частности в общей теории относительности, где они являются траекториями тестовых объектов, движущихся в нетривиальной геометрии пространства-времени, которая заменяет понятие гравитационного поля.

Пусть $M$ — гладкое многообразие размерности $n$.

**Определение 1.** Многообразие $M$ с некоторым фиксированным слоением $F$ на нем называется *слоеным многообразием*, и обозначается через $(M, F)$.

Если при некотором диффеоморфизме $f\colon M \to M$ образ $f(L_\alpha)$ любого слоя $L_\alpha$ слоения $F$ является слоем слоения $F$, то отображение $f$ называется диффеоморфизмом слоеного многообразия и обозначается через $f\colon (M, F) \to (M, F)$ [1].

**Определение 2.** Диффеоморфизм $f\colon (M, F) \to (M, F)$ слоеного многообразия класса $C^r (r > 0)$ называется *геодезическим отображением* слоеного многообразия $(M, F)$, если он является геодезическим отображением на каждом слое слоения $F$, т.е для каждого слоя $L_\alpha$ слоения $F$ суженное отображение $f\colon L_\alpha \to f\,(L_\alpha)$ является геодезическим [2].

**Пример 1.** Пусть $M = R^3 \setminus \{0\}$, $L_\alpha = \{(x; y; z) \in R^3 \,:\, x^2 + y^2 = \alpha^2\}$. Тогда диффеоморфизм $f\,(x, y, z) = (ax, ay, bz)$ является геодезическим отображением слоеного многообразия $(M, F)$, где $\alpha \neq 0$, $a, b \in R$.

Обозначим через $G_F(M)$ множество всех геодезических отображений класса $C^r$ слоеного многообразия $(M, F)$ с слоением $F$ размерности $k$, $r \geq 0$. Множество $G_F(M)$ является подмножеством множества всех диффеоморфизмов $Diff^r(M)$ многообразия $M$ на себя. Множество $Diff^r(M)$ является группой по отношению к суперпозиции отображений. Известно, что отображение, обратное к геодезическому отображению, также является геодезическим отображением [3]. Поэтому множество $G_F(M)$ также является группой относительно операций суперпозиции отображений и, следовательно, подгруппой группы $Diff^r(M)$. Известно, что группа $I(M)$ изометрий с компактно-открытой топологией всегда является топологической группой [4]. В [5] доказано, что группа $Diff^r(M)$ с компактно-открытой топологией является топологической группой для любого гладкого многообразия. Отсюда следует, что группа $G_F(M)$ геодезических отображений слоеного многообразия $(M, F)$ является топологической группой относительно компактно-открытой топологии.

Пусть $\{K_\lambda\}$ — семейство всех компактных множеств, где каждое $K_\lambda$ принадлежит какому-либо слою слоения $F$, и пусть $\{U_\beta\}$ — семейство всех открытых множеств на $M$. Рассмотрим для каждой пары $K_\lambda \subset L_\alpha$ и любого $U_\beta$ совокупность всех отображений $f \in G_F(M)$, для которых $f(K_\lambda) \subset U_\beta$. Эту совокупность отображений будем обозначать через

$$[K_\lambda, U_\beta] = \{f : M \to M \ | f(K_\lambda) \subset U_\beta\}.$$

Это семейство образует предбазу некоторой топологии. Эту топологию будем называть послойной компактно-открытой топологией или $F-$компактно-открытой топологией.

**Утверждение 1.** *Группа $G_F(M)$ с $F-$компактно-открытой топологией является хаусдорфовым пространством.*

**Утверждение 2.** *Группа $G_F(M)$ с $F-$компактно-открытой топологией имеет счетную базу.*

1. *Шарипов А.С.* О группе изометрий слоеного многообразия // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 118–122.

2. *Нарманов А., Уразметова Ш.* О геодезических отображениях слоеного многообразия // Доклады Академии наук республики Узбекистан. 2009. № 3. С. 15–17.

3. *Синюков Н.* Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979.

4. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.

5. *Narmanov A., Sharipov A.* On the group of foliation isometries // Methods of functional analysis and topology. 2009. Vol. 15, no. 2. P. 195–200.

# Вариационный подход к построению оценки перерегулирования линейной системы с запаздыванием

**В. А. Шаршуков**

*Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет, кафедра теории управления*

e-mail: v.sharshukov@spbu.ru

Многие физические и социальные процессы моделируются при помощи дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [1, 2]. При решении многих прикладных задач актуальным является вопрос качественного поведения системы при внешнем (управляющем или возмущающем) воздействии. В частности, склонность системы к колебанием может быть охарактеризована величиной перерегулирования [2].

Существуют различные подходы к построению оценки перерегулирования. К примеру, весьма распространены методы, основанные на решении линейных матричных неравенств (см., например, [3, 4]). Основное их преимущество заключается в том, что вышеупомянутые матричные неравенства могут быть эффективно решены с использованием методов выпуклого программирования. Недостатком же является то, что полученные оценки являются достаточно консервативными.

В этой работе предлагается подход к построению оценки перерегулирования, основанный на минимизации функционала полного типа.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \qquad t \geqslant 0,\ h > 0, \tag{1}$$

где $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, причём $A_1 \neq 0_{n\times n}$. Начальные функции $\varphi(t),\ \ t \in [-h, 0]$ принадлежат классу $PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ кусочно-непрерывных функций с равномерной нормой

$$\|\varphi\|_h = \sup_{\theta\in[-h,0]} \|\varphi(\theta)\| .$$

Будем считать систему (1) экспоненциально устойчивой. Значит, существуют $\gamma \geqslant 1$ и $\sigma > 0$ такие, что для любого решения $x(t,\varphi)$ справедлива оценка

$$\|x(t,\varphi)\| \leqslant \gamma e^{-\sigma t}\|\varphi\|_h, \qquad t \geqslant 0.$$

Отметим, что постоянную $\gamma$ называют перерегулированием.

Из теории функционалов Ляпунова–Красовского известно [5], что для функционала полного типа

$$\begin{aligned} v[\varphi] = \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0)\int\limits_{-h}^{0} U^T(h+\theta)A_1\varphi(\theta)d\theta + \\ + \int\limits_{-h}^{0} \varphi^T(\theta_1)A_1^T \left[\int\limits_{-h}^{0} U(\theta_1-\theta_2)A_1\varphi(\theta_2)d\theta_2\right] d\theta_1 + \\ + \int\limits_{-h}^{0} \varphi^T(\theta)\left[W_1 + (h+\theta)W_2\right]\varphi(\theta)d\theta \end{aligned}$$

справедлива оценка

$$\alpha_1\varphi^2(0) \leqslant v[\varphi] \leqslant \alpha_2\|\varphi(\theta)\|_h^2,$$

где $W_0, W_1, W_2$ — симметричные положительно определённые матрицы, $U(\tau)$ — матрица Ляпунова, соответствующая матрице $W = W_0 + W_1 + hW_2$, а $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — некоторые положительные константы. Тогда оценка $\hat{\gamma}$ перерегулирования $\gamma$ может быть найдена как

$$\hat{\gamma} := \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}.$$

Будем искать $\alpha_1$, минимизируя функционал $v[\varphi]$. Для исследования вопроса о существовании и единственности экстремали функционала полного типа расширим его на гильбертово пространство

$$M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \varphi_0, \\ \Phi(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times L_2([-h, 0), \mathbb{R}^n) \right\}$$

со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \varphi_0^T \psi_0 + \int\limits_{-h}^{0} \Phi^T(\theta)\Psi(\theta)d\theta, \qquad \varphi, \psi \in M_2,$$

где

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \Phi(\cdot) \end{pmatrix}, \quad \psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \Psi(\cdot) \end{pmatrix},$$

и нормой

$$\|\varphi\|_M = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} = \sqrt{\|\varphi_0\|^2 + \int_{-h}^{0} \|\Phi(\theta)\|^2 d\theta.}$$

Основным результатом настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

**Теорема.** *Функционал $v[\varphi]$ является строго выпуклым на любом выпуклом подмножестве пространства $M_2$.*

Из данной теоремы следует [6], что функционал $v[\varphi]$ достигает наименьшего значения на любом замкнутом множестве в гильбертовом пространстве $M_2$. Если же это множество также является выпуклым, то элемент $\varphi^*$, на котором достигается наименьшее значение, является единственным.

Таким образом, поставленная вариационная задача может быть решена известными методами [6].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–71–10099, https://rscf.ru/project/23-71-10099/.

1. *Эльсгольц Л.Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

2. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. СПб.: Издательство “Профессия”, 2003.

3. *Mondie S., Kharitonov V.L.* Exponential Estimates for Retarted Time-Delay Systems: An LMI Approach // IEEE Transactions on Automatic Control. 2005. T. 50, № 2. C. 268–273.

4. *Xu Z., Li X., Stojanovic V.* Exponential stability of nonlinear state-dependent delayed impulsive systems with applications // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2021. T. 42.

5. *Kharitonov V.L.* Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Birkhäuser, 2013.

6. *Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018.

# Эквивалентные гамильтоновы системы для дифференциальных уравнений с периодическим возмущением

**М. Г. Юмагулов, Л. С. Ибрагимова**

*Уфа, Уфимский университет науки и технологий*
e-mail: yum_mg@mail.ru, lilibr@mail.ru,

**Т. С. Орипов**

*г. Денау, Денауский институт предпринимательства и педагогики, Узбекистан*
e-mail: oripovt@mail.ru

Рассматривается зависящая от малого параметра $\varepsilon$ динамическая система

$$L\left(\frac{d}{dt}, t, \varepsilon\right) y = 0\,. \tag{1}$$

Здесь $L$ — операторный многочлен

$$L(p,t,\varepsilon) =$$

$$= p^{2n} + a_1(t,\varepsilon)p^{2n-2} + a_2(t,\varepsilon)p^{2n-4} + \ldots + a_{n-1}(t,\varepsilon)p^2 + a_n(t,\varepsilon),$$

коэффициенты $a_j(t,\varepsilon)$ которого — это вещественные непрерывные функции, представимые в виде $a_j(t,\varepsilon) = a_{j,0} + \varepsilon\varphi_j(t)$; $a_{j,0}$ — константы, функции $\varphi_j(t)$ предполагаются непрерывными и $T$-периодическими.

Многочлен $L(p,t,\varepsilon)$ содержит степени только четных порядков. К дифференциальным уравнениям четных порядков приводят многие задачи теории управления, теории гамильтоновых систем и др. Важным направлением исследования таких уравнений является задача о введении на них гамильтоновой структуры (см., например, [1]). Большинство исследований направлено на изучение указанных вопросов для автономных дифференциальных уравнений. Существенно меньше изучены задачи для неавтономных и, в частности, для уравнений с периодическими возмущениями.

В настоящей статье предлагаются новые подходы в задаче конструирования для неавтономного уравнения (1) эквивалентной динамической системы вида

$$\frac{dx}{dt} = (JB + \varepsilon U(t))x\,, \quad y = (x(t), c)\,, \quad x \in R^{2n}; \tag{2}$$

здесь символ $(x,c)$ обозначает скалярное произведение векторов $x, c \in R^{2n}$, матрица $J$ определена равенством: $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$, в котором $I$ — единичная $(n \times n)$-матрица; $B$ — постоянная симметрическая матрица, $U(t)$ — непрерывная и $T$-периодическая матрица. Динамические системы вида (2) часто называют *квазигамильтоновыми системами*, в отличие от *гамильтоновых систем* вида $x' = JBx$. Статья развивает исследования, начатые в [2, 3].

Стандартная замена $z_1 = y$, $z_2 = y'$, $\ldots$, $z_n = y^{(2n-1)}$ сводит уравнение (1) к эквивалентной системе

$$z' = [A_0 + \varepsilon S_0(t)]z\,, \quad y = (z, c_0)\,, \tag{3}$$

в которой

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_{n,0} & 0 & -a_{n-1,0} & 0 & \ldots & -a_{1,0} & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_0(t) = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \varphi_n(t) & 0 & \varphi_{n-1}(t) & 0 & \ldots & \varphi_1(t) & 0 \end{bmatrix},\ c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решения уравнения (1) и системы (3) связаны равенством $y(t) = (z(t), c_0)$.

Рассмотрим также систему

$$x' = B(t, \varepsilon)x\,, \quad y = (x, c)\,, \tag{4}$$

в которой $x, c \in R^{2n}$, а $B(t, \varepsilon)$ — непрерывная и $T$-периодическая по $t$ матрица. Системы (3) и (4) будем называть *эквивалентными*, если существует невырожденная матрица $Q$ такая, что замена $x = Qz$ преобразует систему (3) в систему (4). Уравнение (1) и систему (4) будем называть *эквивалентными*, если система (4) эквивалентна системе (3).

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) является автономным: $L_0\left(\dfrac{d}{dt}\right) y = 0$; здесь $L_0(p) = p^{2n} + a_{1,0}p^{2n-2} + \ldots + a_{n-1,0}p^2 + a_{n,0}$ — многочлен. Так как многочлен $L_0(p)$ содержит степени только четных порядков, то этому многочлену с данным набором корней можно поставить в соответствие одну или несколько нормальных форм гамильтоновых матриц с тем же набором собственных значений. В этой связи напомним, что каждая гамильтонова матрица $JB$ входит в один и только один класс эквивалентности симплектически подобных матриц. При этом в каждом таком классе выделяют один представитель, называемый *нормальной формой* (см., например, [1]).

Предлагается следующая схема конструирования для уравнения (1) эквивалентной квазигамильтоновой системы. На первом этапе по корням уравнения $L_0(p) = 0$ определяются возможные варианты нормальных форм искомой гамильтоновой системы. Выбирается одна из соответствующих гамильтоновых матриц $JB$.

На втором этапе задается ненулевой вектор $c \in R^{2n}$ и гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt} = JBx\,, \quad y = (x(t), c)\,. \tag{5}$$

**Теорема.** *Пусть гамильтонова система* (5) *наблюдаема. Тогда при малых* $|\varepsilon|$ *уравнение* (1) *эквивавлентно квазигамильтоновой системе* (2), *в которой* $U(t) = D^{-1}S_0(t)D$, *а* $D = D(c)$ *— матрица наблюдаемости системы* (5). *Система* (3) *приводима к квазигамильтоновой системе* (2) *невырожденной заменой переменных* $z = Dx$.

Предложены подходы, позволяющие развить полученные результаты на более широкие классы динамических систем. Рассмотрены некоторые приложения в задачах теории устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в критических случаях.

1. *Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005.

2. *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С.* Эквивалентные дифференциальные уравнения в задачах теории управления и теории гамильтоновых систем // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 1. С. 24–40.

3. *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С.* Уравнение Лурье и эквивалентные гамильтоновы системы // Автоматика и телемеханика, 2025. № 1. С. 27–43.

# Авторский указатель

*Научное издание*

# ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

## Часть 1

Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова

Ответственные за выпуск А.С. Банников, Т.С. Быкова, С.Н. Попова

*Авторская редакция*

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

Подписано в печать 26.05.2025. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 11,62. Уч.-изд. л. 10,92.
Тираж 100 экз. Заказ № 835.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел.: + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра
«Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2
Тел. 68-57-18, 91-73-05