

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Часть 2



Ижевск
2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Материалы Всероссийской конференции
с международным участием
«Теория управления и математическое моделирование»,
посвященной памяти
профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова

Часть 2

Ижевск, Россия
16–20 июня 2025 г.



Ижевск
2025

УДК 517.9 (О63)

ББК 22.161.6я431, 22.161.8я431, 22.19я431, 22.181я431

T338

Издание подготовлено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

Редакционная коллегия:

А.С. Банников, Т.С. Быкова, С.Н. Попова

T338

Теория управления и математическое моделирование : материалы Всерос. конф. с междунар. участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 16–20 июня 2025 г.) : в 2 ч. Ч. 2. – Ижевск : Удмуртский университет, 2025. – 300 с.

ISBN 978-5-4312-1264-2

DOI: 10.35634/978-5-4312-1264-2-2-2025-1-300

В части 2 сборника анонсируются результаты исследований по математической теории управления, теории дифференциальных игр и математическому моделированию. Представлены следующие научные направления: теория управления, управление динамическими системами в условиях конфликта и неопределенности, задачи оценивания и идентификации в динамических системах, численные алгоритмы решения задач оптимального управления, математическое моделирование в механике сплошной среды, математическое моделирование в механике жидкости и газа, математическое моделирование в экономике, математическое моделирование в биологии.

УДК 517.9 (О63)

ББК 22.161.6я431, 22.161.8я431, 22.19я431, 22.181я431

ISBN 978-5-4312-1264-2

DOI: 10.35634/978-5-4312-1264-2-2-2025-1-300

© ФГБОУ ВО «Удмуртский
государственный университет», 2025
© Авторы статей, 2025

Содержание

Теория управления и дифференциальные игры . 10

Azamov A.A., Samatov B.T., Turgunboeva M.A. The problem of interception of one inertial object by another in a dynamic flow field	10
Bykova T.S., Zaitsev V.A. On assignment of the upper Bohl exponent for linear time-varying control systems in Hilbert spaces	14
Kinzebulatov D. SDEs with critical distributional drifts	17
Petrosyan L.A., Pankratova Y.B. Constructing time-consistent cooperative networks in non-zero sum differential network games	18
Samatov B.T., Umaraliyeva N.T. II-strategy algorithm in discrete pursuit game with total constraints	21
Zaitsev V.A., Kim I.G. On matrix coefficients assignment for block matrix bilinear systems in the Hessenberg form . . .	25
Zamyshlyayeva A.A., Bychkov E.V. Optimal control of solutions to the Cauchy problem for IMBq equation	28
Акманова С.В. Наблюдаемость и стабилизация с наблюдателем нелинейных непрерывно-дискретных систем управления	31
Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об одной параболической задаче гладкого управления	35
Базулкина А.А. Оценка суммарного дохода с учетом дисконтирования для структурированных моделей динамики популяций	39
Барсегян В.Р. Об одной задаче управления линейной динамической системой с неразделенными многоточечными и интегральными условиями	42
Барсегян В.Р., Матевосян А.Г. Об одной задаче преследования БПЛА самолетного типа надземного объекта . . .	46
Барсегян В.Р., Солодуша С.В. Об одной задаче оптимального граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой при минимизации граничной энергии	49

Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе	53
Бутерин С.А. О системах управления на временных графах с циклами	56
Вилисов А.А., Седаков А.А. Устойчивая кооперация в одном классе динамических сетевых игр	58
Гомоюнов М.И. Уравнения Гамильтона–Якоби с дробными коинвариантными производными и измеримым по времени гамильтонианом	60
Давлетов Д.Б., Ершов А.А., Ушаков В.Н. О численном вычислении меры невыпуклости α -множества	62
Елсаков А.П., Смирнова В.Б., Проскурников А.В. Асимптотические свойства систем синхронизации в форме Вольтерра	66
Иванюхин А.В. Совместная оптимизация межпланетной низкоэнергетической траектории и основных параметров космического аппарата с малой тягой	70
Изместьев И.В., Баринев А.М. Об одной дискретной игровой задаче преследования-удержания с невыпуклыми вектограммами управлений	73
Костин Г.В. Управление продольными колебаниями упругого стержня с помощью пьезоэлектрического актюатора	76
Костоусова Е.К. О полиэдральном методе решения задачи терминального уклонения в многошаговых системах с билинейностью	80
Краютко В.В., Размыслович Г.П. H -управляемость систем с запаздыванием дескрипторным динамическим регулятором	83
Кривулин Н.П. Методы моделирования нелинейных динамических систем	86
Лаптинский В.Н. Многоточечная задача управления с интегральными ограничениями типа равенств на управление	89
Леднов А.П. Об успокоении системы управления нейтрального типа на временном графе-звезде с запаздыванием, пропорциональным времени	93
Максимова И.С. Управляемость нелинейных систем с переменной структурой	96
Мельников Н.Б., Ронжина М.И. Четтеринг-экстремали в стабилизации систем, аффинных по управлению	99

Михайлов А.В. Численное построение стабильных мостов и оптимальных траекторий в линейных дифференциальных играх с многомерным фазовым вектором	103
Можегова Е.С. Поимка убегающего в задаче преследования второго порядка во временных шкалах	105
Мухсинов Е.М., Назаров Б.Р. О разрешимости задачи преследования для контрольного примера нейтрального типа в гильбертовом пространстве	109
Мухсинов Е.М., Хакимов Р.И. О разрешимости задачи преследования для контрольного примера запаздывающего типа в гильбертовом пространстве	112
Парилина Е.М., Писарева А.М., Заккур Д. Механизмы стимулирования кооперации в конечно повторяющейся дилемме заключённого	115
Пацко В.С., Трубников Г.И., Федотов А.А. Машина Дубинса с ограничением на управление в L_p при $p \in (1, 2]$: построение двумерного множества достижимости	118
Петров Н.Н., Фомина Е.С. Нестационарная линейная задача группового преследования с простой матрицей и возможным нарушением в динамике	121
Петросян Г.Г. О дробной управляемой системе с обратной связью в виде процесса выметания	124
Попова С.Н., Фахразиева Э.А. Об условиях равномерной полной управляемости линейных гибридных систем . .	127
Родина Л.И. Об оценках характеристик сбора ресурса методом построения положительно инвариантных множеств	129
Румянцев А.Н. О конструктивном исследовании задач управления для динамических моделей с кусочно-линейным запаздыванием	132
Серков Д.А. К прямому методу программных итераций в случае конечного числа помех	135
Симкина А.В. Оптимальная аппроксимация предельных множеств достижимости линейных дискретных систем при ограниченных вычислительных ресурсах	139
Субботина Н.Н., Крупенников Е.А. О численном построении аппроксимаций решения задачи реконструкции управлений при невыпуклых геометрических ограничениях на управления	142

Сумин В.И. Метод вольтерровых функциональных уравнений в проблеме сингулярности управляемых начально-краевых задач	145
Тарасова О.И. Оптимизация дохода с учетом дисконтирования для моделей популяций, заданных дифференциальными уравнениями	149
Усова А.А., Тарасьев А.М. Поведение переменных модели роста при логистически распределенных рисках истощения ресурсов	152
Успенский А.А., Лебедев П.Д. О выделении областей дифференцируемости минимаксного решения в одном классе краевых задач для уравнений гамильтонова типа . .	156
Цехан О.Б. К равномерной управляемости сингулярно возмущенных систем с квазидифференцируемыми коэффициентами	159
Ченцов А.Г. Абстрактная задача о достижимости: множества притяжения и представления в терминах ультрафильтров	163
Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Задачи маршрутизации: декомпозиция и динамическое программирование	166
Черникова А.В. Об оптимальном периодическом сборе возобновляемого ресурса для достижения наибольшей эффективности	170
Чернов А.В. О точной глобальной управляемости нелинейного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве	173
Шабуров А.А. Асимптотика определяющего вектора в линейных задачах “дешевого управления” с гладкими ограничениями на управление	177
Щелчков К.А. Задача управления нелинейной системой с неточной информацией в условиях воздействия помехи	180
Хайлов Е.Н. Управление процессом лечения ракового заболевания в модели конкуренции Лотки–Вольтерры с неопределенностью	183
Хартовский В.Е. О финитной стабилизации гибридных линейных непрерывно-дискретных систем	186

Хартовский В.Е., Метельский А.В., Карпук В.В. Линейные системы нейтрального типа: асимптотическая оценка, экспоненциальная стабилизация и модальная управляемость по неполным измерениям	190
Хартовский В.Е., Урбан О.И. Задача финитной стабилизации по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа	194
Хлебников М.В. Нехрупкая гарантирующая фильтрация в линейных динамических системах	197

Математическое моделирование 201

Agayeva N.A. Mathematical modeling of gas dynamics in the reservoir-pipeline system	201
Litvinov V.L., Livinova K.V. Modeling hydrocarbon solution filtration using cubic equations of state	204
Makarov P.A., Shcheglov V.I. FDTD simulation of normally incident plane harmonic electromagnetic waves on a planar interface between two linear, homogeneous and isotropic media	206
Tashpulatov S.M. Spectra of the energy operator of three-magnon systems in the Heisenberg model. Three-dimensional case	209
Velmisov P.A., Pokladova Yu.V., Abrashkin P.M. Mathematical modeling of dynamics and stability of pipeline systems	213
Андрюкова В.Ю., Тарасов В.Н. Об устойчивости колец, подкрепленных откосами	216
Антоновская О.Г., Бесклубная А.В. К исследованию динамики системы синхронизации с импульсным частотно-фазовым управлением	220
Гермидер О.В. Математическое моделирование деформированного состояния тонкой нанопластины с использованием теории микроструктурной деформации	222
Дмитриев М.С., Кашапов Н.Ф., Чебакова В.Ю. Моделирование получения цинка в процессе электролиза для дальнейших приложений в аддитивных технологиях . .	224

Егоренков В.А. Необходимость учета перекрестного влияния компонент волнового вектора при построении неотражающих искусственных краевых условий для 2D уравнения Шредингера, описывающего дифракцию оптического пучка	227
Калинин А.В., Тюхтина А.А. Функциональные классы определенности полей и источников в квазистационарных задачах электромагнитной теории	229
Коносевич Б.И., Коносевич Ю.Б. Достаточные условия глобальной устойчивости многотоковых моделей синхронного и асинхронного электромотора	231
Королева М.Р., Тонков Л.Е., Чернова А.А. Математическое моделирование истечения жидкости из емкости с высоким давлением	235
Лемперт А.А., Казаков А.Л., Нгуен Д.М. О численном методе построения плотнейших упаковок геодезических кругов в сферический сегмент	237
Лискина Е.Ю. Исследование динамической модели рынка труда с производственной функцией с линейной эластичностью замещения	241
Майков Д.Н., Макаров С.С. Алгоритм ускорения расчетов при решении обратной коэффициентной задачи для уравнения пьезопроводности	243
Манакова Н.А., Николаева Н.Г. Численное исследование вырожденной модели нелинейной диффузии со случайным начальным условием Шоултера–Сидорова . .	246
Марков С.И., Иткина Н.Б. Метод виртуальных элементов для решения прикладных задач геофизики	249
Мартыненко С.И. Математическое моделирование физико-химических макропроцессов в дисконтинуальном приближении	251
Мартынов С.И., Ткач Л.Ю. Об одном результате коллективной динамики системы вращающихся частиц	254
Муминов С.Ю. Математическое моделирование взаимосвязанной кросс-диффузии соли и влаги в почвенной среде	258
Недожогин Н.С. Блочный конвейерный алгоритм метода сопряжённых градиентов с перекрывающимися коммуникациями	260

Новиков А.К. Параллельные «безматричные» алгоритмы МКЭ при решении задач теории упругости	263
Павлова Н.Г. Применение теории накрывающих отображений к исследованию математических моделей рынка . .	266
Пименов В.Г. Метод переменных направлений для нелинейного диффузионного уравнения с запаздыванием . . .	269
Рюмина К.А. Математическое моделирование влияния температуры на распространение вирусной инфекции . . .	273
Селезнева А.В. О постановке граничных условий в динамических задачах теории упругости	274
Сергеева Н.В. Шабанова Д.Д., Тананко И.Е. Моделирование сортировочных транспортных систем сетью массового обслуживания	277
Сметанин Ю.М., Сметанина В.М. Невырожденная Булева логика	280
Чебакова В. Ю. Моделирование процессов в щелочных электролитах при электролизе	285
Шаклеин А.А., Карпов А.И., Морар Г. Метод доли смешения для расчета горения полимерных материалов . . .	287
Шевкун И.А., Масловская А.Г. Характеристики практической сходимости метода конечных разностей для нелинейной задачи типа «реакция-диффузия» при моделировании бактериального роста	290
Шелудько А.С. Двухэтапный метод параметрической идентификации для дискретных моделей хаотических процессов	292
Шишкин В.А. О моделировании развивающихся систем . . .	295

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

The problem of interception of one inertial object by another in a dynamic flow field

A. A. Azamov, B. T. Samatov

*Tashkent, V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the
Academy of Sciences of Uzbekistan*

e-mail: abdulla.azamov@gmail.com, samatov57@gmail.com

M. A. Turgunboeva

Namangan, Namangan State University

e-mail: turgunboyevamohisanam95@gmail.com

In space $\mathbb{R}^n$, we consider a differential game with two players, called *the Pursuer* and *the Evader*. Let a parameter $x \in \mathbb{R}^n$ (respectively, a parameter $y \in \mathbb{R}^n$) designate a position of the Pursuer (the Evader). Then the players perform their motions in accordance with the equations

$$\ddot{x} = u + F_P(t, x), \quad \dot{x}(0) = x_1, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$\ddot{y} = v + F_E(t, y), \quad \dot{y}(0) = y_1, \quad y(0) = y_0, \quad (2)$$

where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$; $F_P: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($F_E: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) is an efficient flow field for the Pursuer (for the Evader); x_0, y_0 are the players' initial positions and x_1, y_1 are their initial velocity vectors. It is considered that $x_0 \neq y_0$ and $x_1 = y_1$.

The control parameters u, v in (1)–(2) are picked as measurable functions $u(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $v(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ respectively, and these functions are involved fulfilling the following geometric constraints (shortly, *G*-constraints):

$$|u(t)| \leq \rho, \quad \rho > 0, \quad |v(t)| \leq \sigma, \quad \sigma \geq 0. \quad (3)$$

Let $\mathbf{U}_G = \{u(\cdot): |u(t)| \leq \rho, t \geq 0\}$ and $\mathbf{V}_G = \{v(\cdot): |v(t)| \leq \sigma, t \geq 0\}$.

In equations (1) and (2), the functions $F_P(t, x)$ and $F_E(t, y)$ can represent external forces affecting the movement of players, respectively. Note that when players move within a certain compact subset of $\mathbb{R}^2$ under the same influences on movement, the pursuit-evasion differential game was studied in [1, 2] through the method of constructing optimal reachable sets for players. In this case, piecewise-continuous functions are chosen as the players' controls.

The main objective of our work is to study a more general class of the second-order nonlinear differential games using the parallel approach method for players [3, 4]. In many model pursuit problems, the parallel pursuit strategy (referred to as the Π -strategy) plays a crucial role in securing a win for the Pursuer. In [4, 5] and many other works, the Π -strategy has been effectively applied to solving various problems in differential pursuit games.

Assumption. *There exist Lebesgue-integrable functions $k(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ and $q(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ with $k(t) \leq k$, $q(t) \leq q$ satisfying*

$$|F_P(t, x) - F_E(t, y)| \leq k(t)|x - y| + q(t)$$

for any $x, y \in \mathbb{R}^n$, where $k = \sup_{t \geq 0} k(t)$, $q = \sup_{t \geq 0} q(t)$, $k \geq 0$, $q \geq 0$.

In the differential game (1)–(3), the objective of the Pursuer is to catch the Evader (a pursuit game) at some moment T_* , $0 < T_* < +\infty$, i.e. to reach the equality $x(T_*) = y(T_*)$, where $x(t)$ and $y(t)$ are trajectories generated during the game. The notion of “trajectories generated during the game” requires clarification. The Evader tries to avoid the meeting with the Pursuer (an evasion game), i.e. to guarantee the relation $x(t) \neq y(t)$ for all $t \geq 0$, and if it is impossible, to prolong the moment of the meeting as far as possible.

Pursuit-evasion games. For the sake of simplifying the calculations, let $\omega = \omega(t, x, y, v) := v - \eta$, $\eta = \eta(t, x, y) := F_P(t, x) - F_E(t, y)$, $\xi_0 = z_0/|z_0|$, $z_0 = x_0 - y_0$, $\gamma(\omega) = \sqrt{\langle \omega, \xi_0 \rangle^2 + \rho^2 - |\omega|^2} + \langle \omega, \xi_0 \rangle$.

Definition 1. For $\rho \geq |\omega|$, the control function

$$\mathbf{u}(\omega) := \omega - \gamma(\omega)\xi_0 \tag{4}$$

is called the Π -strategy of the Pursuer in the pursuit game.

Definition 2. In the evasion game, the control function $v(t) = -\sigma\xi_0$ is called a strategy of the Evader.

Theorem 1. Let $\rho > \sigma + q + k|z_0|$. Then Π -strategy (4) guarantees that the Pursuer wins on the time interval $[0, T_G]$ in the pursuit game, where

$$T_G = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{k} \ln \frac{\rho - \sigma - q}{\rho - \sigma - q - k|z_0|}}, & \text{if } k \neq 0, \\ \sqrt{\frac{2|z_0|}{\rho - \sigma - q}}, & \text{if } k = 0. \end{cases}$$

Here, the number T_G is called a guaranteed time of the pursuit.

Theorem 2. Let $\sigma \geq \rho + q + k|z_0|$. Then the strategy $v(t) = -\sigma\xi_0$ guarantees that the Evader wins on the time interval $[0, +\infty)$ in the evasion game, and the distance between the Pursuer and the Evader satisfies $|z_0| \geq |z(t)| > 0$ if $k = 0$, or $|z(t)| \geq |z_0|$ if $k \neq 0$ for any t , $t \geq 0$.

A set of meeting points of the players. In the theory of differential games, it is highly significant that the set of meeting points of the players is explicitly constructed. As known, the triplet $(y_0, y_1, v(\cdot))$, $v(\cdot) \in \mathbf{V}_G$, produces the Evader's motion trajectory $y(t) := y(t; y_0, y_1, v(\cdot))$, and the triplet $(x_0, x_1, \mathbf{u}(\cdot))$, $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathbf{U}_G$, creates the Pursuer's motion trajectory $x(t) := x(t; x_0, x_1, \mathbf{u}(\cdot))$ for every $t \in [0, T_*]$, $0 < T_* \leq T_G$, where T_* is the players' meeting time, viz, $x(T_*) = y(T_*)$ holds at this time. Accordingly, for $(x(t), y(t))$ at each $t \in [0, T_*]$, we can write the multi-valued mapping

$$\mathcal{H}(x(t), y(t)) = x(t) + \Gamma(t, x(t), y(t), v(\cdot)) [\mathcal{H}(x_0, y_0) - x_0],$$

where $\Gamma(t, x(t), y(t), v(\cdot)) = 1 - \frac{1}{|z_0|} \int_0^t (t-s) \gamma(s, x(s), y(s), v(s)) ds$,

$\mathcal{H}(x_0, y_0) = x_0 - \mathcal{C}(z_0) + \mathcal{R}(z_0)\mathcal{S}$, $\mathcal{C}(z_0) = \frac{\rho^2 z_0}{\rho^2 - \sigma^2}$, $\mathcal{R}(z_0) = \frac{\rho\sigma|z_0|}{\rho^2 - \sigma^2}$, $\mathcal{S} = \{s : |s| \leq 1\}$.

Let

$$\mathcal{K}(t) = \int_0^t (t-s) \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - \sigma^2} \eta(s) - \frac{\rho\sigma}{\rho^2 - \sigma^2} |\eta(s)| \mathcal{S} - F_P(s, x(s)) \right) ds,$$

where $\mathcal{K}(t) := \mathcal{K}(t, x(t), y(t))$. Then we construct the multi-valued mapping

$$\mathcal{H}^*(t, x(t), y(t)) = \mathcal{H}(x(t), y(t)) + \mathcal{K}(t, x(t), y(t)).$$

Theorem 3. *The multi-valued mapping $\mathcal{H}^*(t, x(t), y(t)) - tx_1$ is monotonically decreasing with respect to t , $t \in [0, T_*]$, i.e. if $t_1, t_2 \in [0, T_*]$ and $t_1 < t_2$, then*

$$\mathcal{H}^*(t_2, x(t_2), y(t_2)) - t_2x_1 \subset \mathcal{H}^*(t_1, x(t_1), y(t_1)) - t_1x_1$$

holds.

Corollary. *Theorem 3 implies that, the following inclusions are satisfied for all $t \in [0, T_*]$:*

- 1) $\mathcal{H}(x(t), y(t)) \subset \mathcal{H}(x_0, y_0) - \mathcal{K}(t, x(t), y(t)) + tx_1$;
- 2) $y(t) \in \mathcal{H}(x_0, y_0) - \mathcal{K}(t, x(t), y(t)) + tx_1$.

The set

$$\mathcal{H}_P(x_0, y_0, x_1, T_{\mathbf{G}}) = \bigcup_{t=0}^{T_{\mathbf{G}}} \left(\mathcal{H}(x_0, y_0) - \mathcal{K}(t, x(t), y(t)) + tx_1 \right)$$

is called *the set of meeting points of the players* in the pursuit game.

1. Sun W., Tsiotras P. Pursuit evasion game of two players under an external flow field // American Control Conference (ACC), IEEE Xplore, 2015. P. 5617–5622.
2. Sun W., Tsiotras P., Lolla T., Subramani D.N., Lermusiaux P.F.J. Multiple-pursuit/one-evader pursuit-evasion game in dynamical flow fields // J. of Guidance, Control, and Dynamics, 2017. Vol. 40, no. 7. P. 1627–1637.
3. Isaacs R. Differential games. New York: John Wiley and Sons, 1965.

4. *Petrosyan L.A.* Differential games of pursuit. Singapore: World Scientific Publ., Series on optimization, 1993.
5. *Azamov A.A., Samatov B.T.* The II-Strategy: Analogies and Applications // The Fourth International Conference Game Theory and Management, St. Petersburg, 2010. Vol. 4. P. 33–47.

On assignment of the upper Bohl exponent for linear time-varying control systems in Hilbert spaces

T. S. Bykova, V. A. Zaitsev

Izhevsk, Udmurt State University

e-mail: tsbykova@gmail.com, verba@udm.ru

Let $\mathfrak{X}$ be a separable Hilbert space; by $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denote the scalar product in $\mathfrak{X}$, $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ denotes the norm. By $I: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ denote the identity operator in $\mathfrak{X}$. By $\mathcal{L}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ denote a Banach space of linear bounded operators $F: \mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathfrak{X}_2$ with the norm $\|F\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)} := \sup\{\|Fx\|_{\mathfrak{X}_2} : \|x\|_{\mathfrak{X}_1} \leq 1\}$ (further we omit the subscripts in the notation of norms).

Consider a linear system of differential equations:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathfrak{X}. \quad (1)$$

We suppose that the function $A(\cdot)$ satisfies the following conditions:

- (a) $A(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ for any $t \in \mathbb{R}$;
- (b) the function $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ is strongly measurable and Bochner integrable on finite subintervals of $\mathbb{R}$ [1, Ch. III, Sect. 1.1, 1.2];
- (c) $\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|A(s)\| ds < +\infty$.

By a solution of system (1) we understand, by definition, a solution of the integral equation $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s) ds$, where $x(t_0) = x_0$. Let $\Phi(t, \tau)$ denote the evolution operator of system (1)

[1, Ch. III, Sect. 1, p. 100] that is the solution of the operator system $dX/dt = A(t)X$, $X(\tau) = I$.

Definition 1. The upper Bohl exponent [1, Ch. III, Sect. 4] of system (1) is the number

$$\varkappa(A) = \overline{\lim}_{\tau, s \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\Phi(\tau + s, \tau)\|}{s}.$$

The upper Bohl exponent of system (1) is one of the characteristics of the asymptotic behavior for solutions to (1). In particular, the condition $\varkappa(A) < -\alpha < 0$ is sufficient for uniform exponential stability of all solutions to system (1) with the decay rate α . Because of condition (c), the upper Bohl exponent of system (1) is finite [1, Ch. III, Sect. 4, Theorem 4.3].

Consider a linear control system:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Here $x \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{U}$; $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U}$ are separable Hilbert spaces; $A(t)$ satisfies conditions (a), (b), (c); $B(t)$ satisfies the following condition: (d) $\forall t \in \mathbb{R} B(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{X})$, the function $t \mapsto B(t)$ is strongly measurable on finite subintervals of $\mathbb{R}$, and $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|B(t)\| < +\infty$. As admissible controllers for (2) on some finite interval $[t_0, t_1]$ we take functions $u(\cdot) \in L_2([t_0, t_1], \mathfrak{U})$.

Definition 2. System (2) is called *exactly controllable on* $[t_0, t_1]$ [2] if for any $x_0, x_1 \in \mathfrak{X}$ there exists an admissible controller $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, steering the solution of (2) from $x(t_0) = x_0$ to $x(t_1) = x_1$.

Let the controller in system (2) have the form of the linear state feedback:

$$u(t) = U(t)x(t), \quad (3)$$

where $U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}) \forall t \in \mathbb{R}$, $U(\cdot)$ is strongly measurable on finite subintervals of $\mathbb{R}$, and $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|U(t)\| < +\infty$ (then the controller (3) is admissible on any $[t_0, t_1]$). The gain operator function $U(\cdot)$ satisfying these conditions will be called *admissible*. The closed-loop system takes the form:

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)U(t))x(t). \quad (4)$$

Definition 3. The upper Bohl exponent of system (2) is called *arbitrarily assignable by linear state feedback* (3) if for any $\mu \in \mathbb{R}$ there exists an admissible gain operator function $U(\cdot)$ such that, for the closed-loop system (4),

$$\kappa(A + BU) = \mu.$$

The corresponding definition in finite-dimensional spaces was given in [3] (see also [4]) for the upper (and lower) central (and Bohl) exponents.

The problem of assigning the upper Bohl exponent had been solved for time-invariant systems ($A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$) in [5], and for periodic systems ($A(t + \omega) \equiv A(t)$, $B(t + \omega) \equiv B(t)$) in [6], based on the property of exact controllability.

Let us construct *the controllability gramian* $W(t_1, t_0): \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ on $[t_0, t_1]$ for system (1) (see [6]):

$$W(t_1, t_0)x = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, s)B(s)B^*(s)\Phi^*(t_0, s)x \, ds,$$

Definition 4. We say that system (2) is *uniformly exactly controllable*, if there exist $\vartheta > 0$ and $\gamma > 0$ such that, for any $t_0 \in \mathbb{R}$, for any $x \in \mathfrak{X}$, the following inequality is fulfilled: $\langle W(t_0 + \vartheta, t_0)x, x \rangle \geq \gamma \|x\|^2$.

This definition goes back to Definition 5.13 of Kalman's classic work [7]. Based on this definition, the following results are established.

Theorem. *Let system (2) be uniformly exactly controllable. Then, the upper Bohl exponent of system (2) is arbitrarily assignable by linear state feedback (3).*

Corollary. *Let system (2) be uniformly exactly controllable. Then, system (2) is uniformly exponentially stabilizable with an arbitrary pregiven decay rate by linear state feedback (3).*

This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the state assignment, project FEWS-2024-0009.

1. *Daleckii J.L., Krein M.G.* Stability of solutions of differential equations in Banach space. Providence, RI, USA: AMS, 1974.
2. *Triggiani R.* Controllability and observability in Banach space with bounded operators // SIAM Journal on Control. 1975. Vol. 13, no. 2. P. 462–491.
3. *Makarov E.K., Popova S.N.* On the global controllability of central exponents of linear systems // Russian Mathematics. 1999. Vol. 43, no. 2. P. 56–63.
4. *Zaitsev V.A.* Lyapunov reducibility and stabilization of nonstationary systems with an observer // Differential Equations. 2010. Vol. 46, no. 3. P. 437–447.
5. *Zaitsev V., Zhuravleva M.* On assignment of the upper Bohl exponent for linear time-invariant control systems in a Hilbert space by state feedback // Mathematics. 2020. Vol. 8, no. 6. Art. no. 992.
6. *Dashkovskiy S., Zaitsev V.* Assignment of the upper Bohl exponent for linear periodic control systems in Hilbert spaces // European Journal of Control. 2022. Vol. 67. Art. no. 100703.
7. *Kalman R.* Contribution to the theory of optimal control // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 1960. Vol. 5, no. 1. P. 102–119.

SDEs with critical distributional drifts

D. Kinzebulatov

Québec, Université Laval

e-mail: damir.kinzebulatov@mat.ulaval.ca

I will discuss recent progress on weak and strong well-posedness of SDEs with critical distributional and super-critical singularities in the drift, including the minimal level of thermal excitation needed to overcome blow ups due to the presence of attracting singularities in the drift. The latter arise e.g. in the Keller-Segel type interacting particle systems immersed in a turbulent flow. The proofs use a variant of De Giorgi’s method in L^p with p chosen in a way that allows to reach the critical magnitude of the singularities of the drift, and a modification of the method of Röckner–Zhao of establishing

strong well-posedness. The talk is based in part on joint papers with K. R. Madou, Yu. A. Semenov and R. Vafadar.

1. *Kinzebulatov D.* On particle systems and critical strengths of general singular interactions // Annales de l'IHP (B) Probab. Stat., to appear (arXiv:2402.17009)

Constructing time-consistent cooperative networks in non-zero sum differential network games

L. A. Petrosyan, Y. B. Pankratova

Saint-Petersburg, St Petersburg State University

e-mail: l.petrosyan@spbu.ru, y.pankratova@spbu.ru

A class of n -person differential games on the network with game horizon $[t_0, T]$ is considered.

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ is the set of players (nodes) in the network.
- Denote the set of all arcs in network N by P . $P = \{arc(i, j) : i, j \in N, i \neq j\}$.
- The set of players connected to the player i is $K(i) = \{j : arc(i, j) \in P\}$, for $i \in N$.

Let $x^i(\tau) \in R^m$ be the state variable of the player $i \in N$ at time τ , and $u^i(\tau) \in U^i \subset R^k$ control variable of the player $i \in N$ where U_i is a compact set.

At t_0 , players choose neighbors simultaneously and independently with whom they intend to interact during the game. The player i can choose neighbors from a fixed subset of players $N_i \subset N \setminus \{i\}$. The sets N_i can be different for different players, and for each player i , the number of its possible neighbors is limited by the number n_i . Communication is established (that is, the link is created in the network) between players i and j if $i \in N_j$, $j \in N_i$. The resulting network G is called *admissible network*.

The state dynamics of the game is

$$\dot{x}^i(\tau) = f^i(x^i(\tau), u^i(\tau)), \quad x^i(t_0) = x_0^i, \quad \text{for } \tau \in [t_0, T] \quad \text{and } i \in N. \quad (1)$$

Functions $f^i(x^i, u^i)$ are continuously differentiable in x^i and u^i and satisfy the conditions of existence, uniqueness and continuability of the solution on the interval (t_0, T) for all admissible piecewise continuous controls with a finite number of discontinuity points. For notational convenience, we use $x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$ and $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$.

We consider a special case, where the payoff of the player i depends upon his state variable and the state variables of players from the set $K(i)$. Thus, if the connections remain valid, the payoff of the player i is given as

$$\begin{aligned} H_i(x_1^0, \dots, x_n^0, u^1, \dots, u^n) = \\ = \sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^T h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau)) d\tau, \quad i \in N, \end{aligned} \quad (2)$$

provided that the players do not interrupt communication. It is supposed that functions $h_i^j \geq 0$. In case, the player i interrupts the communication with player j at some time instant t functions $h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau))$ and $h_j^i(x^j(\tau), x^i(\tau))$ will be set 0 for all $\tau \geq t$, $t \in [t_0, T]$. In (2) the function $h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau))$ is instantaneous gain that player i can obtain through network links with player $j \in K(i)$ (note that $(i, i) \notin P$) where $x^i(\tau), x^j(\tau)$ is the solution of (1).

In what follows we consider the cooperative version of the game. In [2, 3] it is assumed, that at any time instant, players can break connection between themselves and other players. Taking into account the non-negativity of players' payoffs, this assumption greatly simplified the construction of the characteristic function of the game and, as a result, the calculation of optimality principles from cooperative game theory based on it.

Define the value of the characteristic function for coalition N in the network G .

$$V_G(x_0, T - t_0; N) = \max_{u_i, i \in N} \sum_{i \in N} = \sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^T h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau)) d\tau$$

$$= \sum_{i \in N} \sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^T h_i^j(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)) d\tau$$

where maximum is taken over the set of all admissible controls (see (1)). Denote by $V(x_0, T - t_0; N) = \max_G V_G(x_0, T - t_0; N) = V_{\bar{G}}(x_0, T - t_0; N)$. Define values of the characteristic function for coalitions $S \subset N$ as

$$V(x_0, T - t_0; S) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S \cap K(i)} \int_{t_0}^T h_i^j(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)) d\tau, \quad S \subset N.$$

Note that the value of $V_G(x_0, T - t_0; N)$ depends on the network that was formed at the initial time instant t_0 as a result of the simultaneous selection of neighbors by players. We assumed that players choose such a network $\bar{G}$, which gives the maximum total payoff of players from the set N , i.e. $V_{\bar{G}}(x_0, T - t_0; N)$. We will call such network $\bar{G}$ a *cooperative network* or a *cooperative interaction network*.

Note that during the evolution of the game along the cooperative trajectory $(\bar{x}^i(\tau))$ there is the following non-trivial property that at some intermediate time instant on the cooperative trajectory, the cooperative network may cease to be such, since the maximum total payoff of players in the subgame from the initial states on the cooperative trajectory can be achieved on another network (see [1]).

In the presentation, we propose a new solution concept based on the ideas of redistribution of players' payoffs on the time interval $[t_0, T]$ in such a way that after this redistribution the total payoff of each player remains unchanged and, at the same time, the cooperative network $\bar{G}$ will also remain the same in all subgames along cooperative trajectory on the time interval $[t_0, T]$. This means the time-consistency of the cooperative network.

1. Petrosyan L.A., Pankratova Y.B., Kong Qi. About the Instability of Cooperative Communication Structures in Differential Network Games // Contributions to Game Theory and Management. 2024. Vol. 17. P. 155–163.
2. Petrosyan L.A., Yeung D., Pankratova Y.B. Cooperative Differential Games with Partner Sets on Networks // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 2021. Vol. 27, no. 3. P. 286–295.

3. *Petrosyan L.A., Yeung D., Pankratova Y.B.* Characteristic functions in cooperative differential games on networks // Journal of Dynamics and Games. 2024. Vol. 11, no. 2. P. 115–130.

II-strategy algorithm in discrete pursuit game with total constraints

B. T. Samatov

*Tashkent, V.I. Romanovsky Institute of Mathematics at the
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan*

e-mail: samatov57@gmail.com

N. T. Umaraliyeva

Namangan, Namangan State University

e-mail: umaraliyeva80@gmail.ru

This paper is devoted to the study of the Pursuit Problem, when players make step-by-step movements and the players' controls must satisfy the total constraints, which are analogous to the integral constraints on the players' controls. To solve this problem, an algorithm for applying the II-strategy is given. According to the proposed method, the players first converge and eventually coincide exactly. The obtained results are verified using animation models created in the Visual C# programming language using the ScottPlot.WinForms technology.

Discrete Pursuit Game. In space $\mathbb{R}^d$, a discrete game is considered:

$$P: \quad \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$E: \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{y}_{n-1} + \mathbf{v}, \quad (2)$$

where $\mathbf{x}_n$ and $\mathbf{y}_n$ are the positions of the Pursuer P and the Evader E at step n , $n = 1, 2, \dots$. The initial states $\mathbf{x}_0$ and $\mathbf{y}_0$ satisfy $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{y}_0$. The control parameters are given by sequences $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$ and $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{\infty}$,

subject to the constraints:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\mathbf{u}_i|^2 \leq \rho_0^2, \quad \rho_0 > 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\mathbf{v}_i|^2 \leq \sigma_0^2, \quad \sigma_0 \geq 0. \quad (3)$$

Substituting these controls into recurrent equations (1) and (2), we obtain solutions in the form:

$$P: \quad \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i, \quad E: \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{y}_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i.$$

Introducing $\mathbf{z}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n$, the problem reformulates as:

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_{n-1} + \mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad (4)$$

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_0 + \sum_{i=1}^n (\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i),$$

where $\mathbf{z}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0$. The Pursuer P seeks to realize the equality $\mathbf{z}_n = 0$ up to some finite number n , where $n \leq N$ (Discrete Pursuit Game), and the Evader E seeks to realize the inequality $\mathbf{z}_n \neq 0$ for all $n = 1, 2, \dots$ or to avoid this meeting as long as possible (Discrete Evasion Game). This is a preliminary formulation of the Discrete Pursuit and Evasion Games. More specific formulations can be found, for example, in works [1–4].

Definition. In the Discrete Pursuit Game (1)–(3) or (3)–(4), the sequence

$$\mathbf{U}_n^* = \begin{cases} \mathbf{u}_n^* & \text{if } |\mathbf{z}_{n-1}| > \eta(\mathbf{v}_n), \\ \mathbf{u}_n^{**} & \text{if } |\mathbf{z}_{n-1}| \leq \eta(\mathbf{v}_n), \end{cases} \quad (5)$$

is called the Π -strategy of the Pursuer, where $\mathbf{u}_n^* = \mathbf{v}_n - \eta(\mathbf{v}_n) \boldsymbol{\xi}_0$, $\mathbf{u}_n^{**} = \mathbf{v}_n - \mathbf{z}_{n-1}$, $\eta(\mathbf{v}_n) = \max \{0, \delta_0^2 / |\mathbf{z}_0| + 2 \langle \mathbf{v}_n, \boldsymbol{\xi}_0 \rangle\}$, $\boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{z}_0 / |\mathbf{z}_0|$, $\delta_0^2 = \rho_0^2 - \sigma_0^2$, and $\langle \mathbf{v}_n, \boldsymbol{\xi}_0 \rangle$ means the inner product of the vectors $\mathbf{v}_n$ and $\boldsymbol{\xi}_0$ in $\mathbb{R}^d$, $n = 1, 2, \dots$.

Let

$$\rho_n^2 = \rho_0^2 - \sum_{i=1}^n |\mathbf{U}_i^*|^2, \quad \sigma_n^2 = \sigma_0^2 - \sum_{i=1}^n |\mathbf{v}_i|^2,$$

$$\delta_n^2 = \rho_n^2 - \sigma_n^2 = \delta_0^2 - \sum_{i=1}^n \left(|U_i^*|^2 - |v_i|^2 \right) .$$

Lemma. *If at some step n the inequality $|z_{n-1}| > \eta(v_n)$ is satisfied, then at step n the equality $|u_n^*|^2 = |v_n|^2 + \frac{\delta_0^2}{|z_0|} \eta(v_n)$, holds.*

Theorem 1. *Let in the Discrete Game (1)–(3) or (3)–(4) $\rho_0 > \sigma_0$ and the Pursuer implements the Π -strategy (5).*

a) If for steps $k = 1, 2, \dots, n$ inequality $|z_{k-1}| > \eta(v_k)$ holds, then for all steps $k = 1, 2, \dots, n$ we have $z_k \neq 0$ and $z_k = z_0 h_k$, $\delta_k^2 = \delta_0^2 h_k$, $0 < h_k \leq 1$ holds, where $h_k = 1 - \frac{1}{|z_0|} \sum_{i=1}^k \eta(v_i)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

b) If inequality $|z_{n-1}| \leq \eta(v_n)$ is satisfied in step n , then in step n the evader is captured, i.e. $z_n = 0$.

Theorem 2. *Let in the Discrete Game (1)–(3) or (3)–(4) $\rho_0 > \sigma_0$. Then the Pursuer, implementing the Π -strategy (5), completes the pursuit no later than in step $N = \lceil (|z_0|/(\rho_0 - \sigma_0))^2 \rceil + 1$, where the sign $\lceil \cdot \rceil$ denotes the integer part of the number inside this sign.*

Animation Model in Plane. To solve the Pursuit Problem (1)–(3) on the plane, an animation model was developed using the Visual C# programming language with the ScottPlot.WinForms technology. This model analyzes the actions of both the Pursuer and the Evader at each step n until the equality $z_n = 0$ is satisfied, where $1 \leq n \leq N$. In this process, the pursuer follows the Π -strategy (5). The program implements step-by-step movement of the players, with straight lines displayed between them to illustrate their parallel motion.

Table 1: Initial coordinates and parameters.

$x_0 = (x_{1_0}, x_{2_0})$	$y_0 = (y_{1_0}, y_{2_0})$	$v_i = (v_{1_i}, v_{2_i})$	σ_0	ρ_0	$ z_0 $
(-1.5,-1)	(-1,2.4)	$v_{1_i} = 1/(1 + (i + 1)^2)$ $v_{2_i} = -1/(3 + i^3)$	1.7	1.9	3.43657

An experiment conducted using the animation model, based on the data from the table (Table 1), demonstrated that the game ends in favor of the Pursuer before the step guaranteeing the completion of the pursuit ($N = 296$). The results are presented in the table (Table 2) and in the graph (Figure 1).

Table 2: Data on the course of the pursuit.

i	$\mathbf{x}_i = (x_{1i}, x_{2i})$	$\mathbf{y}_i = (y_{1i}, y_{2i})$	$ \mathbf{z}_i $	v_{1i}	v_{2i}	$ \mathbf{v}_i $	σ_i	$\eta(\mathbf{v}_i)$	$ \mathbf{U}_i^* $	ρ_i
1	-0.49240, -0.49480	-0.15000, 1.83330	2.35314	0,85000	-0,56667	1,02157	1,35882	1,08345	1,12721	1,52951
2	-0.10390, -0.04040	0.12180, 1.49360	1.55051	0,27176	-0,33970	0,43503	1,28730	0,80260	0,59784	1,40783
3	0.08360, 0.24190	0.25050, 1.37660	1.14691	0,12873	-0,11703	0,17397	1,27549	0,40360	0,33886	1,36644
4	0.19820, 0.46830	0.32550, 1.33410	0.87511	0,07503	-0,04252	0,08624	1,27257	0,27181	0,25374	1,34268
5	0.28100, 0.67970	0.37440, 1.31510	0.64223	0,04894	-0,01899	0,05250	1,27148	0,23286	0,22703	1,32334
6	0.34720, 0.88660	0.40880, 1.30520	0.42311	0,03436	-0,00993	0,03577	1,27098	0,21918	0,21726	1,30539
7	0.40370, 1.09210	0.43420, 1.29940	0.20953	0,02542	-0,00580	0,02607	1,27071	0,21357	0,21312	1,28787
8	0.45370, 1.29570	0.45370, 1.29570	0.00000	0,01955	-0,00367	0,01989	1,27056	0,21107	0,20969	1,27069

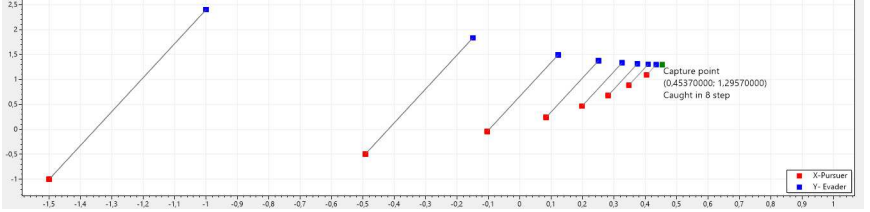


Figure 1: Graph illustrating the dynamics of pursuit.

1. *Isaacs R.* Differential games. New York: John Wiley and Sons, 1965.
2. *Petrosjan L.A.* Differential Games of Pursuit. St. Petersburg: World Scientific, 1993.
3. *Azamov A.A.* Fundamentals of Theory of Discrete Games. Tashkent: Niso Poligraf, 2011. (in Russian).
4. *Samatov B.T., Umaraliyeva N.T.* The II-strategy and its animation model in plane // AIP Conference Proceedings, 2024. College Park: American Institute of Physics, 2024. P. 020026-1–020026-11.

On matrix coefficients assignment for block matrix bilinear systems in the Hessenberg form

V. A. Zaitsev, I. G. Kim

Izhevsk, Udmurt State University

e-mail: verba@udm.ru, kimingeral@gmail.com

Let $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ or $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $M_{r,q} := M_{r,q}(\mathbb{K})$ is a space of $r \times q$ -matrices with elements of $\mathbb{K}$, $M_r := M_{r,r}$. Denote $[1]$ by vecc the mapping that “unrolls” a matrix $A = \{a_{ij}\} \in M_{\omega,\rho}$ column-by-column into the column vector

$$\text{vecc } A = \text{col}(a_{11}, \dots, a_{\omega 1}, \dots, a_{1\rho}, \dots, a_{\omega\rho}) \in M_{\omega\rho,1};$$

denote by $\text{SP}_s : M_{qs} \rightarrow M_s$ the operation of block trace defined by the following rule: if $A = \{A_{ij}\} \in M_{qs}$, $A_{ij} \in M_s$, $i, j = \overline{1, q}$, then $\text{SP}_s A = \sum_{i=1}^q A_{ii}$.

Let $s \in \mathbb{N}$ be given. Consider a block matrix bilinear control system

$$\dot{x} = (F + u_1 B_1 + \dots + u_r B_r)x, \quad x \in \mathbb{K}^{ns}, \quad u_\alpha \in \mathbb{K}, \quad (1)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & \dots & F_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ F_{n1} & \dots & F_{nn} \end{bmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} B_{\alpha 11} & \dots & B_{\alpha 1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{\alpha n1} & \dots & B_{\alpha nn} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$F_{ij}, B_{\alpha ij} \in M_s(\mathbb{K})$, $i, j = \overline{1, n}$, $\alpha = \overline{1, r}$. Here $x \in \mathbb{K}^{ns}$ is a state vector, $u_\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha = \overline{1, r}$, are constant control inputs.

Let an n th degree s th order monic λ -matrix be given:

$$\Psi(\lambda) = I\lambda^n + \Gamma_1\lambda^{n-1} + \dots + \Gamma_{n-1}\lambda + \Gamma_n, \quad I, \Gamma_i \in M_s(\mathbb{K}), \quad i = \overline{1, n}.$$

From the polynomial $\Psi(\lambda)$, construct the following block com-

panion matrix or, in other words, a lower block Frobenius matrix:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ -\Gamma_n & -\Gamma_{n-1} & -\Gamma_{n-2} & \dots & -\Gamma_1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Definition. We say that, for system (1), (2), the problem of *arbitrary matrix coefficient assignment for the characteristic matrix polynomial is resolvable* if for any $\Gamma_i \in M_s$, $i = \overline{1, n}$, there exist constant controls $u_\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha = \overline{1, r}$, such that the closed-loop system (1), (2) is reducible by some non-degenerate change of variables $z = Sx$ to the system

$$\dot{z} = \Phi z, \quad z \in \mathbb{K}^{ns},$$

with the matrix Φ of (3), that is the matrix of the closed-loop system (1), (2) is similar to the matrix (3): $S(F + u_1 B_1 + \dots + u_r B_r)S^{-1} = \Phi$.

Suppose that the coefficients of system (1), (2) have the following special form: for some $p \in \{1, \dots, n\}$, the first $p - 1$ block rows and the last $n - p$ block columns of the matrices B_α are zero, and the matrix F is a lower block Hessenberg matrix, i.e.,

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 & \dots & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n-1,1} & F_{n-1,2} & F_{n-1,3} & \dots & F_{n-1,n} \\ F_{n1} & F_{n2} & F_{n3} & \dots & F_{nn} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$0, F_{ij} \in M_s$; $\det F_{i,i+1} \neq 0$, $i = \overline{1, n-1}$;

$$B_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_{\alpha p1} & \dots & B_{\alpha pp} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{\alpha n1} & \dots & B_{\alpha np} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$0, B_{\alpha\tau\sigma} \in M_s$, $\alpha = \overline{1, r}$, $\tau = \overline{p, n}$, $\sigma = \overline{1, p}$.

Lemma. *For the lower block Hessenberg matrix F of (4), there exists a non-degenerate lower block triangular matrix R such that the matrix $RF R^{-1}$ is a lower block Frobenius matrix.*

The matrix R is constructed explicitly from the matrix F . The idea of construction is similar to [2, Sect. 2]

Let system (1), (2) with the matrices (4) and (5) be given. By Lemma, we construct the matrix R . Next, construct the following matrices $\Theta_{i\alpha} \in M_{s^2,1}$, $i = \overline{1, n}$, $\alpha = \overline{1, r}$:

$$\Theta_{i\alpha} = \text{vecc}[\text{SP}_s(RF^{i-1}B_\alpha R^{-1})].$$

Construct

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \dots & \Theta_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \Theta_{n1} & \dots & \Theta_{nr} \end{bmatrix} \in M_{ns^2, r}(\mathbb{K}).$$

Theorem. *For system (1), (2) with the matrices (4) and (5), the problem of arbitrary matrix coefficient assignment for the characteristic matrix polynomial is resolvable if the following condition is fulfilled:*

$$\text{rank } \Theta = ns^2.$$

The work is supported by Russian Science Foundation, project No. 24-21-00311, <https://rscf.ru/project/24-21-00311/>.

1. *Zaitsev V.A., Kim I.G.* Matrix eigenvalue spectrum assignment for linear control systems by static output feedback // *Linear Algebra and its Applications*. 2021. Vol. 613. P. 115–150.
2. *Zaitsev V.A.* Spectrum control in linear systems with incomplete feedback // *Differential Equations*. 2009. Vol. 45, no. 9. P. 1348–1357.

Optimal control of solutions to the Cauchy problem for IMBq equation

A. A. Zamyshlyayeva, E. V. Bychkov

Chelaybinsk, South Ural State University

e-mail: zmyshliaevaaa@susu.ru, bychkovev@susu.ru

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a domain with boundary $\partial\Omega$ of class C^∞ , $T \in \mathbb{R}_+$. In the cylinder $\Omega \times (0, T)$ consider Cauchy–Dirichlet problem for improved modified Boussinesq equation (IMBq)

$$(\lambda - \Delta)x_{tt} - \alpha^2 \Delta x - \Delta(x^3) = u(s, t), \quad (s, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

$$x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (2)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1. \quad (3)$$

Eq. (1) models the propagation of waves in shallow water, taking into account capillary effects, dispersion and convection of medium. In [1] a (modified) mathematical model of wave propagation in shallow water in a one-dimensional domain was studied and a soliton solution to eq. (1) was obtained. In [2] the existence of a unique global solution to the Cauchy problem for eq. (1) was proved, with $\lambda = 1, \alpha = 1$. Because the operator $\lambda - \Delta$ can be degenerate, equations are not solvable with respect to the highest time derivative and such equations are called Sobolev type. Using the theory of relatively p -bounded operators developed by G. A. Sviridyuk, it is shown [3] that in suitably chosen spaces (1), (2) can be reduced to an abstract semilinear Sobolev type equation of the second order

$$L\ddot{x} + Mx + N(x) = u. \quad (4)$$

Let $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ be Banach spaces, the operator $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. The set

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C}: (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})\}$$

is called the L -resolvent set operator of the M . The set $\mathbb{C} \setminus \rho^L(M) = \sigma^L(M)$ is called the L -spectrum operator of the M . Operator functions $(\mu L - M)^{-1}, R_\mu^L = (\mu L - M)^{-1}L, L_\mu^L = L(\mu L - M)^{-1}$ with the

domain $\rho^L(M)$ is called, respectively, *L-resolvent*, *right L-resolvent*, *left L-resolvent of the operator M*. The operator M is called (L, σ) -bounded if

$$\exists a > 0 \ \forall \mu \in \mathbb{C} : (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Let the operator M be (L, σ) -bounded. Then the operators

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\lambda}^L(M) d\lambda,$$

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\lambda}^L(M) d\lambda, \Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r > a\}$$

are projectors in the spaces $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$, respectively.

Let $(\mathbb{I} - Q)u$ be independent of t , then the set

$$\mathfrak{P} = \{x \in \mathfrak{X} : (\mathbb{I} - Q)(M + N)(x) = (\mathbb{I} - Q)u\}$$

is the local phase manifold of eq. (4).

To formulate the optimal control problem, introduce the control space $\mathfrak{U}$ and select a non-empty, closed and convex set $\mathfrak{U}_{ad}$ in it, witch is called the set of admissible controls. Let us pose the optimal control problem as a condition for minimizing the functional

$$J(x, u) \rightarrow \inf, u \in \mathfrak{U}_{ad}. \quad (5)$$

Let $H = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ be a real separable Hilbert space. Define dual pairs of reflexive Banach spaces $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$ and (L^p, L^q) with respect to duality $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

In the given spaces define operators L, M, N satisfying the following conditions:

(C1) $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$ is self-adjoint non-negatively defined and Fredholm;

(C2) $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$ is self-adjoint non-negatively defined;

(C3) $N \in C^r(L^p, L^q), r \geq 1$ is s -monotone, p -coercive and homogeneous of order $p - 1$ operator, with symmetric Frechet derivative.

In addition, define the spaces of distributions $L^\infty(0, T; \mathfrak{X} \cap L^p)$ and

$L^\infty(0, T; \text{coim} L)$, where $\mathfrak{X} = \ker L \oplus \text{coim} L$. The spaces conjugate to them are constructed using the Dunford–Pettis theorem: $(L^\infty(0, T; \mathfrak{X} \cap L^p))^* \simeq L^1(0, T; \mathfrak{X}^* \cup L^q)$ and $(L^\infty(0, T; \text{coim} L))^* \simeq L^1(0, T; \mathfrak{X}^*)$.

Theorem 1. *Let $u \in L^q(0, T; L^q)$ and conditions **(C1)**, **(C2)**, **(C3)** be satisfied. Then for any $(x_0, x_1) \in T_{x_0}\mathfrak{P}$ such that $x_0 \in \mathfrak{X} \cap L^p$, $x_1 \in \text{coim} L$ there is a unique solution to (3), (4) $x = x(s, t)$ such that $x \in L^\infty(0, T; \mathfrak{X} \cap L^p)$ and $\dot{x} \in L^\infty(0, T; \text{coim} L \cap \mathfrak{X})$.*

Consider the optimal control problem (3)–(5). Construct the space $\mathfrak{U} = L^2(0, T; L^q)$ and define a non-empty closed and convex subset $\mathfrak{U}_{ad}$ in it. Construct the space $\mathfrak{X}_1 = \{x | x \in L^\infty(0, T; \mathfrak{X} \cap L^p), \dot{x} \in L^\infty(0, T; \text{coim} L \cap \mathfrak{X})\}$.

The pair $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$ is called a *solution to the optimal control problem* if

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{(x, u)} J(x, u),$$

where the pairs $(x, u) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$ satisfy problem (3), (4). The function $\tilde{u}$ is called an *optimal control*. In [4] proved

Theorem 2. *Let conditions **(C1)**, **(C2)**, **(C3)** be satisfied. Then for any $(x_0, x_1) \in T\mathfrak{P}$, $T \in \mathbb{R}_+$, there is a solution to problem (3), (4), (5).*

For the space H take the Sobolev space $W_2^{-1}(\Omega)$ with inner product

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\Omega} f_1 \tilde{f}_2 ds, \quad \forall f_1, f_2 \in W_2^{-1}(\Omega),$$

where $\tilde{f}_1$ is a generalized solution to the Dirichlet problem (2) for the equation $\Delta \tilde{f}_1 = f_1$. Set $\mathfrak{X} = L^2$ and $\mathfrak{X}^* = (L^2)^*$ and $p = 4$. Conditions **(C1)**, **(C2)** and **(C3)** are fulfilled. The following theorem is true.

Theorem 3. *For any $(x_0, x_1) \in T\mathfrak{P}$, $T \in \mathbb{R}_+$, there is a solution to problem (1), (2), (3), (5).*

The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 24-11-20037).

1. Wang Y. On properties of solutions to the improved modified Boussinesq equation // Journal of nonlinear science and applications. 2016. Vol. 9, no. 12. P. 6004–6020.
2. Arkhipov D.G., Khabakhpashev G.A. New Equation for the description of inelastic interaction of nonlinear localized waves in dispersive media // Journal of experimental and theoretical physics letters. 2011. Vol. 93, no. 8. P. 423–426.
3. Zamyshlyayeva A.A., Bychkov E.V. Phase space of the modified Boussinesq equation // Bulletin of the South Ural State University. Series: mathematical modelling, programming and computer software. 2012. Vol. 18 (277), no. 12. P. 13–19.
4. Zamyshlyayeva A.A., Bychkov E.V. Optimal control of solutions to the Cauchy problem for an incomplete semilinear Sobolev type equation of the second order // Journal of computational and engineering mathematics. 2023. Vol. 10, no. 3. P. 24–37.

Наблюдаемость и стабилизация с наблюдателем нелинейных непрерывно-дискретных систем управления

С. В. Акманова

*Магнитогорск, Магнитогорский государственный технический
университет им. Г. И. Носова*

e-mail: svet.akm_74@mail.ru

Нелинейные непрерывно-дискретные (гибридные) динамические системы адекватно описывают многие сложные, разнообразные процессы в актуальных областях экономики, производства, авиационной отрасли (см., например, [1, 2]). Рассматривается нелинейная гибридная система управления вида

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k)), & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k), u(t_k)), & k = 0, 1, 2, \dots, \\ w(t) = \varphi(x(t), y(t_k)), \end{cases} \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $y \in R^m$ — векторы состояний системы (1), характеризующие поведение непрерывной и дискретной частей этой

системы соответственно, $u \in R^q$ — вектор управления (входа), $w \in R^p$ — вектор выхода ($p \leq n + m$), $h = t_{k+1} - t_k > 0$ — постоянная величина ($k = 0, 1, 2, \dots$), функции $f(x, y)$, $g(x, y, u)$, $\varphi(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных, при этом выполняются соотношения

$$f(0, 0) = 0, \quad g(0, 0, 0) = 0, \quad \varphi(0, 0) = 0, \quad (2)$$

т.е. при $u = 0$ система (1) имеет точку равновесия $x = 0$, $y = 0$.

Определение 1. Назовем систему (1) *полностью наблюдаемой* при $h = h_0 > 0$, если существует $l \in N$ ($l \leq n + m$) такое, что для любого $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{0, l}$, и для любых четверок $(u_1(t_k), x_1(t), y_1(t_k), w_1(t))$, $(u_2(t_k), x_2(t), y_2(t_k), w_2(t))$, заданных на $[t_k, t_{k+1})$ и удовлетворяющих системе (1), из равенства входов и выходов $u_1(t_k) = u_2(t_k)$, $w_1(t) = w_2(t)$, следует равенство состояний: $x_1(t) = x_2(t)$, $y_1(t_k) = y_2(t_k)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{0, l}$.

В таком случае по известным значениям входа $u(t_k)$ и выхода $w(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{0, l}$, можно однозначно определить состояния $x(t)$ и $y(t_k)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, и сделать выводы о процессах, происходящих внутри системы (1).

В настоящей статье обсуждаются вопросы наблюдаемости системы (1), построения наблюдателя для системы (1) и стабилизации системы (1) с наблюдателем.

Учитывая соотношения (2), представим функции $f(x, y)$, $g(x, y, u)$, $\varphi(x, y)$ в виде

$$\begin{aligned} f(x, y) &= A_1 x + B_1 y + a(x, y), \quad g(x, y, u) = A_2 x + B_2 y + C u + b(x, y, u), \\ \varphi(x, y) &= D_1 x + D_2 y + c(x, y), \quad \text{где } A_1 = f'_x(0, 0), \quad B_1 = f'_y(0, 0), \quad A_2 = g'_x(0, 0, 0), \\ B_2 &= g'_y(0, 0, 0), \quad C = g'_u(0, 0, 0), \quad D_1 = \varphi'_x(0, 0), \quad D_2 = \varphi'_y(0, 0) \text{ — матрицы соответствующих размеров, при этом гладкие нелинейности } a(x, y), \quad b(x, y, u), \quad c(x, y) \text{ удовлетворяют условиям} \\ a(x, y) &= o(\|x\| + \|y\|), \quad c(x, y) = o(\|x\| + \|y\|) \quad \text{при } \|x\| + \|y\| \rightarrow 0, \\ b(x, y, u) &= o(\|x\| + \|y\| + \|u\|) \quad \text{при } \|x\| + \|y\| + \|u\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Полагая, что $\det A_1 \neq 0$, можно доказать, что система (1) равносильна, в естественном смысле, системе, компактная запись которой имеет вид

$$\begin{cases} z_{k+1} = A(h)z_k + B u_k + \xi(z_k, u_k, h), \\ w_k = D(h)z_k + \gamma(z_k, h), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3)$$

причем

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad A(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} & A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + B_2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} O \\ C \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \varepsilon(x_k, y_k; h) \\ \delta(x_k, y_k, u_k; h) \end{bmatrix},$$

$$D(h) = \begin{bmatrix} D_1 e^{A_1 h} & D_1 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + D_2 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon(x_k, y_k; h) = e^{(t_k+h)A_1} \int_{t_k}^{t_k+h} e^{-sA_1} a(p(s, x_k, y_k), y_k) ds,$$

при этом $x = p(t, x_k, y_k)$ — решение задачи Коши

$$x' = A_1 x + B_1 y_k + a(x, y_k), \quad x(t_k) = x_k;$$

$$\delta(x_k, y_k, u_k; h) = A_2 \varepsilon(x_k, y_k; h) + b(x_{k+1}, y_k, u_k),$$

$$\gamma(z_k, h) = \gamma(x_k, y_k, h) = D_1 \varepsilon(x_k, y_k; h) + c(x_{k+1}, y_k),$$

где $y_k = y(t_k)$, $u_k = u(t_k)$, $w_k = w(t_k)$. Учитывая работу [3], можно доказать, что $\xi(z, u, h) = o(\|z\| + \|u\|)$ при $\|z\| + \|u\| \rightarrow 0$, $\gamma(z, h) = o(\|z\|)$ при $\|z\| \rightarrow 0$. Тогда справедлива

Теорема 1. Система (1) полностью наблюдаема при $h = h_0 > 0$ в том и только том случае, когда полностью наблюдаема система (3) при $h = h_0 > 0$.

Системе (3) при $h = h_0 > 0$ соответствует система первого приближения вида

$$\begin{cases} z_{k+1} = A_0 z_k + B u_k, \\ w_k = D_0 z_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (4)$$

где $A_0 = A(h_0)$, $D_0 = D(h_0)$. Отсюда, с учетом рангового критерия полной наблюдаемости линейных дискретных систем, имеет место

Теорема 2. Если при $h = h_0 > 0$ система (3) полностью наблюдаема, то полностью наблюдаема система (4).

Основываясь на теореме 2 и работе [4], приходим к утверждению.

Теорема 3. Пусть при $h = h_0 > 0$ система (3) полностью наблюдаема. Тогда существует матрица K размера $(n + m) \times p$ такая, что решения системы (3) при $h = h_0 > 0$ и системы

$$v_{k+1} = (A_0 - KD_0)v_k + Bu_k + KD_0z_k + \xi(z_k, u_k, h_0), \quad (5)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

отвечают условию $\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k - v_k\| = 0$ при любых $u_k \in R^q$; $z_0, v_0 \in R^{n+m}$.

Систему (5) назовем наблюдателем для системы (3) при $h = h_0 > 0$.

С помощью наблюдателя (5) можно решить вопрос стабилизации системы (1) в условиях отсутствия полноты измеряемой информации о состоянии этой системы [5], руководствуясь следующим утверждением.

Теорема 4. Пусть при $h = h_0 > 0$ система (3) имеет стабилизирующее управление $u_k = Fz_k$ (F — матрица размера $q \times (n + m)$, $k = 0, 1, 2, \dots$) и является полностью наблюдаемой, при этом система (5) является наблюдателем системы (3) при $h = h_0 > 0$. Тогда решение $x = 0$, $y = 0$, $v = 0$ расширенной системы (1), (5) с управлением $u(t_k) = Fv(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, является асимптотически устойчивым при $h = h_0 > 0$.

1. Максимов В.П., Чадов А.Л. Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Пермского университета. 2011. №2 (9). С. 13–23.
2. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Оптимизация маршрутов непрерывно-дискретного движения управляемых объектов при наличии препятствий // Труды МАИ. 2020. Вып. 113.
3. Юмагулов М.Г., Акманова С.В. Об устойчивости точек равновесия нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем // Уфимский математический журнал. 2023. Т. 15, № 2. С. 85–100.
4. Акманова С.В. О стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем с постоянным шагом дискретизации // Автоматика и телемеханика. 2024. № 9. С. 41–58.

5. Антипов А.С., Краснов Д.В., Уткин А.В. Декомпозиционный синтез системы управления электромеханическими объектами в условиях неполной информации // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 4. С. 530–548.

Об одной параболической задаче гладкого управления

И. В. Астахова

Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, РЭУ им. Г. В. Плеханова
e-mail: ast.diffiety@gmail.com

Д. А. Лашин

Москва, НПП “ФИТО”
e-mail: dalashin@gmail.com

А. В. Филиновский

Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана, МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: flnv@yandex.ru

Будем рассматривать экстремальную задачу для параболической смешанной задачи с коэффициентами, не зависящими от времени:

$$u_t = (a(x)u_x)_x + b(x)u_x + h(x)u, \quad (1)$$

$$(x, t) \in Q_T = (0, 1) \times (0, T), \quad T > 0,$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(1, t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

где действительные функции a , b (конвективный член) и h (обедняющий потенциал) являются гладкими в $\overline{Q}_T$, $0 < a_0 \leq a(x) \leq a_1 < \infty$, $\varphi \in W_2^2(0, T)$, $\psi \in W_2^2(0, T)$. Здесь $W_2^k(0, T)$ — это пространство Соболева слабо дифференцируемых функций с нормой

$$\|y\|_{W_2^k(0, T)}^2 = \int_0^T \left(\sum_{j=0}^k (y^{(j)}(t))^2 \right) dt.$$

Определение 1 (см. [1, с. 25]). Обозначим через $V_2^{1,0}(Q_T)$ банахово пространство функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)}$$

и таких, что $t \mapsto u(\cdot, t)$ — непрерывное отображение $[0, T] \rightarrow L_2(0, 1)$.

Обозначим через $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ множество функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(x, T) = 0$, $\eta(0, t) = 0$.

Определение 2. Функция $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющая условию $u(0, t) = \varphi(t)$ и интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (a(x, t)u_x\eta_x - b(x, t)u_x\eta - h(x, t)u\eta - u\eta_t) \, dx \, dt = \\ = \int_0^1 \xi(x)\eta(x, 0) \, dx + \int_0^T a(1, t)\psi(t)\eta(1, t) \, dt \end{aligned}$$

для всех $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$, называется *слабым решением задачи* (1)–(3).

Исследуется задача управления с точечным наблюдением: управляя температурой φ на левом конце интервала $(0, 1)$ (функцию ψ считаем фиксированной), добиваемся, чтобы температура $u(x_0, t)$ в некоторой точке $x_0 \in (0, 1)$ была близка к заданной функции $z(t)$ в течение всего интервала времени $(0, T)$. Продолжая исследования, начатые в [2–3], рассмотрим новый специальный функционал качества, востребованный в приложениях, обеспечивающий, в том числе, равномерную близость решения и целевой функции, реализуемый нормой в пространстве $W_2^1(0, T)$. Поскольку в прикладных задачах время управления и наблюдения T достаточно велико, то влияние начальной функции относительно мало и им можно пренебречь, положив начальную функцию равной нулю. Заметим, что различные экстремальные задачи для параболических уравнений исследовались в [4–7].

Теорема 1. Если $\varphi, \psi \in W_2^2(0, T)$ и $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, то задача (1)–(3) имеет единственное слабое решение $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ с $u_t \in V_2^{1,0}(Q_T)$, и неравенство

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} + \|u_t\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq C_1 (\|\varphi\|_{W_2^2(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^2(0,T)}),$$

выполняется с некоторой константой $C_1 > 0$, не зависящей от функций φ и ψ .

Обозначим через $\Phi \subset W_2^2(0, T)$ непустое множество управляющих функций φ , удовлетворяющих условию $\varphi(0) = 0$, а через $\mathfrak{Z} \subset W_2^1(0, T)$ — непустое множество целевых функций z , удовлетворяющих условию $z(0) = 0$.

Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}[z, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varphi] = \\ = \int_0^T ((u_\varphi(x_0, t) - z(t))^2 \mathbf{r}_1 + (u_{\varphi_t}(x_0, t) - z'(t))^2 \mathbf{r}_2) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\varphi \in \Phi$, $z \in \mathfrak{Z}$, u_φ — решение задачи (1)–(3) с заданной функцией управления φ и $\mathbf{r}_j \in L_\infty(0, T)$, $j = 1, 2$ — такие весовые функции, что

$$\text{ess} \inf_{t \in (0, T)} \mathbf{r}_j(t) > 0, \quad j = 1, 2.$$

Считая функцию z фиксированной, рассмотрим задачу минимизации, обозначив

$$\mathfrak{m}[z, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Phi] := \inf_{\varphi \in \Phi} \mathfrak{J}[z, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varphi]. \quad (5)$$

Теорема 2. Если множество Φ замкнуто, выпукло и ограничено в $W_2^2(0, T)$, то для любого $z \in \mathfrak{Z}$ существует такая единственная функция $\varphi_0 \in \Phi$, что

$$\mathfrak{m}[z, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Phi] = \mathfrak{J}[z, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varphi_0].$$

Определение 3. Будем говорить, что задача (1)–(3), (5) *плотно управляема* из множества Φ во множество $\mathfrak{Z}$ (см. [2, 3]), если для всех $z \in \mathfrak{Z}$ выполняется равенство $\mathfrak{m}[z, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Phi] = 0$.

Теорема 3. Задача (1)–(3), (5) плотно управляема из множества $\Phi = \{\varphi \in W_2^2(0, T): \varphi(0) = 0\}$ во множество $\mathfrak{Z} = \{z \in W_2^1(0, T): z(0) = 0\}$.

Установлены свойства управляющей функции, реализующей минимум функционала (4).

Работа поддержана РНФ, проект № 25–11–00133.

1. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Физматлит, 1973.
2. *Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В.* Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Тр. Моск. матем. о-ва. 2019. Т. 80, № 2. С. 258–274.
3. *Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В.* Об экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения // Докл. РАН. 2022. Т. 504, № 1. С. 158–161.
4. *Farag M.H., Talaat T.A., Kamal E.M.* Existence and uniqueness solution of a class of quasilinear parabolic boundary control problem // Cubo. 2013. Vol. 15, no. 2. P. 111–119.
5. *Friedman A.* Optimal control for parabolic equations // J. Math. Anal. Appl. 1967. Vol. 18, no. 3. P. 479–491.
6. *Луонс Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
7. *Lurie K.A.* Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems. Berlin: Springer, 2013.

Оценка суммарного дохода с учетом дисконтирования для структурированных моделей динамики популяций

А. А. Базулкина

Владимир, ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет

имени А. Г. и Н. Г. Столетовых»

e-mail: hirasawa33rus@email.com

Рассматривается модель динамики популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано автономной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}. \quad (1)$$

При этом, если $n \geq 2$, то популяция называется структурированной (либо она состоит из отдельных видов $x_1, \dots, x_n$, либо разделена на n возрастных групп), однако все утверждения также верны и для однородных популяций (то есть в случае $n = 1$).

Предполагаем, что из популяции в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$, извлекается некоторая доля биологического ресурса

$$u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

что приводит к мгновенному уменьшению его количества. В скобках обозначим временные, а нижними индексами — пространственные параметры. Через $u_i(k)$ обозначим долю ресурса i -го вида, извлеченного из популяции в момент $\tau(k)$. Рассмотрим множество $U \doteq \{\bar{u} : \bar{u} = (u(1), \dots, u(k), \dots)\}$ и исследуем задачу построения управлений $\bar{u} \in U$ для достижения определенного результата сбора ресурса. С учетом эксплуатации получаем управляемую систему с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) &= (1 - u_i(k)) \cdot x_i(kd - 0), \end{aligned}$$

где $x_i(kd - 0)$ и $x_i(kd)$ — количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент $\tau(k) = kd$ соответственно, $i = 1, \dots, n$, $k =$

1, 2, \dots. Предполагаем, что решения этой системы непрерывны справа, функции f_i непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют условию Липшица. Также считаем, что решения системы (1) являются неотрицательными при любых неотрицательных начальных условиях, то есть выполнено *условие квази-положительности* (см., например, [1]).

Пусть $X_i(k) = x_i(kd - 0)$ — количество ресурса i -го вида до сбора в момент kd , $k = 1, 2, \dots$, $x_i(0) = x_i^0$ — начальное количество ресурса, $C_i \geq 0$ — агрегированная стоимость условной единицы i -го вида. Будем рассматривать следующую характеристику сбора ресурса.

Определение. *Суммарным доходом с учетом дисконтирования* называется функция

$$H_\alpha(\bar{u}, x(0)) \doteq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j},$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент дисконтирования, $\bar{u} \in U$ и $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ (см. [2]).

Решение системы (1) будем обозначать $\varphi(t, x)$, где $\varphi(0, x) = x$. Предполагаем, что для любого $x \in \mathbb{R}_+^n$ решения данной системы существуют при $t \in [0, d]$ для некоторого $d > 0$. Введем в рассмотрение функцию $D(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, x) - x_i e^\alpha)$ и множество

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_+ &\doteq \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_i \leq \varphi_i(d, x) \neq 0, i = 1, \dots, n\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}_+^n : x \leq \varphi(d, x) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Для системы (1) на множестве $\mathbb{R}_+^n$ рассмотрим верхнюю систему сравнения

$$\dot{x} = g(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (2)$$

то есть такую систему, что

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq g_i(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, n},$$

для всех $t \geq t_0$, $x \leq y$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, $y \in \mathbb{R}_+^n$. Систему (1) будем называть нижней системой сравнения для системы (2). Обозначим через $\psi(t, x)$ решения (2), удовлетворяющие начальным условиям $\psi(0, x) = x$. Предполагаем, что для вектор-функции g выполнены такие же свойства, что и для f , и для некоторого $d > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}_+^n$ решения $\psi(t, x)$ существуют при $t \in [0, d]$. Пусть

$$\begin{aligned}\tilde{D}(x) &\doteq \sum_{i=1}^n C_i(\psi_i(d, x) - x_i e^\alpha), \\ \tilde{D}_+ &\doteq \{x \in \mathbb{R}_+^n : x \leq \psi(d, x) \neq 0\},\end{aligned}\tag{3}$$

через $\tilde{H}_\alpha(\bar{u}, x(0))$ обозначим дисконтированный доход от извлекаемого ресурса, заданного системой (2).

Теорема 1. *Предположим, что система (2) является верхней системой сравнения для (1) на множестве $\mathbb{R}_+^n$. Тогда для любых $\bar{u} \in U$ и $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ выполнены неравенства*

$$H_\alpha(\bar{u}, x(0)) \leq \max_{x \in \mathcal{D}_+} D(x) \leq \max_{x \in \tilde{D}_+} \tilde{D}(x).$$

Выпишем теперь нижнюю систему сравнения для системы (1):

$$\dot{x} = v(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n\tag{4}$$

и обозначим через $\xi(t, x)$ ее решения, удовлетворяющие начальным условиям $\xi(0, x) = x$. Предполагаем, что вектор-функция v обладает таким же свойством, как и функция f в правой части системы (1) и решения $\xi(t, x)$ существуют при $t \in [0, d]$ для любого $x \in \mathbb{R}_+^n$. Аналогично (3) определим $\hat{D}(x)$ и $\hat{D}_+$, а $\hat{H}_\alpha(\bar{u}, x(0))$ — дисконтированный доход от извлекаемого ресурса, заданного системой (4).

Теорема 2. *Предположим, что система (4) является нижней системой сравнения для (1) на множестве $\mathbb{R}_+^n$ и $\max_{x \in \hat{D}_+} \hat{D}(x) =$*

$\hat{D}(x^)$, где $x^* \in \hat{D}_+$. Тогда существует $\bar{u}^* \in U$, такое, что $H_\alpha(\bar{u}^*, x(0)) \geq \max_{x \in \hat{D}_+} \hat{D}(x)$ для всех $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$, для которых выполнено неравенство $\xi(d, x(0)) \geq x^*$.*

Работа выполнена под руководством Л. И. Родиной — профессора кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета им. А. Г. и Н. Г. Столетовых.

1. *Базулкина А.А., Родина Л.И.* Теорема сравнения для систем дифференциальных уравнений и ее применение для оценки средней временной выгоды от сбора ресурса // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2024. Т. 63. С. 1–15.
2. *Rodina L.I., Hammadi A.H.* Optimization problems for models of harvesting a renewable resource // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 250, issue 1. С. 113–122.

Об одной задаче управления линейной динамической системой с неразделенными многоточечными и интегральными условиями

В. Р. Барсегян

*Республика Армения, г. Ереван, Институт механики НАН
Армении, Ереванский государственный университет
e-mail: barseghyan@sci.am*

Задачи с нелокальными условиями являются одним из развивающихся направлений теории дифференциальных уравнений. Характерной чертой таких задач является, наряду с классическими краевыми (начальное и конечное) условиями, наличие условий, связывающих значения фазовых координат в различных промежуточных точках или промежутках с интегральными условиями [1–6]. Способы исследования подобных задач во многом зависят от видов нелокальных условий. К важным прикладным задачам управления с нелокальными условиями относятся задачи для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, см., в частности [1–3, 6], и для систем, описываемых уравнением с частными производными, см., в частности, [4–5].

В данной работе рассматривается управляемый процесс, описываемый системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $x(t)$ — фазовый вектор, $A — (n \times n)$, $B — (n \times r)$ -мерные матрицы, элементы которых являются вещественными числами, $t_0 \leq t \leq T$ (t_0 и T — заданные моменты времени), $u(t)$ — r -мерный вектор-столбец управляющих воздействий. Пусть заданы следующие начальное $x(t_0) = x_0$ и конечное $x(T) = x_T$ состояния системы (1) и фиксированные промежуточные моменты времени $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m < \underline{t} < \bar{t} < T$. Предполагается, что для фазового вектора $x(t)$ заданы следующие нелокальные условия: неразделенные многоточечные промежуточные условия

$$\sum_{k=1}^m F_k x(t_k) = \alpha \quad (2)$$

и интегральное ограничение

$$\int_{\underline{t}}^{\bar{t}} Sx(t)dt = \beta, \quad (3)$$

где α — q -мерный ($q \leq n$) вектор-столбец, F_k — $(q \times n)$ -мерные матрицы ($k = 1, \dots, m$), β — n -мерный вектор-столбец, S — $(n \times n)$ -мерная матрица, элементы которых являются вещественными числами.

Вообще для ряда прикладных задач можно предполагать, что в промежуточные моменты времени t_k ($k = 1, \dots, m$) и в промежутке времени $\underline{t} \leq t \leq \bar{t}$ условиям (2) и (3) удовлетворяют не все значения координат фазового вектора $x(t)$, а лишь некоторые значения координат фазового вектора. В таких случаях будем считать, что соответствующие элементы матрицы F_k ($k = 1, \dots, m$) и S равны 0.

Предполагается, что система (1) с нелокальными промежуточными условиями (2) и интегральным условием (3) на промежутке времени $[t_0, T]$ является вполне управляемой.

Требуется найти условия, при которых существует программное управляющее воздействие $u = u(t)$, $t \in [t_0, T]$, и программное движение $x = x(t)$, переводящие движение системы

(1) из начального состояния $x(t_0)$, обеспечивая удовлетворение нелокальным промежуточным условиям (2) и (3) в конечное состояние $x(T)$, а также построить их.

В работе приведено условие, выполнение которого обеспечивает существование решения (1), удовлетворяющего (3), и сформулирована теорема о представлении решения уравнения (1), удовлетворяющего условию (3).

Введем блочную матрицу размерами $((q + 2n) \times 2r)$:

$$H(t) = \begin{pmatrix} F(t)B, e^{A(T-t)}B \\ H_2(t) \end{pmatrix},$$

где

$$H_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \underline{t}], \\ e^{-At}B - V_1 P(t) e^{-At}B, & t \in [\underline{t}, \bar{t}], \\ e^{-At}B, & t \in [\bar{t}, T], \end{cases}$$

$$F(t) = \sum_{k=1}^m F_k e^{A(t_k - t)}, \quad P(t) \equiv \int_t^{\bar{t}} e^{A\tau} d\tau, \quad V_1 = \left(\int_{\underline{t}}^{\bar{t}} e^{At} dt \right)^{-1}.$$

Для того, чтобы динамическая система (1) с нелокальными условиями (2) и (3) была вполне управляемой на отрезке $[t_0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы вектор-столбцы матрицы $H(t)$ были линейно независимыми.

Введем матрицу

$$Q = \int_{t_0}^T H[t] H^T[t] dt$$

размерами $((q + 2n) \times (q + 2n))$. Тогда решение задачи формулируется в виде следующего утверждения:

Для того, чтобы существовало программное управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, и соответствующее ему решение системы (1), удовлетворяющее условиям (2), (3), необходимо и достаточно, чтобы матрица Q была неособой ($\det Q \neq 0$) или чтобы ранги матрицы Q и расширенной матрицы $\{Q, \eta\}$ совпадали между собой, где

$$\eta = \begin{pmatrix} \alpha - Fx(t_0) \\ x(T) - e^{A(T-t_0)}x(t_0) \\ e^{-AT}x_T - G\beta \end{pmatrix}, \quad F = F(t_0), \quad G = \left(\int_{\underline{t}}^{\bar{t}} S e^{At} dt \right)^{-1}.$$

Построена функция управления, под воздействием которой осуществляется фазовое движение, удовлетворяющее условиям (2) и (3) задачи. Показана непрерывность и неединственность функции управления.

1. *Байбурин М.М.* О многоточечных задачах для линейной дифференциальной системы уравнений первого порядка // Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан / Прикладная математика и вопросы управления. 2018. № 3. С. 16–30.
2. *Абдуллаев В.М.* Решение дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 3(51). С. 3–15.
3. *Барсегян В.Р., Барсегян Т.В.* Об одном подходе к решению задач управления динамическими системами с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 4. С. 3–15.
4. *Корзюк В.И., Столярчук И.И.* Классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения с интегральным условием // Доклады НАН Беларуси. 2016. Т. 60, № 6. С. 22–27.
5. *Barseghyan V., Solodusha S.* On the Optimal Control Problem for Vibrations of the Rod/String Consisting of Two Non-Homogeneous Sections with the Condition at an Intermediate Time // Mathematics. 2022, Vol. 10 (23). Art. no. 4444.
6. *Барсегян В.Р., Симонян Т.А., Матевосян А.Г.* О задаче управления двухзвенного плоского манипулятора с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 2 (57). С. 53–60.

Об одной задаче преследования БПЛА самолетного типа надземного объекта

В. Р. Барсегян^{1,2,*}, А. Г. Матевосян^{2,**}

Республика Армения, г. Ереван, ¹Институт механики НАН
Армении, ²Ереванский государственный университет

e-mail: *barseghyan@sci.am; **amatevosya@ysu.am

Развитие науки и техники позволяет проектировать беспилотные технологии различного назначения. Все большее распространение получает применение беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) в военных целях. Вообще, область применения БПЛА достаточно широка и не ограничена военной отраслью, что является весьма актуальным [1–3]. Важные прикладные значения имеют задачи автономного управления БПЛА, поэтому исследования подобных задач востребованы [4–5].

В данной работе, на основе полученных данных о надземной цели с видеокамеры, прикрепленной к БПЛА самолетного типа, с учетом закона движения, предлагается алгоритм автономного управления БПЛА, обеспечивающего сближение с надземной (подвижной или неподвижной) целью. Математическую модель движения беспилотного летательного аппарата (БПЛА) представим системой из шести дифференциальных уравнений, предложенной, в частности, [1]. Указанная система дифференциальных уравнений нелинейна. Введя замены переменных, преобразуем эту систему к следующему виду:

$$\begin{aligned}\dot{H} &= v \sin \vartheta, \quad \dot{L} = v \cos \vartheta \cos \psi, \quad \dot{Z} = v \cos \vartheta \sin \psi, \\ \dot{v} &= g(u_1 - \sin \vartheta), \quad \dot{\vartheta} = \frac{g(u_2 - \cos \vartheta)}{v}, \quad \dot{\psi} = -\frac{gu_3}{v \cos \vartheta},\end{aligned}\tag{1}$$

где H — высота над поверхностью, L — горизонтальная координата вдоль направления полёта, Z — боковое отклонение, v — модуль скорости, ϑ — угол наклона траектории, ψ — азимутальный угол пути, g — ускорение свободного падения, γ — угол крена, u_1 , u_2 , u_3 — управления, имеющие виды: $u_1 = n_x$, $u_2 = n_y \cos \gamma$, $u_3 = n_y \sin \gamma$, а n_x , n_y — составляющие перегрузки. Таким образом, фазовыми координатами будем считать высоту, продольную

и боковую дальности, углы курса, наклона траектории и путевую скорость. Фактически управляющими воздействиями являются перегрузки n_x , n_y и угол крена γ . Мы будем рассматривать движение БПЛА в вертикальной плоскости, поэтому, пренебрегая боковым движением, оставляем только переменные H, L, v, ϑ . Линеаризируем систему уравнений (1) относительно установившегося режима полета $\{x_0, y_0, v_0, \theta_0\}$. Пусть $L \equiv x$, $H \equiv y$, тогда в матричной форме полученная линеаризованная система запишется следующим образом:

$$\dot{X} = AX + BU + W, \quad (2)$$

где $X = (x, y, v, \theta)^T$, $U = (u_1, u_2)^T$, а матрицы A , B и W имеют виды:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \theta_0 & -v_0 \sin \theta_0 \\ 0 & 0 & \sin \theta_0 & v_0 \cos \theta_0 \\ 0 & 0 & 0 & -g \cos \theta_0 \\ 0 & 0 & \frac{-g}{v_0^2} \cos \theta_0 & \frac{g}{v_0} \sin \theta_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ g & 0 \\ 0 & \frac{g}{v_0} \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} v_0 \theta_0 \sin \theta_0 \\ -v_0 \theta_0 \cos \theta_0 \\ g(\theta_0 \cos \theta_0 - \sin \theta_0) \\ \frac{-g}{v_0}(2 \cos \theta_0 + \theta_0 \sin \theta_0) \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что БПЛА оснащен видеокамерой, т. е. на БПЛА с помощью подвеса (гимбала) закреплена видеокамера с некоторым полем зрения. Предполагается также, что на основе полученных данных с видеокамеры, с учетом закона движения БПЛА, имеется координатно-временная зависимость БПЛА и надземной (движущейся) цели. Требуется разработать такой алгоритм управления движением БПЛА, который обеспечивает гарантированное сближение с целью не больше чем на заданные величины: по расстоянию δ , по углу ε , т. е.

$$\sqrt{(x(t) - x_p(t))^2 + (y(t) - y_p(t))^2} < \delta, \quad \theta(t) - \theta_p(t) < \varepsilon, \quad (3)$$

где $x_p(t), y_p(t), \theta_p(t)$ — параметры движения системы (1).

Обеспечение гарантированного сближения к целевому объекту в пределах определенного допустимого отклонения особенно важно для нелинейных систем, для которых классические методы преследования (или сближения) не всегда применимы.

В работе предлагается алгоритм, т.е. правило формирования управляющих воздействий (коррекция траектории), согласно которому реальное движение БПЛА, описываемое нелинейной системой (1), управляется таким образом, чтобы преследование (сближение) БПЛА цели осуществлялось методом наведения по линии погони. Под методом наведения по линии погони понимаем формирование такой фазовой траектории БПЛА под воздействиями управлений, при которой вектор скорости БПЛА направлен на текущую позицию цели. Управляющие воздействия, переводящие движение БПЛА из начального состояния в конечное состояние (цель), определяются для линеаризованной системы (2). Найденные управляющие воздействия подставляются в (1), численно интегрируется полученная система дифференциальных уравнений и в каждый момент времени проверяются условия (3), т.е. отклонения соответствующих величин, вычисленных для линейной (2) и нелинейной (1) систем. Если нарушается хотя бы одно из условий (3), то, фиксируя момент времени, вычисляется состояние $\{x_{k0}, y_{k0}, v_{k0}, \theta_{k0}\}$ системы (1) и относительно этого состояния проводится линеаризация нелинейной системы (1). В итоге получаем систему

$$\dot{X} = A_k X + B_k U + W_k. \quad (4)$$

Здесь индекс k характеризует шаг алгоритма. Для нового начального состояния $\{x_{k0}, y_{k0}, v_{k0}, \theta_{k0}\}$ находим управляющие воздействия, переводящие движение системы (4) к цели. Полученные управляющие воздействия снова подставляем в (1), численно интегрируем полученную нелинейную систему дифференциальных уравнений и в каждый момент времени проверяем условия (3), и так далее. Это приводит к динамическому обновлению траектории БПЛА, обеспечивая гибкость и адаптивность управления, обеспечивая не больше, чем заданное отклонение от цели. Рассмотрены конкретные задачи для неподвижной и подвижной цели.

Работа выполнена при поддержке Комитета по высшему образованию и науке РА, в рамках исследовательского проекта № 23-2DP-1B001.

1. *Тараненко В.Т.* Динамика самолета с вертикальным взлетом и посадкой. М.: Машиностроение, 1978.
2. *Лемешонок Т.Ю., Сизова А.А., Баранов Н.Е., Санников В.А.* Математические модели динамики движения летательных аппаратов. Санкт-Петербург: Балтийский государственный технический университет «Военмех» имени Д. Ф. Устинова, 2020.
3. *Телухин С.В., Матвеев В.В.* Беспилотный летательный аппарат как объект управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 10. С. 7–10.
4. *Барсегян В.Р., Симонян Т.А., Матевосян А.Г.* Об одной задаче управления квадрокоптером с заданными промежуточными значениями разных частей координат // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29, № 145. С. 29–42.
5. *Барсегян В.Р., Мкртчян М.Г., Матевосян А.Г.* Об одной задаче управления БПЛА по линии визирования // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC-2024). Материалы 6-й Международной конференции. Иркутск, 16–20 сентября 2024 г. Иркутск: Иркутский государственный университет, 2024. С. 199–202.

Об одной задаче оптимального граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой при минимизации граничной энергии

В. Р. Барсегян^{1,2,*}, С. В. Солодуша^{3,}**

*Республика Армения, г. Ереван, ¹Институт механики НАН
Армении,*

*²Ереванский государственный университет
Россия, г. Иркутск, ³Институт систем энергетики
им. Л. А. Мелентьева СО РАН*

e-mail: *barseghyan@sci.am, **solodusha@isem.irk.ru

Одна из первых задач управления распределенной колебательной системой, состоящей из двух кусочно-однородных сред, была поставлена А.Г. Бутковским и исследована в работе [1].

В статье [2] (а также других работах этого же автора и его учеников) изучены задачи граничного управления колебаниями стержня, состоящего из разнородных участков. Задачи граничного управления и оптимального граничного управления разнородных распределенных систем, состоящих из двух разнородных участков с заданными начальными и конечными условиями, рассмотрены, в частности, и в работах [3–6]. Задачи оптимального управления подобных систем с функционалом интеграла от квадратов граничных смещений, рассмотрены в работах [5, 6], а с функционалом интеграла от квадратов производных граничных смещений, т. е. интеграла граничной энергии, пока еще недостаточно исследованы. В предлагаемом докладе рассмотрена задача из этой области.

Пусть состояние распределенной кусочно-однородной среды (продольные колебания стержня или поперечные колебания струны) представлено функцией $Q(x, t)$, $-l_1 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$. Отклонение от состояния равновесия, т. е. колебания распределенной кусочно-однородной среды, описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$Q(-l_1, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

и с условиями сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t), \quad a_1^2 \rho_1 \left. \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \left. \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0+0}, \quad (3)$$

где $a_i = \sqrt{\frac{k_i}{\rho_i}}$ — скорость прохождения по участкам волны, $\rho_i = \text{const}$ — плотность, $k_i = \text{const}$ — модуль Юнга, $i = 1, 2$. Предполагается, что длины l_1 и l участков выбраны так, что время прохождения волны по участку $-l_1 \leq x \leq 0$ совпадает со временем прохождения волны по участку $0 \leq x \leq l$, т. е. $a_2 l_1 = a_1 l$. Пусть заданы начальные и конечные условия

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad (4)$$

$$Q(x, T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x), \quad -l_1 \leq x \leq l. \quad (5)$$

В формуле (2) функции $\mu(t)$ — управляющие воздействия (граничное управление). Пусть в моменты времени t_k ($k = 1, \dots, m$) $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$, имеет место

$$Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Предполагается, что $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$, где

$$\Omega_T = \{(x, t) : x \in [-l_1, l], t \in [0, T]\},$$

$\varphi_i(x) \in C^2[-l_1, l]$, $i = 0, 1, \dots, m+1$; $\psi_0(x), \psi_T(x) \in C^1[-l_1, l]$. Предполагается также, что все функции таковы, что выполняются условия согласования.

Требуется найти такое оптимальное управление $\mu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, под воздействием которого колебательное движение системы (1) из заданного начального состояния (4) через промежуточные состояния (6) переходит в конечное состояние (5) и которое минимизирует функционал

$$\int_0^T [\mu'(t)]^2 dt. \quad (7)$$

Для решения задачи переходим к новой переменной ξ , что приводит к сжатию или растяжению отрезка $-l_1 \leq x \leq 0$ относительно точки $x = 0$. При этом, с учетом $a_2 l_1 = a_1 l$, будем иметь, что отрезок $-l_1 \leq x \leq 0$ переходит к отрезку $-l \leq \xi \leq 0$. В новых переменных для функции состояния $Q(\xi, t)$ получим на отрезках одинаковой длины одинаковое уравнение с соответствующими условиями для (3)–(7).

В работе предлагается конструктивный подход решения рассматриваемых задач оптимального граничного управления, который основан на следующей схеме: исходные задачи с неоднородными граничными условиями сводятся к задачам оптимального управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями. Далее, используя метод разделения переменных, полученные задачи сводятся к задачам оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений с

заданными начальными, конечными и многоточечными промежуточными условиями как проблема моментов. На основе алгоритма решения проблем моментов конечномерных систем для произвольного числа первых n гармоник строятся оптимальные граничные управления, которые представляются в явном аналитическом виде. Для первых n гармоник в явном виде представлено выражение оптимальной функций состояния $Q_n^0(x, t)$ в исходных переменных, т. е. при $-l_1 \leq x \leq l$.

Исследование С. В. Солодуши выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема № AAAA-A21-121012090034-3).

1. *Львова Н.Н.* Оптимальное управление некоторой распределенной неоднородной колебательной системой // Автомат. и телемех. 1973. № 10. С. 22–32.
2. *Ильин В.А.* О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Докл. РАН. 2010. Т. 435, № 6. С. 732–735.
3. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 85–92.
4. *Барсегян В.Р.* Задача граничного управления смещением на двух концах процессом колебания стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2023. № 2. С. 125–135.
5. *Барсегян В.Р.* Оптимальное граничное управление распределенной неоднородной колебательной системой с заданными состояниями в промежуточные моменты времени // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63, № 1. С. 74–84.
6. *Barseghyan V., Solodusha S.* On the Optimal Control Problem for Vibrations of the Rod/String Consisting of Two Non-Homogeneous Sections with the Condition at an Intermediate Time // Mathematics. 2022. Vol. 10 (2). Art. no. 4444.

Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе

А. И. Благодатских

Ижевск, Удмуртский государственный университет

e-mail: aiblag@mail.ru

Основополагающий вклад в теорию дифференциальных игр двух лиц внесли фундаментальные работы школ академиков Л. С. Понтрягина [1] и Н. Н. Красовского [2]. Обобщением игр двух лиц являются задачи со многими участниками. Задача простого группового преследования с равными возможностями впервые рассматривалась Б. Н. Пшеничным [3], были получены необходимые и достаточные условия поимки. Понятие многократной поимки ввел Н. Л. Григоренко [4], для задачи с простыми движениями и равными возможностями им представлены необходимые и достаточные условия многократной поимки. А. А. Чикирем [5] и Н. Н. Петровым [6] были получены достаточные условия многократной поимки убегающего в конфликтно управляемых процессах и в примере Л. С. Понтрягина с равными возможностями. В работах [7, 8, 9] введены понятия нестрогой одновременной и одновременной многократных поимок для различных постановок задач конфликтного взаимодействия с равными возможностями, получены условия их разрешимости. В рамках доклада, на примере конфликтно управляемого процесса, планируется обсудить полученные результаты.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n + 1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \dots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i &: \quad \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in U(t), \quad x_i(t_0) = X_i^0, \quad i \in I(n), \\ E &: \quad \dot{y} = A(t)y + v, \quad v \in U(t), \quad y(t_0) = Y^0, \end{aligned}$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь и далее, $x_i, y \in \mathbb{R}^k$; $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k ; $U(t)$ — многозначное отображение, непрерывное по Хаусдорфу на $[t_0, \infty)$, являющееся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ строго выпуклым

компактом в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей; $I(n) = \{1, 2, \dots, n\}$; $S(c, r)$ — замкнутый шар с центром в точке $c \in \mathbb{R}^k$ радиуса r ; $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{\varphi} = A(t)\varphi$ такая, что $\Phi(t_0) = \mathcal{I}$; $\mathcal{I}$ — единичная матрица.

Определение 1. Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из $U(t)$ будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение

$$t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_q < \dots, \quad q \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения.

Определение 2. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E , соответствующей разбиению σ , будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y(\theta_q)$ допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v(t, \theta_q, x_i(\theta_q), i \in I(n), y(\theta_q)), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Определение 3. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i ($i \in I(n)$), соответствующей разбиению σ , будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q , позициям $x_\alpha(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $y(\theta_q)$ и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i(t, \theta_q, x_\alpha(\theta_q), \alpha \in I(n), y(\theta_q), (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))), \\ t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Для каждого $q = 1, 2, \dots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \{\{i_1, i_2, \dots, i_q\} : i_1 < i_2 < \dots < i_q, \quad i_1, i_2, \dots, i_q \in I(n)\}.$$

Определение 4. В игре Γ возможна b -кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i , $i \in I(n)$, соответствующие разбиению

σ , что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E , соответствующей разбиению σ , найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 5. В игре Γ возможна нестрогая одновременная b -кратная поимка [одновременная b -кратная поимка], если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i , $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ , что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E , соответствующей разбиению σ , найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda$$

$$[x_\alpha(\tau) = y(\tau), x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau), \alpha \in \Lambda].$$

Теорема. Пусть отображение $U(t) = U = \text{const}$; существуют невырожденная квадратная матрица B порядка k и вектор $g \in \mathbb{R}^k$ такие, что $B(U + g) = S(0, 1)$; матрица $\Phi(t)$ является почти периодической в смысле Бора. Тогда для осуществления одновременной b -кратной поимки в игре Γ необходимо и достаточно, чтобы $Y^0 \in \text{Int co}\{X_p^0, p \in K\}$ для всех $K \in \Omega(n - b + 1)$.

Во время доклада планируется сформулировать и более общие условия разрешимости игры Γ , а также привести другие постановки задач об одновременной многократной поимке, в том числе рассмотреть игру, в которой участвует группа защитников убегающего.

1. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания // Труды ордена Ленина Математического института имени В.А. Стеклова. 1971. Т. 112. С. 30–63.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.

4. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
5. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
6. *Петров Н.Н.* Многократная поимка в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 747–754.
7. *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Удмуртский университет, 2009.
8. *Blagodatskikh A.I., Petrov N.N.* Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9, issue 3. P. 594–613.
9. *Благодатских А.И., Банников А.С.* Одновременная многократная поимка при наличии защитников убегающего // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 62. С. 10–29.

О системах управления на временных графах с циклами

С. А. Бутерин

Саратов, Саратовский университет

e-mail: buterinsa@sgu.ru

Дифференциальные операторы на геометрических графах, часто называемые квантовыми графами, изучаются с 30-х годов прошлого века в связи с моделированием различных процессов, протекающих в сложных системах, представимых в виде *пространственных* сетей [1, 2].

В [3, 4] при помощи концепции глобального запаздывания [5] на квантовых графах была перенесена задача Н. Н. Красовского об успокоении системы управления с последствием [6, 7, 8]. В свою очередь, это привело к концепции *временного* графа, ребра которого отождествляются с промежутками времени. При этом

в каждой внутренней вершине возникает несколько возможных сценариев дальнейшего течения процесса по числу выходящих из нее ребер. Как и в пространственных сетях, здесь тоже могут возникать условия типа Кирхгофа во внутренних вершинах. А именно, им будет удовлетворять такая траектория течения процесса, которая является оптимальной с учетом сразу всех перспектив. В [4] была предложена стохастическая интерпретация управляемой системы на дереве, основанная на учете вероятностей возможных сценариев. Например, к системе на конечном дереве приведет замена коэффициентов в уравнении на интервале случайными процессами с дискретным временем и конечным числом состояний. Счетное число состояний соответствует более сложному и в то же время более общему случаю бесконечного дерева [9].

В докладе предполагается осветить иную интерпретацию систем управления на временных графах, которая подразумевает достоверную реализуемость процессов, соответствующих всем ребрам, и приводит, вообще говоря, к произвольному графу с циклами. Подобная ситуация возникает, например, если для некоторого набора изначально независимых систем управления потребовать совпадение траекторий соответствующих процессов в определенные моменты либо даже промежутки времени.

Последнее означает, что вдоль некоторых ребер может разворачиваться несколько локальных процессов, описываемых различными функционально-дифференциальными уравнениями разных порядков, а управляющие воздействия призваны совместить их траектории. В общей постановке глобальная оптимальная траектория на всем графе будет удовлетворять самосопряженным условиям склейки общего вида в его вершинах.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 24-71-10003.

1. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2005.
2. *Berkolaiko G., Kuchment P.* Introduction to Quantum Graphs. Providence, RI: AMS, 2013.
3. *Бутерин С.А.* Об успокоении системы управления произвольного порядка с глобальным последствием на дереве // Матем. заметки. 2024. Т. 115, № 6. С. 825–848.

4. *Buterin S.* On damping a control system with global aftereffect on quantum graphs: Stochastic interpretation // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2025. Vol. 48, no. 4. P. 4310–4331.
5. *Buterin S.* Functional-differential operators on geometrical graphs with global delay and inverse spectral problems // *Results Math.* 2023. Vol. 78. Art. no. 79.
6. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
7. *Скубачевский А.Л.* К задаче об успокоении системы управления с последствием // *Докл. РАН.* 1994. Т. 335, № 2. С. 157–160.
8. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel: Birkhäuser, 1997.
9. *Бутерин С.А.* Об управляемой системе на бесконечном временном дереве // *Матем. заметки.* 2025. Т. 117, № 3. С. 462–467.

Устойчивая кооперация в одном классе динамических сетевых игр

А. А. Вилисов, А. А. Седаков

Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: a.sedakov@spbu.ru

В докладе рассматривается особый класс динамических сетевых игр с дискретным временем, где вектор состояния определяется не только текущими действиями игроков, но и структурой двусторонних связей между ними [3, 5]. Эта структура задается ориентированным графом, который остается неизменным на протяжении всей игры. В рассматриваемой постановке анализируется частично-кооперативное поведение игроков, представляющее собой равновесие по Нэшу, в игре, в которой часть игроков заранее объединяется в коалицию, стремясь максимизировать общий выигрыш всех ее участников, а игроки, не входящие в эту коалицию, стремятся увеличить свой личный выигрыш в игре.

Описание частично-кооперативного равновесия не только расширяет спектр возможных поведений игроков в динамических сетевых играх, но и служит основой для анализа устойчивости кооперативных решений, следствием которой является нецелесообразность отказа от их пересмотра и приемлемость кооперации для всех игроков в рамках одной коалиции [1, 4, 6, 7]. Анализ устойчивости основывается на распределении максимального выигрыша между участниками коалиции и зависит от выбранного кооперативного решения. Это решение, в свою очередь, опирается на характеристическую функцию, которая может быть определена частично-кооперативным равновесием [2], поскольку при распределении максимального выигрыша часто учитываются «силы» всех возможных коалиций игроков.

Полученные теоретические результаты проиллюстрированы на примере модели загрязнения реки в условиях рыночной конкуренции фирм, расположенных вдоль ее течения. В процессе производства товаров эти фирмы загрязняют воду, и объемы загрязнений одной из них могут негативно сказаться на других, расположенных ниже по течению. Переговоры об объемах загрязнений открывают перед фирмами возможность скоординировать свои действия и достичь соглашения, которое увеличит их общую прибыль. Получены динамически устойчивые процедуры распределения кооперативных решений — вектора Шепли и CIS-значения. Кроме того, проанализировано поведение фирм в условиях кооперации, влияние такого поведения на стоимость производимого товара, а также экологические последствия с учетом структуры двусторонних связей между фирмами.

1. *Петросян Л. А., Данилов Н. Н.* Устойчивость решений неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: математика, механика, астрономия. 1979. № 1. С. 52–59.
2. *Chander P., Tulkens H.* A core-theoretic solution for the design of cooperative agreements on transfrontier pollution // International Tax and Public Finance. 1995. Vol. 2. P. 279–293.
3. *Müler K.G., De Zeeuw A.* The acid rain differential game // Environmental and Resource Economics. 1998. Vol. 12. P. 167–184.

4. *Parilina E.M., Zaccour G.* Payment schemes for sustaining cooperation in dynamic games // Journal of Economic Dynamics and Control. 2022. Vol. 139. Art. no. 104440.
5. *Sedakov A., Qiao H., Wang S.* A model of river pollution as a dynamic game with network externalities // European Journal of Operational Research. 2021. Vol. 290, no. 3. P. 1136–1153.
6. *Germain M. et al.* Transfers to sustain dynamic core-theoretic cooperation in international stock pollutant control // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. Vol. 28, no. 1. P. 79–99.
7. *Yeung D.W.K., Petrosyan L.A.* Subgame consistent economic optimization: An advanced cooperative dynamic game analysis. Springer Science & Business Media, 2011.

Уравнения Гамильтона–Якоби с дробными коинвариантными производными и измеримым по времени гамильтонианом

М. И. Гомоюнов

Екатеринбург, ИММ УрО РАН

e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

В работе изучаются (наследственные) уравнения Гамильтона–Якоби (ГЯ) с дробными коинвариантными (ci -) производными. Уравнения такого типа естественным образом возникают [1, 2] при исследовании задач оптимального управления и дифференциальных игр для динамических систем, движение которых описывается дифференциальными уравнениями с дробными производными Капуто (см., например, [3, 4]).

Построению теории минимаксных (обобщенных) решений [5] задач Коши для наследственных уравнений ГЯ с дробными ci -производными при краевом условии на правом конце посвящены статьи [6, 7, 8]. Одним из базовых предположений в указанных статьях является непрерывность гамильтониана уравнения по совокупности переменных. Цель настоящей работы состоит в развитии теории минимаксных решений задач Коши обсуждаемого

типа при более общих предположениях, когда требование непрерывности гамильтониана по временной переменной ослабляется до условия измеримости (по Лебегу).

Минимаксные решения уравнений ГЯ с частными производными и измеримым по времени гамильтонианом, удовлетворяющим условию положительной однородности, изучались в [9, глава 12]. Для более общего класса (наследственных) уравнений ГЯ с *сi*-производными (первого порядка) случай измеримого по времени гамильтониана охвачен в [10].

Основными результатами работы являются теорема о существовании и единственности минимаксного решения задачи Коши для уравнения ГЯ с дробными *сi*-производными при краевом условии на правом конце и теорема о непрерывной зависимости минимаксного решения от изменений гамильтониана и краевого функционала. В качестве приложения данных результатов доказывается теорема о существовании цены дифференциальной игры для динамической системы, движение которой описывается дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто, и показателя качества типа Больца в случае измеримых по временной переменной функций, стоящих в правой части уравнения движения и в показателе качества под знаком интеграла.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 25–11–00269, <https://rscf.ru/project/25-11-00269/>.

1. *Gomoyunov M.I.* Dynamic programming principle and Hamilton–Jacobi–Bellman equations for fractional-order systems // SIAM J. Control Optim. 2020. Vol. 58, no. 6. P. 3185–3211.
2. *Gomoyunov M.I.* Differential games for fractional-order systems: Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation and optimal feedback strategies // Mathematics. 2021. Vol. 9, no. 14. Art. no. 1667.
3. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
4. *Diethelm K.* The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. Berlin: Springer, 2010.
5. *Subbotin A.I.* Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective. Basel: Birkhäuser, 1995.

6. *Гомоюнов М.И.* Минимаксные решения однородных уравнений Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 4. С. 106–125.
7. *Gomoyunov M.I.* Minimax solutions of Hamilton–Jacobi equations with fractional coinvariant derivatives // ESAIM: Control Optim. Calc. Var. 2022. Vol. 28. Art. no. 23.
8. *Гомоюнов М.И.* О критериях минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 3. С. 25–42.
9. *Tran D.V., Mikio T., Nguyen D.T.S.* The characteristic method and its generalizations for first-order nonlinear partial differential equations. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000.
10. *Bandini E., Keller C.* Path-dependent Hamilton–Jacobi equations with u -dependence and time-measurable Hamiltonians // Appl. Math. Optim. 2025. Vol. 91, no. 2. Art. no. 34.

О численном вычислении меры невыпуклости α -множества

Д. Б. Давлетов

Уфа, Уфимский университет науки и технологий
e-mail: davletovdb@mail.ru

А. А. Ершов, В. Н. Ушаков

*Екатеринбург, Институт математики и механики имени
Н. Н. Красовского УрО РАН*
e-mail: ale10919@yandex.ru, ushak@imm.uran.ru

Впервые α -множества были введены в 2009 г. в работе [1] для классификации множеств достижимости по степени их невыпуклости. Они относятся к так называемым обобщенно выпуклым множествам.

Определение 1. Под *метрической проекцией* p^* точки z^* на множество M мы понимаем ближайшую к z^* точку из M . Множество всех метрических проекций точки z^* на множество M обозначим через $\Omega_M(z^*)$.

Отметим, что множество метрических проекций $\Omega_M(z^*)$ может быть несчётным для невыпуклого множества M или пустым для открытого множества M . Если $z^* \in M$, то $\Omega_M(z^*) = \{z^*\}$.

Определение 2 ([2]). Пусть A — замкнутое множество в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Обозначим через $H_A(z^*) = \text{co}(\text{co}\Omega_A(z^*) - z^*)$ конус, натянутый на множество $\text{co}\Omega_A(z^*) - z^* = \{z - z^* : z \in \text{co}\Omega_A(z^*)\}$. Определим функцию $\alpha_A(z^*) = \max_{h_*, h^* \in H_A(z^*)} \angle(h_*, h^*) \in [0, \pi]$. Полагаем $\alpha_A =$

$\sup_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$. Множество A назовем α -множеством с мерой невыпуклости $\alpha = \alpha_A$.

Поскольку множества достижимости управляемых систем могут вычисляться пиксельным методом, то представляет интерес вычисление их меры невыпуклости α по их конечноточечной аппроксимациям. Здесь мы будем рассматривать только плоские α -множества в пространстве $\mathbb{R}^2$.

При численном вычислении меры невыпуклости α необходимо учитывать следующее свойство: даже малое изменение границы может существенно повлиять на значение меры невыпуклости α для множества (см. рис. 1).

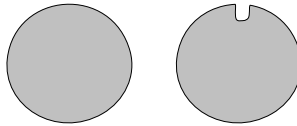


Рис. 1: Выпуклое 0-множество и максимально невыпуклое π -множество

Заметим, что если для произвольного замкнутого множества вместо величины $\alpha_M = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A} \alpha_A(z^*)$ рассмотреть величину $\alpha_M^{(R)} = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A_R} \alpha_A(z^*)$, где A_R — открытая R -окрестность

множества A , то окажется, что величина $\alpha_M^{(R)}$ вполне устойчива к малым возмущениям границы, а именно, выполняется следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть число $R > 0$, A и B — замкнутые множества в $\mathbb{R}^2$. Тогда $\alpha_A^{(R)} \rightarrow \alpha_B^{(R)}$ при $A \rightarrow B$ в хаусдорфовой метрике. А именно, если хаусдорфово расстояние $d(A, B) = \varepsilon$, то

$$|\alpha_B^{(R)} - \alpha_A^{(R)}| \leq 2 \arccos \left(1 - \frac{(2R^2 + 2R\varepsilon)}{(2r^2 + 2r\varepsilon)} \left(1 - \cos \frac{\alpha_A^{(R)}}{2} \right) \right) - \alpha_A^{(R)},$$

$$\text{где } r = \frac{(2R^2 + 2R\varepsilon) \left(1 - \cos \frac{\alpha_A^{(R)}}{2} \right)}{4\varepsilon + 2R \left(1 - \cos \frac{\alpha_A^{(R)}}{2} \right)}.$$

В то же время заметим, что любое слабо выпуклое по Виалю с постоянной R множество обладает так называемым чебышёвским слоем толщины R , для всех точек которого существует ровно одна метрическая проекция на это множество [3, теорема 1.7.1]. Иными словами, выполняется следующая лемма.

Лемма 2. Если $A \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое, слабо выпуклое по Виалю с постоянной R множество, то

$$\alpha_A = \alpha_A^{(R)}.$$

Таким образом, если известна оценка параметра R слабой выпуклости по Виалю множества достижимости (см., напр., [3, теорема 3.6.2]), то пиксельное (или конечноточечное) представление множества достижимости можно заменить любым многоугольником, близким к исходному множеству в хаусдорфовой метрике, а затем вычислить меру невыпуклости $\alpha_M^{(R)}$ для этого многоугольника M . Отметим, что вычисление величины $\alpha_M^{(R)}$ можно производить с помощью небольшой модификации ранее разработанной программы [4], созданной для вычисления меры невыпуклости α многоугольников на плоскости.

Заметим также, что суть алгоритма программы [4] заключается в том, что искомая величина $\alpha_M = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^2 \setminus M} \alpha_M(z^*)$ заменяется её аппроксимацией

$$\tilde{\alpha}_M = \max\{\alpha_M(z^*) : \rho(z^*, M) = \varepsilon \cdot k, k = \overline{1, N}\},$$

где $\rho(z^*, M) = \min_{x \in M} \|z^* - x\|$ — расстояние от точки z^* до замкнутого многоугольника M , $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, N — достаточно большое натуральное число такое, что величина εN также достаточно большая.

Необходимая модификация этого алгоритма заключается в том, чтобы вместо $\alpha_M^{(R)} = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A_R} \alpha_A(z^*)$ вычислять величину

$$\tilde{\alpha}_M^{(R)} = \max\{\alpha_M(z^*) : \rho(z^*, M) > R, \rho(z^*, M) = \varepsilon \cdot k, k = \overline{1, N}\}.$$

Из приведённых утверждений вместе с полунепрерывностью сверху функции $\alpha_A(z)$ по $z \in \mathbb{R}^2$ (см. [5, свойство 1.2]), а значит и функции $\alpha_A^{(R)}(z)$, следует сходимость рассматриваемой схемы приближённого вычисления меры невыпуклости слабо выпуклых α -множеств по их конечноточечным аппроксимациям.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00424, <https://rscf.ru/project/24-21-00424/>.

1. *Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н.* α -Множества и их свойства. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2004. Деп. в ВИНТИ 02.04.2004, № 543-B2004.
2. *Ушаков В.Н., Ершов А.А.* О соотношении между α -множествами и слабо выпуклыми множествами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 4. С. 276–285.
3. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. М.: Физматлит, 2006.
4. *Ершов А.А., Ушаков А.В.* Программный комплекс для вычисления степени невыпуклости множеств на плоскости в терминах альфа-множеств. Регистрационный номер: 622101900156-3. Дата регистрации 19 октября 2022 г.
5. *Ушаков В.Н., Успенский А.А.* Теоремы об отделимости α -множеств в евклидовом пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 277–291.

Асимптотические свойства систем синхронизации в форме Вольтерра

А. П. Елсаков, В. Б. Смирнова

Санкт-Петербург, СПбГАСУ

e-mail: elsakov982@inbox.ru, smirnova_vera_b@mail.ru

А. В. Проскурников

Санкт-Петербург, АО Навис

e-mail: avp1982@gmail.com

Доклад посвящен исследованию асимптотического поведения класса систем управления с многомерными периодически нелинейностями и счетным множеством положений равновесия. Такие системы часто называют системами синхронизации или маятниковыми системами. Под этот класс подпадают системы фазовой синхронизации и системы связи [1], вибрационные машины [2], электрические машины [3]. Глобальная асимптотическая устойчивость системы синхронизации определяется как сходимость любого ее решения к одной из точек равновесия. Если система синхронизации не является устойчивой, то на практике обычно желательно иметь гарантии отсутствия колебаний высокой частоты. В докладе рассматриваются системы интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра, что позволяет рассматривать системы управления с запаздыванием. Эффективным методом исследования асимптотики уравнений Вольтерра является метод априорных интегральных оценок В.М. Попова, ведущий к частотно-алгебраическим критериям, сформулированным в терминах передаточной матрицы линейной части системы. В докладе выводятся новые частотные критерии для устойчивости и отсутствия колебаний с частотой, превышающей заданную, обобщающие результаты [4].

Постановка задачи. Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений с многомерной фазовой переменной $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)^\top \in \mathbb{R}^l$

$$\dot{\sigma}(t) = \alpha(t) + R\varphi(\sigma(t-h)) - \int_0^t \gamma(t-\tau)\varphi(\sigma(\tau)) d\tau \in \mathbb{R}^l, \quad t > 0, \quad (1)$$

где $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_l(\sigma_l))^\top$, все нелинейности $\varphi_j \in C^1[0, +\infty)$ периодические $\varphi_j(\zeta) = \varphi_j(\zeta + \Delta_j)$ с периодами $\Delta_j > 0$. Матрица R , ядро свертки $\gamma(t)$ и параметр $h \geq 0$ известны, $\alpha(t)$ зависит от начальных данных. Предполагается, что функция α равномерно непрерывна, а функция γ — кусочно-непрерывна, при этом обе функции экспоненциально убывают $\|\alpha(t)\| + \|\gamma(t)\| \leq ce^{-rt}$ при некоторых $c, r > 0$. Помимо этого, функции φ_j имеют простые изолированные нули, и система (1) имеет положения равновесия.

Определение 1. Система (1) называется *глобально асимптотически устойчивой*, если любое ее решение сходится при $t \rightarrow \infty$ к одной из точек равновесия.

Определение 2. Решение $\sigma(t)$ системы (1) *периодическое*, если существует такое число $T > 0$ и такие целые числа I_j ($j = 1, \dots, l$), что

$$\sigma_j(t + T) = \sigma_j(t) + I_j \Delta_j \quad (j = 1, \dots, l), \quad \forall t > 0.$$

Число T называется периодом решения, а число $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — его частотой.

Цель этой работы — получить условия, гарантирующие глобальную асимптотическую устойчивость системы (1), а также условия, гарантирующие отсутствие у нее периодических решений высокой частоты.

Условия глобальной асимптотической устойчивости. Передаточная матрица линейной части системы имеет вид

$$K(p) = -Re^{-ph} + \int_0^\infty \gamma(t)e^{-pt} dt \quad (p \in \mathbb{C}).$$

Предполагаются известными нижняя и верхняя границы для производной φ'_j : $\mu_{1j} \leq \varphi'_j(\sigma_j) \leq \mu_{2j}$ для всех σ_j . Введем также функции

$$\Phi_j(\zeta) \triangleq \sqrt{(1 - \mu_{1j}^{-1} \varphi'(\zeta))(1 - \mu_{2j}^{-1} \varphi'(\zeta))},$$

$$\nu_j(\varkappa, \eta) \triangleq \frac{\int_0^{\Delta_j} \varphi_j(\zeta) d\zeta}{\int_0^{\Delta_j} |\varphi_j(\zeta)| \sqrt{\varkappa + \eta \Phi_j^2(\zeta)} d\zeta}.$$

Определим диагональные матрицы

$$M_k \triangleq \text{diag} \{ \mu_{k1}, \dots, \mu_{kl} \} \quad (k = 1, 2),$$

$$\nu(\varepsilon, \tau) \triangleq \text{diag} \{ \nu_1(\varepsilon_1, \tau_1), \dots, \nu_l(\varepsilon_l, \tau_l) \},$$

где $\varepsilon = \text{diag} \{ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l \}$ $\tau = \text{diag} \{ \tau_1, \dots, \tau_l \}$.

Теорема 1. Пусть существуют матрицы M_k ($k = 1, 2$), матрица $\xi = \text{diag} \{ \xi_1, \dots, \xi_l \}$, где $|\xi_j| = 1$, и положительно определенные матрицы $\varepsilon = \text{diag} \{ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l \}$, $\tau = \text{diag} \{ \tau_1, \dots, \tau_l \}$ такие, что для всех $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \text{Re} \{ \xi K(i\omega) - K^*(i\omega) \varepsilon K(i\omega) - \\ & - (K(i\omega) + i\omega M_1^{-1})^* \tau (K(i\omega) + i\omega M_2^{-1}) \} > \frac{1}{4} \nu^2(\varepsilon, \tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда справедливы соотношения: $\dot{\sigma}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$; $\varphi_j(\zeta) \in L_2[0, +\infty)$; $\sigma_j(t) \rightarrow q_j$, где $\varphi_j(q_j) = 0$ ($j = 1, \dots, l$).

Замечание. Неравенство (2) понимается в смысле квадратичных форм; $\text{Re } H \doteq (H + H^*)/2$ для произвольной квадратной матрицы H .

Условия отсутствия колебаний с частотой, превышающей заданную. Частотное неравенство (2) не только обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость системы (1), но так же может быть использовано для гарантии отсутствия колебаний на определенном полубесконечном интервале.

Теорема 2. Пусть существуют матрицы M_k ($k = 1, 2$), матрица $\xi = \text{diag} \{ \xi_1, \dots, \xi_l \}$, где $|\xi_j| = 1$, положительно определенные матрицы $\varepsilon = \text{diag} \{ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l \}$, $\tau = \text{diag} \{ \tau_1, \dots, \tau_l \}$ и положительное число ω_0 , такие, что неравенство (2) выполнено при $\omega = 0$ и при $\omega \geq \omega_0$. Тогда система (1) не имеет периодических решений с частотой $\omega \geq \omega_0$.

Пример. Рассмотрим систему фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) с интегрирующим фильтром (ИФ): $K(p) = (Tp + 1)^{-1}(Te^{-ph})$, $\varphi(\sigma) = \sin(\sigma) - \beta$ ($\beta \in (0, 1)$). На рис. 1 для системы

ФАПЧ с ИФ при $h = 0.1T$, приведена оценка области устойчивости, полученная с помощью Теоремы 1. На рис. 2 для случая $h = 0$ приведены оценки областей отсутствия колебаний с частотой, превышающей ω_0 , вычисленные с помощью Теоремы 2. Все области лежат ниже своих границ.

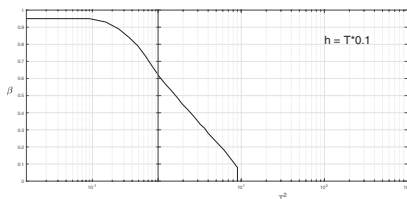


Рис. 1

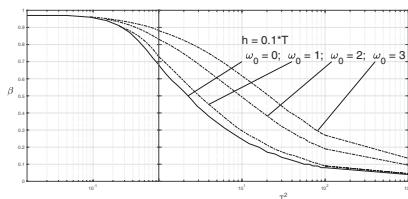


Рис. 2

1. *Lindsey W.S.* Synchronization Systems in Communication and Control. New Jersey: Prentice-Holl, 1972.
2. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
3. *Леонов Г.А., Кондратьева Н.В.* Анализ устойчивости электрических машин переменного тока. Санкт-Петербург: Изд. Санкт-Петербургского университета, 2008.
4. *Smirnova V.B., Proskurnikov A.V.* Volterra Equations with Periodic Nonlinearities: Multistability, Oscillations and Cycle Slipping // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2019. Vol. 29, no. 5. P. 1950068.

Совместная оптимизация межпланетной низкоэнергетической траектории и основных параметров космического аппарата с малой тягой

А. В. Иванюхин

Москва, Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики Московского авиационного института,

Российский Университет Дружбы Народов им. Патриса Лумумбы

e-mail: ivanyukhin.a@yandex.ru

В работе рассматривается задача совместной оптимизации низкоэнергетических межпланетных траекторий перелёта космического аппарата с двигателем малой тяги и основных проектных параметров энерго-двигательной установки.

Современные межпланетные космические миссии для повышения эффективности требуют разработки новых схем перелёта космических аппаратов (КА), в том числе, использующих эффекты задач трёх и четырёх тел [1–5] и электроракетные двигательные установки (ЭРДУ) малой тяги с большим удельным импульсом.

Предлагается метод формирования низкоэнергетической траектории за счёт использования пролёта грависферы планеты по транзитным траекториям в окрестности коллинеарных точек либрации системы Солнце-планета, порождённым их инвариантными многообразиями. Рассматривается оптимизация траектории перелета КА с малой тягой с начальной околоземной орбиты на транзитную траекторию, позволяющую покинуть окрестность Земли, выйти на гелиоцентрическую траекторию и совершить перелёт к целевому объекту. В данной работе рассматриваются перелёты к околоземным астероидам. Помимо определения управления на траектории перелёта, проводится оптимизация параметров работы двигательной установки. Особенностью такого подхода является необходимость определения оптимальных дат прохождения точек либрации, поскольку инвариантные много-

образия полностью определяются этим моментом времени. При этом участок движения по инвариантному многообразию для пролёта точки либрации задаётся тремя параметрами: датой пролёта точки либрации, моментом выхода и схода с многообразия. Рассматриваемая постановка приводит к задаче оптимального управления с промежуточными ограничениями на траекторию перелёта, отвечающими движению по инвариантным многообразиям точек либрации.

Движение КА рассматривается в рамках возмущённой модели 4-х тел

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \Omega_r + \frac{T}{m}\delta e, \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c}\delta,$$

с известной начальной массой

$$m(t_0) = m_0,$$

и краевыми условиями, определяющими параметры орбиты у планеты отправления и планеты назначения

$$g_0(r(t_0), v(t_0)) = 0, \quad g_k(r(t_k), v(t_k)) = 0,$$

при этом траектория перелёта проходит через инвариантные многообразия, которые задают промежуточные ограничения на траекторию и определяются параметрами движения КА в момент пролёта точки либрации

$$g_L(r(t_L), v(t_L)) = 0.$$

Целью управления является максимизация полезной массы массы КА

$$m_u = m(t_k) - \gamma P - a_t(m_0 - m(t_k)) \rightarrow \max,$$

управлением является величина и направление тяги

$$(e, \delta) \in U = \{R^3 \times R, |e| = 1, \delta \in [0; 1]\}.$$

Также подлежат определению в процессе оптимизации моменты времени начала t_0 и окончания t_k перелёта, даты пролёта точек либрации t_L , тяга и скорость истечения двигателя КА T и c . Выше использованы следующие обозначения: r, v, m — положение,

скорость и масса КА; Ω — гравитационный потенциал; δ — функция тяги; e — единичный вектор в направлении вектора тяги.

Решение задачи оптимального управления строится на основе принципа максимума Понтрягина. Получен полный набор необходимых условий оптимальности. Для эффективного решения краевой задачи принципа максимума Понтрягина произведено разделение вычислительной схемы на два уровня, по оптимизируемым параметрам схемы перелёта: на оптимизацию моментов времени t_0, t_k, t_{L1}, t_{L2} и на определение оптимального управления вектором тяги КА и параметров двигательной установки. Для получения оптимальной траектории перелёта при заданных моментах времени краевая задача решается с помощью метода продолжения по параметру [6, 7]. Для оптимизации дат начала и окончания перелёта, а также дат пролёта точек либрации, используется прямой метод оптимизации градиентного типа, с последующей проверкой условий трансверсальности. Подобное разделение вызвано качественной перестройкой в задаче 4-х тел транзитных траекторий у точек либрации в зависимости от даты, в связи с чем оптимизация этих параметров требует предварительного анализа поведения многообразий в рамках возмущённой модели [4].

Описанная методика была апробирована на примерах расчета низкоэнергетических траекторий перелета к астероидам земной группы, в частности, астероиду Апофис (99942, Apophis).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10206, <https://rscf.ru/project/22-79-10206/>.

1. Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М.: Наука. 1982.
2. Conley C. Low energy transit orbits in the restricted three-body problems // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1968. Vol. 16, no. 4. P. 732–746.
3. Иванюхин А.В., Петухов В.Г. Низкоэнергетические квазиоптимальные траектории с малой тягой к точкам либрации и галло-орбитам // Космические исследования. 2020. Т. 58, № 2. С. 165–176.
4. Иванюхин А.В., Ивашкин В.В., Петухов В.Г., Юн Сон Ук. Проектирование низкоэнергетических перелетов к Луне с малой тягой на траектории временного захвата // Космические исследования. 2023. Т. 61, № 5. С. 368–381.

5. *Sung Wook Yoon, Petukhov V.G., Ivanyukhin A.V.* An approach for end-to-end optimization of low-thrust interplanetary trajectories using collinear libration points // *Acta Astronautica*. 2024. Vol. 221. P. 12–25.
6. *Иванюхин А.В.* Область существования решений в задаче оптимального управления космическим аппаратом с ограниченной тягой // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2016. Т. 62. С. 100–123.
7. *Петухов В.Г., Иванюхин А.В., Вук В.С.* Совместная оптимизация управления и основных траекторных и проектных параметров межпланетного космического аппарата с электроракетной двигательной установкой // *Космические исследования*. 2019. Т. 57, № 3. С. 212–228.

Об одной дискретной игровой задаче преследования-удержания с невыпуклыми вектограммами управлений

И. В. Измestьев, А. М. Баринoв

Челябинск, Челябинский государственный университет

e-mail: j748e8@gmail.com, barinovalexmih@mail.ru

1. Постановка задачи. В докладе рассматривается дискретная игровая задача с заданным количеством шагов $N \geq 1$ и уравнением движения

$$z(i+1) = z(i) - u(i) + b(i)v(i), \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$, $0 \leq a_1(i) \leq a_2(i)$, $b(i) \geq 0$, $u(i) \in S(a_1(i), a_2(i))$, $v(i) \in S$, $i = \overline{0, N-1}$. Здесь за $u(i)$ и $v(i)$ обозначены выбранные на i -м шаге управления первого и второго игрока, соответственно;

$$S = \{s \in \mathbb{R}^n : \|s\| \leq 1\}, \quad S(\delta_1, \delta_2) = \{s \in \mathbb{R}^n : \delta_1 \leq \|s\| \leq \delta_2\}$$

при $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2$.

Правило перехода от $z(i)$ к $z(i+1)$, $i = \overline{0, N-1}$. В момент времени i , зная значение $z(i)$, второй игрок выбирает управление

$v(i) \in S$ и сообщает о своем выборе первому игроку. После этого первый игрок, зная $z(i)$ и выбранное управление второго игрока $v(i)$, выбирает управление $u(i) \in S(a_1(i), a_2(i))$. Затем для выбранной пары управлений по формуле (1) реализуется $z(i+1)$.

Пусть заданы числа $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$. Цель первого игрока заключается в осуществлении неравенств

$$\|z(N)\| \leq \varepsilon_2, \quad \|z(i)\| \geq \varepsilon_1 \quad \text{при} \quad i = \overline{0, N}. \quad (2)$$

Цель второго игрока противоположна.

2. Вспомогательные результаты. Обозначим за $A + B$ сумму Минковского множеств A и B :

$$A + B = \{z = a + b \in \mathbb{R}^n : a \in A, b \in B\},$$

а за $A \dot{-} B$ — геометрическую разность этих множеств:

$$A \dot{-} B = \{z \in \mathbb{R}^n : z + B \subset A\}.$$

Лемма 1 (см. [1]). Для любых чисел $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2$ и $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ выполнено равенство

$$S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + S(\delta_1, \delta_2) = S(F(\delta_1, \delta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \delta_2 + \varepsilon_2),$$

если $S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset \mathbb{R}^n$, $S(\delta_1, \delta_2) \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$.

Здесь обозначено

$$F(\delta_1, \delta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{cases} \max(0; \delta_1 - \varepsilon_2) & \text{при } \delta_1 > \varepsilon_1, \\ \max(0; \varepsilon_1 - \delta_2) & \text{при } \delta_1 \leq \varepsilon_1. \end{cases}$$

Лемма 2 (см. [2]). Для любых чисел $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ и $\delta \geq 0$ выполнено равенство

$$S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \dot{-} \delta S = \begin{cases} S(f(\varepsilon_1, \delta), \varepsilon_2 - \delta) & \text{при } f(\varepsilon_1, \delta) + \delta \leq \varepsilon_2, \\ \emptyset & \text{при } f(\varepsilon_1, \delta) + \delta > \varepsilon_2, \end{cases}$$

где $f(0, \delta) = 0$ при любом $\delta \geq 0$; $f(\sigma, \delta) = \sigma + \delta$ при любых $\sigma > 0$ и $\delta \geq 0$; $\emptyset$ — пустое множество.

3. Основной результат. На основании лемм 1 и 2 были построены множества $W(i) \subset \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0, N-1}$, определяющие необходимые и достаточные условия, при выполнении которых первый игрок может гарантировать неравенства (2).

Теорема. Пусть $W(N) = S(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. При $i = \overline{0, N-1}$ множество $W(i)$ определяется следующим образом:

$$W(i) = \begin{cases} S(f_1(i), f_2(i)), & \text{если } \min_{k=\overline{i, N}} (f_2(k) - f_1(k)) \geq 0, \\ \emptyset & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь $f_1(N) = \varepsilon_1$ и при $i = \overline{0, N-1}$

$$f_1(i) = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{при } F(f_1(i+1), f_2(i+1), a_1(i), a_2(i)) \leq \max(\varepsilon_1 - b(i), 0), \\ F(f_1(i+1), f_2(i+1), a_1(i), a_2(i)) + b(i) & \text{иначе;} \end{cases}$$

$f_2(N) = \varepsilon_2$ и $f_2(i) = f_2(i+1) + a_2(i) - b(i)$ при $i = \overline{0, N-1}$.

На основании этой теоремы для рассматриваемой задачи были построены соответствующие гарантирующие управления игроков.

1. Измestъев И.В., Ухоботов В.И. Об одной дискретной игровой задаче с невыпуклыми вектограммами управлений // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. Т. 58. С. 48–58.
2. Ухоботов В.И. Однотипная дифференциальная игра с терминальным множеством в форме кольца // Некоторые задачи динамики и управления: сб. науч. трудов. Челябинск. Челябинский государственный университет, 2005. С. 108–123.

Управление продольными колебаниями упругого стержня с помощью пьезоэлектрического актюатора

Г. В. Костин

Москва, ИПМех РАН

e-mail: kostin@ipmnet.ru

Актуальной областью теории управления представляется исследование вопросов управляемости динамических систем с распределенными параметрами. Нахождение допустимого воздействия, при котором такая система приводится в заданное состояние, дает ответ о ее предельных возможностях и указывает направления для оптимизации движений. В этой работе исследуется управляемость системы, описываемой волновым уравнением со скалярным входом. Система моделирует продольные колебания консольно закрепленного однородного упругого стержня с размещенным вдоль его длины пьезоэлектрическим элементом [1, 2]. Показаны необходимые условия гашения колебаний стержня. Дана обобщенная формулировка задачи управления. Доказано, что условия управляемости являются достаточными, если отношения координат начала и конца пьезоэлемента к длине стержня — рациональные числа.

Ставится задача перевода стержня с помощью управляющей силы из произвольного начального состояния в нулевое за ограниченное время. Сформулируем в безразмерном виде задачу управления согласно методу интегродифференциальных соотношений [3]:

для начальных распределений $r_0, w_0 \in H^1(\mathcal{X})$, $\mathcal{X} = (0, 1)$, найти управление $u \in H^1(\mathcal{T})$, где $\mathcal{T} = (0, T)$, при котором обобщенное движение $r^*, w^* \in H^1(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} = \mathcal{T} \times \mathcal{X}$, удовлетворяет терминальному условию $r^*(T, x) = w^*(T, x) = 0$. Под обобщенным движением при выбранном управлении u понимается пара функций r^*, w^* , минимизирующая функционал состояния Φ при выполнении

начальных и краевых условий:

$$\begin{aligned}
\Phi[r^*, w^*, u] &= \min_{r, w \in H^1(\mathcal{D})} \Phi[r, w, u] = 0, \quad \Phi = \int_{\mathcal{D}} \varphi \, dt dx \geq 0, \\
\varphi &= g^2 + h^2, \quad g = \partial_x r - \partial_t w, \quad h = \partial_t r - \partial_x w - f; \\
f(t, x) &= \begin{cases} \dot{u}(t), & x \in \mathcal{U}, \\ 0, & x \notin \mathcal{U}, \end{cases} \quad t \in \mathcal{T}, \quad u(0) = 0; \\
r(0, x) &= r_0(x), \quad w(0, x) = w_0(x), \quad x \in \mathcal{X}; \\
r(t, 1) &= w(t, 0) = 0, \quad t \in \mathcal{T}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $r(t, x)$ — динамический потенциал, $w(t, x)$ — перемещения точек стержня, $f(t, x)$ — нормальная пьезоэлектрическая сила в поперечном сечении, $\mathcal{U} = (x^-, x^+) \subset \mathcal{X}$ — интервал, на котором расположен пьезоэлемент, T — время управления, ∂_t — частная производная по времени t , ∂_x — производная по пространственной координате x . Частные производные потенциала r представляют собой полную нормальную силу в поперечном сечении ($\partial_t r$) и линейную плотность импульса ($\partial_x r$).

Решение прямой задачи динамики (1) при заданном управлении $u(t)$ ищется в виде ряда:

$$\begin{aligned}
r(t, x) &= \sum_{m \in \mathbb{N}} R_m(x) r_m(t), \quad w(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} W_m(x) w_m(t). \\
R_n &= -2\omega_n^{-1} \cos \omega_n x, \quad W_n = 2\omega_n^{-1} \sin \omega_n x, \quad \omega_n = n\pi - \pi/2, \\
\dot{r}_n(t) &= -\omega_n w_n(t) + \omega_n^{-1} c_n \dot{u}(t), \quad \dot{w}_n(t) = \omega_n r_n(t), \\
r_n(0) &= r_n^0, \quad w_n(0) = w_n^0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad c_n = W_n(x^-) - W_n(x^+).
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь R_n, W_n — собственные функции колебаний стержня, относящиеся к собственной частоте ω_n ; r_n^0, w_n^0 — проекции начальных распределений r_0, w_0 соответственно на собственные функции R_n, W_n ; r_n, w_n — амплитуды потенциала и перемещений для n -й моды; c_n — коэффициент усиления при управлении этой модой.

Для геометрических параметров пьезоэлемента $x^\pm$ существуют следующие условия, при которых n -я мода становится

неуправляемой:

$$\frac{x^+ + x^-}{2} = \frac{2m - 1}{2n - 1} < 1 \quad \vee \quad x^+ - x^- = \frac{2m}{2n - 1} \leq 1, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

В случае, когда ни одно из условий (3) ни для каких чисел $m, n \in \mathbb{N}$ не реализуется, допустимое управление, приводящее за время $T \geq T^* = 2$ систему (2) из произвольного начального в нулевое состояние, записывается в явном виде как

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, \tau), \\ u^*(t - \tau), & t \in (\tau, T), \end{cases} \quad (4)$$

$$u^*(t) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^{-1} (r_n^\tau \sin \omega_n t + w_n^\tau (\cos \omega_n t - 1)),$$

$$t \in \mathcal{T}^* = (0, T^*).$$

Здесь r_n^τ, w_n^τ — проекции функций состояния $r^*(\tau, \cdot), w^*(\tau, \cdot)$ на собственные функции R_n, W_n .

Из вида коэффициентов c_n , определенных в (2), можно показать, что, когда оба параметра пьезоэлемента x^+ и x^- — рациональные числа, c_n принимает конечное число различающихся значений. В этом случае, если ни одно из этих величин c_n не обращается в ноль, управление u^* из (4) принадлежит тому же классу, что и функции $r^*(\tau, \cdot), w^*(\tau, \cdot)$ (и в свою очередь, тому же, что и начальные распределения r_0, w_0). Иными словами, $u^* \in H^1(\mathcal{T}^*) \Rightarrow u \in H^1(\mathcal{T})$.

После подстановки управления $u(t)$ из (4) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определенных с начальными условиями в (2), можно проинтегрировать эту систему.

Так, при $T = T^*$ получаем:

$$\begin{aligned}
r^*(t, x) &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} R_n(x) (r_n^0 r_{mn}^a(t) + w_n^0 r_{mn}^b(t)), \\
w^*(t, x) &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} W_n(x) (r_n^0 w_{mn}^a(t) + w_n^0 w_{mn}^b(t)), \\
r_{mn}^a(t) &= \begin{cases} c_m c_n^{-1} \nu_{mn} (\omega_m \sin \omega_m t - \omega_n \sin \omega_n t), & m \neq n, \\ \cos \omega_n t + \frac{1}{2} \omega_n^{-1} (\omega_n t \cos \omega_n t + \sin \omega_n t), & m = n, \end{cases} \\
w_{mn}^a(t) &= \begin{cases} c_m c_n^{-1} \nu_{mn} \omega_n (\cos \omega_n t - \cos \omega_m t), & m \neq n, \\ \sin \omega_n t + \frac{1}{2} t \sin \omega_n t, & m = n. \end{cases} \\
r_{mn}^b(t) &= \begin{cases} c_m c_n^{-1} \nu_{mn} \omega_n (\cos \omega_m t - \cos \omega_n t), & m \neq n, \\ \sin \omega_n t - \frac{1}{2} t \sin \omega_n t, & m = n, \end{cases} \\
w_{mn}^b(t) &= \begin{cases} c_m c_n^{-1} \nu_{mn} (\omega_m \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega_m t), & m \neq n, \\ \cos \omega_n t + \frac{1}{2} \omega_n^{-1} (\omega_n t \cos \omega_n t - \sin \omega_n t), & m = n, \end{cases}
\end{aligned}$$

где $\nu_{mn} = (\omega_m^2 - \omega_n^2)^{-1}$.

Исследование выполнено по теме государственного задания (госрегистрация №124012500443-0).

1. *Костин Г.В.* Оптимальные движения упругого стержня, управляемого пьезоэлектрическим актюатором // Известия РАН. Теория и системы управления. 2024. № 3. С. 104–116.
2. *Костин Г.В.* Гашение продольных колебаний упругого стержня с помощью пьезоэлектрического элемента // Прикладная математика и механика. 2024. Т. 88, № 4. С. 525–539.
3. *Kostin G.V., Saurin V.V.* Dynamics of Solid Structures: Methods Using Integrodifferential Relations. Berlin: De Gruyter, 2018.

О полиэдральном методе решения задачи терминального уклонения в многошаговых системах с билинейностью

Е. К. Костоусова

Екатеринбург, ИММ УрО РАН

e-mail: kek@imm.uran.ru

Рассматривается одна из задач конфликтного управления типа терминального сближения/уклонения для многошаговых систем с исходно линейной структурой, где действуют управления u , U и v , цели которых могут быть различными, причем u и v входят аддитивно, а U — в матрицу системы. Задачи такого рода могут быть решены с помощью трубок разрешимости [1, 2], но практическое построение последних, как правило, затруднительно. Наличие U привносит в системы нелинейность и приводит к системам с билинейной динамикой, усложняя задачу [3, 4]. Среди многих численных методов полезны и не слишком трудоемкие, основанные на оценивании множеств областями простой формы типа эллипсоидов и параллелепипедов/параллелотопов (см., например, [2, 3, 4] и [5, 6, 7] соответственно). Работа относится ко второму из этих направлений.

Рассматривается многошаговая управляемая система

$$\begin{aligned}x[k] &= (A[k] + U[k])x[k-1] + B[k]u[k] + C[k]v[k], k = \overline{1, N}; \\u[k] &\in \mathcal{R}[k] = \mathcal{P}[r[k], \bar{R}[k]], v[k] \in \mathcal{Q}[k] = \mathcal{P}[q[k], \bar{Q}[k]], \\U[k] &\in \mathcal{U}[k] = \{U \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{Abs}(U - \tilde{U}[k]) \leq \hat{U}[k]\}, k = \overline{1, N},\end{aligned}\quad (1)$$

где $x[k] \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы; управления $u[k] \in \mathbb{R}^{n_u}$ и $v[k] \in \mathbb{R}^{n_v}$ стеснены параллелотопозначными ограничениями, а $U[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — ограничениями интервального типа. Задано терминальное параллелотопозначное множество $\mathcal{M} = \mathcal{P}[p_f, \bar{P}_f]$. Напомним, что параллелотопом $\mathcal{P}[p, \bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$ называют множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}] = \{x \mid x = p + \bar{P}\zeta, \|\zeta\|_\infty \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$, $\bar{P} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $m \leq n$ (p определяет центр параллелотопа, $\bar{P}$ — форму); Параллелотоп $\mathcal{P}$ называем невырожденным, если $m = n$ и $\det \bar{P} \neq 0$. Управления u , U и v могут иметь разные цели. Так, цель u и U

может состоять в том, чтобы обеспечить включение $x[N] \in \mathcal{M}$ (задачи сближения такого рода исследовались в [5], [6]), а цель v может состоять, наоборот, в том, чтобы избежать попадания траектории на $\mathcal{M}$ (задача уклонения такого рода при отсутствии U исследовалась в [7]).

В работе рассматривается следующая *полиэдральная задача терминального уклонения*. Для системы (1) найти такие полиэдральную трубку $\mathcal{P}[k] = \mathcal{P}[p[k], \bar{P}[k]]$, $k = 0, 1, \dots, N$, с терминальным условием $\mathcal{P}[N] \supseteq \mathcal{M}$ и соответствующую стратегию управления $v = v[k, x]$, удовлетворяющую $v[k, x] \in \mathcal{Q}[k]$, $k = 1, \dots, N$, чтобы каждое решение $x[\cdot]$ уравнения $x[k] = (A[k] + U[k])x[k-1] + B[k]u[k] + C[k]v[k, x[k-1]]$, $k = 1, \dots, N$, с $x[0] = x^0 \notin \mathcal{P}[0]$ проходило вне трубки $\mathcal{P}[\cdot]$: $x[k] \notin \mathcal{P}[k]$, $k = 1, \dots, N$, каковы бы ни были допустимые (т.е. удовлетворяющие ограничениям из (1)) реализации $u[\cdot]$ и $U[\cdot]$. Более того, ввести семейство таких трубок $\mathcal{P}[\cdot]$.

Дадим одно из возможных решений этой задачи. Введем семейство полиэдральных трубок $\mathcal{P}[\cdot] = \mathcal{P}[p[\cdot], \bar{P}[\cdot]]$, определяемых следующими рекуррентными соотношениями, где P_f — произвольная неособая матрица:

$$\begin{aligned} p[N] &= p_f, \quad \bar{P}[N] = P_f \text{diag}((\text{Abs}(P_f^{-1}\bar{P}_f))e); \\ p[k-1] &= D[k]^{-1}(p[k] - B[k]r[k] - C[k]q[k]), \quad D[k] = A[k] + \tilde{U}[k], \\ \bar{P}[k-1] &= D[k]^{-1}\bar{P}[k] \text{diag}((1 + \beta^*[k])e + \alpha[k] - \gamma[k]), \\ \alpha[k] &= (\text{Abs}(\bar{P}[k]^{-1}B[k]\bar{R}[k]))e, \\ \gamma[k] &= (\text{Abs}(\bar{P}[k]^{-1}C[k]\bar{Q}[k]))e, \\ \beta^*[k] &= C_3[k]/(1 - C_2[k]), \\ C_1[k] &= \|(\text{Abs}(\bar{P}[k]^{-1})) \cdot \hat{U}[k]\|_\infty, \\ C_2[k] &= \|(\text{Abs}(\bar{P}[k]^{-1})) \cdot \hat{U}[k] \cdot \text{Abs}(D[k]^{-1}\bar{P}[k])\|_\infty, \\ C_3[k] &= C_1[k] \cdot \|p[k-1]\|_\infty + C_2[k] \cdot \|e + \alpha[k] - \gamma[k]\|_\infty, \quad k = \overline{N, 1}, \end{aligned} \tag{2}$$

и соответствующую стратегию управления $v = v[k, x]$ вида

$$\begin{aligned} v[k, x] &= q[k] + \bar{Q}[k]\chi[k, x], \\ \chi_j[k, x] &= \text{sign}(\bar{P}[k]^{-1}C[k]\bar{Q}[k])_{i_*[k]j} \times \\ &\times \text{sign}(\bar{P}[k-1]^{-1}(x - p[k-1]))_{i_*[k]}, \quad j = \overline{1, n_v}, \\ i_*[k] &= i_*[k, x] \in \text{Argmax}_{1 \leq i \leq n} |(\bar{P}[k-1]^{-1}(x - p[k-1]))_i|. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь использованы обозначения: $\text{Abs } A = \{|a_{ij}|\}$ для $A = \{a_{ij}\}$, $\text{diag } \pi$ — диагональная матрица с компонентами вектора π на диагонали, символы e обозначают векторы вида $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$ соответствующих размерностей; индекс $i_*[k]$ определен, вообще говоря, не единственным образом.

Теорема. Пусть в системе (1) все матрицы $D[k] = A[k] + \tilde{U}[k]$ — неособые ($\det D[k] \neq 0$) и $\mathcal{M}$ — невырожденный параллелотоп. Пусть P_f — произвольная неособая матрица и в процессе вычисления $\mathcal{P}[\cdot]$ в соответствии с соотношениями (2) при всех $k = \overline{N, 1}$ оказываются выполненными условия:

$$\delta[k] \stackrel{\text{def}}{=} (1 + C_1 \|p[k-1]\|_\infty) e + \alpha[k] - \gamma[k] > 0, \quad C_2[k] < 1.$$

Тогда все параллелотопы $\mathcal{P}[k] = \mathcal{P}[p[k], \bar{P}[k]]$ оказываются невырожденными, а трубка $\mathcal{P}[\cdot]$ вместе с любой стратегией управления $v[\cdot, \cdot]$ вида (3) дают решение рассматриваемой задачи. При этом, если $x[\cdot]$ — траектория, соответствующая $x[0] \notin \mathcal{P}[0]$, управлению $v[\cdot, \cdot]$ из (3) и некоторым (произвольным) допустимым $u[\cdot]$ и $U[\cdot]$, то справедливы следующие гарантированные оценки снизу для отклонения $x[\cdot]$ от трубки $\mathcal{P}[\cdot]$, записанные в терминах относительных координат $\zeta[k] = \bar{P}[k]^{-1}(x[k] - p[k])$:

$$\begin{aligned} \|\zeta[k]\|_\infty - 1 &\geq (\|\zeta^+[0]\|_\infty - 1) \prod_{l=1}^k \delta_{i_*[l]} \geq \\ &\geq (\|\zeta[0]\|_\infty - 1) \prod_{l=1}^k \min_{1 \leq i \leq n} \delta_i[l], \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Для лучшего понимания этих оценок напомним, что в случае невырожденных параллелотопов $\mathcal{P}[k] = \mathcal{P}[p[k], \bar{P}[k]]$ относительные координаты $\zeta[k] = \bar{P}[k]^{-1}(x[k] - p[k])$ обладают тем свойством, что условие $x[k] \notin \mathcal{P}[k]$ обеспечивается тогда и только тогда, когда $\|\zeta[k]\|_\infty > 1$.

Заметим также, что условия теоремы не представляются экзотическими при рассмотрении многошаговых систем, аппроксимирующих дифференциальные по схеме Эйлера [6, (4.13)], поскольку в этом случае получаем $D[k] = I + O(h_N)$, а величины $\alpha[k]$, $\gamma[k]$, $C_1[k]$, $C_2[k]$, $C_3[k]$ оказываются порядка $O(h_N)$, где h_N — шаг дискретизации, $O(h_N) \rightarrow 0$ при $h_N \rightarrow 0$.

1. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical control problems. New York: Springer, 1988.
2. *Kurzhanski A.B., Vályi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997.
3. *Chernousko F.L., Rokityanskii D.Ya.* Ellipsoidal bounds on reachable sets of dynamical systems with matrices subjected to uncertain perturbations // Journal of Optimization Theory and Applications. 2000. Vol. 104, iss. 1. P. 1–19.
4. *Ананьев Б.И., Гусев М.И., Филиппова Т.Ф.* Управление и оценивание состояний динамических систем с неопределенностью. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2018.
5. *Koustousova E.K.* On target control synthesis under set-membership uncertainties using polyhedral techniques // IFIP Advances in Information and Communication Technology. 2014. Vol. 443. P. 170–180.
6. *Koustousova E.K.* On the polyhedral method of solving problems of control strategy synthesis // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2016. Vol. 292, suppl. 1. P. S140–S155.
7. *Koustousova E.K.* On solving terminal approach and evasion problems for linear discrete-time systems under state constraints // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. 2024. Vol. 34, iss. 2. P. 204–221.

***H*-управляемость систем с запаздыванием дескрипторным динамическим регулятором**

В. В. Крахотко, Г. П. Размыслович

Минск, Белгосуниверситет

e-mail: Krakhotko@bsu.by, razmysl@bsu.by

В теории оптимального управления одной из важнейших проблем является проблема управляемости динамических систем, причём управление, как правило, выбираются из различных классов функций: кусочно-непрерывных, кусочно-постоянных, релейных и т.д.

Особый интерес представляют управления, которые генерируются с помощью дифференциальных регуляторов [1], так как такие управления легко практически реализуются.

В докладе рассматривается задача H -управляемой линейной системы с запаздыванием по состоянию с помощью дифференциально-алгебраического (дескрипторного) регулятора.

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с начальным условием

$$x_0(\cdot) = \{x(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0), x(0) = x_0\}, \quad (2)$$

где $x, x_0 \in R^n$, $u \in R^r$, A, A_1, B — постоянные матрицы соответствующих размеров, $h > 0$ — постоянное число (запаздывание), $\varphi(t)$, $t \in [-h, 0)$ — кусочно-непрерывная функция.

Пусть H — некоторая заданная $n \times n$ -матрица.

Определение 1. Система (1) называется H -управляемой, если для любого начального состояния (2) существуют момент времени $t_1 < +\infty$ и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, такие, что траектория $x(t)$, $t \in [0, t_1]$, системы (1) обладает свойством $Hx(t_1) = 0$.

Известно [2], что система (1) H -управляема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank}\{HX_k(t), k = \overline{1, n}; t = \overline{0, (n-1)h}\} = \text{rank } H, \quad (3)$$

где $X_k(t)$ — решение определяющего уравнения

$$X_{k+1}(t) = AX_k(t) + A_1X_k(t-h) + BU_k(t)$$

с начальными условиями

$$X_k(t) \equiv 0, k \leq 0 \vee t < 0; U_0(0) = E_r, U_k(t) \equiv 0, k \neq 0 \vee t \neq 0.$$

Пусть теперь управление $u(t)$ вида

$$u(t) = Cy(t), t > 0, \quad (4)$$

строится по выходу дескрипторного регулятора

$$D_0 \dot{y} = Dy, y(0) = y_0, \quad (5)$$

где $y, y_0 \in R^n$; C — $r \times n$ -постоянная матрица, а D_0 и D — $n \times n$ -постоянные матрицы, причём $\det D_0 = 0$. Предположим, что система (5) является регулярной [3], и матрица H определена равенством

$$H = D_0 D_0^d,$$

где D_0^d — обратная матрица Дразина для матрицы D_0 . Введем в рассмотрение множество

$$\Omega = \{q: q \in R^n, q = Hp, p \in R^n\}.$$

Определение 2. Систему (1) назовём *H-управляемой дескрипторным динамическим регулятором* (5), если существует момент времени $t_1 < +\infty$ такой, что для любого начального состояния (2) найдется начальное состояние $y_0 \in \Omega$ регулятора (5), при котором решение системы (1), соответствующие управлению (4), удовлетворяет условию $Hx(t_1) = 0$.

Запишем решение системы (1) в момент времени $t = t_1$ с учётом (4), (5), и для простоты положим $\varphi(t) \equiv 0, t \in [-h; 0]$. Тогда получим

$$Hx(t_1) - HF(t_1, 0)x_0 = \int_0^{t_1} HF(t_1, \tau)BCe^{D_0^d D \tau} d\tau y_0.$$

В силу того, что $Hx(t_1) = 0$, имеем

$$-HF(t_1, 0)x_0 = \int_0^{t_1} HF(t_1, \tau)BCe^{D_0^d D \tau} d\tau y_0,$$

где $F(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы (1).

Отсюда, учитывая результаты работ [1, 4], получаем следующий результат.

Теорема. Для H -управляемости системы (1) дескрипторным регулятором (5) необходимо и достаточно, чтобы система (1) была H -управляема, а дескрипторная система (5) условно наблюдаема [5], т. е. выполняются условие (3) и условие

$$\text{rank} \left\{ \begin{array}{c} C(D_0^d D)^k H \\ 0 \leq k \leq n-1 \end{array} \right\} = \text{rank } H.$$

1. *Игнатенко В.В.* Управляемость динамических систем с помощью регулятора // Вестник БГУ. 1976. Сер. 1. № 2. С. 51–58.
2. *Габасов Р.Ф., Кирилова Ф.М., Крахотко В.В.* Управляемость линейных стационарных систем // Доклады АН СССР. 1972. Т. 203, № 3. С. 537–539.
3. *Campbell S.L., Meyer C.D., Rose N.J.* Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients // STAM J. Appl. Math. 1976. Vol. 31, no. 3. P. 411–425.
4. *Шкляр Б.Ш.* К проблеме относительной управляемости систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Дифференц. уравн. 1974. Т. 10, № 8. С. 1443–1450.
5. *Габасов Р.Ф., Жевняк Ф.М., Кирилова Ф.М., Конейкина Т.Б.* Условная наблюдаемость линейных систем // Problems of Control and Information Theory. 1972. Vol. 1. P. 217–233.

Методы моделирования нелинейных динамических систем

Н. П. Кривулин

Пенза, Пензенский государственный университет

e-mail: krivulin@bk.ru

Рассматриваются методы моделирования нелинейных динамических систем, математические модели которых описываются конечным рядом Вольтерра вида

$$y(t) = \int_0^t g_1(t, \tau_1) x(\tau_1) d\tau_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_0^t g_2(t, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots + \\
& + \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t g_N(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) x(\tau_1) x(\tau_2) \dots x(\tau_N) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t)$ — входной сигнал; $y(t)$ — выходной сигнал; $g_1(t, \tau_1)$, $g_2(t, \tau_1, \tau_2)$, $\dots$, $g_N(t, \tau_1, \dots, \tau_N)$ — ядра Вольтерра, которые являются полными динамическими характеристиками системы и подлежат определению.

Восстановление ядер Вольтерра основано на применении интегральных преобразований Лапласа, Меллина и Хартли. Восстановление проводится в предположении, что интегральные преобразования ядер Вольтерра по переменной t удовлетворяют следующим условиям:

1. В случае преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned}
G_k(p, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) &= \int_0^{+\infty} g_k(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) e^{-pt} dt = \\
&= \hat{G}_k(p) e^{-\tau_1 q_{k1}(p) - \tau_2 q_{k2}(p) - \dots - \tau_k q_{kk}(p)}, \quad k = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{2}$$

2. В случае преобразования Меллина:

$$\begin{aligned}
G_k(p, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) &= \int_0^{+\infty} g_k(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \tau^{p-1} dt = \\
&= \hat{G}_k(p) \tau_1^{q_{k1}(p)-1} \dots \tau_k^{q_{kk}(p)-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{3}$$

3. В случае преобразования Хартли:

$$\begin{aligned}
G_k(p, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) &= \int_0^{+\infty} g_k(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \cos(2\pi pt) dt = \\
&= \hat{G}_k(p) \cos(2\pi q_{k1}(p)\tau_1) \dots \cos(2\pi q_{kk}(p)\tau_k), \quad k = 1, 2, \dots, N,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\text{cas } t \doteq \sin t + \cos t$ — ядро Хартли. Показано, что применение интегральных преобразований (2)–(4) приводит уравнение (1) к алгебраическому уравнению

$$Y(p) = \hat{G}_1(p)X(q_{11}(p)) + \hat{G}_2(p)X(q_{21}(p))X(q_{22}(p)) + \dots + \\ + \hat{G}_N(p)X(q_{N1}(p))X(q_{N2}(p)) \dots X(q_{NN}(p))). \quad (5)$$

Постановка задачи. Требуется по серии тестовых входных $x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, \frac{N(N+3)}{2}$, и выходных $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, \frac{N(N+3)}{2}$, сигналов определить ядра Вольтерра нелинейной динамической системы, описываемой уравнением (1). Предполагается, что ядра Вольтерра удовлетворяют условиям (2)–(4).

Для серии входных сигналов $x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, \frac{N(N+3)}{2}$, и соответствующих выходных сигналов $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, \frac{N(N+3)}{2}$, на основании (1) и (5) получим систему уравнений

$$Y_k(p) = \hat{G}_1(p)X_k(q_{11}(p)) + \hat{G}_2(p)X_k(q_{21}(p))X_k(q_{22}(p)) + \dots + \\ + \hat{G}_N(p)X_k(q_{N1}(p))X_k(q_{N2}(p)) \dots X_k(q_{NN}(p))), \quad k = 1, \dots, \frac{N(N+3)}{2},$$

относительно $\frac{N(N+3)}{2}$ искомым функций

$$\hat{G}_1(p), q_{11}(p), \hat{G}_2(p), q_{21}(p), q_{22}(p), \dots, \\ \hat{G}_N(p), q_{N1}(p), q_{N2}(p), \dots, q_{NN}(p).$$

Искомые ядра Вольтерра определяются соответствующими обратными преобразованиями к (2)–(4) или из решения интегральных уравнений (2)–(4) относительно $g_1(t, \tau)$, $g_2(t, \tau_1, \tau_2)$, $\dots$, $g_N(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$.

В работах [1, 2] приведены примеры, иллюстрирующие изложенный метод (используется преобразование Лапласа для непрерывных систем и Z -преобразование для дискретных систем).

В работе [3] приводится построение математической модели нелинейной измерительной системы (используется Z -преобразование) восстановления входных сигналов вихретоковых преобразователей перемещения при термоударных воздействиях. Применение интегральных преобразований Меллина и Хартли для построения линейных моделей измерительных систем были рассмотрены в [4, 5].

1. *Boikov I.V., Krivulin N.P.* Identification of Parameters of Nonlinear Dynamical Systems Simulated by Volterra Polynomials // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2018. Vol. 12, no. 2. P. 1–16.
2. *Бойков И.В., Кривулин Н.П.* О методах восстановления входных сигналов нелинейных динамических систем, представимых полиномами Вольтерра // Сборник трудов XV Международной научно-практической конференции «Инновационные, информационные и коммуникационные технологии» (1–10 октября 2018 г.). М.: Ассоциация выпускников и сотрудников ВВИА им. проф. Жуковского, 2018. С. 277–281.
3. *Бойков И.В., Кривулин Н.П., Абрамов С.В., Маланин В.П., Кикот В.В.* Восстановление входных сигналов вихретоковых преобразователей перемещения при термоударных воздействиях // Измерительная техника. 2018. № 11. С. 61–67.
4. *Бойков И.В., Кривулин Н.П.* Аналитические и численные методы идентификации динамических систем. Пенза: Изд-во ПГУ. 2016.
5. *Бойков И.В., Кривулин Н.П.* Приближенные методы определения динамических характеристик информационно-измерительных систем // В сборнике: Теория управления и математическое моделирование. Материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. Ижевск, 2020. С. 260–261.

Многоточечная задача управления с интегральными ограничениями типа равенств на управление

В. Н. Лаптинский

Могилев, Белорусско-Российский университет

e-mail: lavani@tut.by

Исследуется задача типа [1] построения возможных управлений $u \in C(I, \mathbb{R}^r)$ и соответствующих функций состояний $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ на основе системы соотношений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + Q(t)u, \quad (1)$$

$$x(t_s) = x_s, \quad (2)$$

$$\int_{\alpha_l}^{\beta_l} \chi_l(\tau) u(\tau) d\tau = \rho_l, \quad (3)$$

где $A \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $Q \in C(I, \mathbb{R}^{n \times r})$, $u \in \mathbb{R}^r$, $\rho_l \in \mathbb{R}^{k_l}$, $\chi_l \in C(I, \mathbb{R}^{k_l \times r})$, $\alpha_l, \beta_l \in I = [0, \omega]$, $l = \overline{1, p}$, $s = \overline{0, m}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq \omega$; $\omega > 0$.

Соотношения (1), (2) рассматривались в [1] и др.; (3) представляет собой ограничения на управления, аналогичные соответствующим изопериметрическим интегральным ограничениям [1] на фазовые переменные. Класс изопериметрических задач играет большую роль как в технике, технологиях, так и в экономике [2], при этом условия (2), (3) имеют существенное значение, например, для управления движением летательных аппаратов, процессами в химических реакторах.

Данная работа является дополнением и развитием [1]. Ее основная цель состоит в получении достаточных условий разрешимости задачи (1)–(3), а также замкнутых соотношений для функций $u(t)$, $x(t)$.

Как и в [1], задача состоит из двух частей, определяемых условиями соответственно (1) и (3), которые с точки зрения теории уравнений 1-го рода не имеют принципиальных различий. Эти условия представляют собой совокупности m и l таких уравнений относительно $u(t)$.

Определение (см. [1]). Решение $(u(t), x(t))$ задачи (1)–(3) называют *замкнутым*, если оно представимо с помощью конечного числа квадратур и алгебраических операций с матрицантом $X(t)$ свободной системы и остальными величинами задачи.

Сначала от (1), (3) выполняется переход к эквивалентной интегральной задаче

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) Q(\tau) u(\tau) d\tau, \quad (4)$$

$$\int_{t_0}^{t_s} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)d\tau = X^{-1}(t_s)x_s - x_0. \quad (5)$$

Построив на основе (3), (5) управление $u(t)$, функцию состояний можно получить из (4).

Далее соотношения (3), (5) записываются в операторном виде

$$A_\nu u = \tilde{\rho}_\nu, \quad \nu = \overline{1, m+p}, \quad (6)$$

где

$$A_\nu u = \int_{t_0}^{t_\nu} X^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)d\tau, \quad \tilde{\rho}_\nu = X^{-1}(t_\nu)x_\nu - x_0 \text{ при } \nu = \overline{1, m};$$

$$A_\nu u = \int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} \chi_\nu(\tau)u(\tau)d\tau, \quad \tilde{\rho}_\nu = \rho_\nu \text{ при } \nu = \overline{m+1, m+p}.$$

К (6) применяется методика [1]. В результате при выполнении условия

$$\det(A_{j+1}R_jK_{j+1}) \neq 0, \quad j = \overline{0, m+p-1}, \quad (7)$$

на основе

$$y_j = K_{j+1}c_{j+1} + y_{j+1} \quad (8)$$

получено решение задачи (1)–(3):

$$u(t) = R(t, y) + r(t), \quad (9)$$

где $y = y(t)$ — финальная вспомогательная функция, полученная в рамках данной методики, R_j — величины типа M_r , $K_\nu \in C(I, \mathbb{R}^{r \times n_\nu})$, $R(t, y)$, $r(t)$ — соответственно финальный линейный (однородный) интегральный оператор из $C(I, \mathbb{R}^r)$ в $C(I, \mathbb{R}^r)$ и функция, получаемые с помощью (8) и рекуррентных соотношений

$$R_{j+1}(y_{j+1}) = R_j(y_{j+1}) - R_jK_{j+1}(A_{j+1}R_jK_{j+1})^{-1}A_{j+1}R_j(y_{j+1}), \quad (10)$$

$$r_{j+1} = r_j + R_jK_{j+1}(A_{j+1}R_jK_{j+1})^{-1}(\tilde{\rho}_{j+1} - A_{j+1}r_j), \quad (11)$$

при этом $y_{m+p} = y$, $r_{m+p} = r$, $R_{m+p}(y_{m+p}) = R(t, y)$, $r_0 = 0$, $R_0 = \mathbb{J}$ — тождественный оператор.

Выполнение условия (7) обеспечивает реализуемость процесса (8), (10), (11) построения $R(t, y)$, $r(t)$, начиная с $R_1(y_1) = y_1 - K_1(A_1 K_1)^{-1} A_1 y_1$, $r_1(t) = K_1(A_1 K_1)^{-1} \tilde{\rho}_1$.

Для функции состояний на основе (9) по формуле (4) получено выражение

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) Q(\tau) [R(\tau, y) + r(\tau)] d\tau.$$

Замечание. Задачу (1), (2) можно рассматривать как частный случай задачи (1)–(3), при этом соотношения (1), (2) при $s = 0, 1$ — это классическая задача управления, а соотношения (1), (2) при $s = 2, 3, \dots, m$ порождают соотношения (3) с соответствующими функциями $\chi_l(t)$ и пределами интегрирования. Для иллюстрации рассмотрена задача

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad x(0) = 3, \quad x(1) = 3, \quad x(2) = 4,$$

которая эквивалентна интегральной задаче

$$x(t) = 3 + \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad \int_0^1 u(\tau) d\tau = 0, \quad \int_0^2 u(\tau) d\tau = 1.$$

Далее на основе (7)–(9) получено управление

$$u(t) = y(t) - \frac{1}{2} \int_0^2 y(\tau) d\tau + \left(2 \int_0^1 y(\tau) d\tau - \int_0^2 y(\tau) d\tau + 1 \right) (t - 1) + \frac{1}{2},$$

где $y(t)$ — произвольная непрерывная функция.

1. *Лаптинский В.Н.* Решение многоточечной задачи управления с интегральными ограничениями типа равенств // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 10. С. 1386–1393.
2. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971.

Об успокоении системы управления нейтрального типа на временном графе-звезде с запаздыванием, пропорциональным времени

А. П. Леднов

Саратов, Саратовский университет

e-mail: lednovalexsandr@gmail.com

В работе [1] С. А. Бутерин предложил концепцию функционально-дифференциальных операторов на геометрических графах с глобальным запаздыванием, которое «проходит» через внутренние вершины графа. С помощью данной концепции в работах [2, 3] на графы была перенесена задача об успокоении системы управления с постоянным запаздыванием, исследовавшаяся на интервале Н. Н. Красовским [4] и А. Л. Скубачевским [5]. Это, в свою очередь, привело к концепции временного графа, ребра которого отождествляются с промежутками времени, а каждая внутренняя вершина понимается как точка разветвления процесса, дающая несколько различных сценариев дальнейшего его протекания.

В настоящей работе на временной граф типа звезды распространяется задача об успокоении системы управления с запаздыванием, в которой запаздывание не постоянно, а является пропорциональным времени сжатию. На интервале этот случай был рассмотрен Л. Е. Россовским в [6]. Рассмотрим систему управления на временном графе-звезде:

$$\begin{aligned} \ell_1 y(t) &:= y'_1(t) + a_1 y'_1(q^{-1}t) + b_1 y_1(t) + c_1 y_1(q^{-1}t) = u_1(t), \\ 0 < t < T_1, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \ell_j y(t) &:= y'_j(t) + a_j y'_j(q^{-1}(t - (q - 1)T_1)) + b_j y_j(t) + \\ &+ c_j y_j(q^{-1}(t - (q - 1)T_1)) = u_j(t), \quad t > 0, \quad j = \overline{2, m}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$y_j(t) = y_1(t + T_1), \quad (q^{-1} - 1)T_1 < t < 0, \quad j = \overline{2, m}, \quad (3)$$

$$y_j(0) = y_1(T_1), \quad j = \overline{2, m}, \quad (4)$$

$$y_1(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

где $q > 1$, $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ и $u_j \in L_2(0, T_j)$, $j = \overline{1, m}$. В (1) и (2) j -ое уравнение задано на ребре e_j графа-звезды Γ_m . Соотношения (3) означают, что запаздывание распространяется через единственную внутреннюю вершину графа Γ_m , а условия (4) являются условиями непрерывности в этой вершине. Начальное состояние всей системы задается условием (5).

Зафиксируем $T_j > (q - 1)T_1$ при $j = \overline{2, m}$. Требуется выбором управлений $u_j(t)$ привести систему (1)–(5) в состояние равновесия. Другими словами, нужно найти $u_j(t) \in L_2(0, T_j)$, $j = \overline{1, m}$, обеспечивающие

$$y_j(t) = 0, \quad t \in [q^{-1}(T_j - (q - 1)T_1), T_j], \quad j = \overline{2, m}. \quad (6)$$

Выполнение условий (6) гарантирует последующее спокойствие системы при $u_j(t) = 0$ для $t > T_j$ и $j = \overline{2, m}$. Минимизируя требуемые усилия $\|u_j\|_{L_2(0, T_j)}$, $j = \overline{1, m}$, приходим к вариационной задаче

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \int_0^{T_j} (\ell_j y(t))^2 dt \rightarrow \min \quad (7)$$

при условиях (3)–(6), где $\alpha_j > 0$ – фиксированные веса.

Для выбора весов α_j , $j = \overline{1, m}$, можно использовать вероятностный подход [2]. А именно, положить $\alpha_1 = 1$, а в качестве α_j , $j = \overline{2, m}$, взять вероятности сценариев, задаваемых соответствующими уравнениями в (2).

В частном случае $m = 2$ при $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ вариационная задача (3)–(7) эквивалентна соответствующей задаче на интервале [6].

Обозначим через $\mathcal{B}$ краевую задачу для функционально-дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j y(t) &:= - \left(\widehat{\ell}_j y(t) \right)' + \alpha_j b_j \ell_j y(t) + \widetilde{\ell}_{0,j} y(t) = 0, \\ 0 < t < l_j, \quad j &= \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (8)$$

при условиях (3)–(6) и условии типа Кирхгофа

$$\widehat{\ell}_1 y(T_1) = \sum_{j=2}^m \widehat{\ell}_j y(0), \quad (9)$$

где выражения $\widehat{\ell}_j y(t)$ имеют вид

$$\widehat{\ell}_j y(t) := \alpha_j \ell_j y(t) + \widetilde{\ell}_{1,j} y(t), \quad j = \overline{1, m},$$

тогда как

$$\begin{aligned} \widetilde{\ell}_{\nu,1} y(t) &= \begin{cases} q\alpha_1 \theta_{\nu,1} \ell_1 y(qt), & 0 < t < q^{-1}T_1, \\ q \sum_{k=2}^m \alpha_k \theta_{\nu,k} \ell_k y(qt - T_1), & q^{-1}T_1 < t < T_1, \end{cases} \\ \widetilde{\ell}_{\nu,j} y(t) &= \begin{cases} q\alpha_j \theta_{\nu,j} \ell_j y(qt + (q-1)T_1), & 0 < t < l_j, \\ 0, & l_j < t < T_j, \end{cases} \quad j = \overline{2, m}, \end{aligned}$$

при $\nu \in \{0, 1\}$, $l_1 := T_1$, $l_j := q^{-1}(T_j - (q-1)T_1)$, $j = \overline{2, m}$, и

$$\theta_{\nu,j} = \begin{cases} a_j, & \nu = 1, \\ c_j, & \nu = 0, \end{cases} \quad j = \overline{1, m}.$$

Определение 1. Кортёж

$$y = [y_1, \dots, y_m] \in W_2^1(\Gamma_m) := \bigoplus_{j=1}^m W_2^1[0, T_j]$$

назовем *обобщенным решением краевой задачи $\mathcal{B}$* , если $\widehat{\ell}_j y(t) \in W_2^1[0, l_j]$, $j = \overline{1, m}$, и выполняются соотношения (3)–(6), (8), (9).

Теорема 1. Кортёж $y = [y_1, \dots, y_m] \in W_2^1(\Gamma_m)$ является решением вариационной задачи (3)–(7) тогда и только тогда, когда он является обобщенным решением краевой задачи $\mathcal{B}$.

Теорема 2. Пусть $|a_1| \neq q^{-\frac{1}{2}}$ и $|a_2| + \dots + |a_m| > 0$. Тогда краевая задача $\mathcal{B}$ имеет единственное обобщенное решение $y \in W_2^1(\Gamma_m)$. Кроме того, существует C такое, что $\|y\|_{W_2^1(\Gamma_m)} \leq C|y_0|$.

Отметим, что случай системы управления запаздывающего типа $(a_1 = \dots = a_m = 0)$ рассмотрен в [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 24-71-10003.

1. *Buterin S.A.* Functional-differential operators on geometrical graphs with global delay and inverse spectral problems // Results Math. 2023. Vol. 78. Art. no. 79.
2. *Buterin S.A.* On damping a control system with global aftereffect on quantum graphs: Stochastic interpretation // Math. Meth. Appl. Sci. 2025. Vol. 48. P. 4310–4331.
3. *Бутерин С.А.* Об успокоении системы управления произвольного порядка с глобальным последствием на дереве // Матем. заметки. 2024. Т. 115, № 6. С. 825–848.
4. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
5. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel: Birkhäuser, 1997.
6. *Россовский Л.Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции // СМФН. 2014. Т. 54. С. 3–138.
7. *Lednov A.P.* On damping a control system on a star graph with global time-proportional delay // arXiv:2503.02522.

Управляемость нелинейных систем с переменной структурой

И. С. Максимова

*Москва, Российский университет дружбы народов
имени Патриса Лумумбы
e-mail: irismax@yandex.ru*

В данной работе исследуется управляемость составной системой следующей структуры: на двух последовательных отрезках времени движение объекта описывается двумя нелинейными треугольными системами, которые путем замены переменных сводятся к линейным системам. Смена фазовых пространств осуществляется с помощью некоторого заданного отображения, с ним же связана и стыковка траекторий. Получены достаточные условия управляемости объекта, описанного заданной системой, из заданного начального множества одного пространства в

заданное множество другого пространства. Предложен подход к нахождению траекторий, реализующих данное движение.

В работе рассмотрены нелинейные системы так называемого треугольного вида. Важной особенностью данного класса систем является то, что при определенной замене переменных они отображаются на линейные. Управляемость линейных систем хорошо изучена, что позволяет использовать различные критерии для их исследования. Треугольные системы описывают ряд физических процессов, таких как ориентация спутника на орбите, управление роботом-манипулятором и др. Впервые класс треугольных систем был введен и рассмотрен В. И. Коробовым [1]. Дальнейшее развитие предложенный В. И. Коробовым подход получил в работах [2–5].

В двух фазовых пространствах $X = \mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_m)$ движение управляемого объекта описывается следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений (1) и (2):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n; u). \end{cases}$$

$$x \in X, \quad t \in [0, \tau].$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = g_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 = g_2(y_1, y_2, y_3), \\ \dots \\ \dot{y}_{m-1} = g_{m-1}(y_1, \dots, y_m), \\ \dot{y}_m = g_m(y_1, \dots, y_m; v). \end{cases}$$

$$y \in Y, \quad t \in [\tau, T].$$

Моменты времени τ и T заданы. В пространстве X задано начальное множество M_0 и гиперплоскость перехода $\Gamma = (x, c)$. Стыковка траекторий осуществляется с помощью заданного отображения $q: X \rightarrow Y$, $y(\tau) = q(x(\tau))$. Также посредством

этого отображения реализуется переход из одного пространства в другое. В пространстве Y задано конечное множество M_1 .

Управляемый объект движется по следующей схеме: на отрезке времени $[0, \tau]$ объект движется из начального множества M_0 по решениям системы (1), в момент времени τ объект попадает на Γ и происходит переход в пространство Y под действием отображения $q: X \rightarrow Y$, $q(x(\tau)) = y(\tau)$. Полученная точка $y(\tau)$ является начальной для движения объекта в пространстве Y . Дальнейшее движение на отрезке времени $[\tau, T]$ объект осуществляет из точки $y(\tau)$ на множество M_1 по решениям системы (2). Причем $y(\tau) \notin M_1$ (в противном случае задача решена).

Задача заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами (1) и (2), является управляемым на $[0, T]$ из множества M_0 пространства X на множество M_1 пространства Y .

Определение. Объект, описываемый системами (1) и (2), называется *управляемым из M_0 в M_1* [6], если на отрезках $[0, \tau]$ и $[\tau, T]$ существуют допустимые управления $u(t)$ и $v(t)$, что соответствующие им решения систем удовлетворяют граничным условиям $x(0) \in M_0$, $x(\tau) \in \Gamma$ и $y(\tau) = q(x(\tau))$, $y(T) \in M_1$.

Условия управляемости объекта, описанного системами (1) и (2), можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть в системах (1) и (2) функции $f_i(x_1, \dots, x_{i+1})$, $i = 1, \dots, n$, и $g_k(y_1, \dots, y_{k+1})$, $k = 1, \dots, m$, имеют непрерывные частные производные до $(n - i + 1)$ -го и $(m - k + 1)$ -го порядков включительно и пусть при всех $x_1, \dots, x_{n+1}$ и при всех $y_1, \dots, y_{m+1}$

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} \right| \geq a > 0, \quad \left| \frac{\partial g_k}{\partial y_{k+1}} \right| \geq b > 0,$$

где a и b — постоянные, не зависящие от $x_1, \dots, x_{n+1}$ и от $y_1, \dots, y_{m+1}$ соответственно. И пусть выполнены условия стыковки траекторий $y(\tau) = q(x(\tau))$. Тогда объект, описанный системами (1) и (2), является управляемым из начального множества M_0 пространства X на конечное множество M_1 пространства Y .

1. *Коробов В.И.* Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9, № 4. С. 614–619.
2. *Коробов В.И.* Метод функции управляемости. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2007.
3. *Коробов В.И., Иванова Т.И.* Отображение нелинейных управляемых систем специального вида на каноническую систему // Математическая физика, анализ, геометрия. 2001. Т. 8, № 1. С. 42–57.
4. *Коробов В.И., Павличков С.С.* Управляемость треугольных систем, неэквивалентных каноническим системам // Вестник Харьковского национального университета. Серия Математика, прикладная математика и механика. 2000. № 475. С. 323–329.
5. *Коробов В.И., Павличков С.С.* Непрерывная зависимость решения задачи управления // Математическая физика, анализ, геометрия. 2000. Т. 8, № 2. С. 190–203.
6. *Максимова И.С., Розова В.Н.* Достаточные условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства // Вестник ТГУ. Серия Естественные и технические науки. 2011. Т. 16, вып. 3. С. 742–747.

Четтеринг-экстремали в стабилизации систем, аффинных по управлению

Н. Б. Мельников

Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова

e-mail: melnikov@cs.msu.ru

М. И. Ронжина

Москва, РГУ нефти и газа (НИУ) им. И. М. Губкина

e-mail: ronzhina.m@gubkin.ru

Построение методов стабилизации для систем управления, в которых управлений меньше, чем степеней свободы [1, 2]:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F(q)u, \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad m < n,$$

остается актуальной проблемой в связи с приложениями в робототехнике. Мы рассматриваем задачу стабилизации с квадратичным критерием качества, зависящим от $x = (q, \dot{q})$, и скалярным управлением u из отрезка, содержащего ноль.

Гамильтониан принципа максимума Понтрягина является аффинным по управлению: $H(\psi, x, u) = H_0(\psi, x) + uH_1(\psi, x)$. Поэтому задача может иметь *особые* экстремали $(\psi(t), x(t))$, такие что $H_1(\psi(t), x(t)) \equiv 0$ на некотором интервале времени. Говорят, что особая экстремаль имеет *существенный* l -й порядок, если соотношения

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^i}{dt^i} H_1(\psi, x) = 0, \quad i = 1, \dots, 2l - 1, \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2l}}{dt^{2l}} H_1(\psi, x) \neq 0,$$

справедливы для всех (ψ, x) в некоторой *окрестности* особой траектории. Если соотношения выполняются только в точках самой особой траектории, говорят, что особая экстремаль имеет *локальный* l -й порядок.

Фуллером был построен пример, где неособая экстремаль, выходящая на особую второго порядка, должна иметь бесконечное число разрывов управления на конечном интервале времени. Такое управление получило название *четтеринга*. Если особая экстремаль имеет *существенный* второй порядок и удовлетворяет строгому условию Келли

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^4}{dt^4} H_1(\psi(t), x(t)) < 0,$$

то любая неособая экстремаль, выходящая на особую, должна быть четтеринг-экстремалью. Если особая экстремаль имеет *локальный* второй порядок, то существование четтеринг-экстремалей требует дополнительных условий [3, 4]. В задачах стабилизации эти теоремы могут быть неприменимы. Нами получены условия существования четтеринг-экстремалей в задаче стабилизации для нелинейных систем аффинных по управлению [5, 6].

Теорема. Пусть $(z, w, v) \in \mathbb{R}^{4N}$ и $w = (w_1, \dots, w_K) \in \mathbb{R}^{4K}$ — система координат такая, что $(z, w, v_0) = (0, 0, v_0)$ — точка на особой экстремали второго порядка и гамильтонова система

принципа максимума Понтрягина записывается в виде

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 + f_1(z, w, v, u), & \dot{w}_{i1} &= w_{i2} + h_{i1}(z, w, v, u), \\
\dot{z}_2 &= z_3 + f_2(z, w, v, u), & \dot{w}_{i2} &= w_{i3} + h_{i2}(z, w, v, u), \\
\dot{z}_3 &= z_4 + f_3(z, w, v, u), & \dot{w}_{i3} &= w_{i4} + h_{i3}(z, w, v, u), \\
\dot{z}_4 &= \alpha(z, w, v) + \beta(z, w, v)u & \dot{w}_{i4} &= \gamma_i(z, w, v) + \nu_i(z, w, v)u \\
&+ f_4(z, w, v, u), & &+ h_{i4}(z, w, v, u), \\
u &= \operatorname{sgn} z_1, & \dot{v} &= F(z, w, v, u),
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha(0, 0, v_0) = 0$ и $\beta(0, 0, v_0) = -1$; $\gamma_i(0, 0, v_0) = 0$ и $\nu_i(0, 0, v_0) = -1$ ($i = 1, \dots, K$). Пусть f_j и h_{ij} удовлетворяют соотношениям малости

$$\begin{aligned}
f_j(g_\lambda(z), g_\lambda(w_1), \dots, g_\lambda(w_K), v, u) &= O(\lambda^{5-j}), \\
h_{ij}(g_\lambda(z), g_\lambda(w_1), \dots, g_\lambda(w_K), v, u) &= O(\lambda^{5-j}),
\end{aligned}$$

а функции α , $1 + \beta$, γ_i и $1 + \nu_i$ удовлетворяют соотношениям малости

$$\begin{aligned}
\alpha(g_\lambda(z), g_\lambda(w_1), \dots, g_\lambda(w_K), v) &= O(\lambda), \\
1 + \beta(g_\lambda(z), g_\lambda(w_1), \dots, g_\lambda(w_K), v) &= O(\lambda), \\
\gamma_i(g_\lambda(z), g_\lambda(w_1), \dots, g_\lambda(w_K), v) &= O(\lambda), \\
1 + \nu_i(g_\lambda(z), g_\lambda(w_1), \dots, g_\lambda(w_K), v) &= O(\lambda),
\end{aligned}$$

при $\lambda \rightarrow 0$, где

$$g_\lambda(z) = (\lambda^4 z_1, \lambda^3 z_2, \lambda^2 z_3, \lambda z_4), \quad \lambda > 0$$

— действие группы Фуллера. Тогда существует двумерная интегральная поверхность, состоящая из четтеринг-экстремалей, которые достигают $(z, w, v_0) = (0, 0, v_0)$ за конечное время.

Идея доказательства состоит в следующем. Сначала рассматривается невозмущенная система: $f_j = 0$ и $h_{ij} = 0$. В этом случае уравнения по z совпадают с гамильтоновой системой задачи Фуллера (с точностью до переобозначения переменных). Если начальные условия по z и w одинаковы, то одинаковы и соответствующие решения $z(t)$ и $w(t)$. Следовательно, для невозмущенной системы уравнений существует двумерная поверхность, которая состоит из четтеринг-траекторий $(z(t), w(t))$, идущих в начало координат. Далее необходимо показать, что для возмущенной

системы (1) эта двумерная интегральная поверхность сохраняется. Для этого вводится отображение Пуанкаре поверхности переключения и ищется инвариантная кривая этого отображения. Основная трудность состоит в том, что кривая переключения проходит через точку $(z, w) = (0, 0)$, в окрестности которой отображение Пуанкаре не является гладким. Поэтому доказательство существования инвариантной кривой использует технику разрешения особенностей.

Теорема проиллюстрирована на примере стабилизации с обратной связью для системы шар и балка [5, 6]. Во многих работах шар моделируют как точечную массу, либо используют другие предположения, связанные с шаром, которые не имеют физического обоснования (см. обзор [2]). Нами рассмотрен общий случай, когда балка закреплена в середине, а шар может катиться вдоль балки без проскальзывания.

1. *Liu Y., Yu H.* A Survey of Underactuated Mechanical Systems // IET Control Theory Appl. 2013. Vol. 7, issue 7. P. 921–935.
2. *Lare C., White W. N., Hossain S.* Motion equations for the ball and beam and the ball and arc systems // J. Dyn. Sys., Meas., Control. 2019. Vol. 141, no. 12. Art. no. 121006 (11 p.).
3. *Zelikin M.I., Borisov V.F.* Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering. Boston, MA: Birkhäuser, 1994.
4. *Zelikin M.I., Borisov V.F.* Optimal chattering feedback control // J. Math. Sci. 2003. Vol. 114, no. 3. P. 1227–1344.
5. *Мельников Н.Б., Ронжина М.И.* Экстремали с бесконечным числом переключений в задачах стабилизации аффинных по управлению // Успехи математич. наук, 2024. Т. 79, вып. 5. С. 187–188.
6. *Мельников Н.Б., Ронжина М.И.* Четтеринг-траектории в задачах стабилизации нелинейных систем, аффинных по управлению // Труды ИММ УрО РАН, 2025. Т. 31, вып. 1. С. 138–153.

Численное построение стабильных мостов и оптимальных траекторий в линейных дифференциальных играх с многомерным фазовым вектором

А. В. Михайлов

Екатеринбург, ИММ УрО РАН

e-mail: tigr-mav@yandex.ru

Рассматривается следующая дифференциальная игра [1]:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(t)z + B(t)u + C(t)v, \quad t \in [t_0, T], \quad z \in \mathbb{R}^n, \\ u &\in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^q, \\ z(T) &\in M + MSpace^\perp. \end{aligned} \quad (1)$$

Матрицы $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ в правой части динамики непрерывно зависят от времени. Управления u первого игрока и v второго игрока стеснены выпуклыми компактами P и Q соответственно в своих пространствах. Задача первого игрока — привести систему в зафиксированный терминальный момент T на заданное терминальное множество; второй игрок препятствует этому. Терминальное множество является цилиндрическим с выпуклым компактным основанием M , расположенным в линейном подпространстве $MSpace$ некоторых выделенных d координат, $d \leq n$.

Применим замену переменных $x(t) = X_{1,2,\dots,d}(T, t)z(t)$, которая определяется матрицей $X_{1,2,\dots,d}(T, t)z(t)$, составленной из d строк фундаментальной матрицы Коши, соответствующих d выделенным координатам. В результате получаем эквивалентную игру:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= D(t)u + E(t)v, \quad t \in [t_0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ D(t) &= X_{1,2,\dots,d}(T, t)B(t), \quad E(t) = X_{1,2,\dots,d}(T, t)C(t), \\ u &\in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^q, \\ x(T) &\in M. \end{aligned} \quad (2)$$

Приближение $\widetilde{W}(t_i)$ сечения $W(t_i)$ в момент t_i максимального стабильного моста [1] W для игры (2) может быть построенное

но [2] с помощью процедуры

$$\begin{aligned} t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T, \quad \widetilde{W}(t_N) = M, \\ \widetilde{W}(t_i) = (\widetilde{W}(t_{i+1}) + (-\Delta_i)D(t_i)P) \ast \Delta_i E(t_i)Q. \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ — i -й шаг разбиения по времени. Символом «+» обозначена алгебраическая сумма (сумма Минковского), а символом « $\ast$ » — геометрическая разность (разность Минковского). Моменты времени t_i берутся из некоторой временной сетки (равномерной или неравномерной) в интервале $[t_0, T]$.

При численной реализации этой процедуры все множества подменяются своими выпуклыми многогранными аппроксимациями: $\mathbf{M} \sim M$, $\mathbf{P}_i \sim P_i = (-\Delta_i)D(t_i)P$, $\mathbf{Q}_i \sim Q_i = \Delta_i E(t_i)Q$. В результате получаем процедуру

$$\mathbf{W}_N = \mathbf{M}, \quad \mathbf{W}_i = (\mathbf{W}_{i+1} + \mathbf{P}_i) \ast \mathbf{Q}_i, \quad i = N - 1, \dots, 0,$$

где $\mathbf{W}_i$, $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{Q}_i$, $\mathbf{M}$ — выпуклые многогранники в $\mathbb{R}^d$. Для разработки компьютерной программы, воплощающей данную процедуру, необходимо реализовать операции построения выпуклой оболочки роя точек, суммы и разности Минковского двух выпуклых многогранников.

Для построения оптимальных траекторий необходимо строить управления экстремального сдвига [1]. Для этого надо уметь вычислять вектор экстремального сдвига на сопутствующую точку на сечении максимального стабильного моста, которая является точкой моста, ближайшей к текущему положению системы. То есть необходима процедура нахождения точки многогранника, ближайшей к заданной точке.

Все указанные геометрические процедуры были реализованы автором. В докладе планируется кратко обсудить идеи, связанные с этими процедурами и их компьютерными реализациями. Также будут представлены результаты вычислений разработанных компьютерных программ.

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974.
2. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх, 2 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 764–766.

Поимка убегающего в задаче преследования второго порядка во временных шкалах

Е. С. Можегова

Ижевск, Удмуртский государственный университет
e-mail: mozhegovvalena@yandex.ru

Определение 1. Непустое замкнутое подмножество $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^1$ такое, что $\sup_{t \in \mathbb{T}} t = +\infty$, называется *временной шкалой*.

Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала.

Определение 2. Функция $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется Δ -дифференцируемой в точке $t \in \mathbb{T}$, если существует такое число $\gamma \in \mathbb{R}^1$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность W точки t такая, что неравенство

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \gamma(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|,$$

где $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s > t\}$, справедливо для всех $s \in \mathbb{T} \cap W$. Число γ называется Δ -производной функции f в точке t и обозначается $f^\Delta(t) = \gamma$.

Пусть $E \subset \mathbb{T}$. Обозначим $R(E) = \{t \in E \mid \sigma(t) > t\}$.

Определение 3. Множество $E \subset \mathbb{T}$ называется Δ -измеримым, если множество $\tilde{E} = E \cup \bigcup_{t \in R(E)} (t, \sigma(t))$ измеримо по Лебегу.

Определение 4. Функция $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется Δ -измеримой на Δ -измеримом множестве E , если функция $\tilde{f}$ вида

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in E, \\ f(t_i), & t \in (t_i, \sigma(t_i)), \quad t_i \in R(E) \end{cases}$$

измерима на множестве $\tilde{E}$.

Определение 5. Функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется Δ -интегрируемой на Δ -измеримом множестве $E = [a, b] \cap \mathbb{T}$, $a, b \in \mathbb{T}$, если функция $\tilde{f}$ интегрируема по Лебегу на множестве $\tilde{E}$. Определим $\int_E f(s) \Delta s$, полагая

$$\int_E f(s) \Delta s = \int_a^b f(s) \Delta s = \int_{\tilde{E}} \tilde{f} d\mu = \int_a^b \tilde{f} d\mu.$$

Более подробная информация о теории временных шкал может быть найдена в [1, 2, 3, 4].

Обозначим множество абсолютно непрерывных функций [2] на $[a, b] \cap \mathbb{T}$ через $AC([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$.

Определение 6. Функция $x \in AC([t_0, T]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ называется *решением задачи Коши*

$$x^{\Delta\Delta} = f(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x^{\Delta}(t_0) = x_1, \quad (1)$$

если выполнены условия: $x(t)$ — Δ -дифференцируема Δ -п.в. на $[t_0, T]_{\mathbb{T}}$, $x^{\Delta} \in L^1_{\mathbb{T}}([t_0, T]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$, $x(t_0) = x_0$, $x^{\Delta}(t_0) = x_1$ и $(x^{\Delta})^{\Delta}(t) = f(t)$ Δ -п.в. на $[t_0, T]_{\mathbb{T}}$.

Теорема 1. Для любого $f \in L^1_{\mathbb{T}}([t_0, T]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ решение задачи Коши (1) существует, единственно и может быть найдено по формуле

$$x(t) = x_0 + x_1 \cdot K(t) + \int_{[t_0, t)_{\mathbb{T}}} (K(t) - K(\sigma(\tau))) f(\tau) \Delta \tau,$$

где $K(t) = \int_{[t_0, t)_{\mathbb{T}}} \Delta \tau$, $t \in [t_0, T]$.

Пусть задана некоторая временная шкала $\mathbb{T}$, $t_0 \in \mathbb{T}$.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, 1)$ n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и одного убегающего E , которая описывается системой вида

$$z_i^{\Delta\Delta} = u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0, \quad z_i^{\Delta}(t_0) = z_i^1$$

где $z_i, z_i^0, z_i^1 \in \mathbb{R}^k$, $u_i, v \in V = \{v \in \mathbb{R}^k : \|v\| \leq 1\}$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$.

Обозначим $z^0 = \{z_i^0, i \in I\}$ — вектор начальных позиций, $z^1 = \{z_i^1, i \in I\}$ — вектор начальных скоростей. Считаем, что $z_i^0 \neq 0$ для всех $i \in I$.

Δ -измеримую функцию $v: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^k$ назовем *допустимой*, если $v(t) \in V$ для всех $t \in \mathbb{T}$, $t \geq t_0$. *Предысторией* $v_t(\cdot)$ функции v в момент $t \in \mathbb{T}$ будем называть сужение функции v на $[t_0, t] \cap \mathbb{T}$.

Введем следующие обозначения: $\xi_i(t) = z_i^1 + \frac{z_i^0}{K(t)}$, $\lambda(z, v) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda z \in V - v\}$. Через $\text{Int } X$, со X обозначим соответственно внутренность и выпуклую оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^k$.

Предположение. *Справедливо следующее неравенство*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \in \mathbb{T}}} \sum_{j \in J_{t_0, t}} \frac{(\sigma(t_j) - t_j)^2}{K^2(t)} < 1,$$

где $R := \{t \in \mathbb{T} : t < \sigma(t)\} = \{t_j\}_{j \in J}$, $J_{t_0, t} := \{j \in J : t_j \in [t_0, t) \cap \mathbb{T} \cap R\}$.

Лемма 1. *Пусть выполнено Предположение и включение $0 \in \text{Intco}\{z_1^1, \dots, z_n^1\}$. Тогда существует момент времени $T \in \mathbb{T}$ такой, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется номер $l \in I$, для которого*

$$\frac{1}{K(T)} \int_{t_0}^T (K(T) - K(\sigma(s))) \lambda(\xi_l(T), v(s)) \Delta s \geq 1.$$

Определение 7. Пусть $\widehat{U}_i(t_0) = \{u_i: [t_0, +\infty) \cap \mathbb{T} \rightarrow V, u_i - \Delta\text{-измеримая функция}\}$, $\widehat{V}(t_0) = \{v: [t_0, +\infty) \cap \mathbb{T} \rightarrow V, v - \Delta\text{-измеримая функция}\}$. Отображение $\mathcal{U}_i: \widehat{V}(t_0) \rightarrow \widehat{U}_i(t_0)$ называется *неупреждающей стратегией* преследователя P_i , если для любого момента времени $t \geq t_0, t \in \mathbb{T}$, и для любых управлений $v_1, v_2 \in \widehat{V}(t_0)$, таких, что $v_1(\tau) = v_2(\tau)$ п.в. для $\tau \in [t_0, t] \cap \mathbb{T}$, выполняется, что $\mathcal{U}_i(v_1(s)) = \mathcal{U}_i(v_2(s))$ п.в. для $s \in [t_0, t] \cap \mathbb{T}$.

Определение 8. В игре $\Gamma(n, 1)$ происходит r -кратная поимка или поимка (в случае $r = 1$) хотя бы одного убегающего, если существуют момент $T_0 = T_0(z^0) > t_0$, $T_0 \in \mathbb{T}$, и неупреждающие

стратегии $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \dots, P_n$ такие, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T_0] \cap \mathbb{T}$, найдутся моменты $\tau_1, \dots, \tau_r \in [t_0, T_0] \cap \mathbb{T}$ и попарно различные номера $s_1, \dots, s_r \in I$, для которых выполнены равенства $z_{s_j}(\tau_j) = 0$, $j = 1, \dots, r$.

Теорема 2. Пусть выполнено Предположение и включение $0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_I(n-r+1)} \text{Intco} \{z_s^1, s \in \Lambda\}$. Тогда в узле $\Gamma(n, 1)$ происходит r -кратная поимка убегающего.

1. Bohner M., Peterson A. Advances in Dynamic Equations on Time Scales. Boston: Birkhauser, 2003.
2. Cabada A., Vivero D.R. Expression of the Lebesgue Δ -integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ -antiderivatives // Math. Comp. Modelling. 2006. Vol. 43, no. 1–2. P. 194–207.
3. Cabada A., Vivero D.R. Criterions for absolute continuity on time scales // Journal of Difference Equations and Applications. 2005. Vol. 11, no. 11. P. 1013–1028.
4. Zaidong Z., Wei W. Necessary conditions for a class of optimal control problems on time scales // Abstract and Applied Analysis. 2009. Vol. 2009. P. 1–14.

О разрешимости задачи преследования для контрольного примера нейтрального типа в гильбертовом пространстве

Е. М. Мухсинов

*Худжанд, Таджикский государственный университет права,
бизнеса и политики*

e-mail: yodgor.mukhsinov@gmail.com

Б. Р. Назаров

Худжанд, ГОУ «ХГУ имени академика Б. Гафурова»

e-mail: nazarovbachtovar@gmail.com

В гильбертовом пространстве E исследуется разрешимость задачи преследования [1, с. 309; 2, с. 67] для контрольного примера нейтрального типа, когда динамика преследующего объекта описывается уравнением второго порядка

$$\ddot{x} = k\ddot{x}(t-h) - \alpha\dot{x} + \bar{u}, \quad (1)$$

где $x = x(t) \in E$, $\bar{u} = \bar{u}(t)$, $\|\bar{u}(t)\| \leq c$ — управления преследующего объекта, $k \geq 0$, $h \geq 0$, $\alpha > 0$, а динамика убегающего объекта описывается уравнением второго порядка

$$\ddot{y} = k\ddot{y}(t-h) - \beta\dot{y} + \bar{v}, \quad (2)$$

где $y = y(t) \in E$, $\bar{v} = \bar{v}(t)$, $\|\bar{v}(t)\| \leq d$ — управления убегающего объекта, $\beta > 0$. При этом игра считается законченной, если при некотором $T > 0$ имеет место равенство

$$x(T) = y(T). \quad (3)$$

Положив $z_1 = x - y$, $z_2 = \dot{x}$, $z_3 = \dot{y}$, пару уравнений (1) и (2) запишем в виде системы

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_3, \\ \dot{z}_2 = k \cdot \dot{z}_2(t-h) - \alpha z_2 + \bar{u}, \\ \dot{z}_3 = k \cdot \dot{z}_3(t-h) - \beta z_3 + \bar{v}, \end{cases}$$

или в виде

$$\dot{z} = B\dot{z}(t-h) + Az(t) - u + v, \quad (4)$$

где

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{u} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{v} \end{pmatrix},$$

а терминальное множество, где заканчивается игра, имеет вид (см. (3)):

$$M = \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} : z_1 = 0. \right\}$$

Лемма. Для системы (4) фундаментальное решение $\Phi(t)$, для которого $\dot{\Phi}(t) = B\dot{\Phi}(t-h) + A\Phi(t)$, $\Phi(0) = I$ (I — тождественный оператор), $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$, имеет вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} & -\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} \\ 0 & e^{-\alpha t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix} \quad \text{при } 0 \leq t \leq h,$$

$$\Phi(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} - k \frac{(1-e^{-\alpha(t-h)})}{\alpha} + \varphi_2(t, \alpha) & -\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} + k \frac{1-e^{-\beta(t-h)}}{\beta} - \varphi_2(t, \beta) \\ 0 & e^{-\alpha t} + \varphi_1(t, \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t} + \varphi_1(t, \beta) \end{pmatrix}$$

при $nh \leq t \leq (n+1)h$, $n = 1, 2, 3, \dots$, где

$$\varphi_2(t, \alpha) = \varphi_2(t, k, \alpha, n, h) = \sum_{i=1}^n (-\alpha)^{i-1} k^i e^{-\alpha(t-ih)} \cdot \frac{(t-ih)^i}{i!},$$

$$\varphi_1(t, \alpha) = \varphi_1(t, k, \alpha, n, h) = \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^m (-\alpha)^i k^m e^{-\alpha(t-mh)} \cdot \frac{(t-mh)^i}{i!}.$$

Теорема. Пусть выполнены условия:

1. Числа α, β, c, d, k таковы, что при всех $t > 0$

$$r(t) = \left[\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} - k \frac{1 - e^{-\alpha(t-h)}}{\alpha} + \varphi_2(t, \alpha) \right] c - \\ - \left[\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} - k \frac{1 - e^{-\beta(t-h)}}{\beta} + \varphi_2(t, \beta) \right] d > 0.$$

2. При некотором $T > 0$ имеет место включение

$$z_{01} + \psi(T, \alpha, k) z_{02} - \psi(T, \beta, k) z_{03} \in S_{\rho(T)},$$

где

$$\psi(t, \alpha, k) = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} - \frac{k(1 - e^{-\alpha(t-h)})}{\alpha} + \varphi_2(t, \alpha) - \\ - k \left(\frac{1 - e^{-\alpha(t-h)}}{\alpha} - \frac{k(1 - e^{-\alpha(t-2h)})}{\alpha} + \varphi_2(t-h, \alpha) \right),$$

$S_{\rho(T)}$ — шар радиуса $\rho(T) = \int_0^T r(T-s)ds$ с центром в точке 0.

Тогда в игре (4) из начального положения $z_0 = \begin{pmatrix} z_{01} \\ z_{02} \\ z_{03} \end{pmatrix}$ воз-
можно преследования с оптимальным временем

$$T_0 = \min \{T: |z_{01} + \psi(T, \alpha, k) z_{02} - \psi(T, \beta, k) z_{03}| = \rho(T)\}.$$

Замечание 1. Если выполнено хотя бы одно из двух условий

$$1. 0 \leq T \leq h, c > d, \frac{c}{\alpha} > \frac{d}{\beta};$$

$$2. nh \leq T \leq (n+1)h, n = 1, 2, 3, \dots, \alpha = \beta, c > d,$$

то $r(T) > 0$.

Замечание 2. При $E = R^n$, $n \geq 2$, $k = 0$, $c > d$, $\frac{c}{\alpha} > \frac{d}{\beta}$ из доказанной теоремы следует классический результат Л. С. Понтрягина [1, с. 327].

1. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980. Т. 112, № 154. С. 307–331.
2. *Мухсинов Е.М.* О задаче преследования для квазилинейной дифференциальной игры нейтрального типа // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2022. № 2. С.66–82.

О разрешимости задачи преследования для контрольного примера запаздывающего типа в гильбертовом пространстве

Е. М. Мухсинов

г. Худжанд, Республика Таджикистан, Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики
e-mail: yodgor.mukhsinov@gmail.com

Р. И. Хакимов

г. Худжанд, Республика Таджикистан, Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова
e-mail: rahmatjon@gmail.com

В гильбертовом пространстве E исследуется разрешимость задачи преследования [1, с. 309; 2, с. 329] для контрольного примера запаздывающего типа, когда динамика преследующего объекта описывается уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} - k\dot{x}(t - h) = \bar{u}, \quad (1)$$

где $x = x(t) \in E$, $\bar{u} = \bar{u}(t)$, $\|\bar{u}(t)\| \leq c$ — управления преследующего объекта, $k \geq 0$, $h \geq 0$, $\alpha > 0$, а динамика убегающего объекта описывается уравнением второго порядка

$$\ddot{y} + \beta \dot{y} - k\dot{y}(t - h) = \bar{v}, \quad (2)$$

где $y = y(t) \in E$, $\bar{v} = \bar{v}(t)$, $\|\bar{v}(t)\| \leq d$ — управления убегающего объекта, $\beta > 0$. При этом игра считается законченной, если при некотором $T > 0$ имеет место равенство

$$x(T) = y(T). \quad (3)$$

Положив $z_1 = x - y$, $z_2 = \dot{x}$, $z_3 = \dot{y}$, пару уравнений (1) и (2) запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_3, \\ \dot{z}_2 = -\alpha z_2 + k\dot{z}_2(t-h) + \bar{u}, \\ \dot{z}_3 = -\beta z_3 + k\dot{z}_3(t-h) + \bar{v}, \end{cases}$$

или в виде

$$\dot{z} = Bz(t-h) + Az(t) - u + v, \quad (4)$$

где

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{u} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{v} \end{pmatrix},$$

а терминальное множество, где заканчивается игра, имеет вид (см. (3)):

$$M = \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} : z_1 = 0 \right\}.$$

Лемма. Для дифференциального уравнения (4) фундаментальное решение $\Phi(t)$, для которого $\dot{\Phi}(t) = B\Phi(t-h) + A\Phi(t)$, $\Phi(0) = I$ (I — тождественный оператор), $\Phi(t) = 0$ при $t < 0$, имеет вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} & -\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \\ 0 & e^{-\alpha t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix} \text{ при } 0 \leq t \leq h,$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} + \varphi_2(t, k, \alpha, n) & -\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} - \varphi_2(t, k, \beta, n) \\ 0 & e^{-\alpha t} + \varphi_1(t, k, \alpha, n) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t} + \varphi_1(t, k, \beta, n) \end{pmatrix}$$

при $nh \leq t \leq (n+1)h$, $n = 1, 2, 3, \dots$, где

$$\varphi_1(t, k, \alpha, n) = \sum_{m=1}^n k^m e^{-\alpha(t-mh)} \cdot \frac{(t-mh)^m}{m!},$$

$$\varphi_2(t, k, \alpha, n) = \sum_{m=1}^n \left(\frac{k}{\alpha}\right)^m \left(\frac{1 - e^{-\alpha(t-mh)}}{\alpha} - e^{-\alpha(t-mh)} \cdot (t-mh) \right).$$

Теорема. Пусть:

1. Числа α , β , c , d и k таковы, что при всех $t > 0$

$$r(t) = \left[\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} + \varphi_2(t, k, \alpha, n) \right] c - \left[\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} + \varphi_2(t, k, \beta, n) \right] d > 0.$$

2. При некотором $T > 0$ имеет место включение

$$\pi\Phi(T)z_0 + \int_{-h}^0 \pi\Phi(T-s-h)Bz_0 ds \in S_{\rho(T)},$$

где $\pi: E \times E \times E \rightarrow E$ — оператор ортогонального проектирования; $S_{\rho(T)}$ — шар радиуса $\rho(T) = \int_0^T r(T-s)ds$ с центром в точке 0.

Тогда в игре (4) из любого начального положения $z_0 = \begin{pmatrix} z_{01} \\ z_{02} \\ z_{03} \end{pmatrix}$ возможно завершение преследования с оптимальным временем

$$T_0 = \min \left\{ T: \left\| \pi\Phi(T)z_0 + \int_{-h}^0 \pi\Phi(T-s-h)Bz_0 ds \right\| = \rho(T) \right\}.$$

Замечание 1. Можно показать, что

$$\begin{aligned} \pi\Phi(T)z_0 = & z_{01} + \left[\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} + \varphi_2(t, k, \alpha, n) \right] z_{02} - \\ & - \left[\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} + \varphi_2(t, k, \beta, n) \right] z_{03}, \end{aligned}$$

$$\pi\Phi(T-s-h)Bz_0 = \left[\frac{1 - e^{-\alpha(T-s-h)}}{\alpha} + \varphi_2(T-s-h, k, \alpha, n) \right] kz_{02} - \\ - \left[\frac{1 - e^{-\beta(T-s-h)}}{\beta} + \varphi_2(T-s-h, k, \beta, n) \right] kz_{03}.$$

Замечание 2. Если выполнено хотя бы одно из двух условий

1. $0 \leq T \leq h$, $c > d$ и $\frac{c}{\alpha} > \frac{d}{\beta}$;

2. $nh \leq T \leq (n+1)h$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\alpha = \beta$ и $c > d$,
то $r(T) > 0$.

Замечание 3. При $E = R^n$, $n \geq 2$, $k = 0$, $c > d$ и $\frac{c}{\alpha} > \frac{d}{\beta}$ из доказанной теоремы следует классический результат Л.С. Понтрягина [1, с. 327].

1. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980. Т. 112 (154), № 3. С. 307–331.
2. *Мухсинов Е.М.* К задаче преследования в квазилинейных дифференциальных играх запаздывающего типа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18, вып. 3. С. 328–336.

Механизмы стимулирования кооперации в конечно повторяющейся дилемме заклѳченного

Е. М. Парилина, А. М. Писарева

*Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный
университет*

e-mail: e.parilina@spbu.ru, st055836@student.spbu.ru

Д. Заккур

Монреаль, Высшая школа коммерции Монреаля

e-mail: georges.zaccour@gerad.ca

Рассмотрим игру дилемма заключенного двух лиц, повто-

ряющуюся T раз с выигрышами на каждом шаге:

	C	N
C	(a, a)	(c, b)
N	(b, c)	(d, d)

где действия C и N обозначают стратегии «сотрудничать» и «не сотрудничать» соответственно, $b > a > d > c$ и $2a > c + b$. Обозначим через $t = 1, \dots, T$ шаг игры, а через $\rho \in (0, 1)$ коэффициент дисконтирования, одинаковый для обоих игроков. Предполагаем, что каждый игрок максимизирует свой суммарный дисконтированный выигрыш. Наложим ограничение на значения параметров:

$$\rho > \frac{b - a}{b - d}. \quad (1)$$

Предположим, что игроки заключают соглашение, включающее два пункта:

1. Оба игрока используют стратегию ограниченного наказания в повторяющейся игре, предложенную в [6], согласно которой игроки придерживаются кооперативного поведения, если никто не отклонялся до текущего шага, и переключаются на стратегию N после первого отклонения на ограниченное число шагов, а после реализации наказания снова переключаются а кооперацию. В статье [6] определяется продолжительность наказания, если его можно осуществить.
2. Оба игрока соглашаются на реализацию схемы выплат вдоль кооперативной траектории. Подобные схемы выплат были предложены в работе [3] для динамических игр конечной продолжительности и в работе [4] для игр, разыгрываемых на деревьях событий.

В данной статье описываются свойства платежных схем. Основными свойствами, способствующими поддержке кооперации, являются *устойчивость к индивидуальным отклонениям* (SAID) и *динамическая индивидуальная рациональность* (DIR). Существование такой схемы не гарантировано, и в данной статье получены в явном виде условия её существования.

Платежные схемы, предложенные в данной работе, сочетают в себе кооперативный и некооперативные подходы к решению задачи нахождения механизмов устойчивой кооперации. Принципы устойчивой кооперации для динамических игр, включающие динамическую устойчивость, описаны в книге [7] и статье [5]. Они основаны на построении процедуры распределения дележа. Главное отличие предложенных в данной работе платежных схем от процедуры распределения дележа заключается в том, что платежи не строятся на основе кооперативного решения (ядро, значение Шепли и т.п.), как при построении процедуры распределения дележа, а основаны на вычислении наилучших ответов игроков вдоль кооперативной траектории, что связывает предложенные схемы с абсолютным равновесием в многошаговых играх [1]. Еще один подход к поддержанию кооперации в динамических играх предложен в работе [2].

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 22-01-00051.

1. *Chander P., Wooders M.* Subgame-perfect cooperation in an extensive game // *Journal of Economic Theory*. 2020. Vol. 187. Art. no. 105017.
2. *Kuzyutin D., Smirnova N.A.* Novel Payoff Distribution Procedure for Sustainable Cooperation in an Extensive Game with Payoffs at All Nodes // *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 13367 LNCS. 2022. P. 279–294.
3. *Parilina E.M., Zaccour G.* Payment schemes for sustaining cooperation in dynamic games // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2022. Vol. 139. Art. no. 104440.
4. *Parilina E.M., Zaccour G.* Payment schemes for sustaining cooperation in dynamic games played over event trees // *European Journal of Operational Research*. 2024. Vol. 313, no. 3. P. 1200–1216.
5. *Petrosjan L.A., Zenkevich N.A.* Conditions for sustainable cooperation // *Automation and Remote Control*. 2015. Vol. 76, no. 10. P. 1894–1904.
6. *Pisareva A.M., Parilina E.M.* Approximate equilibrium in a finitely repeated Prisoner's dilemma // *Doklady Mathematics*. 2024. Vol. 110 (suppl. 2). P. S383–S390.

7. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. Subgame consistent economic optimization: An advanced cooperative dynamic game analysis. Boston: Birkhauser, 2012.

Машина Дубинса с ограничением на управление в L_p при $p \in (1, 2]$: построение двумерного множества достижимости

В. С. Пацко, Г. И. Трубников, А. А. Федотов

*Екатеринбург, Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского
e-mail: patsko@imm.uran.ru*

В математической теории управления широко известной является нелинейная кинематическая модель Дубинса движения точечного объекта на плоскости. Две координаты задают положение объекта, третья координата определяет угол наклона вектора скорости. Величина скорости предполагается постоянной и полагается равной 1. Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u. \quad (1)$$

Начальный момент t_0 и начальное фазовое состояние $(x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0))^T$ считаем нулевыми. Если управление $u(t)$ на рассматриваемом промежутке $[0, t_f]$ стеснено условием $|u(t)| \leq \nu$, такое ограничение называется геометрическим. Для него известно [1] описание двумерного множества достижимости $\mathcal{G}$ на плоскости x, y в фиксированный момент окончания t_f . Представляет также интерес построение множества достижимости при интегральном ограничении

$$\int_0^{t_f} |u(t)|^p dt \leq \mu, \quad p \in (1, \infty), \quad \mu > 0.$$

В случае $p = 2$ аналитика построения описана в [2]. Используются принцип максимума Понтрягина (ПМП) из [3] с соответствующим условием трансверсальности, а также эллиптические функции Якоби. Движения, ведущие на границу множества $\mathcal{G}$, являются эластичками Эйлера (как и в задаче минимизации квадратичного интегрального функционала [4]).

Если $p \neq 2$, то опираемся на ПМП [3], однако пропадает возможность использования стандартных эллиптических функций Якоби. В последнее время разрабатывается теория p -эллиптических функций [5]. Возможно, что ее можно будет использовать для аналитического описания границы $\partial\mathcal{G}$ множества $\mathcal{G}$.

Цель работы — численное построение границы множества достижимости для случая $p \in (1, 2]$. Такой случай отличается [1, 4] от случая $p \in (2, \infty)$. Его исследование позволит в дальнейшем перейти к пределу при $p \rightarrow 1$ и рассмотреть принципиально важный случай $p = 1$.

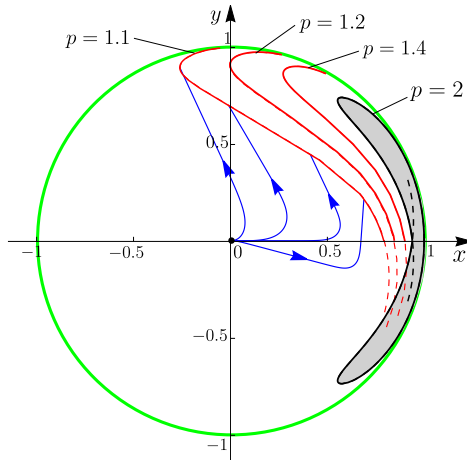


Рис. 1: Множества достижимости для $t_f = 1$, $\mu = 2.5$ и $p = 2, 1.4, 1.2, 1.1$

Известно [3], что любое управление, ведущее на $\partial\mathcal{G}$, является непрерывным. С учетом специфики системы (1) показываем, что оно изменяет знак не более одного раза. Такое свойство (утверждающее ПМП) кладем в основу построения кривой грубых необходимых условий, из точек которой только и может набираться

$\partial\mathcal{G}$. В силу симметрии множества $\mathcal{G}$ относительно оси x имеем две кривые $\mathcal{B}^*$ и $\mathcal{B}_*$. Построив их, удаляем точки на $\mathcal{B}^*$ с отрицательной (соответственно, на $\mathcal{B}_*$ с положительной) координатой по оси y . Оставшиеся дуги составляют границу множества $\mathcal{G}$.

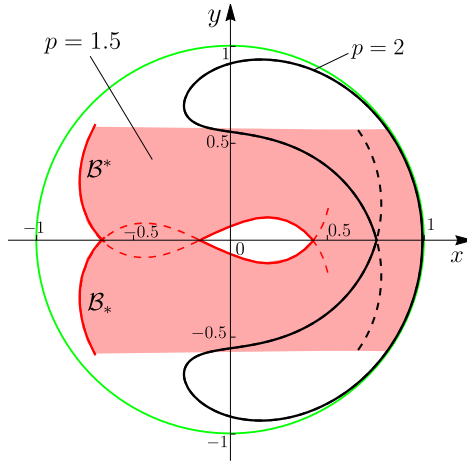


Рис. 2: Неодносвязное множество достижимости при $t_f=1$, $\mu=10$, $p=1.5$

На рис.1 показаны множества достижимости для $t_f = 1$, $\mu = 2.5$ и $p = 2, 1.4, 1.2, 1.1$. Очевидно, что каждое множество $\mathcal{G}$ лежит в круге радиусом $t_f = 1$. Граница $\partial\mathcal{G}$ при $p = 2$ изображена черной сплошной линией, а само множество $\mathcal{G}$ выделено заливкой. Пунктиром отмечены дуги кривых $\mathcal{B}^*$ и $\mathcal{B}_*$, лежащие во внутренности множества $\mathcal{G}$. При $p = 2$ построения делаются с использованием эллиптических функций Якоби. Они выполняются быстро и с хорошей точностью. Для $p < 2$ построения целиком численные и реализуются в пакете Wolfram. Показаны кривые $\mathcal{B}^*$. Их участки, асимптотически примыкающие к окружности радиусом 1, в силу требуемой “деликатности” счета, не просчитывались. Не показаны также в силу симметрии кривые $\mathcal{B}_*$. Для $p = 1.1$ отмечено несколько движений (p -эластик), ведущих на кривую $\mathcal{B}^*$ грубых необходимых условий.

Рис.2 сделан для случая $t_f = 1$, $\mu = 10$. Изображено множество $\mathcal{G}$ при $p = 2$ и фрагмент множества $\mathcal{G}$ при $p = 1.5$. Дуги кривых $\mathcal{B}^*$ и $\mathcal{B}_*$, лежащие во внутренности соответствующих мно-

жеств $\mathcal{G}$, отмечены пунктиром. Множество $\mathcal{G}$ при $p = 1.5$ (фрагмент выделен заливкой) не является односвязным. Участки кривых $\mathcal{B}^*$ и $\mathcal{B}_*$ для этого множества, асимптотически примыкающие к окружности радиусом 1, не показаны.

1. *Cockayne E.J., Hall G.W.C.* Plane Motion of a Particle Subject to Curvature Constraints // SIAM J. Control Optim. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 197–220.
2. *Трубников Г.И.* Аналитическое описание двумерного множества достижимости машины Дубинса с интегральным ограничением на управление // ТиСУ. 2025. № 4. (принята к печати)
3. *Гусев М.И.* О некоторых свойствах множеств достижимости нелинейных систем с ограничениями на управление в L_p // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 3. С. 99–112.
4. *Ардентов А.А., Сачков Ю.Л.* Решение задачи Эйлера об эластиках // АиТ. 2009. Вып. 4. С. 78–88.
5. *Miura T., Yoshizawa K.* Complete classification of planar p-elasticae // Annali di Matematica. 2024. Vol. 203. P. 2319–2356.

Нестационарная линейная задача группового преследования с простой матрицей и возможным нарушением в динамике

Н. Н. Петров, Е. С. Фомина

Ижевск, Удмуртский университет
e-mail: kma3@list.ru, katefo631@gmail.com

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n+1)$ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающий E . Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = f(t)y + v, \quad y(t_0) = y^0, \quad v \in V. \quad (1)$$

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = f(t)x_i + a_{\theta_i}u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in U_i. \quad (2)$$

Здесь $i \in I = \{1, \dots, n\}$, $y, x_i, u_i, v, y^0, x_i^0 \in \mathbb{R}^k$, U_i, V — выпуклые компакты $\mathbb{R}^k$, $f: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция, функции a_{θ_i} имеют вид

$$a_{\theta_i}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [\theta_i, \theta_i + h_i], \\ 1, & t \notin [\theta_i, \theta_i + h_i]. \end{cases}$$

Данные моменты θ_i можно рассматривать как моменты отказа управляющих устройств у преследователей P_i [1] или θ_i — моменты начала профилактических работ управляющих устройств у преследователей P_i . Величины $h_i \geq 0$ — время ремонта или время проведения профилактических работ. Терминальные множества M_i — выпуклые компакты $\mathbb{R}^k$, причем $z_i^0 \notin M_i$ для всех $i \in I$.

Введем новые переменные $z_i = x_i - y$ и перейдем от систем (1), (2) к новой системе

$$\dot{z}_i = f(t)z_i + a_{\theta_i}u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0, \quad u_i \in U_i, \quad v \in V. \quad (3)$$

Из определения функций a_{θ_i} следует, что в процессе устаревания поломки или в процессе проведения профилактических работ преследователи P_i не имеют возможности осуществлять поимку. Считается, что моменты θ_i ($i \in I$) неизвестны преследователям P_i ($i \in I$), и поломка или необходимость проведения профилактических работ может наступить в любой момент времени. Величины h_i ($i \in I$) известны всем участникам.

Пусть Ξ_i — однопараметрическое семейство отображений $\mathcal{F}_i(t, v_t(\cdot))$, определенных для каждого $t > t_0$ на множестве измеримых функций $v(\cdot)$, таких что $v(s) \in V$ для всех $s \geq t_0$, принимающих значения в U_i и обладающих свойством суперпозиционной измеримости: функция $u_i(t) = \mathcal{F}_i(t, v_t(\cdot))$ измерима при $t \geq t_0$ для произвольной измеримой функции $v(s)$, $s \geq t_0$.

Определение 1. Стратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i называется пара

$$\mathcal{U}_i = (\mathcal{F}_i^1(t, v_t(\cdot)), \mathcal{F}_i^{2\theta_i}(t, v_t(\cdot))),$$

где $\mathcal{F}_i^1(t, v_t(\cdot)) \in \Xi_i$, $\mathcal{F}_i^{2\theta_i}(t, v_t(\cdot)) \in \Xi_i$ для $\theta_i \geq 0$.

Решение задачи Коши (3) при фиксированных $\mathcal{U}_i$, $\theta_i > 0$ и измеримой функции $v(t) \in V$, $t \geq t_0$ понимается так.

При $t_0 \leq t \leq \theta_i$ оно совпадает с решением $w_i^1(t)$ следующей задачи Коши

$$\dot{w}_i^1(t) = f(t)w_i^1 + \mathcal{F}_i^1(t, v_t(\cdot)) - v(t), \quad w_i^1(t_0) = z_i^0.$$

При $t \geq \theta_i$ оно совпадает с решением $w_i^2(t)$ следующей задачи Коши

$$\dot{w}_i^2(t) = f(t)w_i^2 + a_{\theta_i}(t)\mathcal{F}_i^{2\theta_i}(t, v_t(\cdot)) - v(t), \quad w_i^2(\theta_i) = w_i^1(\theta_i).$$

Определение 2. Разностью по Минковскому множеств A и B называется множество

$$A * B = \{c: c + B \subset A\}.$$

Предположение 1. $0 \in U_i * V$, $F(t, t_0)z_i^0 \notin M_i$ для всех $i \in I$, $t \geq t_0$.

Предположение 2. Для каждого $i \in I$ существует момент $t_i > 0$ для которого для всех $\theta_i > t_0$, $t > \theta_i + h_i$ справедливо включение

$$\int_{\theta_i}^{\theta_i+h_i} F(t, s)V ds \subset \int_{\theta_i+h_i}^{\theta_i+h_i+t_i} F(t, s)(U_i * V) ds.$$

Определение 3. В игре $\Gamma(n+1)$ происходит поимка, если существуют $T_0 > 0$, стратегии $\mathcal{U}_i$ ($i \in I$) преследователей P_i ($i \in I$), такие что для любого вектора $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $\theta_i + h_i + t_i \leq T_0$, любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется номер $l \in I$, для которого $z_l(T_0) \in M_l$.

Введем следующие обозначения: $F(t, s) = \exp \int_s^t f(u) du$,

$$\lambda(t, z_i^0, v) = \sup\{\lambda \geq 0: \lambda(M_i - F(t, t_0)z_i^0) \cap (U_i - v) \neq \emptyset,$$

$$\delta(t) = \min_{v \in V} \max_i \lambda(t, z_i^0, v).$$

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1, 2 и для любого числа $\gamma > 0$, любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^1$, $\mu(E) \leq \gamma$ справедливо

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \delta(t) \int_{E_t} F(t, s) ds = +\infty,$$

где $E_t = [t_0, t] \setminus E$, $\mu(E)$ — мера Лебега множества E .

Тогда в игре $\Gamma(n+1)$ происходит поимка.

Теорема 2 (см. [2]). Пусть выполнены следующие условия:

1. $f(t) = 0$ для всех $t \geq 0$, $0 \in U_i \overset{*}{\dashv} V$ для всех $i \in I$.
2. Для каждого $i \in I$ существует $t_i > 0$, для которого справедливо включение $Vh_i \subset (U_i \overset{*}{\dashv} V)t_i$.
3. $\min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(z_i^0, v) > 0$, где $\lambda(z_i^0, v) = \sup\{\lambda \geq 0: \lambda(M_i - z_i^0) \cap (U_i - v) \neq \emptyset\}$.

Тогда в игре $\Gamma(n+1)$ происходит поимка.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

1. Никольский М.С., Пен Чжэ. Дифференциальная игра преследования с нарушениями в динамике // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1923–1927.
2. Petrov N.N., Fomina E.S. A problem of simple group pursuit with possible dynamical disturbance in dynamics and phase constraints // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35, № 1. С. 82–95.

О дробной управляемой системе с обратной связью в виде процесса выметания

Г. Г. Петросян

Воронеж, ФГБОУ ВО ВГПУ

e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Пусть E — банахово пространство и H — гильбертово пространство. Рассматривается задача управляемости для системы,

описываемой следующим дифференциальным включением дробного порядка и обратной связью в виде процесса выметания:

$${}^{GC}D_0^\alpha x(t) \in Ax(t) + F(t, x_t, x(t), y(t)) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$x(s) = \vartheta(s), \quad s \in [-h, 0], \quad (2)$$

$$-y'(t) \in N_{C(t)}(y(t)) + g(t, x(t), y(t)) + \rho y(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$y(0) = y_0 \in C(0), \quad (4)$$

$$x(T) = x_1, \quad (5)$$

где ${}^{GC}D_0^\alpha$ — дробная производная Герасимова–Капуто порядка $\alpha \in (0, 1)$; $A: D(A) \subset E \rightarrow E$ — линейный замкнутый оператор, порождающий C_0 -полугруппу $\{\mathcal{U}(t), t \geq 0\}$ в пространстве E ; $F: [0, T] \times C([-h, 0]; E) \times E \times H \rightrightarrows E$ — многозначное отображение, и функция x_t описывает предысторию решения до момента $t \in [0, T]$, т.е. $x_t(s) = x(t + s)$, $s \in [-h, 0]$, $0 < h < T$. Функция управления $u(\cdot)$ принимает свои значения в пространстве $L^2([0, T]; U)$, где U — банахово пространство управлений, $B: U \rightarrow E$ — линейный ограниченный оператор. Далее, $\rho > 0$ — константа, $C: [0, T] \rightrightarrows H$ — мультиотображение с выпуклыми замкнутыми значениями, $N_{C(t)}(y)$ — нормальный конус для $C(t) \subset H$, определенный как

$$N_{C(t)}(y) = \begin{cases} \{\xi \in H : \langle \xi, c - y \rangle \leq 0 \quad \forall c \in C(t)\}, & \text{если } y \in C(t), \\ \emptyset, & \text{если } y \notin C(t), \end{cases}$$

$x_1 \in E$, $y_0 \in H$, $g: [0, T] \times E \times H \rightarrow H$ — нелинейное отображение и $\vartheta \in C([-h, 0]; E)$.

Задача управляемости формулируется следующим образом: для заданных ϑ, x_1 рассматривается существование решения $x \in C([-h, T]; E)$, $y \in C([0, T]; H)$ системы (1)–(5) и управления $u \in L^2([0, T]; U)$ таких, что выполняются условия (2), (4) и (5).

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 22-71-10008.

1. *Афанасова М.С., Обуховский В.В., Петросян Г.Г.* Об обобщенной краевой задаче для управляемой системы с обратной связью и бесконечным запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, № 2. С. 167–185.
2. *Петросян Г.Г., Афанасова М.С.* О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2017. № 1. С. 135–151.
3. *Петросян Г.Г.* О сопряженных операторах для операторов дробного дифференцирования // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25, № 131. С. 284–289.
4. *Петросян Г.Г.* О краевой задаче для класса дифференциальных уравнений дробного порядка типа Ланжевена в банаховом пространстве // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32, № 3. С. 415–432.
5. *Afanasova M.S., Obukhovskii V.V., Petrosyan G.G.* A Controllability Problem for Causal Functional Inclusions with an Infinite Delay and Impulse Conditions // Advances in Systems Science and Applications. 2021. Vol. 21, no. 3. P. 40–62.
6. *Kamenskii M.I., Obukhovskii V.V., Petrosyan G.G.* A Continuous Dependence of a Solution Set for Fractional Differential Inclusions of an Order $q \in (1, 2)$ on Parameters and Initial Data // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, no. 8. P. 3331–3342.
7. *Kamenskii M.I., Petrosyan G.G.* On a controllability problem for a feedback control system governed by a semilinear differential equation and a sweeping process // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2024. Vol. 132. Art. no. 107889.
8. *Kamenskii M., Petrosyan G., Raynaud de Fitte P., Yao J.C.* On a periodic boundary value problem for fractional quasilinear differential equations with a self-adjoint positive operator in Hilbert spaces // Mathematics. 2022. Vol. 10, iss. 2. P. 219–231.
9. *Obukhovskii V., Petrosyan G., Wen C.F., Bocharov V.* On semilinear fractional differential inclusions with a nonconvex-valued right-hand side in Banach spaces // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. 2022. Vol. 6, no. 3. P. 185–197.

Об условиях равномерной полной управляемости линейных гибридных систем

С. Н. Попова, Э. А. Фахразиева

Ижевск, Удмуртский государственный университет

e-mail: udsu.popova.sn@gmail.com, elmiraf12@mail.ru

Рассмотрим линейную управляемую гибридную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k) + B_{11}(t)u(t) + B_{12}(k)v(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k) + B_{21}(k)u(k) + B_{22}(k)v(k), \end{cases} \quad (1)$$

где $t \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0 \doteq \{0, 1, 2, \dots\}$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u \in \mathbb{R}^{m_1}$, $v \in \mathbb{R}^{m_2}$; функции $A_{11}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $B_{11}: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$ и управление $u: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ кусочно непрерывны, могут иметь лишь разрывы первого рода и непрерывны справа в точках разрыва; функции $A_{j2}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times n_2}$, $B_{j2}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_j \times m_2}$ ($j = 1, 2$), $A_{21}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$, $B_{21}: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2 \times m_1}$ и управление $v: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ произвольны. Предполагаем, что нормы всех матриц ограничены на области определения. Обозначим $n = n_1 + n_2$, $m = m_1 + m_2$.

Под решением системы (1) при выбранных управлениях $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ понимаем функцию

$$z = z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

такую, что $x(t)$ и $y(k)$ удовлетворяют системе (1) при всех $t \in (k, k+1)$ и каждом $k \in \mathbb{N}_0$, при этом функция $x(t)$ непрерывна на $[0, +\infty)$.

Определение. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие $\vartheta \in \mathbb{N}$ и $L > 0$, что для каждого $l \in \mathbb{N}_0$ и любых $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$ найдутся допустимые управления $u: [l, l+\vartheta) \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$, $v: [l, l+\vartheta-1] \cap \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ такие, что решение $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (1) с начальными условиями $x(l) = x_0$, $y(l) = y_0$ и с выбранными $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ удовлетворяет

равенствам $x(l + \vartheta) = 0$, $y(l + \vartheta) = 0$, при этом

$$\sup_{t \in [l, l + \vartheta]} \|u(t)\| \leq L \max\{\|x_0\|, \|y_0\|\},$$

$$\max_{k \in [l, l + \vartheta - 1] \cap \mathbb{N}_0} \|v(k)\| \leq L \max\{\|x_0\|, \|y_0\|\}.$$

Выберем в системе (1) управления $u(t) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{m_1}$ и $v(k) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{m_2}$, получим свободную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k). \end{cases} \quad (2)$$

Пусть $X(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t)$. Положим

$$Z(k+1, k) = \begin{pmatrix} X(k+1, k) & \int_k^{k+1} X(k+1, s) ds \cdot A_{12}(k) \\ A_{21}(k) & A_{22}(k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$Z(k, l) = Z(k, k-1)Z(k-1, k-2) \dots Z(l+1, l), \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad k > l.$$

Тогда для произвольного решения $z(\cdot)$ системы (2) имеет место равенство

$$z(k) = Z(k, l)z(l), \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \quad k > l.$$

Будем называть матрицу $Z(k, l)$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $k > l$, *матрицей Коши* гибридной системы (2) в целочисленные моменты времени. Будем предполагать, что для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ матрица $Z(k+1, k)$ обратима, и найдется такое $a > 0$, что $\sup_{k \in \mathbb{N}_0} \|Z^{-1}(k+1, k)\| \leq a$.

Определим матрицы

$$B(j) = \begin{pmatrix} \int_j^{j+1} X(j+1, \tau) B_{11}(\tau) d\tau & \int_j^{j+1} X(j+1, \tau) d\tau B_{12}(j) \\ B_{21}(j) & B_{22}(j) \end{pmatrix},$$

$$W(l, k) = \sum_{j=l}^{k-1} Z(l, j+1)B(j)B^*(j)Z^*(l, j+1), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad l < k.$$

Будем называть матрицу $W(l, k)$ *матрицей управляемости* (матрицей Калмана) системы (1) на отрезке $[l, k]$.

Теорема. Если существуют $\gamma > 0$ и $\vartheta \in \mathbb{N}$ такие, что при всех $l \in \mathbb{N}_0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\xi^* W(l, l + \vartheta) \xi \geq \gamma \|\xi\|^2,$$

то система (1) равномерно вполне управляема.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

Об оценках характеристик сбора ресурса методом построения положительно инвариантных множеств

Л. И. Родина

*Владимир, Владимирский государственный университет
имени А. Г. и Н. Г. Столетовых
e-mail: LRodina67@mail.ru*

В докладе представлено продолжение исследований [1, 2], в которых рассматриваются вопросы оптимального сбора ресурса для однородной стохастической популяции. Предложено решение задачи оптимизации характеристик сбора ресурса при помощи построения положительно инвариантных множеств, в которых находятся траектории системы при всех значениях случайных параметров. Используется понятие функции Ляпунова относительно множества, введенное Евгением Леонидовичем Тонковым в работах [3, 4], а также полученные им условия положительной инвариантности заданных множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений.

Рассматривается модель структурированной популяции, состоящей из отдельных видов $x_1, \dots, x_n$, либо разделенной на n возрастных групп. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации динамика популяции задана системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n: x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}. \quad (1)$$

Здесь вектор-функция f и ее производные $\partial f_i / \partial x_j$ непрерывны для всех $x \in \mathbb{R}_+^n$. Обозначим через $\varphi(t, x)$ решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Будем считать, что данные решения являются неотрицательными при любых неотрицательных начальных условиях, то есть выполнено условие квазиположительности.

Предполагаем, что в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$ можно добывать случайную долю ресурса

$$\omega(k) = (\omega_1(k), \dots, \omega_n(k)) \in \Omega \subseteq [0, 1]^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и имеется возможность остановить процесс сбора, если величины $\omega_1(k), \dots, \omega_n(k)$ окажутся достаточно большими — не меньше, чем заданные значения $(u_1, \dots, u_n) = u \in [0, 1]^n$. В этом случае доля добываемого ресурса может быть уменьшена до

$$\ell(k) = (\ell_1(k), \dots, \ell_n(k)) \in [0, 1]^n,$$

$$\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

за счет чего размер следующего сбора может быть увеличен. Таким образом, рассматриваем *эксплуатируемую популяцию*, динамика которой задана управляемой системой

$$\dot{x}_i = f_i(x), \quad t \neq kd; \quad x_i(kd) = (1 - \ell_i(k)) \cdot x_i(kd - 0), \quad (2)$$

где $x_i(kd - 0)$ и $x_i(kd)$ — количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$. Предполагаем, что решения данной системы непрерывны справа. Описание вероятностной модели $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, параметризующей систему (2), приведено в работе [1].

Пусть D — компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, $\text{fr}D$ — граница D ; $D^r = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, D) \leq r\}$, где $r > 0$, $\rho(x, D) \doteq \min_{y \in D} \|x - y\|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества D в $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Определение 1. Функция $V: D^r \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией Ляпунова* (относительно множества D), если она локально липшицева, $V(x) = 0$ для всех $x \in \text{fr}D$ и $V(x) > 0$ для всех $x \in D^r \setminus D$ (см. [3]).

Будем искать положительно инвариантное множество для системы (2), которое является прямоугольником в $\mathbb{R}_+^n$, запишем его в виде

$$D = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \delta_i \leq x_i \leq \Delta_i, i = 1, \dots, n\}, \quad \text{где } 0 < \delta_i < \Delta_i. \quad (3)$$

Представим прямоугольник D в виде пересечения двух множеств:

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_i \leq \Delta_i, i = 1, \dots, n\},$$

$$D_2 = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_i \geq \delta_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Теорема 1. Пусть задано $u \in [0, 1]^n$ и выполнены следующие условия:

- 1) $f_i(x) \leq 0$ при $x_i \geq \Delta_i, i = 1, \dots, n$;
- 2) если $x \in \text{fr} D_2 \cap D$, то $\varphi(d, (1 - u)x) \in D_2$.

Тогда прямоугольник D является положительно инвариантным множеством относительно системы (2).

Обозначим через $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ начальное количество ресурса, $X_i(k) = x_i(kd - 0)$ — количество ресурса i -го вида до сбора в момент kd , $C_i \geq 0$ — стоимость ресурса i -го вида, $i = 1, \dots, n$; $\bar{\ell} \doteq (\ell(1), \dots, \ell(k), \dots)$. Рассмотрим следующую характеристику сбора возобновляемого ресурса.

Определение 2. Средней временной выгодой от извлечения ресурса называется характеристика

$$H_*(\bar{\ell}, x(0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) \ell_i(j).$$

Обозначим через $M\ell_i$ математическое ожидание случайных величин $\ell_i, i = 1, \dots, n$.

Теорема 2. Предположим, что прямоугольник (3) является положительно инвариантным относительно системы (2). Тогда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ справедливы оценки

$$\sum_{i=1}^n C_i \delta_i M\ell_i \leq H_*(\bar{\ell}, x(0)) \leq \sum_{i=1}^n C_i \Delta_i M\ell_i.$$

Предложенным методом можно также получить оценки, выполненные с вероятностью единица, для другой характеристики сбора ресурса — суммарного дохода с учетом дисконтирования.

1. *Родина Л.И.* Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2018. Т. 28, № 1. С. 48–58.
2. *Родина Л.И.* Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2018. Т. 28, № 2. С. 213–221.
3. *Панасенко Е.А., Тонков Е.Л.* Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.
4. *Родина Л.И., Тонков Е.Л.* О множестве достижимости управляемой системы без предположения компактности геометрических ограничений на допустимые управления // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2012. Т. 4. С. 68–79.

О конструктивном исследовании задач управления для динамических моделей с кусочно-линейным запаздыванием

А. Н. Румянцев

*Пермь, Пермский государственный национальный
исследовательский университет
e-mail: arumyanzev@gmail.com*

В докладе показывается, как на основе предложенного автором способа точного построения матрицы Коши для системы дифференциальных уравнений с кусочно-линейным запаздыва-

нием [2], может быть решена следующая задача управления [1]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \sum_{i=1}^n p_i(t) x[h_i(t)] + b(t)u(t) &= 0, \quad t \in [0, T], \\ x(\xi) &= 0, \xi < 0, \quad x(0) = 0, \\ \ell_j x &\stackrel{\text{def}}{=} \psi_j x(0) + \int_0^T \varphi_j(t) \dot{x}(t) dt = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $p_i, b, \varphi_j: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — кусочные многочлены с рациональными коэффициентами, $h_i: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — кусочно-линейные функции с рациональными коэффициентами, $h_i(t) < t$, $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — квадратично суммируемая функция, ψ_j, α_j — рациональные числа.

На основании представления $x(t) = \int_0^t C(t, s) [-b(s)u(s)] ds$, где $C(t, s)$ — функция Коши уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \sum_{i=1}^n p_i(t) x[h_i(t)] &= f(t), \quad t \in [0, T], \\ x(\xi) &= 0, \xi < 0, \end{aligned} \quad (2)$$

получаем, что функция управления $u(\cdot)$ есть решение интегрального уравнения

$$\int_0^T M(t) u(t) dt = \alpha, \quad (3)$$

где $M(\cdot) = \text{col} \{M_1(\cdot), \dots, M_{\mathcal{N}}(\cdot)\}$, $\alpha = \text{col} \{\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathcal{N}}\}$, $M_j(t) = -b(t)(\varphi_j(t) + \int_t^T C'_\tau(\tau, t) \varphi_j(\tau) d\tau)$, $t \in [0, T]$.

Управление u будем искать в виде $u(t) = M^\top(t) d$, $t \in [0, T]$, $d \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$. Вектор d есть решение системы линейных алгебраических уравнений

$$W \times d = \alpha, \quad W = \int_0^T M(t) M^\top(t) dt.$$

Таким образом в случае, если $\det W \neq 0$ (что является критерием разрешимости задачи (1) для всех $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$), окончательно получаем

$$u(t) = M^\top(t) W^{-1} \alpha, \quad t \in [0, T].$$

Для исследования задачи (1) был разработан программный комплекс, реализующий следующее:

- построение функции Коши $C(t, s)$,
- формирование функции $M(t)$ и матрицы W ,
- проверка обратимости матрицы W ,
- в случае обратимости матрицы W , построение функции управления $u(t)$ и решения $x_u(t)$ задачи (1), включая проверку выполнения целевых условий.

С помощью указанного программного комплекса была доказана разрешимость задачи (1) и построены функция u и x_u для следующих значений параметров уравнения и целевых функций:

$$\begin{aligned} n &= 2, \quad T = 4, \\ b(t) &= \begin{cases} -t + \frac{2}{3}, & t \in [0, 1), \\ -t, & t \in (1, 3), \\ t, & t \in (3, 4], \end{cases} \\ p_1(t) &= \begin{cases} -2t + 1, & t \in [0, 2), \\ \frac{1}{3}t, & t \in (2, 3), \\ -\frac{1}{2}t, & t \in (3, 4], \end{cases} & p_2(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 2), \\ -t + 2, & t \in (2, 4], \end{cases} \\ h_1(t) &= \begin{cases} \frac{14}{15}t - \frac{14}{15}, & t \in [1, 2), \\ -\frac{7}{8}t + \frac{29}{8}, & t \in (2, 3], \\ -1, & t \notin [1, 3], \end{cases} & h_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [2, 3), \\ 2, & t \in (3, 4], \\ -1, & t \notin [2, 4]. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x(1) &= 4, & x(2) &= -4, & x(3) &= 8, & x(4) &= 0, \\ 2x(1) - x(2) + \frac{3}{2}x(3) + \int_0^3 t^2 x(t) dt + \int_2^4 (3-t)x(t) dt &= 15. \end{aligned} \quad (5)$$

Для этого примера определитель матрицы W имеет значение

$$\det W = \frac{218159987811629458556307176271007164499824615225086474569471}{4155204350494579229365867965421977600000000000000000000}.$$

Управление u , решающее предложенную задачу, и соответствующая траектория x_u представлены на Рис. 1.

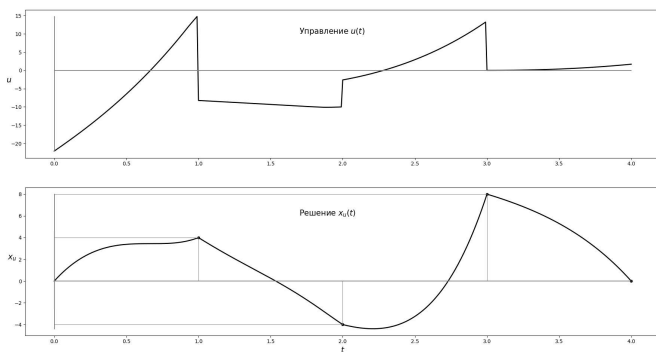


Рис. 1

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
2. *Rumyantsev A.N.* On exact constructing the Cauchy matrix for a system of linear differential equations with delay // Functional Differential Equations. 2024. Vol. 31, no. 3–4. P. 255–273.

К прямому методу программных итераций в случае конечного числа помех

Д. А. Серков

Екатеринбург, ИММ УрО РАН

e-mail: d.a.serkov@gmail.com

Введение. Рассматривается проблема построения неупреждающих многозначных селекторов (мультиселекторов) заданных многозначных отображений (МО). В задачах управления неупреждающие МО выступают как многозначные неупреждающие стратегии управления; последние используются в форма-

лизации дифференциальной игры, которая при условиях информационной согласованности эквивалентна позиционной формализации Н. Н. Красовского, в рамках которой Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным установлена теорема об альтернативе в дифференциальной игре сближения – уклонения. Предлагаемая процедура восходит к методу программных итераций А. Г. Ченцова, применявшемуся для построения в дифференциальной игре стабильных мостов, играющих главную роль в теореме об альтернативе, и функции цены. На их базе строились многозначные неупреждающие стратегии игроков. В дальнейших работах рассмотрена и «прямая» версия метода программных итераций [1], где многозначные неупреждающие стратегии игроков непосредственно определяются в виде пределов программных итерационных процедур, заданных условиями рассматриваемой дифференциальной игры.

В настоящей работе развивается прямая версия метода программных итераций (см. подробное изложение в [2, 3]) с упором на случай конечного числа помех, в котором удается (см. [4]) построить конечношаговый алгоритм выделения наибольшего неупреждающего мультиселектора заданного МО.

Определения и основные конструкции. В обозначениях и определениях будем следовать упомянутой работе [4]. Фиксируем непустые множества X , Y , и $T \triangleq [t_0, \vartheta]$, а также (непустые) подмножества $\Omega \in \mathcal{P}'(Y^T)$, $Z \in \mathcal{P}'(X^T)$ и семейство $\mathcal{T} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(T))$ вида $\mathcal{T} \triangleq \{[t_0, \tau) \mid \tau \in T\}$ — цепь непустых подмножеств T .

Введем на $\mathcal{P}(Z)^\Omega$ — рассматриваемом множестве МО из Ω в $\mathcal{P}(Z)$ — частичный порядок $\sqsubseteq$, полагая для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{P}(Z)^\Omega$: $(\alpha_1 \sqsubseteq \alpha_2) \Leftrightarrow (\alpha_1(\omega) \subset \alpha_2(\omega) \ \forall \omega \in \Omega)$.

При любых $\alpha \in \mathcal{P}(Z)^\Omega$ и $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{T})$ назовем МО α $\mathcal{H}$ -неупреждающим (частично неупреждающим), если для любых $\omega, \omega' \in \Omega$ и $A \in \mathcal{H}$

$$((\omega \mid A) = (\omega' \mid A)) \Rightarrow ((\alpha(\omega) \mid A) = (\alpha(\omega') \mid A)). \quad (1)$$

($\mathcal{T}$ -неупреждающие МО будем называть *неупреждающим*). Обозначим $\mathbf{N}_{(\mathcal{H})}[\alpha]$ множество всех $\mathcal{H}$ -неупреждающих мультиселекторов α , а $\langle \alpha \rangle_{\mathcal{H}}$ — их $\sqsubseteq$ -наибольший элемент [4, лемма 3.2].

Конкретизируем алгоритм построения $\langle \alpha \rangle_{\mathcal{H}}$ при заданном конечном $\mathcal{H} \triangleq \{H_1 \subset \dots \subset H_k\}$ на основе представления [4, (4.29)]:

$$\begin{aligned} \langle \alpha \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \dots \langle \alpha \rangle_{H_k} \dots \rangle_{H_1}, \\ \langle \beta \rangle_H(\omega) &\triangleq \{z \in \beta(\omega) \mid (z \mid H) \in \bigcap_{\omega' \in \Omega(\omega \mid H)} (\beta(\omega') \mid H)\} \end{aligned} \quad (2)$$

Так как важным требованием к искомому селектору является его непустозначность, удобно на каждом шаге вычисления суперпозиции (2) и для каждого класса эквивалентности $\Omega(\omega \mid H)$, $\omega \in \Omega$, проверять непустоту множества $\bigcap_{\omega' \in \Omega(\omega \mid H)} (\beta(\omega') \mid H)$, $H \in \mathcal{H}$, что в силу [4, (4.4)] эквивалентно выполнению неравенств $\langle \beta \rangle_H(\omega) \neq \emptyset$, $\omega \in \Omega$. При этом на каждом шаге в силу неограниченного количества помех требуется, вообще говоря, неограниченный объем вычислений.

В случае конечного числа помех для многих практически значимых случаев выполняется [4, лемма 3.1], в силу которой неупреждаемость эквивалентна $\mathcal{T}_\Omega$ -неупреждаемости, где

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\Omega &\triangleq \{\bar{s}_\Omega(\omega, \omega') : \omega, \omega' \in \Omega\}, \bar{s}_\Omega(\omega, \omega') \triangleq \bigcup_{H \in \mathbf{s}_\Omega(\omega, \omega')} H, \\ \mathbf{s}_\Omega(\omega, \omega') &\triangleq \{H \in \mathcal{T} \mid (\omega \mid H) = (\omega' \mid H)\}. \end{aligned}$$

В этом случае при построении неупреждающего мультиселектора не только количество шагов в суперпозиции (2) конечно, но и каждый из них требует не более конечного числа операций теоретико-множественного характера над элементами из $\mathcal{P}(\Omega)$ и $\mathcal{P}(\mathbf{Z})$.

На примере задачи оптимизации гарантии в классе неупреждающих стратегий рассмотрим способ сведения поиска оптимальной неупреждающей стратегии к задаче линейного программирования: пусть дана скалярная управляемая система

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta] \triangleq [0, 3], \quad x(0) = 0,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}$, управление u и помеха v — борелевские функции, удовлетворяющие мгновенным ограничениям $u(t) \in P \triangleq [-1, 1]$, $v(t) \in Q \triangleq \{-1, 0, 1\}$, $t \in T$. Пусть множество $\mathbf{V}$ допустимых

помех состоит из трех функций, $\mathbf{V} \triangleq \{v_1, v_2, v_3\}$:

$$v_1(t) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, 1] \cup (2, 3], \\ 1, & \text{если } t \in (1, 2], \end{cases} \quad v_2(t) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, 1], \\ -1, & \text{если } t \in (1, 3], \end{cases}$$

$$v_3(t) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, 1] \cup (2, 3], \\ -1, & \text{если } t \in (1, 2]. \end{cases}$$

Обозначим через $x(\cdot, u, v)$ решение задачи Коши при заданных $u \in \mathbf{U}$ и $v \in \mathbf{V}$. Задача управления: выбором неупреждающей многозначной стратегии минимизировать показатель $J(u, v) \triangleq -|x(3; u, v)|$, $u \in \mathbf{U}$, $v \in \mathbf{V}$.

Для $\rho < 0$ построим $\sqsubseteq$ -наибольшее МО $\alpha_\rho \in \mathcal{P}(\mathbf{U})^{\mathbf{V}}$ откликов управления на помеху вида: $\alpha_\rho(v) \triangleq \{u \in \mathbf{U} \mid J(u, v) \leq \rho\}$, $\forall v \in \mathbf{V}$. Применяя к α_ρ преобразование (2), получим свойство неупреждаемости мультиселектора $\langle \alpha_\rho \rangle_{\mathcal{H}}$, $\mathcal{H} = \{[0, 1], [0, 2]\}$, выраженное в терминах системы линейных неравенств для переменных I_H^v и q , где I_H^v имеют смысл интегралов от искомым управлений — $I_H^v \triangleq \int_H u(s)ds$, $u \in \langle \alpha_\rho \rangle_{\mathcal{H}}(v)$ — при различных $H \in \mathcal{H}$ и $v \in \mathbf{V}$. Полагая переменную ρ подлежащей минимизации, ищем решение этой системы неравенств методами линейного программирования. В соответствующем решении найденное значение $\bar{\rho} = -3$ дает нам оптимальный гарантированный результат рассмотренной задачи, а значения I_H^v — описание в интегральной форме $\sqsubseteq$ -наибольшей оптимальной неупреждающей стратегии управления.

1. Ченцов А.Г. Итерационная реализация неупреждающих многозначных отображений // Докл. РАН. 1997. Т. 357, № 5. С. 595–598.
2. Ченцов А.Г. Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций. I // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 4. С. 470–480.
3. Ченцов А.Г. Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций. II // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 5. С. 679–688.
4. Serkov D.A. On the construction of partially non-anticipative multiselector and its application to dynamic optimization problems // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. 2024. Т. 34, no. 3. P. 525–534.

Оптимальная аппроксимация предельных множеств достижимости линейных дискретных систем при ограниченных вычислительных ресурсах

А. В. Симкина

*Москва, Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)*

e-mail: abv1998@yandex.ru

В данной работе рассматривается развитие принципиально нового подхода к численному моделированию предельных множеств управляемости и достижимости на основе принципа сжимающих отображений [2, 3] для случая комплексно-сопряженных собственных значений матрицы системы. Предлагается аппроксимировать предельные множества достижимости и 0-управляемости аналогичными областями для некоторой вспомогательной периодической системы, которые могут быть построены явно [1]. Точность приближения в смысле расстояния Хаусдорфа оценивается при помощи представления всех рассматриваемых множеств в качестве неподвижных точек сжимающих отображений. В данной работе проведён численный анализ зависимости погрешности внешней оценки предельного множества при ограниченных вычислительных ресурсах, что позволяет определить оптимальное значение параметра, характеризующего наиболее точную оценку.

Рассматривается n -мерная линейная автономная почти периодическая дискретная система управления $(A, \mathcal{U})$ с ограниченным управлением

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\end{aligned}\tag{1}$$

где $x(k), u(k) \in \mathbb{R}^n$ — векторы состояния и управления соответственно, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое компактное множество допустимых значений управления, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица системы (1). Предполагается, что $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, все собственные значения A являются комплексно-сопряженными, т.е. $n = 2m$, существуют невырожденная матрица $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и числа $r_1, \dots, r_m > 0$, $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in$

$[0; 2\pi)$ такие, что

$$A = S \text{diag}(r_1 A_{\varphi_1}, \dots, r_m A_{\varphi_m}) S^{-1}, \quad A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Для системы (1) исследуется задача построения предельных множеств достижимости $\mathcal{Y}_{\infty}$ и 0-управляемости $\mathcal{X}_{\infty}$, где

$$\mathcal{Y}_{\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : \\ \text{если } x_0 = 0, \text{ то } x(N) = x\}, \quad (3)$$

$$\mathcal{X}_{\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : \\ \text{если } x_0 = x, \text{ то } x(N) = 0\}. \quad (4)$$

Известен подход, основанный на аппарате сжимающих отображений и декомпозиции, который позволяет построить внешние оценки множеств (3) и (4) с априорной погрешностью в смысле ле расстояния Хаусдорфа.

Теорема. Пусть для системы (1) выполняется условие (2), $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклые компакты такие, что $S^{-1}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m$, для всех $i = \overline{1, m}$ числа $\hat{\varphi}_i \in [0; 2\pi)$ удовлетворяют условию $\hat{\varphi} = 2\pi \frac{K'_i}{K''_i}$, $K'_i \in \mathbb{Z}$, $K''_i \in \mathbb{N}$. Тогда

1. если $r_1, \dots, r_m < 1$, то

$$\mathcal{Y}_{\infty} \subset S \bigotimes_{i=1}^m \left(\hat{\mathcal{Y}}_{i,\infty} + \mathcal{B}_{R_i}(0) \right), \quad \hat{\mathcal{Y}}_{i,\infty} = \frac{1}{1 - r^{K''_i}} \sum_{k=0}^{K''_i-1} r_i^k A_{k\hat{\varphi}_i} \mathcal{U}_i,$$

$$R_i = \frac{2r_i}{1 - r_i} \left| \sin \left(\frac{\varphi_i - \hat{\varphi}_i}{2} \right) \right| \max_{y \in \hat{\mathcal{Y}}_{i,\infty}} \|y\|,$$

2. если $r_1, \dots, r_m > 1$, то

$$\mathcal{X}_{\infty} \subset S \bigotimes_{i=1}^m \left(\hat{\mathcal{X}}_{i,\infty} + \mathcal{B}_{R_i}(0) \right),$$

$$\hat{\mathcal{X}}_{i,\infty} = \frac{1}{1 - r^{-K''_i}} \sum_{k=1}^{K''_i} -r_i^{-k} A_{-k\hat{\varphi}_i} \mathcal{U}_i,$$

$$R_i = \frac{2}{r_i - 1} \left| \sin \left(\frac{\varphi_i - \hat{\varphi}_i}{2} \right) \right| \left(\max_{x \in \mathcal{X}_{i,\infty}} \|x\| + \max_{u \in \mathcal{U}_i} \|u\| \right).$$

Точность аппроксимаций, получаемых в соответствии с этой теоремой, определяется величинами $R_1, \dots, R_m$. Можно добиться сколь угодно малого их значения за счёт выбора чисел $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_m$, однако на практике, как правило, возможные значения K_i'' ограничены некоторым значением $N_{\max} \in \mathbb{N}$. По этой причине оказывается актуальной следующая задача для фиксированных $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^2$, $\varphi \in [0; 2\pi)$, $r > 0$:

$$R \rightarrow \min_{0 \leq K' < K'' \leq N_{\max}}. \quad (5)$$

Решить данную задачу в общем случае проблематично, в связи со сложной зависимостью $\hat{\mathcal{Y}}_\infty$ и $\hat{\mathcal{X}}_\infty$ от $\hat{\varphi}$, но можно в качестве ее приближения рассмотреть (K'_0, K''_0) — решение вспомогательной задачи

$$\left| \frac{\varphi - 2\pi K' / K''}{2} \right| \rightarrow \min_{0 \leq K' < K'' \leq N_{\max}}.$$

Зафиксируем значение K'' и определим $K'_{opt}(K'')$:

$$K'_{opt}(K'') = \arg \min_{0 \leq K' < K''} \left| \frac{\varphi - 2\pi K' / K''}{2} \right| = \left\lceil \frac{\varphi K''}{2\pi} \right\rceil,$$

где $\lceil t \rceil$ — округление числа t к ближайшему целому числу. Тогда значение K''_{opt} можно найти с помощью перебора:

$$K''_0 = \arg \min_{1 \leq K'' \leq N_{\max}} \left| \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi \left\lceil \frac{\varphi K''}{2\pi} \right\rceil}{K''} \right|, K'_0 = K'_{opt}(K''_0).$$

Проиллюстрируем результаты на примере. Пусть $\varphi = 1$, $r = 1$.

$N_{\max}$	10	20	40	60	100
K'_0	1	3	4	7	7
K''_0	6	19	25	44	44

причем $K'_0 = K'_*$, $K''_0 = K''_*$ где K'_* , K''_* — решение, полученное полным перебором. Для других наборов входных данных значения K'_* и K'_0 , K''_* и K''_0 также совпадают.

1. *Fisher M.E., Gayek J.E.* Estimating Reachable Sets for Two-Dimensional Linear Discrete Systems // J. Optim. Theory Appl. 1988. Vol. 56, no. 1. P. 67–88.
2. *Simkina A.V., Ibragimov D.N., Kibzun A.I.* On the Method of Numerical Simulation of Limit Reachable Sets for Linear Discrete-Time Systems with Bounded Control // Вестник ЮурГУ ММП. 2024. Т. 17, № 3. С. 46–56.
3. *Симкина А.В.* Уточнение коэффициента сжатия для внешней оценки предельного множества 0-управляемости линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Моделирование и анализ данных 2024. Т. 14, № 4. С. 115–128.

О численном построении аппроксимаций решения задачи реконструкции управлений при невыпуклых геометрических ограничениях на управления

Н. Н. Субботина, Е. А. Крупенников

Екатеринбург, ИММ УрО РАН, УрФУ

e-mail: subb@uran.ru, krupennikov@imm.uran.ru

Доклад посвящен задаче реконструкции управлений для динамических детерминированных систем по неточным замерам наблюдаемой траектории, порождаемой неизвестным управлением. Рассматриваются аффинные по управлениям системы вида

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= G(t, x(t))u(t) + f(t, x(t)), \\ x &\in R^n, \quad u \in R^m, \quad t \in [0, T], \quad T < \infty, \\ G(\cdot) &: [0, T] \times R^n \rightarrow R^{n \times m}, \quad f(\cdot) : [0, T] \times R^n \rightarrow R^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Допустимые управления — измеримые функции со значениями из компакта $\mathbf{U}$:

$$u(t) \in \mathbf{U}, \quad \text{п. в. на } [0, T]. \tag{2}$$

Особенностью исследования является то, что компакт $\mathbf{U}$ не обязательно выпуклый. В случае, когда ограничения на управления невыпуклые, могут возникать скользящие управления [1]. Для такого случая была сформулирована задача реконструкции управлений, имеющая единственное решение — нормальное управление, порождающее наблюдаемую траекторию и имеющее минимальную норму в пространстве L^2 [2]. Нормальное управление находится в классе обобщенных управлений [3].

Был предложен подход [2] к построению кусочно-постоянных аппроксимаций нормального управления, удовлетворяющих заданным, вообще говоря, невыпуклым ограничениям (2). В задачах реконструкции управлений с выпуклыми геометрическими ограничениями на управления, как правило, требуется сходимость аппроксимаций решения в сильной топологии пространства L^2 (см., например, [4]). В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Выпуклая оболочка множества $\mathbf{U}$ (2) (т. е. множество $\text{co } \mathbf{U}$) совпадает с его замыканием в слабой топологии пространства L^2 .*

Эта теорема говорит о том, что для поставленной задачи с невыпуклыми ограничениями можно требовать сходимость аппроксимаций решения в слабой топологии пространства L^2 .

Подход, предложенный в работе [2], опирается на использование решений вспомогательных задач реконструкции управлений с овыпукленными ограничениями

$$u(t) \in \text{co } \mathbf{U}, \quad \text{п. в. на } [0, T]. \quad (3)$$

Для решения таких задач существует ряд подходов — например, подход, описанный в [4], базирующийся на процедуре оптимального прицеливания, и новый оригинальный подход, описанный в [5], использующий конструкции из вспомогательных задач вариационного исчисления на поиск седловых точек невыпуклых интегральных функционалов невязки. Решение исходной невыпуклой задачи (1), (2) строится численно на основании вспомогательной овыпукленной задачи (1), (3). В основе обоснования подхода лежит теорема Каратеодори о структуре выпуклого множества. Согласно ей, любое значение $u \in \text{co } \mathbf{U}$ кусочно-постоянных аппроксимаций решения вспомогательной овыпукленной задачи (1), (3)

может быть представимо в виде линейной комбинации не более, чем $m + 1$ точек самого множества $\mathbf{U}$:

$$\begin{aligned} \forall u \in \text{co } \mathbf{U} \exists u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,m+1} \in \mathbf{U}, \\ \exists \lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,m+1} \in [0, 1] : \\ \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_{i,k} = 1, \quad u = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_{i,k} u_{i,k}. \end{aligned} \quad (4)$$

На основании этого подхода предложен численный алгоритм построения решения невыпуклой задачи (1), (2). Он основан на нахождении симплексов в пространстве R^m , состоящих из точек множества $\mathbf{U}$ таких, что они содержат значения аппроксимаций решения вспомогательной задачи. Зная такой симплекс, можно найти коэффициенты выпуклой комбинации (4) по точкам, которыми являются его вершины. На основании коэффициентов и точек выпуклой комбинации (4) строятся кусочно-постоянные аппроксимации решения исходной, невыпуклой задачи (1), (2).

В основе этого алгоритма находится процедура полного перебора по симплексам в m -мерном пространстве, состоящим из точек множества $\mathbf{U}$. При этом предполагается, что это множество состоит из конечного количества точек. В случае, когда множество $\mathbf{U}$ состоит из значительного количества точек, полный перебор становится затруднительно реализовать на практике. В данной работе предложен более эффективный алгоритм построения аппроксимаций решения невыпуклой задачи (1), (2). Он основан на поиске т. н. оптимальных симплексов — таких, что они содержат значения кусочно-постоянных аппроксимаций решения вспомогательной задачи и при этом минимизируют заданный показатель качества.

Также алгоритм развит на более общий случай, когда множество $\mathbf{U}$ (2) является ограниченным компактом.

1. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
2. *Субботина Н.Н., Крупенников Е.А.* К задаче реконструкции управлений при невыпуклых ограничениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 2. С. 188–202.
3. *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975.

4. *Осинов Ю.С., Кряжиский А.В., Максимов В.И.* Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 129–161.
5. *Субботина Н.Н., Крупенников Е.А.* Слабое со звездой решение задачи динамической реконструкции // Тр. МИАН. 2021. Т. 315, № 2. С. 247–260.
6. *Subbotina N.N., Krupennikov E.A.* On control reconstruction problems for differential inclusions // Journal of mathematical sciences. 2025. [в печати]

Метод вольтерровых функциональных уравнений в проблеме сингулярности управляемых начально-краевых задач

В. И. Сумин

Нижний Новгород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского;

Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина

e-mail: v_sumin@mail.ru

Ранее автором была предложена (см., напр., обзор [1]) достаточно общая форма описания управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ) с помощью *вольтерровых функциональных уравнений* (ВФУ) вида

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p^m \equiv (L_p(\Pi))^m, \quad (1)$$

где $\Pi \subset \mathbf{R}^N$ и $f(\cdot, \cdot, \cdot): \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^m$ заданы; $v(\cdot) \in \mathcal{D} \subset L_k^s$ — управление; $A: L_p^m \rightarrow L_q^l$ — линейный оператор, вольтерров на некоторой системе $\mathbf{T}$ подмножеств Π в том смысле, что для любого $H \in \mathbf{T}$ сужение $A[z]|_H$ не зависит от $z|_{\Pi \setminus H}$; $p, q, k \in [1, +\infty]$. К ВФУ (1) обращением главной части приводятся разнообразные НКЗ для самых различных эволюционных уравнений (см. [1]). Переход от НКЗ к эквивалентному ВФУ (1) адекватен многим проблемам оптимизации (получение *условий сохранения глобальной разрешимости* (УСГР) НКЗ при возмущении

управлений; вывод *необходимых условий оптимальности* (НУО) и др. (см. [1]).

Как отмечено в [2, с. 10], в традиционной теории оптимального управления обычно считается выполненным следующее общее предположение:

“для всякого управления, заданного в подходящем множестве, уравнение, описывающее управляемый процесс, имеет единственное решение в подходящем множестве.” (2)

Эти “подходящие множества” в каждой оптимизационной задаче свои, их можно, вообще говоря, менять и подбирать в зависимости от тех вопросов, которые предполагается решать. Однако, как сказано в [2, с. 12–13], многие прикладные задачи заставляют отказаться от предположения (2): “Мы должны иметь возможность рассматривать ситуации, в которых уравнение либо не имеет решения, либо имеет сколь угодно большое число решений, либо решения неустойчивы” (под неустойчивостью понимается, в частности, отсутствие глобального решения НКЗ, отвечающего некоторому допустимому управлению, при наличии соответствующего локального решения; см., например, [2, с. 14–15]); такие управляемые НКЗ называются в [2] сингулярными. Будем обозначать через $\mathcal{R}$ то множество управлений, каждому из которых отвечает единственное глобальное решение рассматриваемой НКЗ. Наиболее подробно в [2] изучается сингулярная ситуация, связанная с неустойчивостью в описанном выше смысле, когда единственность решения управляемой НКЗ есть, но не всякое допустимое управление принадлежит $\mathcal{R}$; управляемая система, обладающая такой неустойчивостью, называется в [2] еще системой с разрывом.

В [2, гл. 1] “отправным модельным примером” является оптимизационная задача, связанная с “неустойчивым параболическим уравнением”

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x](t) &\equiv x'_{t^{n+1}} - \Delta x = x^3 + v(t), \\ t &= \{\hat{t}, t^{n+1}\} \equiv \{t^1, \dots, t^n, t^{n+1}\} \in \Pi,\end{aligned}\tag{3}$$

где $\Delta x \equiv \sum_{i=1}^n x''_{t^i t^i}$ — оператор Лапласа, $\Pi \equiv Q \times [0, \sigma] \subset \mathbf{R}^{n+1}$, $Q \subset \mathbf{R}^n$ открыто и ограничено, с границей ∂Q класса C_2 . Задача

включает НКЗ для (3) с начальным условием $x(\hat{t}, 0) = w(\hat{t})$, $\hat{t} \in Q$, граничным условием $x(t) = 0$, $t \in \Gamma \equiv \partial Q \times [0, \sigma]$ (v — управление из выпуклого замкнутого в L_2 множества $\mathbf{D}$) и минимизируемый функционал $J[v, x] \equiv \frac{1}{6}\|x - \bar{x}\|_{L_6}^6 + \frac{\mathcal{N}}{2}\|v\|_{L_2}^2$, ($w \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q)$, $\bar{x} \in L_6$, $\mathcal{N} > 0$ заданы). Решение НКЗ понимается в смысле $W_2^{2,1}$, и в основном рассматриваются случаи $n = 1, 2, 3$, когда $W_2^{2,1} \subset L_6$, то есть $x \in L_6$. Для указанной задачи оптимизации в [2, гл. 1] изучается проблема получения НУО типа интегрального принципа максимума. В данном случае, вообще говоря, $\mathbf{D} \not\subset \mathcal{R}$ (некоторым управлениям может отвечать лишь локальное по t^{n+1} , но не глобальное решение НКЗ), то есть управляемая система сингулярна в описанном выше смысле. Поэтому в [2] для вывода НУО оптимальной пары $\{v_0, x_0 \equiv x_{v_0}\}$ (x_v — глобальное решение НКЗ, отвечающее управлению v) предлагается действовать не традиционным методом классического варьирования управлений, когда значения функционала определяются напрямую управлением по правилу $I[v] \equiv J[v, x_v]$, а рассматривать задачу на классе пар “управление, состояние” $\{v(\cdot), x(\cdot)\}$ в $L_2 \times L_6$ и применять метод адаптированного штрафа. Сформулированная выше задача оптимизации заменяется штрафной задачей на минимум функционала

$$J_\varepsilon[v, x] \equiv J[v, x] + (2\varepsilon)^{-1}\|\mathcal{L}[x] - x^3 - v\|_{L_2}^2 + \|v - v_0\|_{L_2}^2 + \|x - x_0\|_{L_2}^2$$

на множестве всех пар $\{v, x\} \in L_2 \times L_6$ таких, что $v \in \mathbf{D}$, x удовлетворяет прежним начальному и граничному условиям, $\mathcal{L}[x] \in L_2$. Здесь $\varepsilon > 0$ — параметр штрафа. Доказывается, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение $\{v_\varepsilon, x_\varepsilon\}$ штрафной задачи стремится в $L_2 \times L_6$ к $\{v_0, x_0\}$. Для штрафной задачи классическим варьированием выводится НУО в виде интегрального принципа максимума, из которого при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаются искомые НУО для первоначальной задачи оптимизации. Эти НУО [2, гл. 1, теорема 3.2] названы в [2] *сингулярной системой оптимальности*. Как отмечено в [2, с. 66], при выводе НУО метод адаптированного штрафа гораздо более трудоёмок, чем традиционный метод варьирования управления (существенная трудность — получение априорных оценок так называемого приближенного сопряженного состояния, зависящего от параметра ε). Поэтому понятно желание так или иначе получить возможность возвратиться при выводе НУО в сингуляр-

ных в смысле [2] задачах оптимизации к простой и естественной классической схеме неосредственного варьирования. В докладе показывается, что для некоторых задач оптимизации, рассматриваемых в [2] при выводе НУО как сингулярные, эквивалентное ВФУ-описание (1) управляемых НКЗ позволяет получить и реализовать такую возможность (см. [3]). Примером здесь, в частности, служит обсуждавшаяся выше модельная в [2] “сингулярная система оптимальности” [2, гл. 1, теорема 3.2].

Дело в том, что считать НКЗ сингулярной и переходить в теории НУО к рассмотрению пар “управление, состояние” вынуждает прежде всего недостаток информации об УСГР НКЗ относительно требующегося варьирования управлений (в описанной выше задаче это классическое варьирование). Как показывается в докладе, эта трудность в некоторых случаях может быть преодолена (то есть доказана возможность требующегося для вывода НУО варьирования управлений) переходом в описании управляемой системы от НКЗ к эквивалентному ВФУ (1) и применением соответствующих теорем об УСГР. Используется то, что, если каждому допустимому управлению отвечает не более одного решения НКЗ, то и в сингулярной в смысле [2] ситуации можно считать предположение (2) выполненным, взяв за “подходящее множество управлений” $\mathcal{R}$.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 23-11-20020.

1. *Sumin V.* Volterra Functional-Operator Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems // IFAC PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss. 32. P. 759–764.
2. *Луонс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987.
3. *Sumin V.I.* Volterra Functional Equations in the Theory of Optimization of Distributed Systems. On the Problem of Singularity of Controlled Initial Boundary Value Problems // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.). 2022. 319, suppl. 1. P. 257–270.

Оптимизация дохода с учетом дисконтирования для моделей популяций, заданных дифференциальными уравнениями

О. И. Тарасова

*Владимир, Владимирский государственный университет
имени А. Г. и Н. Г. Столетовых
e-mail: oksana_tarasova.02@mail.ru*

Рассмотрим однородную популяцию, состоящую из одного вида, все особи которого обладают одинаковыми характеристиками. Если такая популяция развивается без внешнего вмешательства, то есть без эксплуатации, её динамика описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}_+ \dot{=} [0, +\infty).$$

Предположим, что через равные промежутки времени в моменты $\tau(k) = kd$, где $d > 0$, $k = 1, 2, \dots$, из этой популяции изымается часть ресурса, характеризуемая коэффициентом изъятия $u(k) \in [0, 1]$, который указывает, какую долю ресурса забирают относительно его текущего объема. Таким образом, $u(k) = 0$ означает отсутствие изъятия, а $u(k) = 1$ — полное извлечение всего ресурса. В результате получаем управляемую (эксплуатируемую) модель популяции

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \quad t \neq kd, \\ x(kd) &= (1 - u(k))x(kd - 0), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(kd)$ и $x(kd - 0) = X(k)$ — это количество ресурса после и до изъятия в моменты времени kd , $k = 1, 2, \dots$; $x(0)$ — начальное значение популяции. Предполагаем, что функция $f(x)$ и её производная $\partial f / \partial x$ непрерывны для всех $x \geq 0$, а также решения уравнения (1) непрерывны справа. Дополнительное условие $f(0) \geq 0$ гарантирует квазиположительность системы.

При стационарном режиме эксплуатации, где управление $u(k)$ остается постоянным: $u(k) \equiv u \in [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots$, развитие

популяции можно описать при помощи следующей динамической системы

$$X(k+1) = \varphi(d, (1-u)X(k)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $(1-u)X(k)$ — количество ресурса, оставшегося после изъятия в моменты времени k ; функция $\varphi(t, x)$ — решение уравнения $\dot{x} = f(x)$ с начальными условиями $\varphi(0, x) = x$, $x \geq 0$, $t \geq 0$; $X(1) = \varphi(d, x(0))$.

Определение. *Дисконтированным доходом* от извлечения ресурса за k изъятий (см. [1, 2]) называется величина H_α , задающаяся функцией

$$H_\alpha(\bar{u}, x(0)) = \sum_{j=1}^{\infty} X(j)u(j)e^{-\alpha j}.$$

Задача оптимизации дисконтированного дохода заключается в максимизации функции H_α и определении оптимального управления изъятия ресурса. Отметим, что наибольший дисконтированный доход и подходящий режим эксплуатации для моделей структурированных популяций, заданных системой разностных уравнений, были найдены в работе [1]. Приведем аналогичное утверждение для моделей однородных популяций, описанных дифференциальными уравнениями.

Теорема. *Предположим, что функция $D = \varphi(d, x) - xe^\alpha$ достигает своего максимального значения в единственной точке x^* ($x^* > 0$). Тогда функция $H_\alpha(\bar{u}, x(0))$ при любом $x(0) \geq x^*$ достигает наибольшего значения*

$$H_\alpha(\bar{u}^*, x(0)) = \frac{D(x^*)}{e^{2\alpha} - e^\alpha} + X(1)e^{-\alpha}$$

на множестве $U = \{\bar{u}^*: \bar{u}^* = (u^*(1), \dots, u^*(k), \dots)\}$ при управлении

$$u^*(1) = 1 - \frac{x^*}{X(1)}; \quad u^*(k) = 1 - \frac{x^*}{\varphi(d, x^*)}, \quad k \geq 2.$$

Пример. Найдем значение дисконтированного дохода для однородной популяции, заданной логистическим дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = bx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad b > 0, \quad K > 0.$$

Решением заданного уравнения при начальных условиях $\varphi(0, x) = x$ является функция

$$\varphi(t, x) = \frac{Kxe^{bt}}{K + x(e^{bt} - 1)}.$$

Нетрудно проверить, что функция $D(x) = \varphi(d, x) - xe^\alpha$ достигает своего наибольшего значения $D(x^*)$ в точке x^* , где

$$D(x^*) = \frac{K(e^{bd/2} - e^{\alpha/2})^2}{e^{bd} - 1}, \quad x^* = \frac{K(e^{bd/2} - e^{\alpha/2})}{e^{\alpha/2}(e^{bd/2} - 1)}.$$

Таким образом, максимальное значение искомой функции H_α равно

$$H_\alpha(\bar{u}^*, x(0)) = \frac{K(e^{bd/2} - e^{\alpha/2})^2}{(e^{bd} - 1)(e^{2\alpha} - e^\alpha)} + X(1)e^{-\alpha}.$$

Пусть $d = \ln 2$, коэффициент дисконтирования $\alpha = 0.25 \ln 2$, параметры уравнения $b = 2$, $K = 1$. Тогда динамика однородной популяции определяется следующим дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = 2x(1 - x).$$

Наибольшее значение функции $D(x^*) \approx 0.276$ достигается в точке x^* , приближенно равной 0.834. Возьмем начальное значение численности популяции $x(0) = 1.5$. Можно посчитать, что максимальное значение функции $H_\alpha(\bar{u}^*, x(0)) \approx 2.143$ при режиме эксплуатации $u^*(1) \approx 0.235$, $u^*(k) \approx 0.124$ для всех $k \geq 2$.

Работа выполнена под руководством д.ф.-м.н., профессора кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета им. А. Г. и Н. Г. Столетовых Людмилы Ивановны Родиной.

1. *Егорова А.В.* Оптимизация дисконтированного дохода для структурированной популяции, подверженной промыслу // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26, № 133. С. 15–25.
2. *Rodina L.I., Hammadi A.H.* Optimization problems for models of harvesting a renewable resource // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 250. P. 113–122.

Поведение переменных модели роста при логистически распределенных рисках истощения ресурсов

А. А. Усова, А. М. Тарасьев

Екатеринбург, ИММ УрО РАН

e-mail: ausova@imm.uran.ru, tam@imm.uran.ru

В работе [1] рассматривается модель развития ресурсозависимого региона, где основными факторами выступают текущий $m(t)$ и кумулятивный $M(t)$ расход материалов, при этом $M(t) = \int_0^t m(s)ds \leq M_0$, где постоянная величина M_0 определяет невозможный объем имеющихся ресурсов. Учёт материалов оценивается их динамикой, которая зависит от инвестиционной составляющей $u(t)$. Регион направляет инвестиции $u(t) \in [0, \bar{u}]$ в увеличение продуктивности ресурсов $z(t)$, предполагая, что лишь доля β этих инвестиций $u(t)$ реально влияет на снижение ресурсозависимости, то есть $\dot{z}(t) = \beta u(t)z(t)$. Продуктивность в модели определяется как объем выпуска $y(t)$ на единицу ресурсов, то есть $z(t) = y(t)/m(t)$. Выпуск здесь аппроксимируется степенной функцией $y(t) = ae^{bt}m^\alpha(t)$, где экспоненциальный множитель ae^{bt} учитывает влияние прочих производственных факторов (явно не участвующих в модели) на рост выпуска, а показатель μ есть коэффициент эластичности. Суммируя вышесказанное, динамика модели записывается в виде

$$\dot{M}(t) = m(t), \quad \dot{m}(t) = \frac{b - \beta u}{1 - \alpha} m(t), \quad M(0) = 0, \quad m(0) = m_0.$$

В работе [2] проводится изучение этой модели в рамках принципа

максимума Понтрягина, анализируются качественные свойства системы и строятся оптимальные решения близи установившегося положения. Используя эти результаты, здесь модель изучается с позиции вероятностного анализа.

Пусть τ — случайный момент времени, когда ресурсы полностью израсходованы. Вероятность того, что лимит ресурсов будет исчерпан до момента времени t , вычисляется исходя из введенных модельных переменных $F_\tau(t) = P(\tau < t) = M(t)/M_0 \in [0, 1]$, а плотность, соответственно, $f_\tau(t) = m(t)/M_0$, $t \geq 0$. Опираясь на элементы теории надежности, вводится понятие риска истощения ресурсов (в оригинале *опасность отказа* [3, Раздел 2.2]) $\lambda(t) = f_\tau(t)/(1 - F_\tau(t))$, которое определяет вероятность полного исчерпания ресурсов в момент времени t при условии, что до этого момента времени ресурсы еще были. Накопленные риски определяются как интегральный показатель $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds = -\ln(1 - F_\tau(t))$. Через введенные величины выражаются все переменные модели, а именно

$$\begin{aligned} m(t) &= \lambda(t)e^{-\Lambda(t)}/M_0, & M(t) &= (1 - e^{-\Lambda(t)})/M_0, \\ p(t) &= p_0e^{\Lambda(t)}, & y(t) &= a(M_0\lambda(t))^\alpha e^{bt - \alpha\Lambda(t)}, \end{aligned}$$

где функция $p(t)$ определяет цену на ресурсы в момент времени t , которая обратно пропорциональна остаткам ресурсов (начальные цены зафиксированы на уровне p_0).

При исследовании в [2] модели в рамках принципа максимума Понтрягина, в качестве первой фазовой переменной $x_1(t)$ использовалась именно величина $\lambda(t)$, но не имевшая на тот момент такой интерпретации. Опираясь на результаты анализа, отметим, что риски $\lambda(t)$ ограничены снизу нулем и асимптотически приближаются к равновесному уровню b/α . Учитывая эти ограничения, предлагается аппроксимировать риски $\lambda(t)$ логистической функцией $\lambda(t) = \lambda^*(1 + \lambda^0 e^{-\mu t})^{-1}$, где неизвестные параметры определяются, исходя из начальных $\lambda(0) = m_0/M_0$ и асимптотических $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = b/\alpha$ условий $\lambda^* = b/\alpha$, $\lambda^0 = \lambda^*/\lambda(0) - 1$.

Накопленные риски вычисляются явно и равны $\Lambda(t) = \frac{b}{\alpha}t - \frac{b}{\alpha\mu} \ln \frac{\lambda(t)}{\lambda(0)}$. Оставшийся показатель μ может быть найден из того, что объем выпуска $y(t)$ имеет уровень насыщения роста y^* ,

который в работе [2] явно определяется по параметрам модели и является одной из координат положения равновесия гамильтоновой системы.

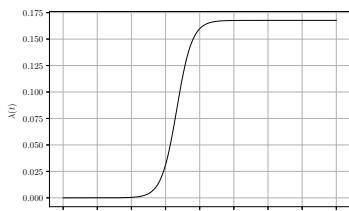
Утверждение 1. *Отношение объема выпуска в момент времени $y(t)$ к начальному объему $y(0) = at_0^\alpha$ при логистически распределенных рисках степенным образом зависит от отношения текущих $\lambda(t)$ к изначальным $\lambda(0)$ рискам, т.е. $\frac{y(t)}{y(0)} = \left(\frac{\lambda(t)}{\lambda(0)}\right)^{\alpha+b/\mu}$.*

Значит, учитывая существование уровня насыщения выпуска y^* [2], показатель μ находится явно и равен $\mu = b/(\ln k_y - \ln k_\lambda - \alpha)$, где $k_y = y^*/y(0)$, $k_\lambda = \lambda^*/\lambda(0)$.

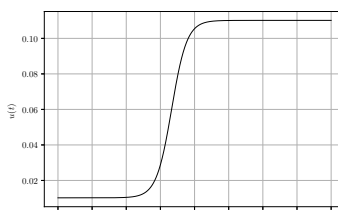
В силу гладкости функции рисков $\lambda(t)$ инвестиции $u(t)$ непрерывны. Кроме того, они имеют уровень насыщения $u^* = b/(\alpha\beta)$, который совпадает с теоретически полученным значением [2]:

$$u(t) = \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{1}{\beta} \left(b - (1 - \alpha) \frac{\dot{\lambda}(t) - \lambda^2(t)}{\lambda(t)} \right) \right\}, \bar{u} \right\} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} u^* = \frac{b}{\alpha\beta}.$$

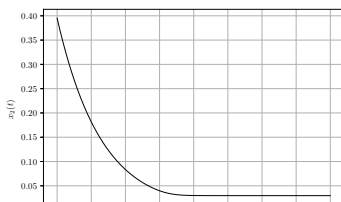
Используя значения параметров модели, приведенные в работе [1], ниже представлены результаты численных экспериментов для логистически распределенных рисков. Дополнительно представлен график доли выпуска $x_2(t)$, приходящийся на закупку ресурсов, по ценам $p(t)$ в объеме $m(t)$, то есть $x_2(t) = p(t)m(t)/y(t)$. Эта переменная играет в модели существенную роль, и имеет пороговый уровень насыщения x_2^* , который совпадает с полученным при аппроксимации рисков логистической функцией.



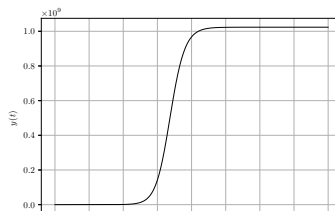
Риски истощения ресурсов, $\lambda(t)$



Управление, $u(t)$



Доля выпуска на ресурсы, $x_2(t)$



Уровень выпуска, $y(t)$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-11-00269, <https://rscf.ru/project/25-11-00269/>.

1. *Tarashev A., Zhu B.* Optimal Proportions in Growth Trends of Resource Productivity // Green Growth and Sustainable Development. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. Vol. 14. P. 49–66.
2. *Usova A.A., Tarashev A.M.* Optimal Control Problem on Optimization of Resources Productivity // Current Trends in Analysis and Its Applications. Cham: Birkhäuser, 2015. P. 133–142.
3. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьёв А.Д.* Математические методы в теории надёжности. М.: Наука, 1965.

О выделении областей дифференцируемости минимаксного решения в одном классе краевых задач для уравнений гамильтонова типа

А. А. Успенский, П. Д. Лебедев

Екатеринбург, Институт математики и механики имени

Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: uspen@imm.uran.ru, pleb@yandex.ru

Изучены свойства субдифференцируемого минимаксного решения задачи Дирихле для уравнения гамильтонова типа в двумерном евклидовом пространстве. Исследована проблема существования области примыкания к краевому множеству, в которой решение является гладким. Показано, как граничные точки краевого множества, имеющие дефекты гладкости, влияют на структуру сингулярного множества минимаксного решения.

Рассматривается задача Дирихле для уравнения Белмана–Айзекса:

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 1 = 0, u|_{\Gamma} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ — норма вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Краевое условие в (1) определено на границе $\Gamma = \partial M$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$. Минимаксное решение [1] задачи (1) известно [2]: $u(x) = \inf_{m \in M} \|x - m\|$ (см. [1]).

Пусть определяющее границу $M \subset \mathbb{R}^2$ отображение $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ непрерывно на числовом промежутке $T = [\hat{t}, \hat{t}]$, $-\infty < \hat{t} < \hat{t} < +\infty$, $\gamma(\hat{t}) = \gamma(\hat{t})$. Примем обозначения: $\det(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ — определитель второго порядка, построенный на векторах $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $O_0(t_0, \delta) = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \setminus \{t_0\}$ — выколотая окрестность точки $t_0 \in T$ радиуса $\delta > 0$, $K = \{1, 2, 3\}$.

Полагаем, что для отображения $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ выполняются условия:

(Г1) $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ имеет непрерывную производную k -го порядка всюду на $T \subseteq \mathbb{R}$, кроме конечной совокупности $T_k \subset T$ точек $t_0 \in T_k$, в которых односторонние производные k -го порядка (левая $\gamma^{(k)}(t_0 - 0)$ и правая $\gamma^{(k)}(t_0 + 0)$) не равны друг другу, $\gamma^{(k)}(t_0 - 0) \neq \gamma^{(k)}(t_0 + 0)$, здесь $k \in K$;

(Г2) $\gamma'(t) \neq 0$, $t \in T \setminus T_1$.

Семейство кривых, удовлетворяющих условиям (Г1), (Г2), обозначим $\{\Gamma\}_T$.

Основной результат исследования опирается на конструктивные элементы теории альфа-множеств [3], к которым относятся биссектриса множества, ветвь биссектрисы (гладкое многообразие — компонента биссектрисы), псевдовершина (особая точка) множества, порождающий псевдовершину локальный диффеоморфизм, маркер — числовая характеристики псевдовершины (подробно, см., например, [4]). Также используются определение опорного (по Ефимову–Стечкину) шара [5], определение метрической проекции на замкнутое множество и понятие кривизны кривой.

Теорема. Пусть $L(x^{(0)})$ — ветвь биссектрисы множества $M \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \partial M \in \{\Gamma\}_T$, определяемой вектор-функцией $\gamma = \gamma(t)$, где $x^{(0)} = \gamma(t_0)$ — псевдовершина Γ , порожденная локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$, $\delta_1 > 0$. Далее пусть $\Omega_M(z(t_i)) = \{\gamma(t_1), \gamma(t_2(t_1))\}$ — множество проекций $z(t_1) \in L(x^{(0)})$ на M и выполняется условие

$$\det(\gamma'(t), \gamma'(\tau)) \neq 0, \quad t \in O_0(t_0, \delta), \tau \in O_0(t_0, \delta), \delta > 0, t \neq \tau.$$

Тогда существует предел радиусов опорных шаров

$$r_0 = \lim_{\Delta \downarrow 0} r(z(t_0 - \Delta)),$$

при этом

$$r_0 = 0, \quad \text{когда } t_0 \in T_1, \gamma'(t_0 - 0) \neq 0, \gamma'(t_0 + 0) \neq 0, \quad (2)$$

$$r_0 = \frac{1}{|k(t_0 - 0)|}, \quad \text{когда } t_0 \in T_2,$$

$$\text{маркер } \lambda = 0, \quad \text{левая кривизна } k(t_0 - 0) \neq 0, \quad (3)$$

$$r_0 = \frac{1}{|k(t_0 + 0)|}, \text{ когда } t_0 \in T_2,$$

$$\text{маркер } \lambda = -\infty, \text{ правая кривизна } k(t_0 + 0) \neq 0, \quad (4)$$

$$r_0 = \frac{1}{|k(t_0)|}, \text{ когда } t_0 \in T_3, \text{ кривизна } k(t_0) \neq 0. \quad (5)$$

Теорема позволяет при построении решения задачи (1) найти чебышевский слой краевого множества величины $r_0 > 0$, определяющей окрестность этого множества, в которой решение является гладким (формулы (3), (4) и (5)), а также указать случай отсутствия чебышевского слоя, когда в любой окрестности краевого множества решение не является гладким (формула (2)).

Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ № 25-11-00269, <https://rscf.ru/project/25-11-00269/>.

1. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
2. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстрого действия // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМиК МГУ М.В. Ломоносова. М.: МАКС Пресс, 2007. № 27. С. 65–79.
3. *Ушаков В.Н., Успенский А.А.* Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, № 1. С. 95–120.
4. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Численно-аналитическое построение обобщенного решения уравнения эйконала в плоском случае // Матем. сб. 2024. Т. 215, № 9. С. 99–124.
5. *Ефимов Н.В., Стечкин С.Б.* Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 2. С. 254–257.
6. *Власов Л.П.* Чебышевские множества и некоторые их обобщения // Матем. заметки. 1968. Т. 3, вып. 1. С. 59–69.

К равномерной управляемости сингулярно возмущенных систем с квазидифференцируемыми коэффициентами

О. Б. Цехан

*Гродно, УО Гродненский государственный университет имени
Янки Купалы*
e-mail: tsekhan@grsu.by

Рассмотрим на $t \in T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему управления (ЛНСВС)

$$\dot{z}(t) = A(t, \mu) z(t) + B(t, \mu) u(t), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T, \quad z(t_0) = z_0. \quad (1)$$

Здесь $\mu \in (0, \mu^0]$ — параметр, $\mu^0 \ll 1$, $z = \text{col}(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ — вектор медленных переменных, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ — вектор быстрых переменных, $z_0 = \text{col}(x_0, y_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n = n_1 + n_2$, $u(t)$, $t \in T$, — скалярная функция управления, $A(t, \mu) = [A^0(t) + \mu^{-1}A^1(t)]$, $B(t, \mu) = [B^0(t) + \mu^{-1}B^1(t)]$, где

$$A^0(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix},$$

$$B^0(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2(t) \end{pmatrix},$$

$A_i(t) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_i}$, $A_{i+2}(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_i}$, $B_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, — непрерывные на T матричные функции.

Для заданного целого неотрицательного числа m обозначим $\mathcal{U}_m(T)$ совокупность всех нижнетреугольных матриц $P(t)$ размера $(m+1) \times (m+1)$ с непрерывными на T элементами $p_{ki}(t)$ ($i, k = \overline{0, m}$), удовлетворяющими условию $p_{kk}(t) \neq 0$ при $t \in T$, $k = \overline{0, m}$.

Пусть $F(t, \mu)$ — какая-либо фундаментальная матрица однородной части системы (1), и задана некоторая независимая от μ матрица $P \in \mathcal{U}_m(T)$. Элементы $t \in T$ вектор-функции $H(t, \mu) = F^{-1}(t, \mu)B(t, \mu)$ обозначим $h_i(t, \mu)$, $i = \overline{1, n}$. Аналогично [1, 2] введем определения.

Определение 1. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ система (1) имеет P -класс k , $0 \leq k \leq m$, если функции $h_i(t, \mu)$, $i = \overline{1, n}$, $t \in T$, имеют непрерывные квазипроизводные [1, стр. 14] ${}^j_P h_i(t, \mu)$, $j = \overline{0, k}$, относительно матрицы P .

Для фиксированных $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$, $k \in \mathbb{Z}$, обозначим $\mathcal{U}_{Pk}$ множество обобщенных функций вида $u_{P\tau} = \sum_{j=0}^k b_j(\mu) {}^j_P \Delta_\tau$, $\tau \in T$, где $b_0(\mu), b_1(\mu), \dots, b_k(\mu)$ — полиномы от μ , а операторы ${}^j_P \Delta_\tau$ действуют по правилу $\langle {}^j_P \Delta_\tau, h_i \rangle = {}^j_P h_i(\tau)$, $\langle u, h_i \rangle \triangleq \int_{t_0}^{t_1} h_i(\tau) u(\tau) d\tau$.

Определение 2. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ ЛНСВС (1) P -равномерно управляема, если она имеет P -класс $n - 1$ и множество $\{v \in \mathbb{R}^n : v = (\langle u_{P\tau}, h_1 \rangle, \langle u_{P\tau}, h_2 \rangle, \dots, \langle u_{P\tau}, h_n \rangle)\}$ совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$ при любом $\tau \in T$. ЛНСВС (1) робастно (по μ) P -равномерно управляема, если она P -равномерно управляема при любом $\mu \in (0, \mu^0]$.

P -равномерно управляемая система может быть мгновенно в каждый момент $\tau \in T$ переведена в любое состояние с помощью импульсных управлений $u_{P\tau} \in \mathcal{U}_{P, n-1}$. Для робастно P -равномерно управляемой ЛНСВС (1) это возможно при любом $\mu \in (0, \mu^0]$.

С ЛНСВС (1) связаны независимые от параметра μ подсистемы [2], которые формально получаются из ЛНСВС (1), если рассмотреть ее отдельно в «быстрой» и «медленной» временных шкалах при $\mu = 0$. Если $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$, то вырожденная система (ВС, «медленная» подсистема) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} &= A_s(t)\bar{x}(t) + B_s(t)\bar{u}(t), \\ \bar{x} &\in \mathbb{R}^{n_1}, \bar{u} \in \mathbb{R}, \bar{x}(t_0) = x_0, t \in T, \\ A_s(t) &\triangleq A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \\ B_s(t) &\triangleq B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t), \end{aligned}$$

и является линейной нестационарной n_1 -мерной системой. Система пограничного слоя (СП или «быстрая» подсистема) для

ЛНСВС (1) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} &= A_4(t_0)\tilde{y}(\tau) + B_2(t_0)\tilde{u}(\tau), \\ \tau = \mu^{-1}(t - t_0) &\in T_\mu \stackrel{\Delta}{=} [0, \mu^{-1}(t_1 - t_0)], \\ \tilde{y} &\in \mathbb{R}^{n_2}, \tilde{u} \in \mathbb{R}, \tilde{y}(0) = y_0 + A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0,\end{aligned}$$

и является линейной стационарной n_2 -мерной системой. Наряду с СП введем t -семейство быстрых подсистем вида СП с матрицами $A_4(t), B_2(t)$ (вместо $A_4(t_0), B_2(t_0)$), где $t \in T$ рассматривается как параметр семейства стационарных систем.

Понятие P -равномерной управляемости независимой от параметра μ ВС вводится как в [1, стр. 14]. Будем говорить, что t -семейство быстрых подсистем полностью управляемо на T_μ , если каждая подсистема из этого семейства полностью управляема.

Для независимой от параметра μ матрицы $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$, относительно которой ЛНСВС (1) имеет P класс $n-1$, определим n -вектор функции $Q_i^j(t)$, $j = \overline{0, i}$, $i = \overline{0, n-1}$:

$$\begin{aligned}Q_i^j(t) &= p_{ii}(A^0(t)Q_{i-1}^j(t) + A^1(t)Q_{i-1}^{j-1}(t) - \dot{Q}_{i-1}^j(t)) - \sum_{k=0}^{i-1} p_{ik}(t)Q_k^j(t), \\ Q_0^0(t) &= B^0(t), Q_0^1(t) = B^1(t), Q_i^j(t) = 0 \text{ при } j < 0 \text{ или } j > i.\end{aligned}$$

Пусть для матрицы $P \in \mathcal{U}_{n-1}(T)$ определены функции $Q_i^j(t)$, $j = \overline{0, i}$, $i = \overline{0, n-1}$, и матрица $\bar{P}$ есть верхний левый блок размера $(n_1 \times n_1)$ матрицы P .

Теорема. Пусть матричные функции $A_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$ непрерывно дифференцируемы на T и $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) \leq -\alpha < 0$ для любого $t \in T$. Если $n \geq 2$, то считаем матричные функции $Q_i^j(t)$, $i = \overline{0, n-2}$, $j = \overline{0, i}$, непрерывно-дифференцируемыми на T . Если ВС $\bar{P}$ -равномерно управляема на T и t -семейство быстрых подсистем полностью управляемо на T , то найдется такое $\hat{\mu} \in (0, \mu^0]$, что на $(0, \hat{\mu}]$ ЛНСВС (1) робастно P -равномерно управляема на T .

Схема доказательства. Устанавливаются не зависящие от параметра μ условия принадлежности ЛНСВС (1) к P -классу

$n - 1$ в терминах дифференцируемости функций $Q_i^j(t)$. Далее при фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ к ЛНСВС (1) применяется критерий P -равномерной управляемости [1, стр. 109], невырожденное расщепляющее преобразование [2, стр. 61], устанавливается структура матриц управляемости расщепленной системы и их связь с матрицами управляемости подсистем ВС и СП. Учитывая инвариантность P -класса [1] ЛНСВС (1) относительно невырожденного преобразования, а также сохранение полноты ранга матрицы управляемости при малых аддитивных и невырожденных мультипликативных преобразованиях, устанавливается справедливость утверждения теоремы.

Замечание. Свойство P -равномерной управляемости усиливает свойство равномерной наблюдаемости [1, 3] и является двойственным свойству P -равномерной наблюдаемости [1, 4].

Работа поддержана Министерством образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2021-2025 годы (шифр задания "Конвергенция 1.2.04").

1. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. Минск: Беларус. навука, 2013.
2. *Kokotović P.V., Khalil H.K., O'Reilly J.* Singular perturbations methods in control: analysis and design. NY: Academic Press, 1999.
3. *Цехан О.Б.* Робастные достаточные условия равномерной наблюдаемости линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы // Диф. уравнения и мат. физика, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНТИ РАН. М., 2023. Т. 226. С. 150–164.
4. *Цехан О.Б.* Квазидифференцируемость и равномерная наблюдаемость линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 8. С. 1123–1138.

Абстрактная задача о достижимости: множества притяжения и представления в терминах ультрафильтров

А. Г. Ченцов

*Екатеринбург, Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: chentsov@imm.uran.ru*

Предметом исследования являются абстрактные задачи о достижимости в топологическом пространстве (ТП) при наличии ограничений асимптотического характера (ОАХ); общая постановка соответствует [1, гл. 8]. Упомянутые ОАХ могут возникать при последовательном ослаблении (релаксации) стандартных ограничений, таких, как краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения (ФО) в теории управления [2, гл. III], неравенства — в математическом программировании [3, 4]; однако возможно и изначальное возникновение ОАХ [5, 6]. Важную роль конструкции, использующие приближенное соблюдение ФО, сыграли в работах Н. Н. Красовского и А. И. Субботина по теории дифференциальных игр (ДИ); отметим фундаментальную теорему об альтернативе [7, 8]. Исследования А. В. Кряжмского [9], позволившие распространить альтернативу Красовского–Субботина на класс управляемых систем, не удовлетворяющих условию Липшица по фазовой переменной, показали важную роль обобщенных режимов управления в задачах теории ДИ. Упомянутые обстоятельства мотивируют специальное исследование задач с ОАХ и их расширений, предусматривающих введение обобщенных элементов различной природы.

Рассмотрим непустое множество E , элементы которого называем обычными решениями. Полагаем заданным топологическое пространство (ТП) (Y, τ) и (целевой) оператор $\mathbf{h}$, действующий из E в Y . Подобно тому как множеству Σ , $\Sigma \subset E$, сопоставляется замыкание образа $\mathbf{h}^1(\Sigma) = \{\mathbf{h}(e) : e \in \Sigma\}$ в (Y, τ) , всякому непустому семейству $\mathcal{E}$ подмножеств (п/м) E сопоставляется некий предельный “образ” в (Y, τ) , который в случае направлен-

ного семейства $\mathcal{E}$ реализуется в виде пересечения всех замыканий множеств-образов $\mathbf{h}^1(\Sigma)$, $\Sigma \in \mathcal{E}$, в топологии τ (семейство $\mathcal{E}$ направлено тогда и только тогда, когда

$$\forall \Sigma_1 \in \mathcal{E} \quad \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E} \quad \exists \Sigma_3 \in \mathcal{E} : \Sigma_3 \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2;$$

если же $\mathcal{E}$ — произвольное непустое семейство п/м E , то соответствующее ему семейство всех конечных пересечений множеств из $\mathcal{E}$, уже будет направленным). Упомянутое пересечение замыканий рассматриваем в качестве множества притяжения (МП) в случае ОАХ, порождаемых (направленным) семейством $\mathcal{E}$. В [1, § 8.3] приведены эквивалентные представления МП для произвольного непустого семейства п/м E , порождающего ОАХ, а также указана связь со случаем ОАХ для направленного семейства.

Ограничиваемся далее случаем T_2 -пространства (Y, τ) и предкомпактного множества $\mathbf{h}^1(E)$ (имеется в виду компактность замыкания $\mathbf{h}^1(E)$ в (Y, τ)). Непустое семейство $\mathcal{E}$ п/м E может изменяться, а потому мы имеем семейство всевозможных МП в (Y, τ) на значениях $\mathbf{h}$. Свойства данного семейства МП по существу исчерпываются [10] свойствами тех МП, которые могут быть порождены фильтрами [11, гл. I] множества E : всякое МП в нашем случае либо порождено фильтром, используемым для введения ОАХ, либо пусто. В связи с этим обратимся к ситуации, когда ОАХ может быть порождено ультрафильтром (максимальным фильтром). Оказывается [10], что в последнем случае МП непременно является одноэлементным (синглетоном). Итак, любому ультрафильтру (у/ф) сопоставляется элемент притяжения (ЭП), а потому на множестве всех у/ф E реализуется оператор притяжения (ОП) со значениями в виде ЭП. При этом само множество у/ф есть компакт Стоуна. Кроме того, МП при ОАХ, порожденных фильтром, есть образ множества всех у/ф, мажорирующих упомянутый фильтр, при действии ОП. Наконец, при действии ОП на тривиальный у/ф; ЭП, отвечающий точке $x \in E$, совпадает с $\mathbf{h}(x)$, т. е. ОП имеет смысл продолжения $\mathbf{h}$ на компакт у/ф в оснащении топологией Стоуна.

Пусть в дальнейшем (Y, τ) есть регулярное ТП [12, с. 71]. Тогда ОП непрерывен, как отображение компакта у/ф в оснащении топологией Стоуна в (Y, τ) . С учетом этого получаем важное следствие: при погружении E в компакт у/ф посредством

использования тривиальных u/ϕ в совокупности с ОП получа-ем компактификатор (см. [1, с. 325]), правда очень сложный. Из этого свойства вытекает, что МП для задачи с ОАХ, порожденным фильтром, исчерпывается ЭП u/ϕ , мажорирующих данный фильтр. В свою очередь, как показано в [10], конечное объединение МП, отвечающих ОАХ, порождаемых фильтрами, само есть МП, отвечающее ОАХ, для которого порождающее семейство есть фильтр, являющийся (конечным) пересечением исходных фильтров. Также заметим, что любое непустое конечное подмножество замыкания множества-образа $h^1(E)$ есть МП, порождаемое фильтром. Итак, фильтры и u/ϕ реализуют инструменты исследования очень общих задач о достижимости в ТП с ОАХ.

1. *Ченцов А.Г.* Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств. М.: Ленанд, 2024.
2. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
3. *Даффин Р.Дж.* Бесконечные программы. Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Иностранная литература, 1959.
4. *Гольштейн Е.Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971.
5. *Ченцов А.Г., Бакланов А.П.* Об одной задаче асимптотического анализа, связанной с построением области достижимости // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 292–311.
6. *Ченцов А.Г., Бакланов А.П., Савенков И.И.* Задача о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2016. Т. 47, вып. 1. С. 54–118.
7. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
8. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
9. *Кряжиский А.В.* К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Доклады АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
10. *Ченцов А.Г.* Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости // Труды ИММ УрО РАН. 2025. Т.31, №2.

11. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
12. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.

Задачи маршрутизации: декомпозиция и динамическое программирование

А. Г. Ченцов^{1,2}, П. А. Ченцов^{1,2}

*Екатеринбург, ¹Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН,*

²Уральский федеральный университет

e-mail: chentsov@imm.uran.ru, chentsov.p@mail.ru

Элементы маршрутизации возникают в самых различных областях человеческой деятельности. В частности, это касается транспортных задач, задачи последовательного демонтажа радиационно опасных объектов, задачи управления инструментом при фигурной листовой резке деталей на машинах с ЧПУ; упомянутые актуальные инженерные задачи мотивируют проведение специальных теоретических исследований, в которых учитываются особенности данных постановок в сравнении с известной трудно-решаемой [1] задачей коммивояжера (ЗК). Прежде всего это касается учета ограничений и применения усложненных функций стоимости (ФС). Кроме того, на практике важно получать решение упомянутых задач за приемлемое время. В настоящей работе предпринимаются исследования в этом направлении: конструкции на основе динамического программирования (ДП) комбинируются с применением декомпозиций. Для задач “диапазонного” (в смысле размерности) типа построен метод и, на его основе, алгоритм для нахождения оптимального композиционного решения; алгоритм реализован на многоядерной ПЭВМ в двух версиях: задача с аддитивным критерием, минимаксная постановка.

Рассматривается задача последовательного обхода мегаполисов (непустых конечных множеств) с ограничениями предшествования и функциями стоимости с зависимостью от списка за-

даний. Ранее (см. [2–9]) была построена общая процедура на основе широко понимаемого ДП, допускающая вычислительную реализацию для задач умеренной размерности. Обстоятельства, связанные с решением прикладных задач, были отражены в серии работ, касающихся вопросов сочетания ДП и декомпозиций в интересах построения решения за приемлемое время (см. [10–11]). В основе подхода с применением ДП находится логика процедуры [13] (здесь же отметим другую схему на основе ДП в [14]). В ситуации, когда априорный выбор декомпозиции основной в сумму двух частичных задач затруднителен, применяется построение кластеров семейства мегаполисов на основе жадного алгоритма (см. [15]); построенная пара кластеров реализует требуемую декомпозицию основной задачи.

Итак, в непустом множестве X выделяем непустое конечное множество X^0 , $X^0 \subset X$, попарно дизъюнктные мегаполисы $M_1, \dots, M_n$ и связанные с ними непустые отношения $\mathbb{M}_1, \dots, \mathbb{M}_n : \mathbb{M}_j \subset M_j \times M_j$ при $j = 1, \dots, n$. Полагаем, что $X^0 \cap M_j = \emptyset$, $j = 1, \dots, n$. В виде $\mathcal{M} \triangleq \{M_1, \dots, M_n\}$ ($\triangleq$ — равенство по определению) имеем семейство мегаполисов основной задачи. Полагая $n \geq 4$, фиксируем $N \in \mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ со свойствами $2 \leq N \leq n - 2$ и определяем $\mathcal{M}_1 \triangleq \{M_1, \dots, M_N\}$ и $\mathcal{M}_2 \triangleq \{M_{N+1}, \dots, M_n\}$; тогда $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ (имеем $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ -разбиение семейства мегаполисов основной $\mathcal{M}$ -задачи). Полагаем, что при старте из X^0 исполнитель сначала решает задачу о посещении мегаполисов из $\mathcal{M}_1$ и лишь после этого приступит к посещению мегаполисов из $\mathcal{M}_2$ (имеем декомпозицию с двумя кластерами). Точная постановка и решение совокупной $\mathcal{M}$ -задачи приведены в [11, 12]. Сейчас обсудим мотивировку и некоторые особенности, связанные с привлечением $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ -разбиения семейства $\mathcal{M}$.

Представляется, что $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ -разбиение семейства $\mathcal{M}$ может потребоваться по одной из следующих двух причин.

1) В ряде практически интересных случаев имеются технологические ограничения, позволяющие сформировать $\mathcal{M}_1$. Так, в случае листовой резки на машинах с ЧПУ (при термической резке) в интересах лучшего по возможности учета ограничений теплового характера (имеются в виду условия отвода тепла в окрестностях точек врезки) целесообразно выделить в число пер-

воочередных длинномерные детали, т. е. детали, у которых отношение габаритных размеров достаточно велико, и, на их основе, сформировать M_1 , возможно добавляя контуры каких-то других деталей из соображений вычислительной реализации. Здесь мы имеем достаточно понятную основу для построения (M_1, M_2) -разбиения.

2) В других случаях у нас отсутствует (M_1, M_2) -разбиение, и при этом размерность совокупной M -задачи является весьма ощутимой. Здесь (в случае аддитивного критерия) обращение к декомпозиции мотивируется вопросами сложности вычислений; для построения (M_1, M_2) -разбиения семейства M мегаполисов основной задачи может использоваться подход [15], в основе которого находится процедура построения M_1 и M_2 посредством жадного алгоритма. При этом мы первоначально имеем M -задачу с ограничениями предшествования, а процедура построения M_1 и M_2 реализует соответствующие локальные условия предшествования в получающихся частичных задачах.

Отметим, что в случае минимаксной задачи маршрутизации (см. [9, 12]) использовался неаддитивный вариант ДП. В этой связи отметим общие конструкции [17, гл. 9].

В обоих вариантах постановки (аддитивной и минимаксной) оптимизация в основной задаче с семейством мегаполисов M осуществляется на множестве маршрутных процессов, определенный всякий раз в виде триплета $(\alpha, \mathbf{z}, x)$, где α — маршрут (престановка индексов из $\{1; \dots, \mathbf{n}\}$), $\mathbf{z}$ — траектория, реализуемая в виде одного из вариантов последовательного посещения отношений $M_{\alpha(1)}, \dots, M_{\alpha(\mathbf{n})}$, $x \in X^0$ — точка старта, выбираемая исследователем. При этом маршрут α получается склеиванием допустимых по предшествованию маршрутов α_1 и α_2 в M_1 - и в M_2 -задаче соответственно; в итоге $(\alpha, \mathbf{z}, x)$ есть композиционное решение совокупной задачи. Склейка конструкций предваряющей M_1 -задачи и финальной M_2 -задачи осуществляется с соблюдением требования (подробнее см. в [10, 11, 12]): терминальная компонента критерия предваряющей задачи определяется функцией экстремума финальной задачи; данная функция экстремума находится посредством ДП (в M_2 -задаче), после чего начинается реализация ДП в M_1 -задаче. Здесь (в M_1 - и в M_2 -задаче) используются экономичные версии ДП, реализующие слои функций Беллмана в варианте [2, § 4.9].

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. Институт компьютерных исследований, 2008.
3. Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Ченцов П.А. Экстремальная задача маршрутизации с внутренними потерями // Труды ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 183–201.
4. Ченцов А.Г. Об оптимальной маршрутизации в условиях ограничений // Доклады РАН. 2008. Т. 423, № 3. С. 303–307.
5. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. Задачи маршрутизации с ограничениями, зависящими от списка заданий // Доклады РАН. 2015. Т. 465, № 2. С. 154–158.
6. Ченцов А.Г. Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 170–190.
7. Ченцов А.Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 59–82.
8. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // Автоматика и телемеханика. 2016. Вып. 11. С. 96–117.
9. Ченцов А.Г. Задача маршрутизации «на узкие места» с системой первоочередных заданий // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Т. 61. С. 156–186.
10. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Динамическое программирование в задаче маршрутизации: декомпозиционный вариант // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27, № 137. С. 95–124.
11. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Двухэтапное динамическое программирование в задаче маршрутизации с элементами декомпозиции // Автоматика и телемеханика. 2023. № 5. С. 133–164.
12. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Динамическое программирование и декомпозиция в экстремальных задачах маршрутизации // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2025. Т. 31, № 1. С. 247–272.
13. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.

14. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
15. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Некоторые конструкции решения задач маршрутизации с использованием декомпозиций и преобразований целевых множеств // Вестник Удмуртского Университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34, вып. 4. С. 518–540.
16. Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Оптимальная маршрутизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы. Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2020.
17. Мину М. Математическое программирование. М.: Наука, 1990.

Об оптимальном периодическом сборе возобновляемого ресурса для достижения наибольшей эффективности

А. В. Черникова

*Владимир, Владимирский государственный университет
имени А. Г. и Н. Г. Столетовых
e-mail: nastik.e@bk.ru*

Многие популяции животных и растений характеризуются сезонными изменениями численности. При промысловом воздействии на такие популяции особенно важно исследовать задачу построения оптимальных стратегий сбора, обеспечивающих сохранение части популяции для её дальнейшего восстановления [1]. К задаче оптимальной добычи возобновляемого ресурса относится задача нахождения наибольших значений характеристик сбора, таких как доход и эффективность [2]. Настоящая работа является продолжением публикаций [3, 4], в которых положено начало исследования различных характеристик сбора возобновляемого ресурса. Здесь для модели популяции, динамика которой задана системой разностных уравнений, описан периодический режим

сбора, при котором эффективность достигает наибольшего значения.

Рассматривается модель популяции, состоящей из $n \geq 2$ видов или возрастных классов. Положим $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$, где $x_i(k)$ ($i = 1, \dots, n$) — численность популяции i -го вида или возрастного класса в момент времени $k = 0, 1, 2, \dots$. При отсутствии промыслового воздействия динамика $x(k)$ задана системой разностных уравнений

$$x(k+1) = F(k, x(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $F(k, x) = (F_1(k, x), \dots, F_n(k, x))$, $F_i(k, x)$ — вещественные функции, которые определены и непрерывны на множестве

$$\mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Будем считать, что функции $F_i(k, x)$ являются периодическими с периодом $\tau \geq 2$. Предполагаем, что популяцией можно управлять, извлекая в моменты времени $k = 1, 2, \dots$ долю ресурса $u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n$. Рассмотрим множество всех управлений $U \doteq \{\bar{u} : \bar{u} = (u(1), \dots, u(k), \dots)\}$ и исследуем задачу выбора периодических управлений $\bar{u} \in U$, доставляющих определенный результат сбора. Таким образом, динамика эксплуатируемой популяции задана системой разностных уравнений

$$X(k+1) = F(k, (1 - u(k))X(k)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $X(k) = (X_1(k), \dots, X_n(k))$, $X_i(k)$ и $(1 - u(k))X(k) = ((1 - u_1(k))X_1(k), \dots, (1 - u_n(k))X_n(k))$, $(1 - u_i(k))X_i(k)$ — количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент k соответственно, $i = 1, \dots, n$, причем $X(1) = F(x(0))$. Отметим, что

$$X(k) = X(k, u(k), X_0) = (X_1(k, u(k), X_0), \dots, X_n(k, u(k), X_0))$$

является решением системы (1), удовлетворяющим начальному условию $X(1) = X_0$.

Обозначим $C_i(k) \geq 0$ агрегированную стоимость условной единицы i -го вида ресурса. Тогда общая стоимость ресурса, собранного в момент j , равна $\sum_{i=1}^n C_i(j)X_i(j)u_i(j)$. Здесь также считаем, что $C_i(k)$ являются периодическими с периодом $\tau \geq 2$, то

есть $C_i(k + \tau) = C_i(k)$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим следующую характеристику.

Определение 1 (см. [4]). *Эффективностью* сбора возобновляемого ресурса называется функция

$$E_*(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j) \left(\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n u_i(j) \right)^{-1}.$$

Если существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j) \left(\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n u_i(j) \right)^{-1},$$

то эффективность сбора ресурса обозначим через $E(\bar{u}, x(0))$.

Исследуем периодический режим сбора ресурса с периодом $\tau \geq 2$, то есть рассмотрим периодические управляющие функции $u_i(k + \tau) = u_i(k)$, $k = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, n$. Если уравнение (1) имеет периодическое решение $X(k + \tau) = X(k)$, то обозначим через $V = V(x(1), \dots, x(\tau))$ область притяжения цикла $X(u(1), \dots, u(\tau)) = (X(1), \dots, X(\tau))$. Рассмотрим множество $U(\tau) \subset U$ периодических управлений с периодом τ , при которых уравнение (1) имеет периодическое решение с тем же периодом.

Пусть $x = (x(1), \dots, x(\tau)) \in \mathbb{R}_+^{n\tau}$. Для оценки эффективности сбора возобновляемого ресурса рассмотрим функцию

$$E(x) \doteq \tau D(x) \left(\tau n - \sum_{i=1}^n \frac{x_i(1)}{F_i(\tau, x(\tau))} - \sum_{j=2}^{\tau} \sum_{i=1}^n \frac{x_i(j)}{F_i(j-1, x(j-1))} \right)^{-1},$$

где $D(x) \doteq \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) (F_i(j, x(j)) - x_i(j))$, и множество

$$L \doteq \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{n\tau} : \frac{x(1)}{F(\tau, x(\tau))} + \sum_{j=2}^{\tau} \frac{x(j)}{F(j-1, x(j-1))} < \tau n; \right.$$

$$\left. x(1) \leq F(\tau, x(\tau)) \neq 0; \ x(k) \leq F(k-1, x(k-1)) \neq 0, \ k = 2, \dots, \tau \right\}.$$

Теорема. Предположим, что функция $E(x)$ достигает наибольшего значения $E(x^*)$ в точке $x^* \in L$. Тогда для любых $\bar{u} \in U(\tau)$, $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ выполнено неравенство

$$E(\bar{u}, x(0)) \leq E(\bar{u}^*, x^*(0)) = E(x^*),$$

при периодических управлениях $\bar{u}^* \in U(\tau)$:

$$u^*(1) = 1 - \frac{x^*(1)}{F(\tau, x^*(\tau))}; \quad u^*(k) = 1 - \frac{x^*(k)}{F(k-1, x^*(k-1))},$$

$k = 2, \dots, \tau$ (здесь $x^*(0)$ таково, что $F(x^*(0)) = x^*(1)$).

1. Liu M. Optimal harvesting of stochastic population models with periodic coefficients // Journal of Nonlinear Science. 2022. Vol. 32, no. 23.
2. Давыдов А.А., Мельник Д.А. Об Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 99–107.
3. Егорова А.В., Родина Л.И. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29, № 4. С. 501–517.
4. Родина Л.И., Черникова А.В. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 1. С. 167–179.

О точной глобальной управляемости нелинейного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве

А. В. Чернов

Н.Новгород, Нижегородский гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского
e-mail: chavnn@mail.ru

Далее обобщаются и развиваются результаты [1, 2].

Пусть X — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]_X$; $E = E(T) = \mathbf{C}(0, T; X)$. Пусть, кроме того, что задана функция (оператор) $f_1: [0; T] \times X \rightarrow X$, удовлетворяющая условиям:

F₁) $\forall x \in E$ отображение $[0; T] \ni t \rightarrow f_1(t, x(t))$ принадлежит классу $Z = \mathbf{C}(0, T; X)$.

F₂) Существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t, M): [0; T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0; T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что $\forall x, y \in X$, $\|x\|_X, \|y\|_X \leq M$, п.в. $t \in [0; T]$ имеем

$$\|f_1(t, x) - f_1(t, y)\|_X \leq \mathcal{N}(t, M) \|x - y\|_X.$$

F₃) Существует функция $\mathcal{N}_1(t, r): [0; T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t такая, что $\|f_1(t, \xi)\|_X \leq \mathcal{N}_1(t, M) \forall M > 0, \xi \in X, \|\xi\|_X \leq M$, п.в. $t \in [0; T]$.

F₄) Существуют неубывающие функции $K_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, i = 1, 2$, такие, что для любого $\sigma > 0$ справедливы оценки:

$$\int_h \mathcal{N}(s, \sigma) ds \leq K_1(\sigma) \text{mes } h, \quad \int_h \mathcal{N}_1(s, \sigma) ds \leq K_2(\sigma) \text{mes } h.$$

Пусть U — некоторое гильбертово пространство, понимаемое как пространство значений управления, $C(t): X \rightarrow U$ — сильно непрерывное на $[0; T]$ семейство линейных ограниченных операторов (ЛОО); $\mathbf{St}(0, T; X)$ — множество ступенчатых функций на $[0; T]$ со значениями в X ; $W = \{u = C(\cdot)\xi(\cdot): \xi \in \mathbf{St}(0, T; X), \|\xi(t)\|_X \leq \rho, t \in [0; T]\}$ — множество допустимых управлений. Предположим, что задана функция (оператор) $b: [0; T] \times X \times U \rightarrow X$, удовлетворяющая условиям:

B₁) При всех $x \in E, u \in \mathbf{C}(0, T; U)$ отображение $[0; T] \ni t \rightarrow b(t, x(t), u(t))$ принадлежит классу $Z = \mathbf{C}(0, T; X)$.

B₂) Существует функция $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_2(t, M): [0; T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0; T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что $\forall x, y \in X, \|x\|_X, \|y\|_X \leq M, u \in U, \|u\|_U \leq M$, п.в. $t \in [0; T]$ имеем: $\|b(t, x, u) - b(t, y, u)\|_X \leq \mathcal{N}_2(t, M) \|x - y\|_X$.

B₃) Существует функция $\mathcal{N}_3(t, r): [0; T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t такая, что $\|b(t, \xi, u)\|_X \leq \mathcal{N}_3(t, M) \forall M > 0, \xi \in X, \|\xi\|_X \leq M, u \in U, \|u\|_U \leq M$, п.в. $t \in [0; T]$.

B₄) Существует константа $\beta_0 > 0$ такая, что для любых $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq T, x \in E(T)$ и $\xi \in X$ имеем

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} [b(s, x(s), C(s)\xi), \xi] ds \geq \beta_0(\tau_2 - \tau_1) \|\xi\|^2.$$

B₅) Существует константа $\beta_1 > 0$ такая, что при всех $x \in E(T), \xi_1, \xi_2 \in X, 0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq T$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau_2} [b(s, x(s), C(s)\xi_1) - b(s, x(s), C(s)\xi_2), \xi_1 - \xi_2] ds \geq \\ \geq \beta_1(\tau_2 - \tau_1) \|\xi_1 - \xi_2\|^2. \end{aligned}$$

B₆) Существует функция $\mathcal{N}_4 = \mathcal{N}_4(t, M): [0; T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0; T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что при всех $x \in X, u, v \in U, \|x\|_X, \|u\|_U, \|v\|_U \leq M$, п.в. $t \in [0; T]$ имеем

$$\|b(t, x, u) - b(t, x, v)\|_X \leq \mathcal{N}_4(t, M) \|u - v\|_U.$$

B₇) Существует неубывающая функция $K_3: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, такая, что для любого $\sigma > 0$ справедлива оценка

$$\int_h \mathcal{N}_2(s, \sigma) ds \leq K_3(\sigma) \text{mes } h.$$

Положим $f(., x, u) = f_1(., x) + b(., x, u)$. Будем рассматривать управляемое нелинейное эволюционное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0; T]; \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

относительно неизвестного $x \in \mathbf{C}^1(0, T; X)$; производная по времени понимается в сильном смысле. Задача (1) эквивалентна интегральному уравнению (с интегралом Бохнера) вида

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s), u(s)) ds, \quad t \in [0; T], \quad (2)$$

в пространстве $E(T)$. В свою очередь, интегральное уравнение (2) имеет смысл и для кусочно непрерывных управлений $u \in K\mathbf{C}(0, T; U)$. Соответствующие решения $x(t)$ будут кусочно гладкими, то есть из класса $K\mathbf{C}^1(0, T; X)$. Уравнение (1) тоже имеет смысл, если понимать сильную производную в смысле п.в.

Исследуем разрешимость задачи управления: для заданного конечного состояния $x_1 \in X$ найти управление $u \in W$, которому отвечает хотя бы одно решение $x = x(t; u)$ уравнения (2) такое, что $x(T; u) = x_1$.

Пусть $\zeta_0 = \max\{\|x_0\|_X, \|x_1\|_X\}$. Сделаем следующие предположения:

R₁) При некотором $0 < \kappa < \frac{K_2(\zeta_0)}{\beta_0}$ имеем: $\rho > \frac{K_2(\zeta_0 + \kappa M_0)}{\beta_0}$.

Соответственно, положим $\varepsilon = \rho - \frac{K_2(\zeta_0 + \kappa M_0)}{\beta_0} > 0$.

R₂) Имеем: $\|x_1 - x_0\|_X \leq \varepsilon \beta_0 T$.

Теорема. Пусть выполнены предположения **F₁)**-**F₄)**, **B₁)**-**B₇)**, **R₁)**, **R₂)**. Тогда существуют $\delta > 0$ и числа $k = \frac{T}{\delta} \in \mathbb{N}$, $t_i = i\delta$,

$\lambda_i = \frac{i}{k}$, $i = \overline{0, k}$, такие, что найдется управление $u \in W$ вида

$$u(t) = \left\{ C(t)\xi_i, \xi_i \in X, t \in (t_{i-1}; t_i], i = \overline{1, k} \right\},$$

удовлетворяющее условиям: $x(t_i; u) = x_{\lambda_i} = x_0 + \lambda_i(x_1 - x_0)$, $i = \overline{1, k}$, $x(T; u) = x_1$, $\|\xi_i\|_X \leq \rho$, $i = \overline{1, k}$. Это означает, что глобальная задача управления имеет решение $u(t)$.

1. Чернов А.В. О точной глобальной управляемости полулинейного эволюционного уравнения // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 3. С. 399–417.
2. Чернов А.В. О разрешимости игры преследования с нелинейной динамикой в гильбертовом пространстве // Математическая теория игр и ее приложения. 2024. Т. 16, вып. 1. С. 92–125.

Асимптотика определяющего вектора в линейных задачах “дешевого управления” с гладкими ограничениями на управление

А. А. Шабуров

*Екатеринбург, Институт математики и механики
имени Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: alexandershaburov@mail.ru*

Среди фундаментальных работ по теории управления [1–3] можно выделить класс задач, посвященных решению сингулярно возмущенных задач управления [4, 5]. Изучение таких задач часто основывается на методах построения асимптотики решения [6], одним из которых является метод пограничных функций [7].

Мы подробнее остановимся на построении асимптотики задач с “дешевыми” управлениями [8–10]. В таких задачах малый параметр обязательно присутствует в виде множителя перед управлением под интегральным слагаемым в функционале качества. При отсутствии ограничений на управление такие задачи близки к вырожденным задачам в смысле принципа максимума Понтрягина. С начала 1990-х до конца 2000-х пишутся статьи на построение асимптотики задач “дешевого” управления в различных постановках [11, 12]. Асимптотика оптимального управления строится в линейно-квадратичных задачах без ограничений на

управление (см. например, статьи [13, 14]). Формируются полноценные обзоры статей [15], посвященных асимптотике решений сингулярно возмущенных задач управления.

С начала 2020-х годов рассматриваются задачи “дешевого” управления для линейных систем с постоянными коэффициентами и интегральным выпуклым критерием качества. В постановке таких задач учитываются гладкие ограничения на управление в виде шара на конечном временном промежутке. В статье [16] для задачи в среде без сопротивления построена и обоснована асимптотика определяющего вектора. Получено асимптотическое разложение в смысле Пуанкаре. В работе [17] получены степенные разложения в смысле Эрдейи [18] по сложной системе функций. Показано, что решение задачи с “дешевым” управлением в среде без сопротивления [16] раскладывается в асимптотический степенной ряд по малому параметру и ведет себя более регулярно, чем решение задачи быстрогодействия [19]. Более подробные примеры построения асимптотики были представлены в работе [20], где ограничения на управление как были по существу, так и не оказывали никакого влияния. Для возмущенной задачи “дешевого” управления [21] установлено, что оптимальное управление непрерывно, и, в отличие от предельной задачи, меняет свой вид.

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968.
3. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
4. *Kokotovic P.V., Haddad A.H.* Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113.
5. *Kokotovic P.V., O'Malley R.E.Jr., Sannuti P.* Singular perturbations and order reduction in control theory. An overview // Automatica. 1976. Vol. 12, no. 2. P. 123–132.
6. *Глизер В.Я., Дмитриев М.Г.* Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи Коши, возникающей в теории оптимального управления // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 4. С. 601–612.

7. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
8. *Sannuti P.* Direct singular perturbation analysis of high gain and cheap control problems // *Automatica*. 1983. Vol. 19, no. 1. P. 41–51.
9. *Sannuti P., Wason H.* Multiple time-scale decomposition in cheap control problems-singular control // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1985. Vol. AC–30, no. 8. P. 633–644.
10. *Saberi A, Sannuti P.* Cheap and singular controls for linear quadratic regulators // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1987. Vol. AC–32, no. 3. P. 208–219.
11. *Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г., Овезов Х.А.* Построение субоптимальных управлений в линейно-квадратичных задачах, близких к вырожденным // *Информатика и системный анализ (Сб. статей)*. Ашхабад, 1990. С. 4–19.
12. *Glizer V.Y.* Suboptimal Solution of a Cheap Control Problem for Linear Systems with Multiple State Delays // *Journal of Dynamical and Control Systems*. 2005. Vol. 11, no. 4. P. 527–574.
13. *Kurina G.A, Nguyen T.H.* Asymptotic solution of a linear-quadratic problem with discontinuous coefficients and cheap control // *Appl. Math. Comput.* 2014. Vol. 232, P. 347–364.
14. *Калашникова М.А., Курина Г.А.* Асимптотическое решение линейно-квадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2016. Т. 22, № 1. С. 124–139.
15. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // *Автоматика и телемеханика*. 2006. № 1. С. 3–51.
16. *Данилин А.Р., Шабуров А.А.* Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешевым управлением // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2022. Т. 25, №. 3. С. 5–13.
17. *Данилин А.Р., Шабуров А.А.* Асимптотика решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, дешевым управлением и возмущением начальных данных // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2023. Т. 29, № 1, С. 67–76.
18. *Erdelyi A, Wyman M.* The asymptotic evaluation of certain integrals // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1963. Vol. 14. P. 217–260.
19. *Данилин А.Р., Ильин А.М.* Асимптотическое поведение решения задачи быстрогодействия для линейной системы при возмущении начальных данных // *Докл. РАН*. 1996. Т. 350, № 2. С. 155–157.

20. Данилин А.Р., Шабуров А.А. Асимптотика решения линейных сингулярно возмущенных задач оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и “дешевым” управлением // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59, № 1. С. 85–99.
21. Danilin A.R., Shaburov A.A. Asymptotics of Solution to Indirect Optimal Control Problem with Integral Convex Performance Index and Cheap Control // J. of Mathematical Science. 2024. Vol. 284, no. 1. P. 59–71.

Задача управления нелинейной системой с неточной информацией в условиях воздействия помехи

К. А. Щелчков

Ижевск, Удмуртский государственный университет

e-mail: incognitobox@mail.ru

В пространстве $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(x_0)$ двух лиц: преследователя P и убегающего E . Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u, v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ — фазовый вектор, u и v — управляющие воздействия; $U = \{u_1, \dots, u_m\}$, $u_i \in \mathbb{R}^l$, $i = 1, \dots, m$. Множество $V \subset \mathbb{R}^s$ — компакт. Функция $f: \mathbb{R}^k \times U \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$ — для каждого $u \in U$ непрерывна по совокупности переменных x , v и липшицева по x с константой L , не зависящей от v , то есть

$$\|f(x_1, u_i, v) - f(x_2, u_i, v)\| \leq L\|x_1 - x_2\|,$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k, \quad v \in V, \quad i = 1, \dots, m.$$

Здесь и всюду далее норма считается евклидовой.

Под разбиением σ промежутка $[0, T]$ будем понимать конечное разбиение $\{\tau_q\}_{q=0}^\eta$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_\eta = T$.

Введем следующие обозначения: $D_\varepsilon(x)$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x ; $O_\varepsilon(x)$ — открытый шар радиуса ε с центром в точке x ; $\langle a, b \rangle$ — скалярное произведение векторов a, b .

Пусть $\beta > 0$, $D_\beta(0) \subset \mathbb{R}^k$, $\psi : [0, \infty) \rightarrow D_\beta(0)$.

Определение 1. *Кусочно-постоянной ψ -неточной стратегией W преследователя P на промежутке $[0, T]$ называется пара (σ, W_σ) , где σ — разбиение промежутка $[0, T]$, а W_σ — семейство отображений $d_r, r = 0, 1, \dots, \eta - 1$, ставящих в соответствие величинам $(\tau_r, x(\tau_r) + \psi(\tau_r))$ постоянное управление $\bar{u}_r(t) \equiv \bar{u}_r \in U$, $t \in [\tau_r, \tau_{r+1})$.*

Под управлением убегающего будем понимать произвольную измеримую функцию $v : [0, \infty) \rightarrow V$. Считаем, что игрокам известны динамика системы, то есть функция f , множества U, V , константа Липшица L , числа β и $\delta \geq 0$.

Определение 2. В игре $\Gamma(x_0)$ *происходит δ -неточная ε -поймка*, если существует $T > 0$ такое, что для любого $\hat{\varepsilon} > 0$ существует кусочно-постоянная ψ -неточная стратегия W преследователя P на промежутке $[0, T]$ такая, что для любого допустимого управления убегающего $v(\cdot)$ выполнено неравенство $\|x(\tau)\| < \delta + \hat{\varepsilon}$ для некоторого $\tau \in [0, T]$.

Целью преследователя является осуществление δ -неточной ε -поймки для заданного δ . Цель убегающего — воспрепятствовать этому.

Отметим, что для любых $u \in U$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^k$ и произвольной измеримой функции $v : [0, \infty) \rightarrow V$ справедливо неравенство $\|f(x, u, v(t))\| \leq L\|x\| + B$ для некоторого $B \geq 0$ (см. [1]). То есть для любого $T > 0$ и любого разбиения σ промежутка $[0, T]$, в силу определения 1, на каждом интервале разбиения выполняются условия Каратеодори существования, единственности и продолжимости вправо решения задачи Коши. Таким образом, постановка задачи корректна.

Справедлива следующая теорема о поимке.

Теорема 1 (см. [1]). *Пусть*

$$\min_{p \in \mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle f(0, u, v), p \rangle > 0.$$

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любой точки $x_0 \in D_{\varepsilon_0}(0)$ в игре $\Gamma(x_0)$ происходит ε -поимка. Кроме того, преследователю для построения стратегии достаточно использовать разбиение временного интервала с фиксированным шагом.

Введем следующие обозначения

$$\bar{\alpha} = \min_{\xi \in D_{\varepsilon_0}(0)} \min_{p \in \mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle f(\xi, u, v), p \rangle,$$

$$D = \max_{\xi \in D_{\varepsilon_0}(0), u \in U, v \in V} \|f(\xi, u, v)\|,$$

где ε_0 — из теоремы 1. Отметим, что $\bar{\alpha} > 0$ (см. [1]).

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и заданы числа $\delta, \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}$ и начальное положение x_0 , удовлетворяющие следующим условиям:

$$0 < \mu < 1, \quad 0 \leq \delta < \varepsilon_0, \quad 0 < \alpha < \bar{\alpha},$$

$$0 < \beta \leq \min \left\{ \frac{\bar{\alpha} - \alpha}{L}, \frac{\mu \alpha \delta}{2(\alpha + D)} \right\}, \quad \delta < \|x_0\| \leq \varepsilon_0 - \beta.$$

Тогда в игре $\Gamma(x_0)$ происходит δ -неточная ε -поимка для произвольного отображения $\psi: [0, \infty) \rightarrow D_{\beta}(0)$. Кроме того, преследователю для построения стратегии достаточно использовать разбиение временного интервала с фиксированным шагом.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

1. Щелчков К.А. О задаче управления нелинейной системой второго порядка посредством дискретного управления в условиях воздействия помехи // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34, вып. 3. С. 435–448.

Управление процессом лечения ракового заболевания в модели конкуренции Лотки–Вольтерры с неопределенностью

Е. Н. Хайлов

Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова

e-mail: khailov@cs.msu.su

Рассматривается управляемая система дифференциальных уравнений, моделирующая лечение лейкемии, нацеленное на уничтожение раковых клеток (химиотерапия):

$$\begin{cases} x'(t) = r(1 - x(t) - a_{12}y(t))x(t) - m_1g(z(t))x(t), \\ y'(t) = (1 - y(t) - a_{21}x(t))y(t) - m_2g(z(t))y(t), \\ z'(t) = -\gamma z(t) - \sigma(x(t) + y(t))z(t) + u(t), \\ x(0) = x^0, y(0) = y^0, z(0) = z^0; x^0, y^0 \in (0, 1), z^0 > 0, \end{cases} \quad (1)$$

которая опирается на модель конкуренции Лотки–Вольтерры [1]. В системе (1) переменные $x(t)$ и $y(t)$ определяют соответствующие концентрации здоровых и раковых клеток, переменная $z(t)$ задает концентрацию химиотерапевтического препарата в организме пациента. В уравнениях этой системы $g(z)$ — функция терапии, отражающая химиотерапевтическое воздействие на здоровые и раковые клетки, а $u(t)$ — управляющая функция, которая задает интенсивность поступления лекарства в организм пациента. Величины r , a_{12} , a_{21} , m_1 , m_2 , γ и σ являются положительными параметрами, которые удовлетворяют ограничениям: $r \neq 1$, $a_{12} \neq 1$, $a_{21} \neq 1$, $a_{12} \cdot a_{21} \neq 1$, и $m_1 < m_2$.

Предполагается, что для системы (1) при значениях параметров r , a_{12}^* , a_{21}^* , m_1^* , m_2^* , γ_* , σ_* и начальных данных (x_h^0, y_h^0, z_h^0) траектория $(x_h(t), y_h(t), z_h(t))$, отвечающая управлению $u_h(t)$, известна и характеризует выздоравливающего пациента.

Изменение траектории $(x_s(t), y_s(t), z_s(t))$ системы (1) для больного пациента зависит от управления $u_s(t)$ и связана с неопределенностью в задании параметров a_{12}^* , a_{21}^* , m_1^* , m_2^* , γ_* , σ_* :

$$\begin{aligned} a_{12}(t) &= a_{12}^* + w_1(t), & a_{21}(t) &= a_{21}^* + w_1(t), & \gamma(t) &= \gamma_* + w_3(t), \\ m_1(t) &= m_1^* + w_2(t), & m_2(t) &= m_2^* + w_2(t), & \sigma(t) &= \sigma_* + w_3(t). \end{aligned}$$

Здесь функции $w_1(t)$, $w_2(t)$ и $w_3(t)$ являются допустимыми неопределенностями, удовлетворяющими ограничениям:

$$|w_1(t)| \leq w_1^{\max}, \quad |w_2(t)| \leq w_2^{\max}, \quad |w_3(t)| \leq w_3^{\max},$$

где $w_1^{\max}$, $w_2^{\max}$ и $w_3^{\max}$ — заданные положительные константы.

Тогда задача о движении по заданной кривой в условиях неопределенности [2] для системы (1) ставится следующим образом. При значениях параметров r , a_{12}^* , a_{21}^* , m_1^* , m_2^* , γ_* , σ_* траектория $(x_h(t), y_h(t), z_h(t))$ этой системы, отвечающая управлению $u_h(t)$, известна. При значениях параметров r , $a_{12}(t)$, $a_{21}(t)$, $m_1(t)$, $m_2(t)$, $\gamma(t)$, $\sigma(t)$ требуется отыскать допустимое управление $u_s(t) = u_s(t, w_1(t), w_2(t), w_3(t))$, при котором соответствующая траектория $(x_s(t), y_s(t), z_s(t))$ такой системы оказывается в окрестности траектории $(x_h(t), y_h(t), z_h(t))$ и далее следует вдоль нее при любых допустимых неопределенностях $w_1(t)$, $w_2(t)$ и $w_3(t)$. Множество допустимых управлений $u_s(t)$ и множество допустимых неопределенностей $w_1(t)$, $w_2(t)$ и $w_3(t)$ обсуждаются в [3].

Система (1) для больного и выздоравливающего пациентов имеет вид:

$$\begin{cases} x'_s(t) = r(1 - x_s(t) - a_{12}(t)y_s(t))x_s(t) - m_1(t)g(z_s(t))x_s(t), \\ y'_s(t) = (1 - y_s(t) - a_{21}(t)x_s(t))y_s(t) - m_2(t)g(z_s(t))y_s(t), \\ z'_s(t) = -\gamma(t)z_s(t) - \sigma(t)(x_s(t) + y_s(t))z_s(t) + u_s(t), \\ x_s(0) = x_s^0, \quad y_s(0) = y_s^0, \quad z_s(0) = z_s^0; \quad x_s^0, y_s^0 \in (0, 1), \quad z_s^0 > 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x'_h(t) = r(1 - x_h(t) - a_{12}^*y_h(t))x_h(t) - m_1^*g(z_h(t))x_h(t), \\ y'_h(t) = (1 - y_h(t) - a_{21}^*x_h(t))y_h(t) - m_2^*g(z_h(t))y_h(t), \\ z'_h(t) = -\gamma_*z_h(t) - \sigma_*(x_h(t) + y_h(t))z_h(t) + u_h(t), \\ x_h(0) = x_h^0, \quad y_h(0) = y_h^0, \quad z_h(0) = z_h^0; \quad x_h^0, y_h^0 \in (0, 1), \quad z_h^0 > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Далее используется один из методов аналитического построения агрегированных регуляторов. Согласно ему вводятся рассогласования:

$$\psi(t) = x_s(t) - x_h(t), \quad \phi(t) = y_s(t) - y_h(t), \quad \eta(t) = z_s(t) - z_h(t), \quad (4)$$

и затем для них требуется выполнение функциональных соотношений:

$$\begin{cases} \psi'(t) + \alpha\psi(t) = 0, & \psi(0) = x_s(0) - x_h(0) = x_s^0 - x_h^0, \\ \phi'(t) + \beta\phi(t) = 0, & \phi(0) = y_s(0) - y_h(0) = y_s^0 - y_h^0, \\ \eta'(t) + \delta\eta(t) = 0, & \eta(0) = z_s(0) - z_h(0) = z_s^0 - z_h^0, \end{cases} \quad (5)$$

где α , β и δ — заданные положительные параметры.

Подставляя равенства (4) в дифференциальные уравнения из (5) и привлекая системы (2) и (3), находим соотношения:

$$\begin{aligned} & r(1 - x_s(t) - a_{12}(t)y_s(t))x_s(t) - m_1(t)g(z_s(t))x_s(t) = \\ & r(1 - x_h(t) - a_{12}^*y_h(t))x_h(t) - m_1^*g(z_h(t))x_h(t) - \alpha(x_s(t) - x_h(t)), \\ & (1 - y_s(t) - a_{21}(t)x_s(t))y_s(t) - m_2(t)g(z_s(t))y_s(t) = \\ & (1 - y_h(t) - a_{21}^*x_h(t))y_h(t) - m_2^*g(z_h(t))y_h(t) - \beta(y_s(t) - y_h(t)), \\ & -\gamma(t)z_s(t) - \sigma(t)(x_s(t) + y_s(t))z_s(t) + u_s(t) = \\ & -\gamma_*z_h(t) - \sigma_*(x_h(t) + y_h(t))z_h(t) + u_h(t) - \delta(z_s(t) - z_h(t)), \end{aligned} \quad (6)$$

последнее из которых определяет управление $u_s(t)$:

$$\begin{aligned} u_s(t) &= u_h(t) + (\gamma(t)z_s(t) - \gamma_*z_h(t)) + \\ &+ (\sigma(t)(x_s(t) + y_s(t))z_s(t) - \sigma_*(x_h(t) + y_h(t))z_h(t)) - \delta\eta(t). \end{aligned}$$

Подставляя соотношения (6) в систему (2) и привлекая формулы (4), получаем систему:

$$\begin{cases} x'_s(t) = r(1 - x_h(t) - a_{12}^*y_h(t))x_h(t) - m_1^*g(z_h(t))x_h(t) - \alpha\psi(t), \\ y'_s(t) = (1 - y_h(t) - a_{21}^*x_h(t))y_h(t) - m_2^*g(z_h(t))y_h(t) - \beta\phi(t), \\ z'_s(t) = -\gamma_*z_h(t) - \sigma_*(x_h(t) + y_h(t))z_h(t) + u_h(t) - \delta\eta(t), \\ x_s(0) = x_s^0, y_s(0) = y_s^0, z_s(0) = z_s^0; x_s^0, y_s^0 \in (0, 1), z_s^0 > 0, \end{cases} \quad (7)$$

которая интегрируется одновременно с системами (3) и (5). Ее особенность заключается в том, что траектория $(x_s(t), y_s(t), z_s(t))$ оказывается в окрестности траектории $(x_h(t), y_h(t), z_h(t))$ и далее следует вдоль нее при любых допустимых неопределенностях $w_1(t)$, $w_2(t)$ и $w_3(t)$.

Для системы (7) приводятся результаты численных расчетов для конкретных данных из [1]. В качестве примера, неопределенности $w_1(t)$, $w_2(t)$ и $w_3(t)$ моделируются функциями, пропорциональными $\sin t$ и $\cos t$.

Автор выражает благодарность академику Ю.С. Осипову за постоянное внимание к работе.

1. *Хайлов Е.Н., Григоренко Н.Л., Григорьева Э.В., Клименкова А.Д.* Управляемые системы Лотки-Вольтерры в моделировании медико-биологических процессов. М.: МАКС Пресс, 2021.
2. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
3. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.

О финитной стабилизации гибридных линейных непрерывно-дискретных систем

В. Е. Хартовский

*Гродно, Гродненский государственный университет им. Янки
Купалы*

e-mail: hartows@mail.ru

В докладе обсуждаются результаты исследований [1, 2]. Рассмотрим линейную непрерывно-дискретную систему с импульсным управляющим воздействием и известным выходным сигналом, измеряемым в дискретные моменты времени

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t_k) + \sum_{j=0}^m B_{1j}u(t_{k-j}), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \\ x_2(t_{k+1}) &= A_{21}x_1(t_k) + A_{22}x_2(t_k) + \sum_{j=0}^m B_{2j}u(t_{k-j}), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \tag{1}$$

$$y(t_k) = \sum_{j=0}^m (C_{1j}x_1(t_{k-j}) + C_{2j}x_2(t_{k-j})), \quad k = m, m+1, \dots, \quad (2)$$

где $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $i, j = 1, 2$, $B_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times r}$, $C_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times n_i}$, $i = 1, 2$, $j = \overline{0, m}$; u — управление, y — наблюдаемый выходной сигнал; $t_k = kh$, $k \in \mathbb{Z}$, $h > 0$ — шаг квантования. Предполагаем, что начальное условие для системы (1) имеет вид $x_1(0) = a_1$, $x_2(0) = a_2$, $a_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, $u(t_j) = 0$, $j < 0$.

Определим регуляторы двух типов:

а) регулятор с обратной связью по состоянию:

$$\begin{aligned} u(t_k) &= \sum_{j=0}^{m_1} \left(V_{11}^j X(t_{k-j}) + V_{12}^j x_3(t_{k-j}) \right), \\ x_3(t_{k+1}) &= \sum_{j=0}^{m_1} \left(V_{21}^j X(t_{k-j}) + V_{22}^j x_3(t_{k-j}) \right), \\ k &= k_1, k_1 + 1, \dots, \quad k_1 = m + m_1; \end{aligned} \quad (3)$$

б) регулятор с обратной связью по неполным измерениям:

$$\begin{aligned} u(t_k) &= \sum_{j=0}^{m_2} \left(U_{11}^j y(t_{k-j}) + U_{12}^j x_4(t_{k-j}) \right), \\ x_4(t_{k+1}) &= \sum_{j=0}^{m_2} \left(U_{21}^j y(t_{k-j}) + U_{22}^j x_4(t_{k-j}) \right), \\ k &= k_2, k_2 + 1, \dots, \quad k_2 = 2m + m_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $X(t_k) = \text{col}[x_1(t_k), x_2(t_k)]$, $k = 0, 1, \dots$; $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 3, 4$, — вспомогательные переменные, удовлетворяющие начальному условию $x_{i+2}(t_k) = a_{i+2k}$, $k = \overline{0, m+m_i}$, $i = 1, 2$, где $a_{i+2k} \in \mathbb{R}^{n_{i+2}}$ — любые заданные векторы; V_{ij} , U_{ij} — постоянные матрицы подходящих размеров.

Определение 1. Регулятор (3) (регулятор (4)), для которого существует число $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что каковы бы ни были начальные условия для решения замкнутой системы (1), (3) (замкнутой системы (1), (2), (4)) выполняются равенства

$$x_1(t) = 0, \quad t \geq t_{k_0}, \quad x_2(t_k) = 0, \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots, \quad (5)$$

назовем регулятором *слабой финитной стабилизации по состоянию* (регулятором *слабой финитной стабилизации по выходу*).

Определение 2. Если в определении 1 одновременно с соотношением (5) выполняются равенства $x_3(t_k) = 0$ при $k = k_0, k_0 + 1, \dots$ ($x_4(t_k) = 0, k = k_0, k_0 + 1, \dots$), то регулятор (3) (регулятор (4)) назовем *регулятором финитной стабилизации по состоянию* (регулятором *финитной стабилизации по выходу*).

Обозначим: $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица, $n = n_1 + n_2$, матрицы

$$E_1 = e^{A_{11}h}, \quad E_2 = \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)} d\tau, \quad A = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$B_j = \begin{bmatrix} E_2 B_{1j} \\ B_{2j} \end{bmatrix}, \quad C_j = [C_{1j}, C_{2j}],$$

$$B(\lambda) = \sum_{j=0}^m \lambda^j B_j, \quad C(\lambda) = \sum_{j=0}^m \lambda^j C_j.$$

Теорема 1. Для того чтобы для системы (1), (2) существовал регулятор финитной стабилизации по выходу вида (4), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$1) \operatorname{rank} [I_n - \lambda A, B(\lambda), G(\lambda)] = n \quad \text{при любом } \lambda \in \mathbb{C}; \quad (6)$$

$$2) \operatorname{rank} \begin{bmatrix} I_n - \lambda A \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \text{при любом } \lambda \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Рассмотрим дескрипторное разностное уравнение

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^m B_i g(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \dots \quad (8)$$

Решение уравнения (8) с заданными начальными условиями $g(i) = \tilde{g}_i, i = \overline{1, m}, \tilde{g}_i \in \mathbb{R}^r$, существует [3] в том и только в том случае, когда $\tilde{g}_{m+1-i} = T_i c, i = \overline{1, m}$, где $T_i \in \mathbb{R}^{r \times r_0}$ ($r_0 \in \mathbb{N}$)

— некоторые матрицы, $c \in \mathbb{R}^{r_0}$ — произвольный вектор. Определим любую матрицу $S' \in \mathbb{R}^{r_0 \times r_0}$, являющуюся решением системы уравнений $B_0 T_1 S + \sum_{i=1}^m B_i T_i = 0$, $T_k S = T_{k-1}$, $k = \overline{2, m-1}$. Положим $T = T_m$ и построим матрицы $G_0 = B_0 T$, $G_i = G_{i-1} S + B_i T$, $i = \overline{1, m-1}$, $G(\lambda) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i G_i$.

Теорема 2. *Для того чтобы для системы (1), (2) существовал регулятор слабой финитной стабилизации по выходу вида (4), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\text{rank} [I_n - \lambda A, \quad B(\lambda), \quad G(\lambda)] = n \quad \text{при любом } \lambda \in \mathbb{C}, \quad (9)$$

и выполнялось условие (7).

Следствие. *Для того чтобы для системы (1), (2) существовал регулятор финитной стабилизации по состоянию вида (3) (слабой финитной стабилизации по состоянию вида (3)), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (6) (условие (9)).*

1. *Хартовский В.Е.* Регуляторы финитной стабилизации для гибридных линейных непрерывно-дискретных систем // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 10. С. 1394–1406.
2. *Хартовский В.Е.* Финитная стабилизация не полностью управляемых гибридных линейных непрерывно-дискретных систем // Дифференциальные уравнения. 2025. Т. 61, № 3. С. 394–409.
3. *Хартовский В.Е.* Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. I. Приложение к задаче 0-управляемости // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. № 2. С. 290–311.

Линейные системы нейтрального типа: асимптотическая оценка, экспоненциальная стабилизация и модальная управляемость по неполным измерениям

В. Е. Хартовский

*Гродно, Гродненский государственный университет им. Янки
Купалы*

e-mail: hartows@mail.ru

А. В. Метельский

Минск

e-mail: ametelskii@gmail.com

В. В. Карпук

Минск, Беларусский национальный технический университет

e-mail: vasvaskarpuk@gmail.com

Рассмотрим линейную автономную дифференциальную систему нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{j=1}^m (A_j x(t-jh) + D_j \dot{x}(t-jh)) + \\ + \sum_{j=0}^m b_j u(t-jh), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$y(t) = \sum_{j=0}^m c'_j x(t-jh), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор-столбец решения системы (1) ($n \geq 2$); $0 < h$ — постоянное запаздывание; $A_0, A_j, D_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_j \in \mathbb{R}^n$, $c'_j \in \mathbb{R}^n$ (штрих обозначает операцию транспонирования); u — скалярное кусочно-непрерывное управление, y — скалярный наблюдаемый выходной сигнал (выход). Начальное условие для системы (1) имеет вид $x(t) = \eta(t)$ при $t \in [-mh, 0]$; $u(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$, где η — неизвестная непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную производную.

Обозначим:

$$A(p, \lambda) = A_0 + \sum_{j=1}^m (A_j + pD_j)\lambda^j, \quad W(p, e^{-ph}) = pI_n - A(p, e^{-ph})$$

— характеристическая матрица ($I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица), λ_h — оператор сдвига, p_D — оператор дифференцирования, т.е. $p_D^i \lambda_h^j f(t) = f^{(i)}(t - jh)$ (f — функция, $i, j \geq 0$ — целые числа). Введем множество $\mathfrak{Q}^{r \times m}$, состоящее из отображений $\mathcal{Q}: x \mapsto \mathcal{Q}[x]$, каждое из которых имеет вид

$$\mathcal{Q}[x(t)] = q_0(\lambda_h)x(t) + q_1(\lambda_h)\dot{x}(t - h) + \sum_{j=0}^{\hat{n}_1} \int_0^h r_j(s)x(t - jh - s) ds,$$

где $q_i(\lambda) \in \mathbb{R}^{r \times m}[\lambda]$, $i = 0, 1$,

$$r_j(s) = \sum_{k=1}^{n_1} e^{\alpha_k s} (\cos(\beta_k s) \nu_{jk}(s) + \sin(\beta_k s) \mu_{jk}(s)),$$

($\alpha_k + i\beta_k$) $\in P$, P — конечный набор комплексно-сопряженных или действительных чисел, $\nu_{jk}(s), \mu_{jk}(s) \in \mathbb{R}^{r \times m}[s]$.

Определим наблюдатель в виде следующей линейной системы нейтрального типа

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= A(p_D, \lambda_h)z_1(t) + \mathcal{L}_1[z_2(t)] + b(\lambda_h)u(t), \\ \dot{z}_2(t) &= \beta_0(p_D)c'(\lambda_h)z_1(t) + \mathcal{L}_2[z_2(t)] - \beta_0(p_D)y(t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathcal{L}_1 \in \mathfrak{Q}^{n \times 1}$, $\mathcal{L}_2 \in \mathfrak{Q}^{1 \times 1}$, $\beta_0(p) \in \mathbb{R}_0[p]$, $\mathbb{R}_0[p] = \{1, p + \hat{\alpha} : \hat{\alpha} \in \mathbb{R}\}$ — множество полиномов, имеющих вид $p + \hat{\alpha}$ или равных единице. Компоненту z_1 вектора-решения $z = \text{col}[z_1, z_2]$ системы (3) берем в качестве оценки решения x системы (1), (2) (при заданном управлении u). Легко видеть, что в этом случае ошибка оценки описывается однородной системой (3) ($u = 0, y = 0$). Введем полином $g(p, \lambda) = \sum_{i=0}^{n+1} p^i g_i(\lambda)$, $g_i(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$, $g_{n+1}(0) = 1$. Пусть $W_z(p, e^{-ph})$ — характеристическая матрица однородной системы (3).

Определение 1. Будем говорить, что для системы (1), (2) существует наблюдатель (3) с заданным характеристическим квазиполиномом, если для любого полинома $g(p, \lambda)$ найдутся $\mathcal{L}_1 \in \mathfrak{Q}^{n \times 1}$, $\mathcal{L}_2 \in \mathfrak{Q}^{1 \times 1}$, $\beta_0(p) \in \mathbb{R}_0[\lambda]$, такие, что выполняется равенство $|W_z(p, \lambda)| = g(p, \lambda)$.

Определение 2. Будем говорить, что для системы (1), (2) существует экспоненциально устойчивый наблюдатель (3), если найдутся такие $\mathcal{L}_1 \in \mathfrak{Q}^{n \times 1}$, $\mathcal{L}_2 \in \mathfrak{Q}^{1 \times 1}$, $\beta_0(p) \in \mathbb{R}_0[p]$, что однородная система (3) является экспоненциально устойчивой.

Теорема 1. Для того чтобы для системы (1), (2) существовал наблюдатель (3) с заданным характеристическим квазиполиномом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ c'(e^{-ph}) \end{bmatrix} &= n \quad \forall p \in \mathbb{C}; \\ \text{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ c'(\lambda) \end{bmatrix} &= n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема 2. Для того чтобы для системы (1), (2) существовал экспоненциально устойчивый наблюдатель (3), необходимо и достаточно, чтобы соотношения (4) имели место для тех $p, \lambda \in \mathbb{C}$, которые удовлетворяют условиям: $\text{Re } p \geq \varepsilon_1$, $\exists \varepsilon_1 < 0$ и $|\lambda| \leq 1$.

Определим динамический регулятор с обратной связью, в качестве которой используем результаты измерений наблюдаемого выходного сигнала

$$\begin{aligned} u(t) &= \alpha_0(p_D)x_1(t), \quad \dot{x}_1(t) = \mathcal{Q}_{11}[x_1(t)] + \mathcal{Q}_{12}[x_2(t)], \\ \dot{x}_2(t) &= b(\lambda_h)\alpha_0(p_D)x_1(t) + A(p_D, \lambda_h)x_2(t) + \mathcal{Q}_{23}[x_3(t)], \\ \dot{x}_3(t) &= \alpha_1(p_D)c'(\lambda_h)x_2(t) + \mathcal{Q}_{33}[x_3(t)] - \alpha_1(p_D)y(t), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}^n$ — вспомогательные переменные; $\mathcal{Q}_{11} \in \mathfrak{Q}$, $\mathcal{Q}_{12} \in \mathfrak{Q}^{1 \times n}$, $\mathcal{Q}_{23} \in \mathfrak{Q}^{n \times 1}$, $\mathcal{Q}_{33} \in \mathfrak{Q}$; $\alpha_i(p) \in \mathbb{R}_0[p]$, $i = 0, 1$. Пусть $\overline{W}(p, e^{-ph})$ — характеристическая матрица системы (1), (2), (5).

Определение 3. Систему (1), (2) назовем *модально управляемой по выходу*, если для любого полинома

$$\chi(p, \lambda) = \chi_1(p, \lambda)\chi_2(p, \lambda),$$

$$\chi_k(p, \lambda) = \sum_{i=0}^{n+1} p^i \chi_{ki}(\lambda), \quad \chi_{ki} \in \mathbb{R}[\lambda], \quad k = 1, 2,$$

причем $\chi_{kn+1}(0) = 1$, существует регулятор вида (5) такой, что выполняется равенство $|\overline{W}(p, \lambda)| = \chi(p, \lambda)$.

Определение 3. Систему (1), (2) назовем *экспоненциально стабилизируемой по выходу*, если существует регулятор вида (5) такой, что замкнутая система (1), (2), (5) является экспоненциально устойчивой.

Теорема 3. Система (1), (2) модально управляема в классе регуляторов (5) тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \text{rank}[W(p, e^{-ph}), b(e^{-ph})] &= n \quad \forall p \in \mathbb{C}; \\ \text{rank}[I_n - D(\lambda), b(\lambda)] &= n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}; \end{aligned} \tag{6}$$

и выполняются условия теоремы 1.

Теорема 4. Система (1), (2) экспоненциально стабилизируема в классе регуляторов (5) тогда и только тогда, когда соотношения (6) имеют место для тех $p, \lambda \in \mathbb{C}$, которые удовлетворяют условиям: $\text{Re } p \geq \varepsilon_2$, $\exists \varepsilon_2 < 0$, $|\lambda| \leq 1$ и выполняются условия теоремы 2.

Задача финитной стабилизации по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа

В. Е. Хартковский, О. И. Урбан

*Гродно, Гродненский государственный университет
имени Я. Купалы*

e-mail: hartovskij@grsu.by, urban@grsu.by

Пусть исследуемый объект управления описывается линейной автономной дифференциально-разностной системой нейтрального типа с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями

$$(I_n - D(\lambda_h))\dot{x}(t) = A(\lambda_h)x(t) + B(\lambda_h)u(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t \geq 0,$$

где x — вектор состояния этой системы, u — управление, y — наблюдаемый выходной сигнал (выход); λ_h — оператор сдвига, определяемый для заданного $h = \text{const} > 0$ правилом $(\lambda_h)^k f(t) = f(t - kh)$, $k \in \mathbb{N}$ (для произвольной функции f); $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица, $D(\lambda) = \sum_{i=1}^m D_i \lambda^i$, $A(\lambda) = \sum_{i=0}^m A_i \lambda^i$, $B(\lambda) = \sum_{i=0}^m B_i \lambda^i$, $C(\lambda) = \sum_{i=0}^m C_i \lambda^i$; $D_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l \times n}$. Решение уравнения (1) однозначно задается начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \quad u(t) \equiv 0, \quad t \in [-mh, 0]. \quad (2)$$

Считаем, что $\varphi \in \tilde{\mathcal{C}}^1([-mh, 0], \mathbb{R}^n)$ — неизвестная функция, где $\tilde{\mathcal{C}}^k(\cdot)$ — класс функций, $k - 1$ раз непрерывно дифференцируемых и имеющих кусочно-непрерывную производную порядка k . Управление u — кусочно-непрерывная функция.

Пусть $\mathbb{R}^{n \times m}[p, \lambda]$ ($\mathbb{R}^{n \times m}[\lambda]$) — множество матриц размера $n \times m$, элементы которых суть полиномы переменных p, λ (λ), $p_D = d/dt$ — оператор дифференцирования.

Определим регулятор с обратной связью по наблюдаемому выходу

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{11}(p_D, \lambda_h)y(t) + U_{12}(p_D, \lambda_h)\tilde{x}(t), \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= U_{21}(p_D, \lambda_h)y(t) + U_{22}(p_D, \lambda_h)\tilde{x}(t), \quad t > t_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ — вспомогательная переменная, $t_0 > 0$ — некоторое число ($u(t) \equiv 0, t \leq t_0$), $U_{11}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{r \times l}[p, \lambda]$, $U_{12}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{r \times \tilde{n}}[p, \lambda]$, $U_{21}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times l}[p, \lambda]$, $U_{22}(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}[p, \lambda]$. Для реализации регулятора (3) зададим начальное условие

$$\tilde{x}(t) = \tilde{\varphi}(t), \quad t \in [t_0 - \tilde{h}, t_0], \quad (4)$$

где $\tilde{h} = \tilde{\alpha}h$, $\tilde{\alpha} = \max \{ \deg_{\lambda} U_{k2}(p, \lambda), k = 1, 2 \}$, $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{C}}^{\tilde{p}}([t_0 - \tilde{h}, t_0], \mathbb{R}^{\tilde{n}})$ — любая функция, $\tilde{p} = \max \{ \deg_p U_{k2}(p, \lambda), k = 1, 2 \}$, запись $\deg_{\lambda} f(\lambda)$ обозначает степень полинома (в том числе и матричного).

В работе получен критерий существования и способ построения регулятора с обратной связью по наблюдаемому выходу вида (3), который обеспечит выполнение следующих условий:

а) каковы бы ни были начальные функции φ в (2) и $\tilde{\varphi}$ в (4), существует число $t_1 > 0$ такое, что векторная компонента x вектора-решения $\text{col}[x, \tilde{x}]$ замкнутой системы (1), (3) равна нулю начиная с момента времени, равного t_1 ,

$$x(t) \equiv 0, \quad t \geq t_1;$$

б) замкнутая система (1), (3) является линейной автономной системой нейтрального типа с конечным спектром.

Замечание. а) Под линейной автономной однородной системой нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями понимаем линейную автономную систему $\Upsilon(p_D, \lambda_h)x(t) = 0$, $\Upsilon(p, \lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}[p, \lambda]$, имеющую характеристический квазиполином вида

$$|\Upsilon(p, \lambda)| = \sum_{i=0}^{\nu} p^i \tilde{d}_i(\lambda),$$

где $\nu = n \deg_p \Upsilon(p, \lambda)$, $\tilde{d}_i(\lambda)$ — полиномы, причем $\tilde{d}_\nu(0) = 1$, запись $|\cdot|$ обозначает определитель матрицы. Введя вспомогательные переменные, такую систему можно переписать в виде (1). Линейные автономные дифференциально-разностные системы запаздывающего типа ($\tilde{d}_\nu(\lambda) \equiv 1$) и обыкновенные системы рассматриваем как частный случай систем нейтрального типа.

б) В силу того, что $U_{ij}(p, \lambda)$ — полиномиальные матрицы, система (1), (3) имеет только сосредоточенные соизмеримые запаздывания.

Определение. Регулятор вида (3), обеспечивающий реализацию условий а), б), будем называть *регулятором финитной стабилизации по выходу*.

Обозначим $W(p, \lambda) = p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda)$ и сформулируем основной результат, полученный в работе [1].

Теорема. Для того чтобы для системы (1) существовал регулятор финитной стабилизации по выходу (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\text{rank} [W(p, e^{-ph}), B(e^{-ph})] = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$\text{rank} [I_n - D(\lambda), B(\lambda)] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C};$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Если в регуляторе (3) допустить возможность использования интегральных слагаемых, то [2] при выполнении условий теоремы можно наряду с условиями а) и б) дополнительно добиться экспоненциальной устойчивости замкнутой системы.

1. Хартовский В.Е., Урбан О.И. Финитная стабилизация по неполным измерениям систем нейтрального типа в классе регуляторов с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниями // Автоматика и телемеханика. 2025. № 1. С. 3–26.

2. *Хартковский В.Е.* Фinitная стабилизация и назначение конечного спектра единым регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 5. С. 686–706.

Нехрупкая гарантирующая фильтрация в линейных динамических системах

М. В. Хлебников

*Москва, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской академии наук
e-mail: khlebnik@ipu.ru*

Задача фильтрации, состоящая в оценке состояния динамической системы по измерениям, при случайных возмущениях допускает практически исчерпывающее решение с помощью фильтра Калмана. Однако часто известно лишь, что возмущения являются ограниченными; в этом случае можно строить *гарантированные* оценки состояний.

На основе техники линейных матричных неравенств [1, 2] в [3] была решена задача фильтрации для стационарных задач при ограниченных неслучайных возмущениях: в классе линейных стационарных фильтров был построен оптимальный фильтр и получена равномерная оценка состояния; ее ошибка гарантированно заключена в единый эллипсоид. С другой стороны, в систему управления неизбежно привносится неопределенность, обусловленная неточностью технической реализации регулятора или необходимостью настройки его параметров в процессе эксплуатации. В [4] было показано, что малые возмущения коэффициентов оптимального регулятора могут приводить к потере им свойства стабилизируемости; это явление получило название *хрупкости*.

В докладе обсуждается регулярный подход к решению задачи *нехрупкой фильтрации*, состоящей в синтезе матрицы фильтра, которая выдерживает допустимые вариации своих коэффициентов.

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + D_1 w, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx + D_2 w, \\ z &= C_1 x,\end{aligned}\tag{1}$$

с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}^l$, оцениваемым выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$ и внешним возмущением (шумом) $w(t) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению $\|w(t)\| \leq 1$ для всех $t \geq 0$; пара (A, C) предполагается наблюдаемой.

Рассмотрим фильтр, описываемый уравнением

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}), \quad L \in \mathbb{R}^{n \times l},$$

относительно оценки состояния $\hat{x}$. Его структура такая же, как в наблюдателе Люенбергера [5]: он является линейным стационарным, и подлжит выбору лишь постоянная матрица фильтра L . При этом невязка $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = (A - LC)e + (D_1 - LD_2)w$$

и точность фильтрации, состоящей в оценивании выхода z , характеризуется величиной

$$e_1 = z - \hat{z} = C_1(x - \hat{x}) = C_1 e.$$

Удобным техническим средством для решения задачи нахождения минимального (в том или ином смысле) эллипсоида, содержащего невязку e_1 , является аппарат линейных матричных неравенств и метод инвариантных эллипсоидов [1, 2]. Напомним, что эллипсоид

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

называется *инвариантным* для динамической системы $\dot{x} = Ax + Dw$, если из условия $x(0) \in \mathcal{E}$ следует $x(t) \in \mathcal{E}$ для всех моментов времени $t \geq 0$. При этом, если $\mathcal{E}$ — инвариантный эллипсоид с матрицей P , то линейный выход $z(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^r$ динамической

системы при $x(0) \in \mathcal{E}$ будет принадлежать т. н. *ограничивающему* эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^r: \quad z^T (CPC^T)^{-1} z \leq 1\},$$

а при $x(0) \notin \mathcal{E}$ — стремиться к нему.

Концепция инвариантных / ограничивающих эллипсоидов позволяет при малых отклонениях оценивать равномерную по t точность фильтрации, а при больших отклонениях — асимптотическую. В рамках этого подхода при фиксированном L ищется минимальный ограничивающий эллипсоид, а затем он минимизируется по L . В качестве критерия минимальности ограничивающего эллипсоида обычно принимается *критерий следа* $f(P) = \text{tr} CPC^T$, соответствующий сумме квадратов его полуосей.

Будем говорить, что матрица фильтра L и положительно определенная матрица $P = Q^{-1}$ образуют *нехрупкую пару* с уровнем нехрупкости γ , если для всякого $\Delta: \|\Delta\| \leq \gamma$, возмущенная матрица фильтра $L + \Delta$ стабилизирует систему (1) и матрица P определяет ее инвариантный эллипсоид. При этом будем называть *нехрупкими* как сам фильтр, так и соответствующий ограничивающий эллипсоид, содержащий ошибку оценки выхода системы. Задача состоит в том, чтобы сделать его по возможности малым.

Теорема. Пусть $\tilde{Q}, \tilde{Y}$ — решение задачи минимизации $\text{tr} H$ при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A^T Q + QA - YC - C^T Y^T + \alpha Q + \varepsilon C^T C & QD_1 - YD_2 + \varepsilon C^T D_2 & \gamma Q \\ D_1^T Q - D_2^T Y^T + \varepsilon D_2^T C & -\alpha I + \varepsilon D_2^T D_2 & 0 \\ \gamma Q & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^T & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad Q \succ 0,$$

где оптимизация ведется по матричным переменным $Q \in \mathbb{S}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $H \in \mathbb{S}^r$, скалярной переменной ε и скалярному параметру $\alpha > 0$.

Тогда матрица $C_1 \tilde{Q}^{-1} C_1^T$ определяет нехрупкий ограничивающий эллипсоид для ошибки оценки выхода z системы (1) при

$x_0 = 0$, соответствующий нехрупкой паре

$$\tilde{L} = \tilde{Q}^{-1}\tilde{Y}, \quad \tilde{P} = \tilde{Q}^{-1},$$

с уровнем нехрупкости γ .

Итак, предложен простой и универсальный подход к решению задачи нехрупкой фильтрации произвольных ограниченных внешних возмущений с использованием наблюдателя. Исходная проблема переформулирована в терминах линейных матричных неравенств и сведена к параметрической задаче полуопределенного программирования, легко решаемой численно.

Полученные результаты полностью переносятся и на системы в дискретном времени.

1. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
2. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
3. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Доклады Академии наук. 2008. Т. 418, № 6. С. 749–753.
4. *Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* Robust, Fragile, or Optimal? // IEEE Trans. Autom. Control. 1997. Vol. 42, no. 8. P. 1098–1105.
5. *Luenberger D.G.* An Introduction to Observers // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. Vol. 16, no. 6. P. 596–602.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Mathematical modeling of gas dynamics in the reservoir-pipeline system

N. A. Agayeva

*Azerbaijan, Baku, Scientific-Research Design Institute
of "Oil and Gas"*

e-mail: n.agayeva1975@gmail.com

A mathematical model of the process of non-stationary gas movement in the reservoir-pipeline system is constructed. The boundary value problem of non-stationary gas movement in the reservoir-well-pipeline system is solved in the presence of a choke, taking into account the law of pressure change at the pipeline outlet.

The wellhead and bottomhole pressures are determined. Analytical expressions are obtained that allow us to determine changes in the volume of gas production per unit of time when connecting to the main line.

To determine the wellhead, wellbottom pressure and gas production in wells with abnormally high reservoir pressure when connecting additional line to a transport line, gas movement must be considered in the reservoir-well-pipeline system. An exact solution to this problem is to take into account the interaction in the reservoir-pipeline system. In this case, it is necessary to consider and study the system of equations describing the joint flow of the gas-liquid mixture in the reservoir and the wellbore and pipeline [2–4].

Let us consider the plane-radial filtration of homogeneous gas in a uniform circular formation. The solution to the problem will be realized on the basis of material balance.

The boundary and initial conditions of gas filtration have the

form

$$P|_{r=r_c} = P_c(t), t > 0, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=R_k} = 0, t > 0, \quad (1)$$

$$2\pi h r \frac{k}{\mu \beta} \frac{P_c(0) + P_c(T)}{2} \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{t=0} = G(r). \quad (2)$$

Then the pressure in the reservoir, taking into account the boundary conditions (1) and (2), is calculated in the formulas [1]:

$$P = P_c(t) + A(t) f(r). \quad (3)$$

The gas inflow from the reservoir into the well per unit of time G can be determined by the formula:

$$G = -\frac{\pi m h R_k^2}{\beta} \left[\dot{P}_c \left(1 - \frac{r_c^2}{R_k^2} \right) + D \dot{A}(t) \right]. \quad (4)$$

On the other hand, the gas inflow into the well per unit of time can be determined by the formula [1]:

$$G = \frac{k (P_c(0) + P_c(T))}{\mu \beta} \pi r_c h \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=r_c}, \quad (5)$$

where $P_c(T)$ is the pressure at the well-bottom at the end of the operating period.

By equating expressions (4) and (5), we obtain a differential equation for $A(t)$ and by integrating considering the initial condition (2), we obtain $A(t)$. Substituting the expression $A(t)$ into formula (3), we obtain the pressure distribution field in the reservoir:

$$P = P_c(t) + \left(\ln \frac{r}{r_c} - \frac{r}{R_k} + \frac{r_c}{R_k} \right) [A_0 \exp(-\alpha t) - \frac{1}{D} \int_0^t \dot{P}_c(\tau) \exp[-\alpha(t-\tau)] d\tau]. \quad (6)$$

Now let's consider the movement of gas in the lifting pipe. The equation of gas movement in the pipe will be:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - 2a \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - 2a \left(\frac{\partial u_e}{\partial t} + \frac{\partial u_r}{\partial t} \right). \quad (8)$$

Since equation (8) is linear, it splits into two equations

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u_e}{\partial t} = \frac{\dot{P}_c - \dot{P}_y}{l}, \quad (9)$$

where P_y is the pressure at the wellhead.

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - 2a \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\dot{P}_y - \dot{P}_c}{l}. \quad (10)$$

Solving equations (9), (10) considering the initial and boundary conditions and the continuity condition, we obtain $P_c(t)$.

Gas, passing through a choke, enters the transport pipeline. When gas passes through a choke, its pressure decreases significantly.

As a first approximation, the relationship between the gas flow rate Q_{HB} and the pressure difference between the inlet and outlet of the choke is assumed to be linear [2]:

$$Q_{HB} = \alpha_0(P_y(t) - P_{HB}(t)), \quad (11)$$

where α_0 is the productivity coefficient.

Movement of liquid in the main pipe. Then the equation of gas movement in the pipeline will have the form [3-4]:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} - 2a_1 \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{2a_1 c^2 G}{f_1} \delta(x_1 - l_2), \quad (12)$$

where $\delta(x, l)$ is the Dirac function.

Using the Laplace transform and taking into account the convolution and inversion theorems, taking into account the numerical values of the system parameters, we obtain expressions for the pressure at the wellhead and at the bottom of the well P_c , P_y and Q_1 well productivity.

1. *Leibenzon L.S.* Underground hydrogasdynamics. Collected works. Volume II. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1953.
2. *Abbasov E. M., Agaeva N. A.* Modeling the process of fluid flow in the reservoir-pipeline system // Engineering Physics Journal (EPJ), 2021. Vol. 94, no. 3 (May-June). P. 578–589.
3. *Sitdikov R.M., Filippov D.D., Mitrushkin D.A.* Numerical modeling of multiphase technologies in the coupled system "reservoir-well-Electric Centrifugal Pump Installation" // Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, 2016. No. 59. P. 28.
4. *Galkin V.A., Bykovskikh D.A., Gavrilenko T.V., Stulov P.A.* Filtration model of ideal gas motion in a porous medium // Bulletin of Cybernetics, 2016. No. 4 (24). P. 50–57.

Modeling hydrocarbon solution filtration using cubic equations of state

V. L. Litvinov

Samara, Samara State Technical University

e-mail: vladlitvinov@rambler.ru

K. V. Litvinova

Moscow, Lomonosov Moscow State University

e-mail: vladlitvinov@rambler.ru

Natural gases and oil are multicomponent solutions. Methods for predicting and analyzing their phase state and thermodynamic properties are based on the integrated use of field measurement results, laboratory studies, and mathematical modeling of the corresponding processes. Modern hydrodynamic simulators use cubic equations of state to determine the state of a liquid and model filtration processes. This article examines which of the presented equations best describes the properties of pure substances. Equations of state are used to calculate the density, volatility, and z -factor of a substance in liquid and gaseous states. Let us consider the following equations of state: Redlich–Kwong (RK), Soave–Redlich–Kwong

(SRK), Peng–Robinson (PR). The equations are common to the liquid and gas phases; they are cubic and two-parameter. If the equation has three real roots, the largest root corresponds to the gas phase, and the smallest to the liquid phase. The average root has no physical meaning [1–3].

Calculations were carried out implementing the presented algorithm for three equations of state: PR, RK, SRK, using the example of methane. Volumetric calculations were carried out at temperatures of 150, 200 and 300 K and compared with data from the NIST website.

From a technical point of view, one of the advantages of cubic equations over others is the ability to analytically determine the roots, which allows saving machine time when performing complex research and design calculations [1–6]. Studies using methane confirmed the data that in modern hydrodynamic simulators it is preferable to use the PR and SRK equations of state, since they provide higher accuracy compared to the RK equation.

1. *Koldoba E.V.* Self-similar solutions of the equations of two-component isothermal transport in porous media with phase transitions // *Matematicheskoe modelirovanie*. 2006. Vol. 18, no. 7. P. 53–60.
2. *Koldoba E.V.* The method of construction of the thermal constants (K-values) of phase equilibrium in multicomponent solutions // *Matematicheskoe modelirovanie*. 2018. Vol. 30, no. 4. P. 84–96.
3. *Koldoba A.V., Koldoba E.V., Skachkov S.V.* Model equation of state for the numerical solution of the problems of multicomponent filtration with phase transitions // *Geokhimiya*. 2004. No. 5. P. 573–576.
4. *Koldoba E.V.* Mathematical modeling of isothermal multicomponent multiphase filtration with phase transitions. Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation. Moscow. 2005.
5. *Litvinov V.L., Litvinova K.V.* Construction of self-similar solutions of two-component filtration equations in modeling of oil and gas production // *Geometric methods in control theory and mathematical physics. III International Scientific Conference (Ryazan, April 26–30, 2021)*. Ryazan: Ryazan State University, 2021. P. 61.
6. *Litvinov V.L., Litvinova K.V.* On one solution of multicomponent filtration equations with phase transitions in modeling the development of oil- and gas-containing formations // *Youth science: challenges and*

FDTD simulation of normally incident plane harmonic electromagnetic waves on a planar interface between two linear, homogeneous and isotropic media

P. A. Makarov

Syktvykar, FRC KSC UB RAS

e-mail: makarovpa@ipm.komisc.ru

V. I. Shcheglov

Moscow, Kotelnikov IRE RAS

e-mail: vshcheg@cplire.ru

The Finite-Difference Time-Domain (FDTD) method is one of the most powerful and widely used numerical techniques for modeling electromagnetic wave propagation [1, 2]. It solves Maxwell's equations directly in the time domain, making it particularly useful for analyzing complex electromagnetic phenomena, such as signal reflection and transmission at material interfaces [3]. With the advancement of modern telecommunication technologies (particularly wireless systems), there is a growing need for accurate modeling of electromagnetic wave interactions with various media. The FDTD method enables analysis of signal behavior at material interfaces, which is critically important for designing antennas, waveguides, and other electronics and communication. The FDTD method is also extensively employed in optics and photonics to simulate light interaction with nanostructures, which is essential for development of novel materials such as metamaterials, plasmonic structures, and photonic crystals, as well as devices based on them [4].

In our previous work [5], it was demonstrated that setting the Yee grid parameters in the form

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} = \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad (1)$$

is optimal for modeling the electromagnetic properties of a homogeneous non-dispersive medium. This choice significantly reduces computational errors associated with the inevitable influence of numerical dispersion when simulating electromagnetic processes in a medium with relative permittivity ε and permeability μ , modeled as a chain of discrete nodes. It is evident that the choice (1) fails when interfaces separating media with different ε and μ parameters are present.

The aim of this study is to investigate specific features of the FDTD method that arise when modeling the dynamics of electromagnetic signals at a planar interface between two perfect dielectrics, taking into account their magnetic permeability. By *perfect dielectrics* we mean that energy losses associated with dissipative processes are completely neglected.

As the primary model for the interface between two media with permittivities ε_1 and ε_2 , the geometry shown in Figure 1 was selected. The interface is aligned with point $x = 0$. The directional source emitting the wave with cyclic frequency ω incident on the interface is assumed to be located in the $x < 0$ region, so that the total field in this area consists of both incident and reflected waves. In the $x > 0$ region, the transmitted wave field propagates. For definiteness, let us consider plane-polarized waves with the polarization direction defined such that the electric field strength vector $\mathbf{E} \parallel \mathbf{e}_z$. It follows that in this case the magnetic field strength $\mathbf{H} \parallel \mathbf{e}_y$.

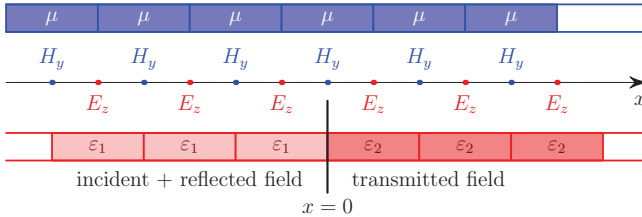


Figure 1: Geometry of a planar interface between two media

Here, the points on the x -axis labeled E_z and H_y represent spatial nodes of the discrete space-time Yee grid [1]. In these nodes, the values of corresponding electromagnetic wave field components are determined using a system of algebraic equations that serve as finite-difference analogs of Faraday's and Maxwell–Ampere's laws.

The boundary conditions for the model shown in Figure 1 are given by the following system of equations

$$-\frac{1}{\eta_1} + \frac{\widehat{\widetilde{r}}}{\eta_1} = -\frac{\widehat{\widetilde{t}}}{\eta_2},$$

$$e^{i\widetilde{\beta}_1\Delta x/2} + \widehat{\widetilde{r}}e^{-i\widetilde{\beta}_1\Delta x/2} = \left(e^{-i\widetilde{\beta}_2\Delta x/2} + i\frac{\Omega\mu\Delta x}{\eta_2} \right) \widehat{\widetilde{t}}. \quad (2)$$

Here, the tilde above a symbol indicates that the expression represents an FDTD analog of the corresponding quantity in the continuous case, while the hat emphasizes the complex-valued nature of this parameter. The following auxiliary notations

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \Omega = \frac{2}{\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right), \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon},$$

were used when writing formulas (2).

Solving the system of equations (2) for the Fresnel amplitude coefficients of transmission t and reflection r at the interface yields the expressions:

$$\widehat{\widetilde{t}} = \frac{2\eta_2 \cos\left(\frac{\widetilde{\beta}_1\Delta x}{2}\right)}{\eta_2 \cos\left(\frac{\widetilde{\beta}_2\Delta x}{2}\right) + \eta_1 \cos\left(\frac{\widetilde{\beta}_1\Delta x}{2}\right)}, \quad (3)$$

$$\widehat{\widetilde{r}} = \frac{\eta_2 \cos\left(\frac{\widetilde{\beta}_2\Delta x}{2}\right) - \eta_1 \cos\left(\frac{\widetilde{\beta}_1\Delta x}{2}\right)}{\eta_2 \cos\left(\frac{\widetilde{\beta}_2\Delta x}{2}\right) + \eta_1 \cos\left(\frac{\widetilde{\beta}_1\Delta x}{2}\right)}. \quad (4)$$

It is useful to compare the derived expressions for the transmission (3) and reflection (4) coefficients with their exact continuous-case counterparts

$$\widehat{t} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}, \quad \widehat{r} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}. \quad (5)$$

Clearly, formulas (3) and (4) reduce to (5) in the limit $\Delta x \rightarrow 0$. However, for finite spatial discretization Δx (which is always the case in FDTD), these results exhibit discrepancies.

1. Yee K. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media // IEEE Trans. AP. 1966. Vol. 14, no. 3. P. 302–307.
2. Taftlove A., Brodwin M.E. Numerical Solution of Steady-State Electromagnetic Scattering Problems Using the Time-Dependent Maxwell's Equations // IEEE Trans. MTT. 1975. Vol. 23, no. 8. P. 623–630.
3. Makarov P., et. al. Simulation of Electromagnetic Wave Propagation in Magnetic Randomly Inhomogeneous Magnetic Media // IEEE Magnetics Letters. 2022. Vol. 13. Art. no. 2101305.
4. Taftlove A., Oskooi A., Johnson S.G. Advances in FDTD Computational Electrodynamics: Photonics and Nanotechnology. Artech House, 2013.
5. Makarov P.A., Ustyugov V.A. Features of Numerical Solution of the Maxwell Equations by the FDTD Method in the Homogeneous and Inhomogeneous Formulations // Tech. Phys. 2024. Vol. 69, no. 8. P. 2227–2240.

Spectra of the energy operator of three-magnon systems in the Heisenberg model. Three-dimensional case

S. M. Tashpulatov

*Tashkent, Institute of Nuclear Physics of the Academy of Science
of Republic of Uzbekistan*

e-mail: sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru

In [1], the three-magnon system was considered in a two-dimensional isotropic and anisotropic bounded ferromagnetic lattice, and the spectrum and bound state (BS) were investigated using numerical methods.

In [2], the three-magnon system was considered in an isotropic non-Heisenberg ferromagnetic model with spin one with the interaction of nearest neighbors. The structure of the essential spectrum of the system was studied and an upper and lower estimate was obtained for the number of three-magnon BS of the systems.

In this paper, the energy operator of three-magnon systems in the Heisenberg model is considered and the structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the system in a three-dimensional ferromagnet are investigated.

The system Hamiltonian has the form

$$H = J \sum_{m,\tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau}). \quad (1)$$

Here $J < 0$ are the bilinear exchange interaction parameter for nearest-neighbor atoms of the lattice, $\vec{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$ is the atomic spin $s = 1/2$ operator in the node m of the ν — dimensional lattice Z^ν , and $\tau = \pm e_j, j = 1, 2, \dots, \nu$, where e_j are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors.

We set $S_m^\pm = S_m^x \pm iS_m^y$. Let φ_0 be the so-called vacuum vector, which is fully determined by the conditions: $S_m^+ \varphi_0 = 0$, and $S_m^z \varphi_0 = \frac{1}{2} \varphi_0$, $\|\varphi_0\| = 1$. The vectors $S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0$ describe the state of the system of three magnons located at the nodes p, q and r . Let $\mathcal{H}_3$ be the closure of the space formed by all linear combinations of these three vectors. This space is called the three-magnon space of the operator H .

Theorem 1. *The space $\mathcal{H}_3$ is invariant with respect to the operator H , and the restriction H_3 of operator H to a subspace $\mathcal{H}_3$ is a bounded self-adjoint operator. It generates the bounded self-adjoint operator $\overline{H}_3$, acting in the space l_2^s according to the formula*

$$\begin{aligned} (\overline{H}_3 f)(p, q, r) = & J \sum_{\tau} [\{\delta_{p,q+\tau} + \delta_{p+\tau,q} + \delta_{p+\tau,r} + \delta_{p,r+\tau} + \delta_{q,r+\tau} + \delta_{q+\tau,r} - \\ & - 6\} f(p, q, r) - \frac{1}{2} \delta_{p-\tau,q} f(p-\tau, q, r) - \frac{1}{2} \delta_{p-\tau,r} f(p-\tau, q, r) - \frac{1}{2} \delta_{q-\tau,r} \times \\ & \times f(p, q-\tau, r) - \frac{1}{2} \delta_{q,r-\tau} f(p, q, r-\tau) - \frac{1}{2} \delta_{p,q-\tau} f(p, q-\tau, r) - \frac{1}{2} \delta_{p,r-\tau} \times \\ & \times f(p, q, r-\tau) + f(p-\tau, q, r) + f(p, q-\tau, r) + f(p, q, r-\tau) - \frac{1}{2} \delta_{p+\tau,q} \times \\ & \times f(p+\tau, q, r) - \frac{1}{2} \delta_{p+\tau,r} f(p+\tau, q, r) - \frac{1}{2} \delta_{q+\tau,r} f(p, q+\tau, r) - \frac{1}{2} \delta_{q,r+\tau} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times f(p, q, r + \tau) - \frac{1}{2}\delta_{p, q+\tau}f(p, q + \tau, r) - \frac{1}{2}\delta_{p, r+\tau}f(p, q, r + \tau) + \\ & + f(p + \tau, q, r) + f(p, q + \tau, r) + f(p, q, r + \tau)], \end{aligned} \quad (2)$$

where $\delta_{k,j}$ is the Kronecker symbol. The operator H_3 acts on the vector $\psi \in \mathcal{H}_3$ according to the formula

$$H_3\psi = \sum_{p,q,r \in \mathbb{Z}^\nu} (\overline{H}_3 f)(p, q, r) S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0. \quad (3)$$

Definition. The eigenfunction $\varphi_\Lambda \in L_2(T)$ of the operator $\tilde{H}_{3\Lambda}$, corresponding to the eigenvalue $z_\Lambda \notin \sigma_{cont}(\tilde{H}_{3\Lambda})$, is called *the BS of the operator $\tilde{H}_{3\Lambda}$* , and the quantity z_Λ is called *the energy this BS*.

Let $\Lambda_1 = \lambda + \mu$, $\Lambda_2 = \mu + \gamma$ and $\Lambda_3 = \lambda + \gamma$. We let $\mathcal{F}$ denote the Fourier transform: $\mathcal{F} : l_2((\mathbb{Z}^\nu)^3) \rightarrow L_2((T^\nu)^3) \equiv \tilde{\mathcal{H}}_3$, where T^ν is the ν -dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure $d\lambda$, $\lambda(T^\nu) = 1$. We set $\tilde{H}_3 = \mathcal{F}\overline{H}_3\mathcal{F}^{-1}$.

Theorem 2. *The Fourier transformation transforms the operator $\overline{H}_3$ into the bounded self-adjoint operator $\tilde{H}_3 = \mathcal{F}\overline{H}_3\mathcal{F}^{-1}$, acting in the space $L_2^{symm}((T^\nu)^3)$ according to the formula*

$$\begin{aligned} \tilde{H}_3\psi_3 = & -J\{12 - 4(\cos \lambda + \cos \mu + \cos \gamma)\}f(\lambda, \mu, \gamma) + \\ & + J \int_{T^\nu} [12 + 2(\cos(\lambda - s) + \cos(\mu - s) - \cos s - \cos(\lambda + \mu - s)) - \\ & - 4(\cos \lambda + \cos \mu + \cos \gamma)]f(s, \lambda + \mu - s, \gamma)ds + \\ & + J \int_{T^\nu} [12 - 4(\cos \lambda + \cos \mu + \cos \gamma) + 2(\cos(\lambda - s) + \cos(\gamma - s) - \cos s - \\ & - \cos(\lambda + \gamma - s))]f(s, \mu, \lambda + \gamma - s)ds + J \int_{T^\nu} [12 - 4(\cos \lambda + \cos \mu + \cos \gamma) - \\ & - 2(\cos s + \cos(\mu + \gamma - s) - \cos(\mu - s) - \cos(\gamma - s))]f(\lambda, s, \mu + \gamma - s)ds + \\ & + J \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} [12 - 4(\cos \lambda + \cos \mu + \cos \gamma) + 3\cos(\lambda + \mu + \gamma - s - t) + \\ & + 2\cos(\lambda + \mu - s) + 2\cos(\lambda + \gamma - s) + 4\cos s + 4\cos t + 2\cos(\lambda + \mu - t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\cos(\mu + \gamma - t) + \cos(\lambda + t) + 2\cos(\mu - s - t) + 2\cos(\lambda - s - t) - \\
& -8\cos(\lambda - s) - 6\cos(\mu - t) - 8\cos(\lambda + \mu - s - t) - \\
& -2\cos(\lambda - t)]f(s, t, \lambda + \mu + \gamma - s - t)dsdt, \tag{4}
\end{aligned}$$

where L_2^{symm} is the subspace of the symmetric functions in the space $L_2((T^\nu)^3)$.

Theorem 3. a) If $\nu = 3$ and the total quasimomentum of the system is $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = (\pi, \pi, \pi)$, then the essential spectrum of the operator $\tilde{H}_{3\Lambda}$ consists of the three values: $\sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = \{-36J, 8J, -14J\}$, and for number of three-magnon BS N the inequality $1 \leq N \leq 26$ hold.

b) If $\nu = 3$ and the total quasimomentum of the system is $\Lambda = 0$, then the essential spectrum of the operator $\tilde{H}_{3\Lambda}$ consists of the unique segment: $\sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = [0, -72J]$, and for number of three-magnon BS N the inequality $0 \leq N \leq 25$ hold.

c) If $\nu = 3$ and the total quasimomentum of the system is $\Lambda \neq \pi$, and $\Lambda \neq 0$, then the essential spectrum of the operator $\tilde{H}_{3\Lambda}$ consists of the union of three segments: $\sigma_{cont}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = [-4J(9 - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i}{2} - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i^2}{2} - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i^3}{2}), -4J(9 + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i}{2} + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i^2}{2} + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i^3}{2})] \cup [-4J(3 - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i}{2}) + z_{\Lambda_2} + z_{\Lambda_3}, -4J(3 + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i}{2}) + z_{\Lambda_2} + z_{\Lambda_3}] \cup [-4J(6 - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i^2}{2} - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i^3}{2}) + z_{\Lambda_1}, -4J(6 + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i^2}{2} + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_i^3}{2}) + z_{\Lambda_1}]$, and for number of three-magnon BS N the inequality $1 \leq N \leq 26$ hold, where z_{Λ_1} , z_{Λ_2} and z_{Λ_3} are the some numbers, and $\Lambda_1 = (\Lambda_1^1, \Lambda_1^2, \Lambda_1^3) \in T^3$, $\Lambda_2 = (\Lambda_2^1, \Lambda_2^2, \Lambda_2^3) \in T^3$, and $\Lambda_3 = (\Lambda_3^1, \Lambda_3^2, \Lambda_3^3)$.

1. Van Himbergen J.E., and Tjon J.A. Three-Magnon Bound States in the Two-Dimensional Isotropic and Anisotropic Heisenberg Ferromagnet. // Physica A. 1976. Vol. 82. P. 389–416.
2. Tashpulatov S.M. Structure of Essential Spectrum and Discrete Spectrum of the Energy Operator of Three-Magnon Systems in the Isotropic Ferromagnetic Non-Heisenberg Model with Spin One and Nearest-Neighbor Interactions. // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2019. Vol. 7, no. 4. P. 874–899.

Mathematical modeling of dynamics and stability of pipeline systems

P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, P. M. Abrashkin

Ulyanovsk, Ulyanovsk State Technical University

e-mail: velmisovpa@mail.ru, pokladovau@inbox.ru,

abrashkinpm@gmail.com

The problem of pipeline stability is considered, taking into account the interaction with the liquid [1–5]. The mathematical model is described by the following nonlinear differential equations:

$$\begin{aligned} \mu u_{tt} - \left[EF \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \right]_x - (\gamma_2 u_{xt})_x + \gamma_1 u_t + \gamma_0 u + \\ + H^*(u, u_t, x, t) = h(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mu w_{tt} - \left[EF \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x + (P w_x)_x + m_* U^2(t) w_{xx} + \\ + 2m_* U(t) w_{xt} + m_* U_t(t) w_x + \alpha_1 w_t + \alpha_0 w + (EJ w_{xx} \delta^3)_{xx} + \\ + (\alpha_2 w_{xx} \delta^3)_{xxt} + G^*(w, w_t, x, t) = g(x, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Here $u(x, t)$, $w(x, t)$ is longitudinal and transverse deformations of the pipeline; $\mu(x) = m_0(x) + m_*$, $m_0(x) = \rho(x)F(x)$ — the linear mass of the pipeline, $m_* = \rho_* F_*$ — the linear mass of the liquid; $\rho(x)$ — the pipeline material density; $F(x)$ — the pipeline cross-sectional area; ρ_* — the liquid density; F_* — the cross-sectional area occupied by the liquid; $\alpha_2(x)$, $\gamma_2(x)$ — the damping coefficients in the pipeline material; $\alpha_1(x)$, $\gamma_1(x)$ — the damping coefficients of external viscoelastic bonds; $\alpha_0(x)$, $\gamma_0(x)$ — the stiffness coefficients of external viscoelastic bonds; $E(x)$ — the modulus of elasticity of the pipeline material; $J(x)$ — the moment of inertia of the cross-section of the pipeline relative to the neutral axis, which is perpendicular to the plane of oscillation; $P(x, t)$ — the longitudinal force; $h(x, t)$ — the longitudinal external distributed load; $g(x, t)$ — the transverse

external distributed load; $H^*(u, u_t, x, t)$, $G^*(u, u_t, x, t)$ — nonlinear relative to u , u_t , w , w_t components of reaction forces and damping of external bonds; $U(t)$ — the fluid velocity in the pipeline; the symbols x and t below represent partial derivatives with respect to the coordinates x and t , respectively; coefficients μ , EF , EJ , m_* , γ_0 , γ_1 , γ_2 , α_0 , α_1 , α_2 — positive. The function $\delta(x, t)$ is defined by the expression

$$\delta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)}}. \quad (3)$$

1. The study of dynamic stability, as defined by Lyapunov, is based on the creation of a functional and its subsequent analysis. Let's consider the functional

$$\begin{aligned} I(t) = & \frac{1}{2} \int_0^l [\mu u_t^2 + 2a\mu w u_t + (\gamma_0 + a\gamma_1) u^2 + a\gamma_2 u_x^2 + \mu w_t^2 + a\mu w w_t + \\ & + (\alpha_0 + \frac{1}{2}a\alpha_1) w^2 + EF \left(u_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 - w_x^2 (P + m_* U^2) + \\ & + w_{xx}^2 \left(\left(EJ + \frac{1}{2}a\alpha_2 \right) \delta^3 + \alpha_2 (\delta^3)_t \right)] dx \geq 0, \end{aligned}$$

here a — any positive constant, l — the pipeline length.

We will assume that $H^*(u_t + au) + G^*(w_t + \frac{1}{2}aw) \geq 0$. Let us assume that the ends of the pipeline are fixed rigidly or hinged and consider the free vibrations of the pipeline ($h = g = 0$).

Let's consider as examples some special cases that involve simplifying the mathematical model (1), (2).

a) Let $\alpha_2(x) \equiv 0$, then the stability conditions have the form

$$B = \frac{1}{2}EJ (a\delta^3 - (\delta^3)_t) > 0, \quad \alpha_1 > \frac{1}{2}a\mu, \quad \gamma_1 + \frac{1}{\varphi_x} \min \gamma_2 > a\mu,$$

$$P < \frac{1}{\xi} \min_{x,t} (EJ\delta^3) - m_* U^2,$$

$$\frac{1}{2} \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}a\mu \right) \left((P + m_* U^2)_t - a(P + m_* U^2) + \frac{2}{\xi} \min_{x,t} B \right) >$$

$$> m_*^2(U_t - aU)^2,$$

here φ, ξ — any positive constants.

b) In expression (3) for δ , the values of u_x, w_x^2 can be neglected in comparison with 1. We will count in (2) $\delta = 1$. Replacing $(EJw_{xx}\delta^3)_{xx}$ and $(\alpha_2w_{xx}\delta^3)_{xxt}$ with $(EJw_{xx})_{xx}$ and $(\alpha_2w_{xx})_{xxt}$, respectively, we obtain a model with linear bending rigidity and linear internal friction. Assuming $a = 0$ and taking into account the positiveness of the coefficients $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, we obtain the stability conditions

$$P < \frac{1}{\xi} \min_x (EJ) - m_* U^2,$$

$$2 \left(\alpha_1 + \frac{1}{\theta} \min_x \alpha_2 \right) (P + m_* U^2)_t > m_*^2 U_t^2.$$

2. Another approach to the study of dynamic and dynamic stability is to apply the Galerkin method and then study the linear approximation [5]. In this case we come to the study of systems of ordinary differential equations. The form of these systems allows us to use known theorems on stability in the linear part of the equations.

1. *Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E.Y.* Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2014. Vol. 7, no. 6. P. 1133–1148.
2. *Kaya-Cekin E.Y., Aulisa E., Ibragimov A., Seshaiyer P.* Fluid structure interaction problem with changing thickness non-linear beam // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2011. Vol. 2. P. 813–823.
3. *Paidoussis M.P.* The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across Applied Mechanics // Journal of Sound and Vibration. 2008. Vol. 310. P. 462–492.
4. *Velmisov P. A., Tamarova Yu. A., Pokladova Yu. V.* Investigation of the dynamic stability of bending-torsional deformations of the pipeline // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 2021. Vol. 23, no. 1. P. 72–81.
5. *Velmisov P. A., Pokladova Yu. V.* The study of the stability of aeroelastic systems by linear approximation // Automation of Control Processes. 2020. Vol. 3 (61). P. 80–91.

Об устойчивости колец, подкрепленных откосами

В. Ю. Андрюкова, В. Н. Тарасов

Сыктывкар, ЛМиТ, Физико-математический институт,

ФИЦ Коми научный центр УрО РАН

e-mail: veran@list.ru, vntarasov@ipm.komisc.ru

Пусть кольцо радиуса R нагружено равномерно распределенной по ободу нагрузкой P , направленной к центру кольца. Перемещение точек кольца опишем вектором

$$g = u(\varphi)\xi + w(\varphi)\eta + v(\varphi)\zeta,$$

где $\xi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$ — нормаль, $\eta = (-\cos \varphi, -\sin \varphi)$ — касательный вектор, $\zeta = \eta \times \xi$ — бинормаль. Декартовы координаты точек кольца описываются формулами

$$\begin{cases} x = (R - u) \cos \varphi - w \sin \varphi, \\ y = (R - u) \sin \varphi + w \cos \varphi, \\ z = v, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

Упругая энергия деформированного кольца определяется функционалом

$$U = \int_0^{2\pi} \left(\frac{B}{2R^3} (u'' + u)^2 + \frac{A}{2R^2} \left(\gamma - \frac{1}{R} v'' \right)^2 + \frac{C}{2R^2} \left(\gamma' + \frac{1}{R} v'' \right)^2 \right) d\varphi, \quad (1)$$

а работа внешних сил может быть вычислена по формуле

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(u'^2 - 2u^2 + v'^2 - v^2 \right) d\varphi, \quad (2)$$

где в выражении для упругой энергии A, B — главные жесткости стержня при изгибе, C — жесткость при кручении.

Полная энергия $J = U - PW$ в положении равновесия принимает минимальное значение. Уравнения Эйлера разваливаются на две независимые подсистемы:

$$\frac{B}{R^3} (u^{IV} + 2u'' + u) + P(u'' + 2u) = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{A}{R^3}v^{IV} - \frac{A}{R^2}\gamma'' - \frac{C}{R^3}v'' - \frac{C}{R^2}\gamma'' + P(v'' - v) &= 0, \\ \frac{A}{R^3}v'' - \frac{A}{R^2}\gamma + \frac{C}{R^3}v'' + \frac{C}{R^2}\gamma'' &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Первая описывает деформацию арки в ее первоначальной плоскости, а уравнения (3) описывают пространственную деформацию. Если нет дополнительных связей, то в результате потери устойчивости реализуется либо плоская форма ($v = 0, \gamma = 0$), либо пространственная ($u = 0$). В случае пространственной деформации критическое давление определяется формулой [1]:

$$P_1 = \frac{12A}{(4 + A/C)R^3}.\tag{4}$$

В случае плоской деформации

$$P_2 = \frac{4.5B}{R^3}.\tag{5}$$

Допустим, что кольцо подкреплено тросами, один конец которых прикреплен к некоторой точке кольца, а другой к точке с координатами $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = \varepsilon c_0$. Тросы не выдерживают сжимающих усилий, но являются нерастяжимыми. Расстояние между концами j -го тросика определяется формулой

$$f_j(u, w, v) = \sqrt{R^2 - 2Ru_j + u_j^2 + w_j^2 + v_j^2 + \varepsilon v_j c_0 + \varepsilon^2 c_0^2},$$

причем

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq M/2, \\ -1, & M/2 + 1 \leq j \leq M. \end{cases}$$

Расстояние между концами тросов не может возрастать, то есть

$$f(u, w, v) - f(0, 0, 0) \leq 0.$$

Раскладывая функции $f_j(u, w, v)$ в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка малости, приходим к неравенствам:

$$-Ru_j + \varepsilon c_0 v_j \leq 0, \quad j \in \{1, \dots, M\}.\tag{6}$$

Таким образом, для определения критического давления при наличии подкрепления тросами приходим к задаче изопериметрического типа

$$\begin{cases} U \rightarrow \min_{u,v,\gamma}, \\ W = 1, \end{cases}$$

и выполнении неравенств (6). Не ограничивая общности, можно положить $R = 1$. Предположим, что поперечное сечение кольца — эллипс. Тогда

$$A = \frac{\pi}{4} E a^3 b, \quad B = \frac{\pi}{4} E a b^3, \quad C = \frac{\pi E a^3 b^3}{(1 + \nu)(a^2 + b^2)},$$

где a, b — полуоси эллипса. Можно считать, что модуль Юнга $E = 1$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. При проведении расчетов искомые функции аппроксимировались интерполяционными кубическими сплайнами. Число узлов интерполяции $n = 30$. Таким образом, подставляя сплайны в (1) и (2), получаем две квадратичные формы от значений функций u, w, v, γ в узлах интерполяции: $g(z) = \frac{1}{2}(Gz, z)$, $q(z) = \frac{1}{2}(Qz, z)$. Обозначим через Γ конус, определяемый неравенствами (6), и рассмотрим задачу

$$g(z) \rightarrow \min_{z \in \Gamma}, \quad q(z) = 1. \quad (7)$$

Пусть z_* — решение (7). Тогда можно показать, что значение критической нагрузки $P_* = g(z_*)$ [2].

В таблице приведены результаты численных экспериментов при различных параметрах a, b , полученные по формулам (4) и (5), которые дают соответственно значения P_1 и P_2 , а при наличии односторонних ограничений критическое значение обозначено P_* .

В работе [3] рассмотрена плоская задача устойчивости подкрепленного нитями кольца под действием центральной нагрузки. В этом случае $A = 0$, $C = 0$, $\gamma = 0$, $v = 0$. Данная задача является частным случаем рассматриваемой в настоящей работе проблемы. Там показано, что отношение $P_*/P_2 = 4.1$, то есть подкрепление увеличивает критическую нагрузку примерно в четыре раза. В наших расчетах при $a = 2.5$ P_1 значительно больше

a	b	P_1	P_2	M	c_0	P_*
1	1	2.027	3.534	30	0.1	3.843
2.5	1	23.16	8.836	30	0.15	35.34
1.25	1	3.888	4.418	30	0.15	15.33
1.25	1	3.888	4.418	30	0.5	3.90
1.25	1	3.888	4.418	30	0.2	6.98
1.25	1	3.888	4.418	12	0.1	4.72

P_2 , поэтому происходит плоская деформация кольца, и отношение P_*/P_2 также около четырех, что означает, что совпадение с теоретическим результатом довольно точное. В других случаях P_1 и P_2 примерно равны друг другу, поэтому происходит и плоская, и пространственная деформация кольца. Также можно отметить, что значение критической силы существенно зависит от параметров a , b , c_0 и числа нитей M .

1. *Николай Е. Л.* Труды по механике. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1955.
2. *Tarasov V.* Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V. F. Demyanov) (CNSA). IEEE, 2017. P. 252–256.
3. *Andryukova V., Tarasov V.* Nonsmooth problem of stability for elastic rings // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V. F. Demyanov) (CNSA). IEEE, 2017. P. 213–218.

К исследованию динамики системы синхронизации с импульсным частотно-фазовым управлением

О. Г. Антоновская, А. В. Бесклубная

*Нижний Новгород, Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет*
e-mail: olga.antonovskaja@yandex.ru, antbesk@gmail.com

Рассмотрим синтезатор частот (СЧ) с импульсным частотно-фазовым детектором типа ИЧФДЗН [1] и идеальным астатическим фильтром нижних частот. Уравнения математической модели (ММ) с управляемой координатой x в произвольном периоде следования импульсов опорного генератора (ОГ) имеют вид [2]: при подключенном выходе детектора

$$\alpha \dot{\theta} = g(x(\tau)), \quad \mu \dot{x} = u - x, \quad (1)$$

$0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1, u = \pm 1$, а при отключенном выходе детектора на этапе хранения информации

$$\alpha \dot{\theta} = g(x(\tau)), \quad x(\tau) = x_0, \quad (2)$$

$0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1$, где точкой обозначено дифференцирование по времени τ , изменяющемуся в пределах периода сигнала ОГ; $0 < \mu \ll 1$ — астатизирующий параметр; α — показатель счетчика (С); u — выходной сигнал детектора; x — выходная координата фильтра; θ — координата С, пустого при $\theta = 0$ и заполненного при $\theta = 1$; x_0 — начальное условие; $g(x) > 0$ — нормированная на единицу ($g(0) = 1$) характеристика управляемого генератора (УГ).

Учитывая скачкообразно изменяющийся характер уравнений, для изучения поведения фазовых траекторий $\theta(\tau), x(\tau)$ ММ СЧ следует использовать три фазовых подпространства: Π_1 , в котором определена система (1) с $u = +1$, Π_3 , в котором определена система (1) с $u = -1$ и подпространство Π_2 , в котором определена система (2).

Поскольку при таком подходе к моделированию динамики СЧ режимы работы детектора обусловлены свойствами фазовых траекторий в каждом из подпространств, а при переходе к случаю идеального астатизма ($\mu = +0$) в силу устойчивости (1) по быстрым движениям при $\mu = +0$ участков поверхности $x = u = \text{const}$ фазовая траектория возмущенного движения располагается в $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности невозмущенного движения [3], при этом направление и величина мгновенного скачка по координате x при переходе траектории движения из одного подпространства в другое определены однозначно, постольку переход к изучению ММ СЧ пониженной размерности является обоснованным. Таким образом, задача исследования динамики СЧ сводится к необходимости изучения свойств последовательностей точечных отображений сечений C_{ij} подпространств Π_i , значения индексов: i — номер отображаемого подпространства, $j = 1$ соответствует отображению сечения $\theta = 0$, $j = 2$ — отображению сечения $\tau = 0$.

Согласно [2], особенностью процесса управления в рассматриваемой ММ является возможность осуществления изображающей точкой движения (ИТД) возвратных петлеобразных движений, описываемых по методу точечных отображений как преобразование сечений $C_{21} \rightarrow C_{12} \rightarrow C_{21}$ и $C_{22} \rightarrow C_{31} \rightarrow C_{22}$. Указанные виды петлеобразных движений связаны с особенностями алгоритма работы импульсного частотно-фазового детектора (ИЧФД) и соответствуют досчету фазы приходящих на входы ИЧФД импульсов опорного генератора и счетчика числа колебаний управляемого генератора (УГ).

В докладе показано что при $\alpha \geq 1$ движения могут осуществляться только между сечениями C_{12} и C_{21} , в то время, как при прохождении через сечения C_{31} и C_{22} их нет. При $\alpha < 1$ петлеобразные движения могут совершаться только между сечениями C_{31} и C_{22} , в то время, как при прохождении через сечения C_{12} и C_{21} их нет.

1. Левин В.А., Малиновский В.Н., Романов С.К. Синтезаторы частот с системой импульсно-фазовой автоподстройки. М.: Радио и связь, 1989.
2. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. Качественный анализ динамики системы синхронизации с импульсным частотно-фазовым управ-

лением // Вестник Нижегородского университета. 2013. № 1(1). С. 184–190.

3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.

Математическое моделирование деформированного состояния тонкой нанопластины с использованием теории микроструктурной деформации

О. В. Гермидер

Архангельск, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: o.germider@narfu.ru

С применением теории микроструктурной деформации тонких пластин [1, 2] и вариационного принципа [3] построена математическая модель с двумя параметрами масштаба длины для исследования деформированного состояния тонкой изотропной нанопластины, которая имеет постоянную толщину и находится под действием поперечной нагрузки произвольного вида. В предположении, что процесс деформирования является изотермическим и смещение точек пластины малы по сравнению с ее толщиной, основное дифференциальное уравнение в частных производных шестого порядка и граничные условия получены из условия минимума полной свободной энергии пластины с учетом компонент тензора кривизны на микроуровне. Построенная двухпараметрическая модель является обобщением классической модели теории тонких пластин Кирхгофа–Лява [3, 4] и позволяет проводить уточняющие исследования, связанные с описанием свойств и состояний тонких и сверхтонких структурных элементов наносистем. Для прямоугольной нанопластины приведен вывод модифицированных классических граничных условий теории упругости тонких пластин и неклассических граничных условий для дифференциального уравнения равновесия шестого порядка

этой пластины в декартовых координатах. Путем полиномиальной аппроксимации Чебышева [5] и метода коллокации, в котором в качестве узлов использованы корни этих многочленов, уравнение в частных производных более высокого порядка, чем четвертый, преобразовано в систему линейных алгебраических уравнений. Получены численные результаты моделирования изгиба тонких пластин градиентного типа на основе построенного решения с использованием многочленов Чебышева первого рода для различных типов граничных условий, включая свободно опертые и защемленные края этих пластин. Выполнен ряд тестовых и верификационных расчетов по моделированию прогиба, производимого постоянной нагрузкой [6–8], а также синусоидальной нагрузкой, получен репрезентативный набор данных для валидации численных результатов. Проведен анализ влияния отрицательных членов градиента деформации. Показано, что учет соответствующих слагаемых в функции плотности свободной энергии пластины приводит к уменьшению прогиба срединной плоскости этой пластины и влияние градиентных членов уменьшается с увеличением размера пластины, в то время как пластины размеры которых сопоставимы с микроструктурными параметрами длины демонстрируют значительный размерный эффект. Предполагается, что комплексный подход, представленный в этом исследовании, может быть использован для решения проблем, связанных с потерей устойчивости и свободных колебаний тонких нанопластин.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 24–21–00381.

1. *Mindlin R.D., Eshel N.N.* On first strain-gradient theories in linear elasticity // International Journal of Solids and Structures. 1968. Vol. 4. P. 109–124.
2. *Zhou Y., Huang K.* A simplified deformation gradient theory and its experimental verification // Acta Mech. 2023. Vol. 234. P. 2963–2984.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
4. *Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S.* Theory of plates and shells. New York: McGraw-Hill Press, 1959.
5. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. Москва: Лаборатория знаний, 2020.

6. Zhou Y., Huang K. On simplified deformation gradient theory of modified gradient elastic Kirchhoff–Love plate // European Journal of Mechanics / A Solids. 2023. Vol. 100, Art. no. 105014.
7. Babu B., Patel B.P. Analytical solution for strain gradient elastic Kirchhoff rectangular plates under transverse static loading // European Journal of Mechanics / A Solids. 2019. Vol. 73. P. 101–111.
8. Bacciocchi M., Fantuzzi N., Ferreira A.J.M. Conforming and nonconforming laminated finite element Kirchhoff nanoplates in bending using strain gradient theory // Computers & Structures. 2020. Vol. 239, Art. no. 106322.

Моделирование получения цинка в процессе электролиза для дальнейших приложений в аддитивных технологиях

М. С. Дмитриев

Казань, Казанский федеральный университет

e-mail: dmitmax2002@yandex.ru

Н. Ф. Кашапов

Казань, Институт механики и машиностроения ФИЦ

Казанский научный центр РАН,

*Казань, Академия наук Республики Татарстан, Институт
прикладных исследований Академии наук Республики*

Татарстан

e-mail: kashnail@gmail.com

В. Ю. Чебакова

Казань, Казанский федеральный университет

*Казань, Академия наук Республики Татарстан, Институт
прикладных исследований Академии наук Республики*

Татарстан

e-mail: vchebakova@mail.ru

Металлические сплавы на основе цинка широко исследуются на возможность применения в медицине для изготовления им-

плантатов, так как цинк обладает умеренной способностью к разложению, приемлемой биосовместимостью и биологически активными свойствами. В работе [1] дан обзор по методам 3D печати для изготовления индивидуальных ортопедических имплантатов из металлов и биометаллов, исследовалась возможность использования сплавов, содержащих цинк. Одним из способов получения цинка является электролиз щелочных и кислых электролитов. Моделирование позволяет уменьшить время, затрачиваемое на подбор оптимальных режимов работы установок.

Так как электролиз относится к гетерогенным процессам, проходящим на поверхности раздела сред, то определяющие значения имеют граничные условия. При постановке граничных условий для решения системы уравнений необходимы знания о процессах, происходящих на поверхности электродов. Обычно приводятся суммарные общие реакции на электроде, которые проходят через стадийные электрохимические реакции, и для их описания используют следующие законы и уравнения:

1) Для постановки граничных условий часто используется закон Фарадея. Однако на практике количество образовавшегося вещества не совпадает с рассчитываемым количеством по закону Фарадея. Это связано с тем, что закон Фарадея выводится для идеального случая протекания единственной реакции.

2) Так же уравнение Батлера-Фольмера связывает между собой силу тока, напряжение на обоих электродах и константы скоростей процессов, при этом вводится дополнительный параметр, характеризующий перенос частиц между электродами.

3) Плотность подаваемого тока связана с потенциалом электродов уравнением анодно-катодной волны. Это экспериментальные кривые (поляризационные кривые), хорошо проявляющиеся в водных растворах, содержащих несколько электроактивных веществ, выделение которых происходит поэтапно.

4) Описание скоростей процессов часто производится с помощью закона Аррениуса, но при стадийном описании процессов электролиза возникают реакции, относящиеся к разным порядкам, и не все из них можно описать данным законом. Закон Аррениуса хорошо подходит в случае, когда лимитирующей реакцией не является гетерогенный процесс диссоциации.

Таким образом, надо признать, что при постановке граничных условий к математической модели приведенные выше законы

не применимы, так как они либо связывают внешние характеристики обоих электродов, либо вводят подбираемые параметры, либо характеризуют лимитирующую реакцию. Их применение ведет либо к введению подбора дополнительных параметров, характеризующих рассматриваемую систему, либо к описанию конкретных хорошо исследованных экспериментальными методами технических решений.

Целью исследования является установление возможности переноса численного алгоритма исследования прикатодных процессов электролиза, разработанного в приближении неизменности площади электрода для вещества, выделяемого в газовой фазе [2, 3], на случай осаждения на электроде вещества, приводящего к изменению поверхностных свойств электрода. Так, в данной статье методом прямого поиска находятся константы прикатодных стадийных электрохимических реакций получения порошка цинка. Данный алгоритм соединяет метод Хука–Дживса и метод Рунге–Кутты. При этом решается как прямая задача вычисления системы кинетических уравнений, так и обратная для поиска констант скоростей гетерогенных процессов. Опираясь на описание независимого протекания химических процессов, с помощью этого алгоритма можно провести расчеты на каждом из электродов. Алгоритм апробирован на примере прогнозирования выделения цинка при выщелачивании цинковой руды электролитом на основе гидроксида натрия (20%)[4, 5].

В данной работе проводится интеграция алгоритма для нахождения констант скоростей приэлектродных процессов в математическую модель, описывающую пространственные распределения внутренних характеристик гетерогенных систем в межэлектродном пространстве.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 25-21-00453).

1. *Meng M., Wang J., Huang H., Liu X., Zhang J., Li Z.* 3D printing metal implants in orthopedic surgery: Methods, applications and future prospects // *Journal of Orthopaedic Translation*. 2023. Vol. 42. P. 94–112.
2. *Кашанов Р.Н., Кашанов Л.Н., Кашанов Н.Ф., Чебакова В.Ю.* Кинетика двухфазных газожидкостных сред в процессах электроли-

за // Теплофизика высоких температур. 2021. Т. 59, № 6. С. 869–876.

3. *Кашапов Л.Н., Кашапов Н.Ф., Чебакова В.Ю.* Математическое моделирование катодных процессов при получении водорода // Вестник Технологического университета. 2023. Т. 26, № 1. С. 99–105.
4. *Дмитриев М.С., Кашапов Н.Ф., Чебакова В.Ю., Кормушин К.В.* Моделирование выделения цинка в накопителях гибридного типа // Современные наукоемкие технологии. 2024. № 10. С. 44–48.
5. *Кашапов Н.Ф., Чебакова В.Ю., Чебакова Е.В., Кормушин К.В.* Алгоритм численного исследования прикатодных процессов электровыделения цинка // Вестник Югорского государственного университета. 2024. Т. 20, № 1. С. 11–18.

Необходимость учета перекрестного влияния компонент волнового вектора при построении неотражающих искусственных краевых условий для 2D уравнения Шредингера, описывающего дифракцию оптического пучка

В. А. Егоренков

Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова

e-mail: Egorenkov-v-a@cs.msu.ru

Современные методы компьютерного моделирования сложных физических процессов, таких как распространение лазерного излучения в нелинейных средах, требуют использования искусственных краевых условий (ИКУ) для ограничения размеров вычислительной области. При этом эти условия должны быть высоко прозрачными (неотражающими), иначе образуются ложные отраженные волны, которые могут существенно повлиять на точность решения. В частности, подобные процессы описываются уравнением Шредингера, что делает разработку эффективных прозрачных ИКУ для него актуальной задачей. Данный доклад

посвящен разработке метода построения адаптивных неотражающих ИКУ для 2D линейного уравнения Шредингера, описывающего дифракцию оптического пучка. Адаптивность ИКУ достигается за счет локальных волновых чисел (ЛВЧ), которые зависят от решения задачи вблизи искусственной границы. Для вычисления ЛВЧ применяется их аппроксимация с использованием инвариантов уравнения Шредингера. Предложенная методика позволяет эффективно учитывать эволюцию оптического излучения, вызванную его дифракцией.

Точность вычисления ЛВЧ существенно влияет на эффективность ИКУ в случае пучка малой амплитуды вблизи искусственной границы. Для минимизации влияния случайных флуктуаций решения вблизи границы предлагается вычислять ЛВЧ, усредненное по нескольким соседним узлам сетки на некотором расстоянии от нее [1].

Необходимость учета перекрестного влияния проекций волнового вектора для достижения высокой эффективности ИКУ для 2D уравнением Шредингера при наличии направления движения оптического пучка была продемонстрирована в [2]. Работоспособность предложенных ИКУ демонстрируется сравнением результатов компьютерного моделирования с известными аналитическими решениями, а также с расчетами, проведенными в расширенной области с нулевыми краевыми условиями для комплексной амплитуды оптического излучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 24-71-00031.

1. *Trofimov V.A., Loginova M.M., Egorenkov V.A* Efficiency of using adaptive artificial boundary conditions at computer simulation of contrast spatio-temporal laser-induced structures in a semiconductor // *Comp. and Math. Methods*. 2021. Vol 3, no. 6. Art. no. e1165. DOI: 10.1002/cmm4.1165
2. *Trofimov V.A., Loginova M.M., Egorenkov V.A* Cross-impact of the beam local wavenumbers on the efficiency of self-adaptive artificial boundary conditions for 2D nonlinear Schrödinger equation // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2023. Vol 46, no. 15. P. 16006–16036.

Функциональные классы определенности полей и источников в квазистационарных задачах электромагнитной теории

А. В. Калинин, А. А. Тюхтина

Нижний Новгород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского

e-mail: avk@mm.unn.ru, tyukhtina@iee.unn.ru

Восстановление физических полей и их источников в рассматриваемой пространственно-временной области по результатам граничных наблюдений является достаточно актуальной задачей. В частности, вопрос об информативности граничных наблюдений изучался для уравнения Гельмгольца [1–4], периодических решений для системы уравнений Максвелла [5] и системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении [6].

В настоящей работе для систем уравнений Максвелла в квазистационарных приближениях [7–15] рассмотрены различные постановки краевых задач об определении периодических по времени электромагнитных полей и их источников в проводящих областях. Для разных вариантов краевых условий, соответствующих заданию на границе области касательных и нормальных составляющих электрических и магнитных полей охарактеризованы функциональные классы определенности полей и источников.

1. *Bleistein N., Cohen J.* Nonuniqueness in the inverse source problem in acoustics and electromagnetics // Journal of Mathematical Physics. 1977. Vol. 18. P. 194–201.
2. *Marengo E.A., Ziolkowski R.W.* On the radiating and nonradiating components of scalar, electromagnetic, and weak gravitational sources // Physical review letters. 1999. Vol. 83, no. 17. P. 3345–3349.
3. *Gbur G., Wolf E* Nonradiating sources and other "invisible" objects // Progress in Optics. 2003. Vol. 45. P. 273–316.
4. *Marengo E.A., Devaney A.J.* Nonradiating sources with connections to the adjoint problem // Physical Review E. 2004. Vol. 70. Art. no. 037601.

5. *Albanese R., Monk P. B.* The inverse source problem for Maxwell's equations // Inverse Problems. 2006. Vol. 22. P. 1023–1035.
6. *Alonso Rodriguez A., Camano J., Valli A.* Inverse source problems for eddy current equations // Inverse problems. 2012. Vol. 28.
7. *Толмачев В.В., Головин А.М., Потанов В.С.* Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1988.
8. *Larsson J.* Electromagnetics from a quasistatic perspective // Am. J. Phys. 2007. Vol. 75, no. 3. P. 230–239.
9. *Kruger S.E.* The three quasistatic limits of the Maxwell equations // arXiv:1909.11264, 2019.
10. *Kalinin A.V., Tyukhtina A.A.* Hierarchy of models of quasi-stationary electromagnetic fields // MMST 2020, Revised Selected Papers. CCIS, vol. 1413. Springer, 2021. P. 77–92.
11. *Alonso Rodriguez A., Valli A.* Eddy current approximation of Maxwell equations. Theory, algorithms and applications. Milan: Spriner-Verlag Italia, 2010.
12. *Kalinin A.V., Styunyaev N.N.* Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // J. Math. Anal. Appl. 2017. Vol. 450, no. 1. P. 112–136.
13. *Raviart P.-A., Sonnendrücker E.* Approximate models for the Maxwell equations // J. Comput. Appl. Math. 1994. Vol. 63. P. 69–81.
14. *Degond P., Raviart P.-A.* An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations // Forum Math. 1992. Vol. 4. P. 13–44.
15. *Калинин А.В., Тюхтина А.А.* Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60, № 8. С. 121–134.

Достаточные условия глобальной устойчивости многотоковых моделей синхронного и асинхронного электромотора

Б. И. Коносеви́ч, Ю. Б. Коносеви́ч

Донецк, Институт прикладной математики и механики

e-mail: konos.donetsk@yandex.ru

1. Глобальная устойчивость многотоковой модели синхронного электромотора

Определение 1. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) называется *фазовой*, если при записи в нормальном виде ее правая часть периодична по некоторым (угловым) переменным.

Для описания работы синхронного электромотора в данной работе используется его *многотоковая модель* с одной угловой переменной, предложенная в [1], но, в отличие от [1], момент нагрузки не предполагается постоянным, а является непрерывной нечетной монотонно убывающей функцией $M_d(\dot{\varphi})$ угловой скорости $\dot{\varphi}$ ротора электромотора относительно его статора. Такая модель приводится к системе ОДУ

$$\begin{aligned} C\ddot{\gamma} &= -m\dot{\gamma} + \Delta M_d(\dot{\gamma}) - a_1 x \sin \gamma - \\ &- a_2 \sum_{n=1}^{n_1} i_n \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_1}\right) - b_0 \sin \gamma - c_0, \\ L_1 \dot{x} &= -R_1 x + a_1 \dot{\gamma} \sin \gamma, \\ L_2(i_n)' &= -R_2 i_n + a_2 \dot{\gamma} \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_1}\right), \quad n = 1, 2, \dots, n_1 \end{aligned} \tag{1}$$

с фазовым вектором $z = (\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_1})$. Здесь $\gamma = \varphi - \omega t$ — угол рассогласования магнитных полей ротора и статора; φ — угол поворота ротора относительно статора; $\omega > 0$ — постоянная угловая скорость вращения магнитного поля в статоре; x — отклонение тока в обмотке возбуждения от его стационарного значения; $i_1, \dots, i_{n_1}$ — токи в демпферной обмотке; n_1 — число

стержней в демпферной обмотке; C — осевой момент инерции ротора; $m, a_1, a_2, b_0, c_0, L_1, L_2, R_1, R_2 > 0$ — постоянные параметры; $\Delta M_d(\dot{\gamma}) = M_d(\omega + \dot{\gamma}) - M_d(\omega)$ — приращение диссипативного момента $M_d(\dot{\varphi})$ для синхронного электромотора.

При условии $c_0/b_0 < 1$ система уравнений (1) имеет два счетных набора стационарных решений $z_{1s} = (\gamma_{1s}, 0, 0, 0, \dots, 0)$, $z_{2s} = (\gamma_{2s}, 0, 0, 0, \dots, 0)$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Они описывают *равномерные вращения ротора* с угловой скоростью ω вращения магнитного поля в статоре. Здесь стационарные значения γ_{1s}, γ_{2s} угла γ определены уравнением $b_0 \sin \gamma + c_0 = 0$ и выражаются по формулам $\gamma_{1s} = \gamma^{(0)} + 2\pi s$, $\gamma_{2s} = \gamma^{(1)} + 2\pi s$, где $\gamma^{(0)} = -\arcsin c_0/b_0 \in (-\pi/2, 0)$, $\gamma^{(1)} = -\pi - \gamma^{(0)} \in (-\pi, -\pi/2)$.

Определение 2. Фазовая система ОДУ называется *системой градиентного типа*, если любое решение этой системы стремится с течением времени к одному из ее стационарных решений [1, 2].

Определение 3. Если система градиентного типа имеет только одно локально асимптотически устойчивое стационарное решение (с точностью до сдвигов на периоды), то ее называют *глобально устойчивой* [1, 2].

С помощью метода сведения Г.А. Леонова и принципа инвариантности Ла-Салля получена следующая теорема.

Теорема 1. Пусть

1) существует постоянная $k > 0$ такая, что приращение $\Delta M_d(\dot{\gamma})$ диссипативного момента удовлетворяет линейным оценкам

$$\Delta M_d(\dot{\gamma}) \leq -k\dot{\gamma} \quad (\dot{\gamma} \geq 0), \quad \Delta M_d(\dot{\gamma}) \geq -k\dot{\gamma} \quad (\dot{\gamma} \leq 0);$$

2) для эталонного уравнения $C\ddot{\gamma} + a_0\dot{\gamma} + b_0 \sin \gamma + c_0 = 0$, в котором

$$a_0 = \begin{cases} m + k, & 0 < \lambda_1 \leq 2\lambda_2; \\ 2\sqrt{\varepsilon_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda_1}, & \lambda_1 > 2\lambda_2; \end{cases}$$

$$\varepsilon_1 = (m + k)C, \quad \lambda_1 = (m + k)C^{-1}, \quad \lambda_2 = \min(R_1/L_1, R_2/L_2),$$

выполнено условие глобальной устойчивости Φ . Трикоми

$$a_0/\sqrt{b_0 C} > a_{\text{cr}}(c),$$

где $a_{\text{cr}}(c)$ — критическое значение безразмерного коэффициента диссипации $a = a_0/\sqrt{b_0 C}$, $c = a_0/b_0$ (см. [2]).

Тогда система уравнений (1) глобально устойчива.

2. Устойчивость в целом режима равномерного вращения для двухтоковой модели асинхронного электромотора

При помощи указанной в [1] замены переменных многотокковая модель асинхронного электромотора приводится к двухтоковой, и после введения вместо токов переменных x, y она записывается в виде системы ОДУ [2]

$$C\ddot{\gamma} = -ay + M_d(\omega + \dot{\gamma}), \quad \dot{x} = -bx - \dot{\gamma}y, \quad \dot{y} = -by + \dot{\gamma}(x + 1) \quad (2)$$

с фазовым вектором $(\dot{\gamma}, x, y)$. Здесь $\dot{\gamma} = \dot{\varphi} - \omega$, $\dot{\varphi}$ — угловая скорость ротора относительно статора, $\omega > 0$ — постоянная угловая скорость вращения магнитного поля в статоре, C — осевой момент инерции ротора, $a, b > 0$ — постоянные, $M_d(\omega + \dot{\gamma}) = M_d(\dot{\varphi})$ — момент диссипативных сил относительно оси ротора. Функция $M_a(\dot{\gamma}) = (ab\dot{\gamma})/(b^2 + \dot{\gamma}^2)$ называется *статической характеристикой* асинхронной машины.

Определение 4. Решение системы ОДУ называется *устойчивым в целом* (в англоязычной литературе — *глобально устойчивым*), если оно устойчиво и любое другое решение стремится к нему при $t \rightarrow \infty$ [3].

Теорема 2. Пусть в случае $\omega - b > 0$ диссипативный момент $M_d(\dot{\varphi})$, отрицательный для значений $\dot{\varphi}$ из промежутка $(0, \omega - b]$, удовлетворяет на нем условию малости $M_d(\dot{\varphi}) > M_a(\dot{\varphi} - \omega)$, где $M_a(\dot{\varphi} - \omega) = M_a(\dot{\gamma})$ — статическая характеристика. Тогда система уравнений (2) имеет единственное стационарное решение

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^0, \quad x = x^0, \quad y = y^0, \quad (3)$$

где тройка постоянных $\dot{\gamma}^0, x^0, y^0$ является единственным решением системы уравнений

$$-ay^0 + M_d(\omega + \dot{\gamma}^0) = 0, \quad bx^0 + \dot{\gamma}^0 y^0 = 0, \quad -by^0 + \dot{\gamma}^0(x^0 + 1) = 0.$$

В этом решении постоянная $\dot{\gamma}^0$ выражается по формуле $\dot{\gamma}^0 = \omega^0 - \omega$, где $\omega^0 \in (0, \omega)$ — единственное решение уравнения $M_d(\dot{\varphi}) = M_a(\dot{\varphi} - \omega)$ относительно $\dot{\varphi}$, $x^0 = (\omega - \omega^0)M_d(\omega^0)/ab$, $y^0 = M_d(\omega^0)/a$.

Теорема 3. Пусть выполнено условие теоремы 2 и существует постоянная $k > 0$ такая, что

1) выполняются неравенства

$$\Delta M_d(\dot{\gamma}_1) < -k\dot{\gamma}_1 \quad (\dot{\gamma}_1 > 0) \text{ и } \Delta M_d(\dot{\gamma}_1) > -k\dot{\gamma}_1 \quad (\dot{\gamma}_1 < 0),$$

где $\dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma} - \dot{\gamma}^0$, а $\Delta M_d(\dot{\gamma}_1) = M_d(\omega^0 + \dot{\gamma}_1) - M_d(\omega^0)$;

2) выполнено неравенство

$$abk - \frac{1}{4}[M_d(\omega^0)]^2[1 + (\omega - \omega^0)^2/b^2] > 0.$$

Тогда решение (3) уравнений (2) устойчиво в целом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках реализации программы регионального Азово-Черноморского математического центра по соглашению № 075-02-2025-1620.

1. Леонов Г.А., Зарецкий А.М. Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2012. Вып. 4. С. 18–27.
2. Леонов Г.А. Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. 2006. № 10. С. 47–85.
3. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.

Математическое моделирование истечения жидкости из емкости с высоким давлением

М. Р. Королева

Ижевск, УдмФИЦ УрО РАН

e-mail: koroleva@udman.ru

Л. Е. Тонков

Ижевск, УдГУ

e-mail: letonkov@mail.ru

А. А. Чернова

Ижевск, ИжГТУ имени М.Т. Калашникова

e-mail: alicaaa@gmail.com

Работа посвящена математическому моделированию истечения жидкости из емкости с высоким давлением. Актуальность задачи определяется возможностью теоретического исследования различных сценариев динамического развития аварийных ситуаций на технических сооружениях с жидкими рабочими телами. Такие ситуации, например, могут происходить при хранении и транспортировке жидкостей в емкостях под высоким давлением [1–3]. Численные исследования являются безопасным и дешевым вариантом проведения виртуальных испытаний и позволяют оценить разрушительность процесса и риски нахождения людей вблизи исследуемого объекта [4, 5].

В работе рассматривается процесс разгерметизации емкости, заполненной водой под высоким давлением. Вода находится в перегретом состоянии под давлением $p = 150$ МПа, при температуре $T = 150^\circ\text{C}$ внутри цилиндрической трубы с толщиной стенки 2 мм. В начальный момент времени в стенке трубы формируется отверстие малого диаметра, через которое высоконапорная струя воды начинает вытекать во внешнее затопленное пространство со стандартными параметрами ($p = 0.1$ МПа, $T = 50^\circ\text{C}$).

В ходе выполнения исследования были сделаны следующие допущения:

- Задача решается в плоской постановке.

- Действие силы тяжести не учитывается.
- Течение — ламинарное.
- Шероховатость материала не учитывается.
- Процессы передачи тепла не рассматриваются.
- Процесс парообразования не рассматривается.

Решение задачи требует учета сжимаемости жидкости ψ для численного разрешения волн, распространяющиеся с конечной скоростью. В данном случае для связи плотности ρ и давления p со сжимаемостью среды используется баротропное соотношение вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \psi. \quad (1)$$

Течение жидкости моделируется на основе уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{U}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{U} \bar{U}) + \mu \Delta \bar{U} = 0. \quad (3)$$

Баротропное соотношение (1) линеаризуется и приводится к виду

$$\rho = \rho_0 + \psi(p - p_0), \quad (4)$$

где p_0 и ρ_0 — реферативные значения давления и плотности.

В результате численного моделирования были получены поля распределения скорости, температуры, плотности и давления в рассматриваемой области. Выявлены, проанализированы и описаны закономерности движения волн внутри трубы с жидкостью и волн во внешней среде. Оценены изменения давления на внутренней и внешней границах трубы. Анализ волновых процессов, протекающих в рассматриваемом внешнем изолированном пространстве позволил оценить изменение модуля гидродинамической силы струи жидкости, истекающей из отверстия малого диаметра, действующей на верхнюю границу области. Так, выявлено, что в начальные моменты времени ($t < 0.5$ с) наблюдается гидравлический удар струи жидкости в поверхность верхней границы внешней области, сила удара составляет 50 МН. Дальнейшее

развитие исследований может состоять в более детальном учете возможных фазовых превращений, происходящих в истекающей струе жидкости (воды).

1. *Зайцев Ю.В., Балакиров Ю.А.* Технология и техника эксплуатации нефтяных и газовых скважин. М.: Недра, 1986.
2. *Koroleva M.R., Mishchenkova O.V., Chernova A.A.* Original Methods and Approaches to Numerical Simulation of Physical Processes in Fast-Response Technical Systems // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2024, Vol. 20, no 3. P. 385–411.
3. *Kedrinskiy V.K.* Hydrodynamics of Explosion: experiments and models // Springer Science and Business Media. 2006.
4. *Орлов В.А., Зоткин С.П., Коблова Е.В.* Математическое и информационное сопровождение гидравлических экспериментов на трубопроводах // Вестник МГСУ. 2013. № 5. С. 214–219.
5. *Мызников А.М.* Моделирование и идентификация параметров сложных гидравлических сетей. Диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук. Тюмень, 2005.
6. *Thompson P.A., Beavers G.S.* Compressible-fluid dynamics // Journal of Applied Mechanics. 1972. Vol. 39. P. 366.

О численном методе построения плотнейших упаковок геодезических кругов в сферический сегмент

А. А. Лемперт

*Иркутск, Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН
e-mail: lempert@icc.ru*

А. Л. Казаков, Д. М. Нгуен

*Иркутск, Иркутский национальный исследовательский
технический университет
e-mail: a_kazakov@mail.ru, nguyenducminh.mt@gmail.com*

Построение плотнейших упаковок для ограниченных мно-

жеств относится к классическим задачам вычислительной геометрии. Среди них наиболее изученными являются задачи упаковки равных кругов в круг большего размера, правильные многоугольники, а также в прямоугольник. Критерием оптимизации выступает максимизация либо количества упаковываемых кругов, либо их радиуса.

В трехмерном пространстве рассматриваются задачи упаковки равных шаров в шар и куб, а также сферических сегментов в сферу. Результаты этих исследований имеют практическое применение: от построения сферических кодов [1] до проектирования поверхности геодезических спутников [2]. В данной работе рассматривается задача построения плотнейших упаковок равных геодезических кругов в сферический сегмент. Геодезический круг представляет собой область на поверхности, ограниченную геодезической окружностью — совокупностью точек, расположенных на равном геодезическом расстоянии до заданной точки. Указанная задача возникает, в частности, в технологии цифровой съемки на больших расстояниях, когда проектируется сферическая фокальная поверхность с заданным угловым размером [3].

Постановка задачи. Пусть заданы единичная сфера Θ с центром O в начале координат и сферический сегмент $S(A, \theta) \subset \Theta$, где A — центр сегмента и одновременно северный полюс сферы, θ — угловой размер сегмента ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$), ∂S — замкнутая кривая на сфере, ограничивающая поверхность $S(A, \theta)$. Необходимо разместить N геодезических кругов C_i радиуса R с центрами $O_i \in S(A, \theta)$, чтобы они не пересекались, не выходили за границу ∂S , и радиус R был максимальным. Тогда получаем следующую задачу:

$$R \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\rho(O_i, O_j) \geq 2R, \forall i, j = \overline{1, N}, i \neq j, \quad (2)$$

$$\rho(O_i, P) \geq R, \forall P \in \partial S, i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

$$O_i \in S(A, \theta), i = \overline{1, N}, \quad (4)$$

где $\rho(a, b)$ — геодезическое расстояние между двумя точками a и b на сфере Θ ,

$$\rho(a, b) = \arccos \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right), \quad (5)$$

где $\vec{a} \cdot \vec{b}$ — скалярное произведение векторов $\vec{Oa}$ и $\vec{Ob}$.

О методе решения. Идея предлагаемого метода заключается в том, чтобы для построения упаковки на сфере использовать оптимальную или рекордную (best of known) упаковку равных кругов в круг радиуса θ . Для этого вначале выполняется проектирование сферического сегмента на плоскость, затем для полученного круга либо выбирается оптимальная упаковка заданного числа кругов, если такая известна, либо она находится с помощью оптико-геометрического подхода [4]. Далее выполняется обратное проектирование и итерационное улучшение построенной упаковки.

Пусть (φ, β) — долгота и широта точки на сфере Θ , Π — координатная плоскость $z = 0$. Отображение $F: S(A, \theta) \mapsto \Pi$ зададим следующим образом. Спроецируем центр A сегмента в начало координат O на плоскость Π . Каждой точке $P(\varphi_0, \beta_0) \in S(A, \theta)$ с геодезическим расстоянием $\rho(A, P)$ и углом вращения φ_0 будет соответствовать одна и только одна точка $P'(\rho_0, \alpha_0)$ на плоскости, где $\rho_0 = \frac{\pi}{2} - \beta_0$, $\alpha_0 = \varphi_0$.

Теорема. Пусть точки $B_1, C_1 \in S(A, \theta)$, причем $\rho(A, B_1) = \rho(A, C_1) = \rho$. Точки $B_2, C_2 \in \Pi$, причем $B_2 = F(B_1)$, $C_2 = F(C_1)$. Тогда $\rho(B_1, C_1) \leq \|B_2 - C_2\|$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Из теоремы следует, что геодезическое расстояние между двумя точками на сегменте не превосходит расстояния между двумя их образами на плоскости. Таким образом, для построения упаковки геодезических кругов в сферический сегмент можно выполнить обратное проектирование центров кругов, упакованных в круг радиуса θ , и принять их за центры элементов сферической упаковки. При этом геодезический радиус упаковки на сфере не превосходит радиуса плоской упаковки и может быть выражен через последний. Процесс улучшения построенной упаковки выполняется методом бильярдного моделирования.

Результаты. Проведены иллюстрирующие численные расчеты для сферических сегментов разных угловых размеров $\theta = \pi/6$ и $\theta = \pi/4$.

Сравнение с известными расчетами [5] показывает, что предлагаемые нами методы хотя и не всегда дают оптимальные результаты, но отклонения невелики, а расчеты выполняются очень быстро.

Таблица 1: Результаты расчета

N	$\theta = \pi/6$			$\theta = \pi/4$			t (с)
	R	R^* [5]	$\frac{R - R^*}{R^*}$	R	R^* [5]	$\frac{R - R^*}{R^*}$	
4	0.21586	0.21586	0	0.32174	0.32175	0	12.7
5	0.19235	0.19235	0	0.28557	0.28557	0	13.7
6	0.17453	0.17453	0	0.26180	0.26180	0	15
7	0.17272	0.17272	0	0.25549	0.25550	0	16.1
8	0.15640	0.15640	0	0.23059	0.23060	0	19.3
9	0.14274	0.14274	0	0.20983	0.21112	-0.00609	19.9
10	0.13608	0.13656	-0.00352	0.19824	0.20354	-0.02607	19.8
11	0.13117	0.13220	-0.00776	0.19234	0.19619	-0.01963	21.6
12	0.12865	0.12956	-0.00699	0.18702	0.19234	-0.02767	21.3
13	0.12129	0.12275	-0.01187	0.17744	0.18332	-0.03209	22.3
14	0.11864	0.12038	-0.01446	0.17346	0.17744	-0.02242	22.4
15	0.11347	0.11536	-0.01638	0.16569	0.17224	-0.03801	24

1. *Conway J.H., Sloane N.J.A.* Sphere Packings, Lattices and Groups. NY: Springer, 2013.
2. *Ciufolini I., Paolozzi A., Pavlis E.C.* The LARES 2 satellite, general relativity and fundamental physics // The European Physical Journal C. 2023. Vol. 83. Art. no. 87.
3. *Son H.S., Marks D.L., Hahn J., Kim J., Brady D.J.* Design of a spherical focal surface using close-packed relay optics // Opt. Express. 2011. Vol. 19, no. 17. P. 16132–16138.
4. *Лемперт А.А., Казаков А.Л.* об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. № 7. С. 50–57.
5. *Amore P.* Circle packing on spherical caps // Physics of Fluids. 2024. Vol. 36, no. 9. P. 97–113.

Исследование динамической модели рынка труда с производственной функцией с линейной эластичностью замещения

Е. Ю. Лискина

*Рязань, Рязанский государственный университет
имени С. А. Есенина*

e-mail: author1@email.com, author2@email.edu

В работах [1, 2] была предложена четырехфакторная динамическая модель рынка труда вида

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + (1-a)F(K, L) + I, \\ \dot{L} = r_L Q \left(1 - \frac{Q}{M_L}\right), \\ \dot{N} = rN \left(1 - \frac{N+P}{M}\right), \\ \dot{Q} = \gamma_1 N + \gamma_2 F(K, L) + \gamma_3 P, \end{cases} \quad (1)$$

в которой K — капитал; L — труд; N — коренное население; L — рабочая сила; $F(K, L)$ — производственная функция; I — постоянные внешние инвестиции, P — миграционное сальдо; $(1-a) \in [0; 1)$ — коэффициент накопления основного капитала, $\mu \in (0; 1)$ — норма амортизации, $M_L > 0$ и $M > 0$ — емкости региона по количеству рабочих мест и численности населения соответственно, $\{r_L, r\} \in (-1; 1)$ — коэффициенты прироста рабочих мест и населения соответственно. В уравнение для численности рабочей силы по аналогии с [3] введено влияние потребления на динамику рабочей силы $\gamma_2 F(K, L)$, $\{\gamma_1, \gamma_2\} \in (-1; 1)$. Миграционное сальдо P предполагается как положительной, так и отрицательной величиной; $\gamma_3 \in [0; 1)$ — коэффициент прироста рабочей силы за счет миграции. В [2] исследовалось поведение траекторий системы (1) при производственной функции $F(K, L) = \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$ как наиболее распространенной.

В данном исследовании используется производственная функция с линейной эластичностью замещения факторов по Ал-

лену [4]

$$F(K, L) = K^\alpha (a_1 K + a_2 L)^\beta. \quad (2)$$

Определение. Состояние равновесия системы (1) будем называть *продуктивным*, если его координаты строго положительны.

Ставится задача найти состояния равновесия системы (1) с производственной функцией (2), коэффициентные условия продуктивности.

Исследование показало, что система (1) имеет 4 состояния равновесия, из которых только одно может быть продуктивным при некоторых соотношениях коэффициентов системы (1). Получены коэффициентные условия продуктивности указанного состояния равновесия и его устойчивости по Ляпунову с помощью соответствующей системы линейного приближения.

1. *Лискина Е.Ю.* Состояния равновесия динамической модели рынка труда // Дифференциальные уравнения и математические моделирование: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 2. Рязань: Ряз. гос. ун-т имени С.А. Есенина, 2021. С. 36–39.
2. *Лискина Е.Ю., Силантьева И.А.* Исследование четырехфакторной динамической модели рынка труда с мультипликативной производственной функцией // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 19. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2024. С. 138–144.
3. *Абрамов В.В.* Стационарные состояния в модели односекторной экономики // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 2. Рязань: Ряз. гос. ун-т имени С. А. Есенина, 2021. С. 4–9.
4. *Прасолов А.В.* Математические методы экономической динамики. СПб.: Лань, 2015.

Алгоритм ускорения расчетов при решении обратной коэффициентной задачи для уравнения пьезопроводности

Д. Н. Майков, С. С. Макаров

*Ижевск, Удмуртский федеральный исследовательский центр
Уральского отделения Российской академии наук
e-mail: dimaMS2@email.ru, ssmak15@mail.ru*

При интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин (ГДИС) для определения параметров системы "скважина–пласт–граница" решается обратная коэффициентная задача уравнения пьезопроводности с применением различных алгоритмов оптимизации, см., например, [1]. Подходы к решению таких задач изложены в [2]. Численное исследование алгоритмов оптимизации при решении обратной коэффициентной задачи при интерпретации результатов ГДИС приведено в [3].

При аналитическом решении уравнения пьезопроводности для учёта изменяющихся дебитов применяется принцип суперпозиции [4], что значительно увеличивает время расчётов.

Цель работы — разработка алгоритма ускорения решения обратной задачи для уравнения пьезопроводности при проведении интерпретации результатов ГДИС без потери точности.

В качестве целевой функции принимается взвешенная сумма среднеквадратичных невязок между расчетными и фактическими значениями измеряемых по скважинам параметров за рассматриваемый период разработки месторождения. Целевая функция имеет вид:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^N [\mathbf{f}_i(\mathbf{p}) - \mathbf{x}_i]. \quad (1)$$

Здесь N — общее число моментов измерения, i — индекс, относящийся к определенному моменту времени измерения, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{x}$ — вектор вычисленных и измеренных значений динамических данных (забойные давления, дебиты и т.д.); $\mathbf{p}$ — вектор искомых параметров, определяемый решением обратной коэффициентной

задачи уравнения пьезопроводности (2):

$$\phi c_t \frac{\partial P}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{k}{\mu} \nabla P \right) + q. \quad (2)$$

Здесь ϕ — пористость пласта, c_t — коэффициент общей сжимаемости, P — давление, k — тензор проницаемости, μ — вязкость жидкости, q — источник/сток.

При аналитическом решении уравнения пьезопроводности (2) обычно параметры приводят к безразмерному виду и пространству изображений Лапласа. Расчёт забойного давления включает вычисление обезразмеренных параметров в образах Лапласа, обратное преобразование, например методом Стефеста, и переход к размерным величинам с использованием безразмерных переменных, которые в большинстве случаев имеют следующий вид:

$$P_D = \frac{kh}{18.41QB\mu} \Delta P, \quad t_D = \frac{0.00036k}{\phi \mu c_t r^2} t. \quad (3)$$

Здесь P_D — безразмерное давление; P — давление, атм; Q — дебит, м³/сут, μ — вязкость жидкости, сПз; B — объемный коэффициент жидкости, м³/м³; k — проницаемость пласта, мД; h — толщина пласта, м; t_D — безразмерное время; t — время, ч; ϕ — пористость; c_t — коэффициент общей сжимаемости, атм⁻¹; r — радиус скважины, м.

При решении обратной коэффициентной задачи для определения параметров системы "скважина–пласт–граница" основную вычислительную нагрузку создают расчетные операции при решении уравнения пьезопроводности. Если параметры влияют только на переход к размерным величинам, не изменяя аналитического решения уравнения пьезопроводности в безразмерной форме, это решение можно вычислить один раз, аппроксимировать и далее использовать аппроксимацию вместо повторного пересчёта, что существенно ускоряет вычисления.

При поиске параметров уравнения пьезопроводности вводят границы поиска. Исходя из этого алгоритм аппроксимации давления в уравнении пьезопроводности следующий:

1) определение значений минимального и максимального безразмерного времени ($t_{D\min}$, $t_{D\max}$) на основе границ поиска и безразмерных переменных (3);

2) ввод дискретного пространства для независимой переменной безразмерного времени t_D в интервале $0.9t_{D\min} - 1.1t_{D\max}$ с логарифмическим шагом и дискретностью n точек на log-цикл, при $n = 10$;

3) расчет безразмерного давления P_D в точках полученного массива безразмерного времени;

4) аппроксимация безразмерного давления P_D от безразмерного времени t_D .

Численное исследование предлагаемого алгоритма проводилось при переменном дебите и при постоянном дебите. Применение алгоритма аппроксимации давления позволило уменьшить число вызовов функции аналитической модели с 131 до 1 при постоянном дебите и с 268 до 1 при переменном дебите. Общее число расчётов размерного давления осталось прежним (131 и 268 соответственно), что подтверждает высокую точность аппроксимации и минимальные погрешности, обеспечив ускорение вычислений.

В работе предложен алгоритм ускорения расчётов обратной коэффициентной задачи для уравнения пьезопроводности, основанный на применении аппроксимации безразмерного давления в функции безразмерного времени. Алгоритм обеспечивает кратное увеличение скорости вычислений при минимальных погрешностях, что позволяет оперативно интерпретировать результаты ГДИС.

1. *Kochenderfer M.J., Wheeler T.A.* Algorithms for Optimization. The MIT Press, 2019.
2. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 263 с.
3. *Майков Д.Н., Макаров С.С.* Численное исследование алгоритмов оптимизации при адаптации гидродинамической модели по результатам исследований скважин // Математическое моделирование. 2022. Т. 34, № 9. С. 71–82.
4. *Майков Д.Н., Исупов С.В., Макаров С.С., Аникианов А.С.* Метод ускорения расчета давления при изменяющихся дебитах по истории эксплуатации скважины // Нефтяное хозяйство. 2021. № 9. С. 105–107.

Численное исследование вырожденной модели нелинейной диффузии со случайным начальным условием Шоултера–Сидорова

Н. А. Манакова, Н. Г. Николаева

Челябинск, ЮУрГУ

e-mail: manakovana@susu.ru, nikolaevang@susu.ru

Рассмотрим $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство и множество действительных чисел $\mathbb{R}$, наделенное борелевской σ -алгеброй. Пусть $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей класса C^∞ . Рассмотрим $\mathcal{H}$ -значный дифференцируемый стохастический K -процесс η , удовлетворяющий стохастической модели нелинейной диффузии

$$(\lambda - \Delta) \overset{o}{\eta} - \operatorname{div}(|\nabla \eta|^{p-2} \nabla \eta) = 0, \quad p \geq 2, \quad \omega \in \Omega, \quad (s, t) \in \mathfrak{D} \times (0, T), \quad (1)$$

$$\eta(\omega, s, t) = 0, \quad \omega \in \Omega, \quad (s, t) \in \partial \mathfrak{D} \times [0, T], \quad (2)$$

с начальным условием Шоултера–Сидорова

$$(\lambda - \Delta)(\eta(\omega, s, 0) - \eta_0(\omega, s)) = 0, \quad \omega \in \Omega, \quad s \in \mathfrak{D}. \quad (3)$$

Здесь $\overset{o}{\eta}$ — производная Нельсона–Гликлиха случайного процесса [1]. Математическая модель (1), (2) с условием (3) описывает процесс изменения потенциала концентрации вязкоупругой жидкости, фильтрующейся в пористой среде, при условии случайно заданного начального $\eta_0(\omega, s)$ потенциала концентрации жидкости. Параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ характеризует свойства жидкости.

Рассматриваемая модель относится к классу полулинейных моделей соболевского типа [2], в которых нелинейный оператор является p -коэрцитивным и s -монотонным:

$$L \overset{o}{\eta} + N(\eta) = 0, \quad \ker L \neq \{0\}. \quad (4)$$

Начальное условие Шоултера–Сидорова в общем случае примет вид

$$L(\eta(0) - \eta_0) = 0. \quad (5)$$

Задачу (1)–(3) будем изучать на основе разработанного метода исследования для абстрактного стохастического уравнения (4) с s -монотонными и p -коэрцитивным оператором N . Множество гауссовых случайных величин, имеющих $\mathbf{E}\xi = 0$ и $\mathbf{D}\xi < +\infty$ образуют гильбертово пространства $\mathbf{L}_2$ со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$. Выберем монотонно убывающую числовую последовательность $K = \{\mu_k\}$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 < +\infty$. Пусть

$\mathcal{H} = L_2(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{B} = W_p^1(\mathfrak{D})$, пространство дифференцируемых K -«шумов» $\mathbf{C}^l([0, T]; \mathcal{H}_K \mathbf{L}_2)$ состоит из непрерывных $\mathcal{H}$ -значных стохастических K -процессов, траектории которых почти наверное непрерывно дифференцируемые по Нельсону–Гликлиху. Заддим $\eta_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \eta_{0k} \psi_k$, где $\{\eta_{0k}\} \subset \mathbf{L}_2$ — последовательность случайных величин, $\{\psi_k\}$ образует базис в пространстве $\mathcal{H}$.

Теорема. [3] Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда для любой последовательности случайных величин $\{\eta_{0k}\} \subset \mathbf{L}_2$, для любого $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение $\eta \in \mathbf{C}^1([0, T]; \mathfrak{B}_K \mathbf{L}_2)$ задачи (1)–(3).

Приведем алгоритм численного метода исследования задачи Шоултера–Сидорова (3) математической модели (1), (2).

1 этап. Нахождение собственных значений $\{\lambda_k\}$ и собственных функций $\{\psi_k\}$ однородной задачи Дирихле для оператора L .

2 этап. Задание монотонно убывающей числовой последовательности $K = \{\mu_k\}$ такой, что $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 < +\infty$, и начальной случайной величины в виде

$$\eta_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \eta_{0k} \psi_k,$$

коэффициенты $\{\eta_{0k}\}$ которой независимые гауссовы случайные величины, такие что их дисперсии ограничены ($\mathbf{D}\eta_{0k} \leq C$, $k \in \mathbb{N}$). Представление искомого стохастического процесса в виде галеркинской суммы

$$\eta_N(\omega, s, t) = \sum_{k=1}^N \mu_k \eta_k \psi_k,$$

где $\eta_k = \eta_k(w, t)$, $\psi_k = \psi_k(s)$, и подстановка в (4).

3 этап. Скалярно умножив уравнение (6), на собственные функции $\psi_k(s)$, $k = 1, \dots, N$, формируем систему алгебро-дифференциальных уравнений

$$\mathbf{E}\langle L \overset{\circ}{\eta}_N, \psi_k \rangle + \mathbf{E}\langle N(\eta_N), \psi_k \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (7)$$

4 этап. Генерация последовательности случайных величин $\{\eta_{0k}\} \subset \mathbf{L}_2$ и составление случайной величины η_0 . Построение начальных условий Шоултера–Сидорова для системы алгебро-дифференциальных уравнений (7)

$$\mathbf{E}\langle L(\eta_N(\omega, 0, s) - \eta_0(\omega, s)), \psi_k(s) \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (8)$$

5 этап. Нахождение решения системы алгебро-дифференциальных уравнений (7) с начальными условиями (8) методом Рунге–Кутты 4-5 порядка. Составление траектории приближенного решения $\eta_N^l(s, t)$ задачи (4), (5).

6 этап. Для статистического исследования решения задачи (4), (5) повторяем этапы с 4 по 7 m раз с генерацией различных $\{\eta_{0k}^l\}$ для построения траекторий приближенного решения η_N^l , $l = 2, \dots, m$, задачи (4), (5). Нахождение выборочной средней, выборочной средней дисперсии и среднего квадратического отклонения по построенной выборке η_N^l , $l = 1, \dots, m$. Оценка полученных траекторий с заданной вероятностью $p = 0,997$ по правилу 3σ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда 24-11-20037, <https://rscf.ru/project/24-11-20037/>

1. Гликлиз Ю.Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2012. № 27(286). С. 24–34.
2. Манакова Н.А., Свиридюк Г.А. Неклассические уравнения математической физики. Фазовые пространства полулинейных уравнений соболевского типа // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. 2016. Т. 8, № 3. С. 31–51.
3. Manakova N.A., Nikolaeva N.G., Perevozchikova K.V. Investigation Solvability of the Stochastic Model of Nonlinear Diffusion with Random Initial Value // Global and Stochastic Analysis. 2024. Vol. 11, no 4. P. 27–33.

Метод виртуальных элементов для решения прикладных задач геофизики

С. И. Марков

*Новосибирск, Институт нефтегазовой геологии и геофизики
им. А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирский государственный
технический университет*
e-mail: www.sim91@list.ru

Н. Б. Иткина

*Новосибирск, Федеральный исследовательский центр
информационных и вычислительных технологий,
Новосибирский государственный технический университет*
e-mail: itkina@ami.nstu.ru

Цифровая модель геологической породы — это идеализированное представление о реальной среде, включающая в себя дискретное множество точек с определённой на них индикаторной функцией принадлежности их пустотному пространству или матрице породы, а также формальное описание физических процессов, протекающих в изучаемом объекте.

Процедура численного моделирования заключается в реализации трёх основных шагов: подготовка дискретной геометрической модели изучаемого объекта, дискретизация математических моделей наблюдаемых физических явлений и численное решение дискретного аналога поставленной задачи.

Отличительная особенность геологических сред — их сложное геометрическое строение и контраст физических свойств. В общем случае внутренняя граница не обладает свойством липшицевой непрерывности и принадлежит классу 0 . Липшицева непрерывность — основополагающее условие применимости теорем о вложении Соболева, о продолжении функции и о следах. Нарушение данного условия не позволяет доказать согласованность сеточных методов для решения прикладных задач.

Актуальная проблема: разработать численный метод, пригодный для численного моделирования физических процессов в звёздчатых областях. Современные конечно-элементные методы жёстко адаптированы под определённый класс решаемых задач

и подходят для решения сформулированной проблемы.

Виртуальный метод конечных элементов (VEM) появился сравнительно недавно как результат развития классического МКЭ и mimetic finite difference (MFD) [1, 2]. В данном методе используются два функциональных пространства: физическое и виртуальное. Вид специальных вспомогательных функций физического пространства уникален для каждой математической модели. В общем случае данные функции не являются полиномами. Виртуальное пространство характеризуется только степенями свободы виртуальных элементов (доказано, что решение VEM существует и единственно для звёздчатых областей). Поэтому в отличие от классического определения Φ . Сьярле конечный элемент в VEM — это пара, состоящая из степеней свободы и схемы численного интегрирования. Также решена проблема полноты базисной системы, свойственной для многомасштабных и обобщённых конечно-элементных подходов. В докладе на примере первой краевой задачи для уравнения Пуассона показано применение виртуального метода конечных элементов, определение дискретного аналога билинейной формы для полиномиального базиса с использованием только степеней свободы. Полученные результаты могут быть применены для численного моделирования процессов теплопроводности, фильтрации и электропроводности при использовании трёхмерных дискретных геометрических моделей образцов осадочных пород, полученных неразрушающими методами визуализации их внутренней структуры.

Работа выполнена в рамках государственного задания, проект № FWZZ-2022-0030.

1. *Veiga L.B., Brezzi F., Cangiani A., Manzini G., Marini L.D., Russo A.* Basic principles of Virtual Element Methods // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2013. Vol. 23, no. 01. P. 199–214.
2. *Brezzi F., Marini L.D.* Virtual Elements on polyhedra with a curved face // *Bulletin of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 13, no. 03. Art. no. 2350005.

Математическое моделирование физико-химических макропроцессов в дисконтинуальном приближении

С. И. Мартыненко

Москва, Объединённый институт высоких температур РАН

e-mail: martn_s@mail.ru

Математическое моделирование как метод научного исследования имеет многочисленные преимущества перед натурными экспериментами, основными из которых является возможность оптимизации условий протекания изучаемых процессов, изучение явлений, невоспроизводимых в лабораториях, быстрота и дешевизна получения результатов моделирования. Главным недостатком является сложность уравнений моделей, описывающих совокупность одновременно протекающих физико-химических процессов.

Долгое время дифференциальное и интегральное исчисление являлись единственным методом решения основополагающих уравнений моделей. Математики и физики вынуждены изучать различные частные случаи, удобные для теоретического анализа (например, теория пограничного слоя в гидрогазодинамике). Только появление в середине прошлого века компьютеров и последующее развитие численных методов позволило приближённо решать те нелинейные (начально-)краевые задачи, которые ранее не удавалось решать точными методами.

В настоящее время наблюдается устойчивая тенденция построения всё более сложных математических моделей для более точного моделирования физико-химических процессов с целью создания цифровых двойников – виртуальных копий технических устройств или природных явлений.

Можно выделить два подхода к построению математических моделей:

1) дифференциальный: «Из этого следует, что в реализуемой цепочке «конечный объем – дифференциальные уравнения – дискретный вычислительный алгоритм» ее центральный элемент – дифференциальные уравнения служит звеном при переходе от

одного дискретного описания к другому» [1].

2) алгебраический: «Другими словами, мы можем получить алгебраическую формулировку, избегая любого произвольного процесса дискретизации дифференциальных уравнений. Эта формулировка имеет большое преимущество в сохранении тесной связи между математическим описанием и описываемым физическим явлением» [2].

К основным недостаткам дифференциального подхода следует отнести следующие обстоятельства:

а) нефизичность описания макропроцессов. Использование производных для математического описания макропроцессов подразумевает, что макропараметры определены в каждой точке области, а функции от них должны быть достаточно гладкими. Однако, согласно классическим физическим теориям макропараметры являются мерой средних значений соответствующих микропараметров в некотором контрольном объеме, достаточно большом по сравнению со средней длиной свободного пробега молекулы (например, в молекулярно-кинетической теории температуру газа определяют как среднее значение кинетической энергии хаотического движения молекул в объеме, содержащего достаточное для осреднения количество частиц). Поэтому дифференциальный подход является весьма приближенным, хотя в отдельных случаях результаты моделирования с достаточной точностью совпадают с экспериментальными данными.

б) трудность теоретического анализа моделей. Нелинейные дифференциальные модели чрезвычайно сложны для теоретического анализа: например, доказательство существования гладких решений уравнений Навье – Стокса является одной из проблем тысячелетия (Millennium Prize problem).

в) громоздкость моделирования. В настоящее время цепочка «конечный объем – дифференциальные уравнения – дискретный вычислительный алгоритм» представляется избыточно сложной для перспективных комплексов программ, поскольку дифференциальные уравнения в ней нужны только для того, чтобы было что аппроксимировать.

Современное математическое моделирование подразумевает широкое использование пакетов прикладных программ, упрощающих как построение модели, так и вычислительного алгоритма. Основной трудностью развития программного обеспечения

для моделирования широкого класса физико-химических макропроцессов является достижение компромисса между взаимоисключающими требованиями простоты модели и алгоритма, точности описания и вычислительной эффективности. Целью данной работы является развитие вычислительной макромеханики – алгебраического подхода к построению макромоделей физико-химических процессов.

Вычислительная макромеханика является частью механики, содержащей явные ограничения по минимальным пространственным и временным масштабам для исключения рассмотрения межмолекулярных взаимодействий [3, 4]. Четырёхмерное пространство разделяют на конечные макрообъёмы, все макропараметры являются постоянным на открытых объёмах и разрывными на гранях. Следствием корректного определения макропараметров является локальное термодинамическое равновесие в каждом объёме. Законы сохранения совместно с феноменологическими законами позволяют построить математические модели физико-химических макропроцессов внутри каждого объёма. Фактически, моделью в вычислительной макромеханике является система нелинейных алгебраических уравнений (т.е. разностная схема в традиционной терминологии). Лучшим алгоритмом для (параллельного) решения данной системы является Универсальная Многосеточная Технология, основанная на агломерации конечных объёмов [5].

Замена дифференциальной задачи на этапе построения модели на алгебраическую существенно упрощает теоретический анализ основополагающих уравнений и вычислительного алгоритма. В противоположность дифференциальному подходу, точная задача является дискретной, а приближённая – дифференциальной.

Приведён пример моделирования медленного вязкого течения на основе уравнений Стокса в каверне с движущейся крышкой для иллюстрации избыточной гладкости решений дифференциальных моделей.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 23-19-00734.

1. *Chetverushkin B.N.* Resolution limits of continuous media mode and their mathematical formulations // Mathematical Models and

Computer Simulations. 2013. Vol. 5. P. 266–279.

2. *Tonti E.* Why starting from differential equations for computational physics? // Journal of Computational Physics. 2014., Vol. 257. Part B. P. 1260–1290.
3. *Martynenko S.* Modeling of heat and mass transfer in the discontinuum approximation. // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. 2024. Vol. 34. P. 137–164.
4. *Martynenko S., Varaksin A.* A Physical Insight into Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer // Mathematics. 2024. Vol. 12, no. 13. Art. no. 2122, pp. 1–15.
5. *Martynenko S.I.* Numerical Methods for Black-Box Software in Computational Continuum Mechanics. Parallel High-Performance Computing. Berlin: De Gruyter, 2023.

Об одном результате коллективной динамики системы вращающихся частиц

С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач

Сургут, Сургутский государственный университет
e-mail: martynovsi@mail.ru, leonilla7777@mail.ru

Изучение динамики неравновесной системы активных частиц, как результат коллективного движения ее составляющих, активируемых внешнем полем, представляет практический интерес для управляемого тепло-массопереноса на микро- и нано-уровне. Сюда можно отнести такие разные, на первый взгляд, проводимые прикладные исследования, как применение магнитных наночастиц для увеличения нефтеотдачи пласта [1] и терапевтическая доставка в клетку при помощи специально сконструированных микромоторов [2]. При этом в результате коллективного взаимодействия частиц динамика таких систем приводит к формированию неравновесных структур, влияющих на процессы тепло-массопереноса в системе. В работе [3] предложен гидродинамический механизм формирования неравновесной структуры

дипольных частиц из равновесного состояния в однородном переменном магнитном поле. В частности показано, что равновесные структуры в виде плоского правильного многоугольника при вращении частиц, входящих в эту структуру, начинают вращаться с некоторой угловой скоростью, сохраняя свою форму. Вращательное движение частиц сохраняет форму структуры даже при наличии силы, действующей на частицы. Как было показано в работе [4], облако из частиц под действием приложенной силы перемешивается так, что частицы на краю облака двигаются медленнее, чем частицы в середине облака. Это приводит, например, к периодическому изменению положения частиц, первоначально расположенных в виде правильного плоского четырехугольника. Наличие вращения частиц приводит к тому, что первоначальная структура в виде правильного многоугольника, вращается как целое и одновременно поступательно перемещается, сохраняя свою первоначальную форму.

В настоящей работе приведены результаты моделирования коллективной динамики нескольких систем вращающихся сферических частиц. Первая система состоит из четырех частиц радиуса a , расположенных в углах правильного плоского четырехугольника со сторонами $4a$. Еще четыре системы представляют собой пространственную решетку из двух, трех, четырех и пяти четырехугольников, соответствующих первой структуре и периодически расположенных вдоль одной оси с шагом $4a$. Считается, что частицы помещены в несжимаемую жидкость вязкости η и обладают магнитным моментом $\mathbf{m}$. Приложенное внешнее однородное переменное магнитное поле с вектором напряженности

$$\mathbf{H} = \{0; -H \cos(\Omega t); H \sin(\Omega t)\}$$

создает одинаковый момент силы, вращающий частицы в одном направлении. Движение частиц приводит к возникновению течения вязкой жидкости и формированию гидродинамических сил и моментов, действующих на частицы. Уравнения движения частиц учитываются внутренние силы, внешние силы и силы гидродинамического взаимодействия, а также моменты сил, действующих на частицы. Система уравнений динамики частиц записывается в виде:

$$\mathbf{F}_k^{(i)} + \mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{F}_k^{(h)} = 0, \quad \mathbf{T}_k^{(i)} + \mathbf{T}_k^{(e)} + \mathbf{T}_k^{(h)} = 0.$$

Здесь $\mathbf{F}_k^{(h)}$ — силы, $\mathbf{T}_k^{(h)}$ — моменты сил со стороны жидкости, $\mathbf{F}_k^{(e)}$, $\mathbf{T}_k^{(e)}$ — силы и моменты сил со стороны внешнего поля, $\mathbf{F}_k^{(i)}$, $\mathbf{T}_k^{(i)}$ — силы и моменты диполь-дипольного взаимодействия, действующие на частицу с номером k со стороны других частиц. Поскольку рассматривается случай малых чисел Рейнольдса для поступательного и вращательного движения частиц в жидкости, то силы инерции в уравнениях движения частиц не учитываются. Для переменного поля берется интервал частот при которых силы инерции можно не учитывать. Учет внутренних сил взаимодействия проводится на основе парных взаимодействий. Для нахождения гидродинамических сил $\mathbf{F}_k^{(h)}$ и моментов $\mathbf{T}_k^{(h)}$, действующих на частицы, решается система уравнений гидродинамики. В случае малых чисел Рейнольдса система уравнений для скорости $\mathbf{u}$ и давления p жидкости имеет вид:

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

На поверхности частицы с номером k должны выполняться условия:

$$u_i = V_i^k + \Omega_{ij}^k x_j^k, \quad |\mathbf{X}^k| = a^k.$$

Здесь $\mathbf{V}^k$ — вектор абсолютной линейной скорости, Ω_{ij}^k — тензор угловой скорости, $\mathbf{X}^k$ — вектор положения точки жидкости относительно центра частицы с номером k и радиусом a^k .

Далеко от частиц должны выполняться условия:

$$u_i \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0, \quad \text{если } |\mathbf{X}| \rightarrow \infty.$$

Здесь p_0 — невозмущенное давление в жидкости. Более детально постановка задачи и принятые допущения с их обоснованием приведены в [3].

Все расчеты и визуализация динамики систем проводились с использованием программного комплекса «Turtle», предназначенного для моделирования течения вязкой жидкости с большим числом взаимодействующих частиц (свидетельство о регистрации № 2016610634 от 15.01.2016). Результаты моделирования представлены в таблице. Если обозначить угловую скорость первой структуры из четырех вращающихся частиц ω , то, как видно из результатов моделирования, угловая скорость вращения

структур увеличивается с ростом числа секций пространственной решетки. Однако каждое последующее увеличение угловой скорости вращения новой структуры меньше, чем у предыдущей. При этом форма каждой структуры при вращении не меняется. Такой результат коллективного поведения пространственной системы вращающихся частиц обусловлен гидродинамическим взаимодействием всех частиц между собой.

Структура 1	Структура 2	Структура 3	Структура 4	Структура 5
ω	1.397ω	1.514ω	1.56ω	1.581ω

Работа выполнена в рамках проекта «Моделирование гидродинамических процессов с наночастицами для решения задачи повышения нефтеотдачи пласта», финансируемым департаментом образования и науки ХМАО-Югра.

1. *Shekhawat D.S., Aggarwal A., Agarwal S., Imtiaz M.* Magnetic recovery-injecting newly designedmagnetic fracturing fluid with applied magnetic field for EOR // In Proceedings of the SPE Asia Pacific Hydraulic Fracturing Conference, 24–26 August 2016. Beijing, China. Society of Petroleum Engineers: Richardson, TX, USA, 2016. 21.
2. *Gao W., de Avila BE., Zhang L., Wang J.* Targeting and Isolation of Cancer Cells Using Micro/Nanomotors // Adv Drug Deliv Rev. 2018. Vol. 125. P. 94–101.
3. *Мартынов С.И., Ткач Л.Ю.* Гидродинамический механизм формирования динамической структуры системы вращающихся частиц // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 2. С. 175–194.
4. *Баранов В.Е., Мартынов С.И.* Влияние гидродинамического взаимодействия на скорость осаждения большого числа частиц в вязкой жидкости // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2004. № 1. С. 152–164.

Математическое моделирование взаимосвязанной кросс-диффузии соли и влаги в почвенной среде

С. Ю. Муминов

Хива, Университет Мамуна

e-mail: sokhibjan.muminov@mamunedu.uz

Миграция влаги и растворённых солей в почвенной среде представляет собой сложный пространственно-временной процесс, включающий нелинейную взаимозависимость компонентов, диффузию, сорбционные и градиентные эффекты. Актуальность моделирования таких процессов связана с необходимостью прогнозирования засоления, анализа водно-солевого режима и оптимизации мелиоративных решений в реальных агроэкологических условиях. В настоящей работе предложена двухкомпонентная кросс-диффузионная модель с учётом нелинейной диффузии и реакционных потерь. Рассматриваемая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \nabla(D_1 u_2^{m_1-1} |\nabla u_1^k|^{p-2} \nabla u_1) - v_1 u_2^{\beta_1} |\nabla u_1|^{p_1}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \nabla(D_2 u_1^{m_2-1} |\nabla u_2^k|^{p-2} \nabla u_2) - v_2 u_1^{\beta_2} |\nabla u_2|^{p_2}, \end{cases}$$

где $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — концентрации влаги и соли, $D_i > 0$ — коэффициенты диффузии, параметр характеризует степень нелинейности диффузионного оператора типа p -Лапласа. Величины m_i , p , k , β_i , p_i — отражают чувствительность потоков и реакционных потерь к концентрациям и градиентам компонентов. Первая часть каждой строки описывает кросс-диффузионный эффект, в то время как вторая часть учитывает реакционные потери, зависящие от градиентов и концентраций.

Определение. Под взаимосвязанной кросс-диффузией понимается система нелинейных уравнений, в которой поток одного компонента зависит как от собственного градиента, так и от концентрации другого компонента, включая градиентно-зависимые реакционные члены.

Теорема (о существовании и единственности). Пусть заданы гладкие начальные и граничные условия в ограниченной области $\Omega \subset R^n$. При условиях $m_i > 0$, $p > 1$, $\beta_i \geq 0$, $p_i \geq 0$, данная система допускает, по крайней мере, одно слабое решение в пространстве $L^2(0, T; W^{1,p}(\Omega))$, единственное в классе обобщённых решений и удовлетворяющее априорным энергетическим оценкам.

В дальнейшем планируется разработка устойчивой численной схемы на основе вариационного подхода, проведение вычислительных экспериментов с использованием реальных почвенных параметров, а также калибровка модели на основе данных мониторинга. Особое внимание будет уделено применению модели для прогноза вторичного засоления и научного обоснования мелиоративных мероприятий.

Предложенная модель может использоваться для анализа и прогноза динамики влаго-солевого баланса в почвенных горизонтах, оценки последствий ирригации и дренажа, а также для поддержки решений в агроэкологических и гидрологических системах управления. Она может быть адаптирована под конкретные почвенно-климатические условия и интегрирована в системы мониторинга земельных ресурсов.

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. Москва: Физматлит, 2001.
2. Арипов М.М. Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. Ташкент: Фан, 1988.
3. Арипов М.М., Садуллаева Ш.А. Компьютерное моделирование нелинейных диффузионных процессов. Ташкент: Университет, 2020.
4. Муминов С.Ю. Автомодельные решение системы нелинейных дифференциальных уравнений кросс-диффузии // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2023. № 4(51). С. 53–58.
5. Muminov S., Agarwal P., Muhamediyeva D. Qualitative properties of the mathematical model of nonlinear cross-diffusion processes // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2024. No 15(6). С. 742–748.
6. Rothe F. Global Solutions of Reaction–Diffusion Systems. // Lecture Notes in Mathematics. 1984. Vol. 1072.

7. *Shigesada N., Kawasaki K., Teramoto E.* Spatial segregation of interacting species // Journal of Theoretical Biology. 2024. Vol. 79, no 1. P. 83–99.
8. *Муминов С.Ю.* Автомодельные решения нелинейных уравнений параболического типа для моделирования диффузионных процессов // Вестник аграрной науки Узбекистана. 2023. № 4 (10). С. 61–67.

Блочный конвейерный алгоритм метода сопряжённых градиентов с перекрывающимися коммуникациями

Н. С. Недожогин
Ижевск, УдГУ
e-mail: Nedozhogin@inbox.ru

В задачах математического моделирования широко используются вычисления общего назначения на графических процессорах (GPGPU) для сокращения времени вычислений. Одним из недостатков использования графических ускорителей (GPU) в вычислениях является простота центрального процессора (CPU). Для повышения производительности применяются гетерогенные алгоритмы, использующие ресурсы многоядерных процессоров и графических ускорителей, например в задачах энергоэффективности [1].

Как известно, решение систем линейных алгебраических уравнений плохо масштабируется на multi-CPU/multi-GPU системы. Для достижения максимальной эффективности программной реализации необходимо:

1. Оптимизировать загрузку вычислительных ресурсов: учитывать распределение задач между CPU и GPU и обеспечивать балансировку нагрузки между вычислительными устройствами (под вычислительным устройством понимается либо GPU, либо группа параллельных потоков CPU, обрабатывающих выделенный блок задачи).

2. Сократить объем передаваемых данных: необходимо минимизировать не только общее количество данных, но и число передач между вычислительными устройствами, чтобы уменьшить накладные расходы, связанные с межпроцессным взаимодействием и задержками передачи.
3. Обеспечить эффективное управление памятью: снижать частоту обращений к глобальной памяти и максимально использовать кэширование данных для уменьшения времени доступа.

Предлагаемый параллельный алгоритм построен на основе конвейерного алгоритма метода сопряжённых градиентов [2], который математически эквивалентен оригинальному методу сопряжённых градиентов, но позволяет сократить количество точек синхронизации до одной. Для минимизации общего количества данных при обмене между вычислительными устройствами использовалось разбиение матрицы на блоки [3]. Исходная матрица A делится на d блоков, где d — количество доступных вычислительных устройств. Каждый блок A_k , $k = 1, \dots, d$, исходной матрицы содержит в себе следующие подматрицы: $A_k^{[i_k, i_k]}$, $A_k^{[i_k, b_k]}$, $A_k^{[b_k, i_k]}$, $A_k^{[b_k, b_l]}$. Это представление матрицы позволяет матрично-векторное произведение разделить на две составляющие:

$$n_k^i = A_k^{[i_k, i_k]} m_k^i + A_k^{[i_k, b_k]} n_k^b, \quad n_k^b = A_k^{[b_k, i_k]} m_k^i + \sum_{l=1}^{l \leq d} A_k^{[b_k, b_l]} m_l^b,$$

где A с нижними и верхними индексами — блоки матрицы, а n и m — вектора.

При этом, часть вычислений, которые соответствуют подматрицам $A_k^{[i_k, i_k]}$, $A_k^{[i_k, b_k]}$, $A_k^{[b_k, i_k]}$, $A_k^{[b_k, b_k]}$ можно выполнить независимо в каждой подобласти, а вычисления на граничных подматрицах $A_k^{[b_k, b_l]}$, $k \neq l$ на CPU, используя OpenMP.

Гибкость управления вычислительными ресурсами достигается за счёт совместного использования технологий MPI, OpenMP и CUDA на разных уровнях вычислительного процесса:

- технология MPI используется для обмена между узлами кластера;

- технология OpenMP – в вычислениях на ядрах центрального процессора в рамках одного вычислительного узла;
- CUDA – для вычислений на графических ускорителях.

Рассмотрим организацию параллельных вычислений, на примере кластера, в составе которого имеется два вычислительных узла (8 ядер CPU и 2 GPU на каждом узле). Каждому вычислительному узлу ставится в соответствие параллельный процесс MPI. В параллельном процессе порождается 8 потоков OpenMP. Первые потоки OpenMP, по числу доступных графических ускорителей, связываются с одним из доступных устройств и отвечают за асинхронные вызовы ядер CUDA (kernel), пересылки данных между GPU-CPU (вызовы функций асинхронного копирования) и вычисления вместе с оставшимися потоками как отдельное вычислительное устройство для своего блока матрицы.

Порядок действий в матрично-векторном произведении, в зависимости от номера нити, выглядит следующим образом. Для первых нитей, связанных с GPU:

- Вызов асинхронного копирования части вектора, отвечающего за граничные узлы, на CPU.
- Вызов ядра матрично-векторного произведения, оптимизированного под архитектуру графического ускорителя, для матриц $A_k^{[i_k, i_k]}$ и $A_k^{[i_k, b_k]}$.
- Вызов ядра матрично-векторного произведения, оптимизированного под архитектуру графического ускорителя, для матриц $A_k^{[b_k, i_k]}$ и $A_k^{[b_k, b_k]}$.

Для всех параллельных нитей:

- Вычисление матрично-векторного произведения, распараллеленное с помощью OpenMP, для матриц $A_k^{[i_k, i_k]}$ и $A_k^{[i_k, b_k]}$.
- Вычисление матрично-векторного произведения, распараллеленное с помощью OpenMP, для матриц $A_k^{[b_k, i_k]}$ и $A_k^{[b_k, b_k]}$.
- Вычисление произведений $\sum_{l=1}^{l \leq d} A_k^{[b_k, b_l]} m_l^b$.

Такой подход может сократить время решение системы линейных алгебраических уравнений за счёт минимизации количества пересылаемых данных и пересылок между вычислительными узлами. При этом, конвейерный подход позволяет совместить коммуникации и вычисления. Блочный конвейерный алгоритм метода сопряжённых градиентов может быть полезен для применения на гетерогенных системах или системах с медленной сетью между вычислительными узлами.

1. Mittal S., Vetter J.S. A survey of cpu-gpu heterogeneous computing techniques // ACM Computing Surveys. 2015. Vol. 47, no. 4. Art. no. 69.
2. Cools S., Cornelis J., Vanroose W. Numerically Stable Recurrence Relations for the Communication Hiding Pipelined Conjugate Gradient Method // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. 2019. Vol. 30, no. 11. P. 2507–2522.
3. Копысов С., Кuzmin I., Nedozhogin N., Novikov A., Sagdeeva Y. Scalable hybrid implementation of the Schur complement method for multi-GPU systems // The Journal of Supercomputing. 2014. Vol. 69. P. 81–88.

Параллельные «безматричные» алгоритмы МКЭ при решении задач теории упругости

А. К. Новиков

Ижевск, Удмуртский государственный университет

e-mail: sc_work@mail.ru

Применение метода конечных элементов (МКЭ) при моделировании процессов деформирования конструкций сложной формы требует решения больших систем алгебраических уравнений

$$Ku = f, \quad (1)$$

для которого используются параллельные вычисления [1].

Особенностью конечно-элементной системы (1) является способ ее формирования:

$$K = \sum_{e=1}^M K_e, \quad f = \sum_{e=1}^M f_e, \quad (2)$$

где элементы матриц $K_e \in \mathbb{R}^{N \times N}$ и векторов f_e вычисляются при интегрировании по конечным элементам, здесь M — число конечных элементов в сетке, N — число неизвестных в системе (1).

К «безматричным» можно отнести вычислительные алгоритмы, в которых матрица K не хранится, а вычисляется частично: слагаемые строк [2] или строки матрицы [3]. Первые алгоритмы — поэлементные (element-by-element) применяются в итерационных методах, вторые — «фронтальные» применяются в прямых методах, но так же могут применяться в итерационных. В итерационных методах, использующих на каждой итерации произведение матрицы K на некоторый вектор p , произведение переносится на уровень элементных матриц:

$$Kp = \sum_{e=1}^M (K_e p) = \sum_{e=1}^M (C_e^T (\hat{K}_e \hat{p}_e)) = \sum_{e=1}^M (C_e^T \hat{q}_e), \quad (3)$$

здесь $K_e = C_e^T \hat{K}_e C_e$, $\hat{p}_e = C_e p$, где $\hat{K}_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — локальная матрица жесткости, матрица $C_e \in \mathbb{Z}^{n \times N}$ задает соответствие между нумерацией неизвестных в конечном элементе e и системе (1).

В рассматриваемых случаях $\lg N > 5$, поэтому $n \ll N$. Произведение на матрицы C_e и C_e^T в (3) заменяется при программной реализации переходом по индексам при извлечении и сложении компонент векторов.

Параллельное вычисление векторов $\hat{q}_e$ может осуществляться независимо, в том числе, включая вычисление $\hat{K}_e$. Умножение на C_e^T и сложение по всем конечным элементам зависит от нумерации узлов расчетной сетки и наследует ее декомпозицию [4].

При поэлементной декомпозиции сетки стремятся минимизировать число общих узлов между подобластями сетки при равномерном равенстве числа конечных элементов в подобластях. При

поузловой декомпозиции стремятся достичь примерного равенства числа узлов в подобластях сетки. Для гетерогенных вычислительных систем разделение сетки проводят пропорционально производительности вычислительных модулей.

При вычислении (3) в «безматричном» виде матрицы $\hat{K}_e$ не хранятся, а вычисляются. При этом, достаточно хранить одну матрицу $n \times n$, учитывая симметрию матрицы — $n(n+1)/2$ элементов, для всех конечных элементов сетки. В случае параллельных вычислений одна матрица $n \times n$ создается и хранится в каждом потоке или процессе, что применимо, как для вычислений на центральных [4], так и графических процессорах [5].

При распараллеливании «фронтальных» алгоритмов, в каждом процессе или потоке вычисляются строки всех матриц $\hat{K}_e$, соответствующие конечным элементам, имеющих некоторый общий узел. Число таких матриц $m \ll M$. Для «фронтальных» алгоритмов применяется поузловая декомпозиция сетки, а каждому узлу сетки (подобласти сетки) ставится в соответствие множество конечных элементов, которым принадлежит этот узел. В этом случае, подобласти сетки пересекаются по общим конечным элементам, узлы которых принадлежат разным подобластям сетки.

Основные затраты на хранение переносятся на расчетную сетку, которые могут быть так же уменьшены при помощи хранения грубой сетки и вычисления новых узлов и ячеек по шаблонам перестроения. Вычисление матриц $\hat{K}_e$ приводит к увеличению арифметической интенсивности алгоритмов и локализации доступа к памяти.

В данной работе перечисленные подходы к декомпозиции сеточных данных и распараллеливанию вычислений применяются в решении задач теории упругости. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, полученные значения ускорения и эффективности параллельных вычислений.

1. Barragy E., Carey G.F., Vandegeijn R. Performance and Scalability of Finite Element Analysis for Distributed Parallel Computation // J. of Parallel and Distributed Computing. 1994. Vol. 21, no. 2. P. 202–212.
2. Fried I. More on gradient iterative methods in finite-element analysis // AIAA Journal. 1969. Vol. 7, no. 3. P. 565–567.

3. *Irons B.M.* A frontal solution program for finite element analysis // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. 1970. Vol. 2. P. 5–32.
4. *Копысов С.П., Новиков А.К.* Метод декомпозиции для параллельного адаптивного конечно-элементного алгоритма // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. № 3. С. 141–154.
5. *Копысов С.П., Кузьмин И.М., Недождогин Н.С., Новиков А.К., Рычков В.Н., Сагдеева Ю.А., Тонков Л.Е.* Параллельная реализация конечно-элементных алгоритмов на графических ускорителях в программном комплексе FESstudio // Компьютерные исследования и моделирование. 2014. Т. 6, № 1. С. 79–97.

Применение теории накрывающих отображений к исследованию математических моделей рынка

Н. Г. Павлова

Москва, Московский физико-технический институт (НИУ)

*Москва, Российский университет дружбы народов
имени Патриса Лумумбы*

*Тамбов, Тамбовский государственный университет
имени Г.Р. Державина*

e-mail: pavlova.ng@phystech.edu

Положение экономического равновесия является центральным объектом исследования современной экономики. Под положением экономического равновесия понимается ситуация, при которой товары, которые были доставлены на рынок, проданы в полном объёме, и при этом спрос на эти товары полностью удовлетворен.

Идея положения равновесия приписывается А. Смиту [1]. С XVII века вопросом существования положения равновесия занимались многие ученые, в том числе Ж.-Б. Сэй, Л. Вальрас и др. Однако математический аппарат не был достаточно развит для получения содержательных результатов в этой области. Появление теоремы Какутани позволило К. Эрроу и Ж. Дебре в 1954

году получить первые достаточные условия существования положения равновесия в математической модели рынка [2]. Развитие теории накрывающих отображений (см., напр., [3]) позволило получить условия существования положения экономического равновесия и исследовать его свойства в нелинейных моделях, более точно описывающих реальные экономические процессы рынка. В частности, исследована следующая модель рынка.

На рынке представлены $n \in \mathbb{N}$ видов товаров. Известны элементы матриц эластичностей спроса и предложения по ценам на эти товары $\mathcal{E} = (E_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{E}_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $E_{ij}, \tilde{E}_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1,n}$, векторы $\bar{c}_1 = (c_{11}, \dots, c_{1n})$, $\bar{c}_2 = (c_{21}, \dots, c_{2n}) \in \mathbb{R}_+^n$, $0 < c_{1i} < c_{2i}$, $i = \overline{1,n}$, вектор цен $\bar{p}^* = (p_1^*, \dots, p_n^*) \in \mathbb{R}_+^n$, такой что $c_{1i} \leq p_i^* \leq c_{2i}$, $i = \overline{1,n}$, и векторы $\bar{D}^* = (D_1^*, \dots, D_n^*)$, $\bar{S}^* = (S_1^*, \dots, S_n^*) \in \mathbb{R}_+^n$. Кроме того, известен вектор $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, определяющий объёмы импорта товаров на рынок, такой что существует $i = \overline{1,n} : a_i > 0$.

Моделью рынка σ назовём набор параметров

$$\sigma = (\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}, \bar{D}^*, \bar{S}^*, \bar{p}^*, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{a}).$$

Элементы матрицы $\mathcal{E}$ являются коэффициентами эластичности спроса по ценам на товары, представленные на рынке:

$$E_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{D_i}, i, j = \overline{1,n}. \quad (1)$$

Здесь p_i — цена единицы товара с номером i , $D_i = D_i(p_1, \dots, p_n)$ — спрос на товар с номером i , E_{ij} — коэффициент эластичности спроса на товар с номером i по цене на товар с номером j , $i, j = \overline{1,n}$. Элементы матрицы $\tilde{\mathcal{E}}$ являются коэффициентами эластичности предложения по ценам:

$$\tilde{E}_{ij} = \frac{\partial S_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{S_i}, i, j = \overline{1,n}. \quad (2)$$

Здесь $S_i = S_i(p_1, \dots, p_n)$ — предложение товара с номером i , $\tilde{E}_{ij}$ — коэффициент эластичности предложения на товар с номером i по цене на товар с номером j , $i, j = \overline{1,n}$.

Компоненты векторов $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$ определяют естественные ограничения на цены: $c_{1i} \leq p_i \leq c_{2i}, i = \overline{1, n}$. Известны объёмы спроса и предложения при ценах $\bar{p}^* = (p_1^*, \dots, p_n^*)$:

$$\bar{D}^* = \bar{D}(p_1^*, \dots, p_n^*), \quad (3)$$

$$\bar{S}^* = \bar{S}(p_1^*, \dots, p_n^*). \quad (4)$$

Набор параметров $(\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}, \bar{D}^*, \bar{S}^*, \bar{p}^*, \bar{c}_1, \bar{c}_2)$ однозначно определяет отображение спроса

$$D : [c_{11}; c_{21}] \times \dots \times [c_{1n}; c_{2n}] \rightarrow \mathbb{R}_+^n, \\ D(p_1, \dots, p_n) = (D_1(p_1, \dots, p_n), \dots, D_n(p_1, \dots, p_n))$$

и отображение предложения

$$S : [c_{11}; c_{21}] \times \dots \times [c_{1n}; c_{2n}] \rightarrow \mathbb{R}_+^n, \\ S(p_1, \dots, p_n) = (S_1(p_1, \dots, p_n), \dots, S_n(p_1, \dots, p_n)).$$

Решая систему дифференциальных уравнений в частных производных (1) с условием (3), получаем явный вид отображения спроса:

$$D_i(p_1, \dots, p_n) = D_i^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}}.$$

Аналогично, решая систему дифференциальных уравнений в частных производных (2) с условием (4), получаем явный вид отображения предложения:

$$S_i(p_1, \dots, p_n) = S_i^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}}.$$

Определение. Вектор $\bar{p} \in [c_{11}, c_{21}] \times \dots \times [c_{1n}, c_{2n}]$ называется *вектором равновесных цен (положением равновесия)* в модели σ , если

$$D(\bar{p}) = S(\bar{p}) + \bar{a}.$$

Используя результаты теории накрывающих отображений, а именно теоремы о точках совпадения двух отображений, действующих в метрических пространствах, для описанной модели получены условия существования положения равновесия и изучены его свойства. Аналогичные результаты получены для моделей рынка, в которых отображения спроса и предложения получены как решения задач на условный экстремум функции полезности и функции прибыли соответственно. Результаты обобщены на случай динамических моделей, в которых отображения спроса и предложения зависят не только от цен на товары, но и от скоростей изменения цен.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 23–11–20020, <https://rscf.ru/project/23-11-20020/> в ТГУ им. Г. Р. Державина.

1. *Smith A.* An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations. London: William Strahan and Thomas Cadell, 1776.
2. *Arrow K.J., Debreu G.* Existence of an equilibrium for a competitive economy // *Econometrica*. 1954. 22(3). P. 265–290.
3. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // *J. Fixed Points Theory and Applications*. 2009. Vol. 5, no. 1. P. 5–16.

Метод переменных направлений для нелинейного диффузионного уравнения с запаздыванием

В. Г. Пименов
Екатеринбург, УрФУ
e-mail: v.g.pimenov@urfu.ru

Изучаемая задача представляет собой упрощенную модель бактериального роста на питательных средах [1]. Несмотря на значительные упрощения, рассматриваемая математическая задача сохраняет главные эффекты: зависимость коэффициента

диффузии от искомой функции, две пространственные переменные и наличие запаздывания. Метод переменных направлений, восходящий к работам Д. Писмена, Х. Рекфорда и Д. Дугласа, был исследован для уравнения с запаздыванием в работе [2] в случае постоянного коэффициента диффузии. Численные алгоритмы для решения диффузионного уравнения с запаздыванием, в котором коэффициент диффузии зависит от искомой функции были рассмотрены в ряде работ, например, в [3], но в случае одной пространственной переменной.

Рассмотрим нелинейное уравнение диффузионного типа с двумя пространственными переменными и несколькими переменными запаздываниями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d(u) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t, u(t - \tau_1(t)), \dots, u(t - \tau_N(t))), \quad (1)$$

где $0 \leq t \leq T$, $-X \leq x \leq X$, $-X \leq y \leq X$ — независимые переменные; $u = u(x, y, t)$ — искомая функция решения; величины запаздывания удовлетворяют ограничениям $0 \leq \tau_n(t) \leq \tau$ для всех $n = 1, \dots, N$ и $t \in [0, T]$.

Заданы функциональные начальные условия

$$u(x, y, s) = \varphi(x, y, s), \quad -X \leq x \leq X, \quad -X \leq y \leq X, \quad -\tau \leq s \leq 0, \quad (2)$$

и нулевые граничные условия

$$u(x, y, t)|_{\Gamma} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

где Γ — граница области $-X < x < X$, $-X < y < X$.

Будем предполагать, что решение $u(x, y, t)$ задачи (1), (2), (3) существует и единственно. Кроме того, при исследовании сходимости численных методов будем предполагать необходимую гладкость решения $u(x, y, t)$. Также будем предполагать, что функция $f(x, y, t, u^1, u^2, \dots, u^N)$ липшицева по u^k , коэффициент диффузии $d(u)$ липшицев с константой липшица L_d и для всех u выполняется $0 < \check{d} \leq d(u) \leq \hat{d}$.

Введем шаг по времени $\Delta = \tau/K_0$, где K_0 — натуральное и пусть $K = [T/\Delta]$. Введем точки (узлы по времени) $t_k = k\Delta$, $k = -K_0, \dots, K$.

Приближение величины $u(x_i, y_j, t_k)$ в узлах будем обозначать через $u_{i,j}^k$. При всяких фиксированных $i, j \in \{0, 1, \dots, J\}$ введем дискретную предысторию к моменту t_k , $k = 0, 1, \dots, K$: $\{u_{i,j}^l\}_k = \{u_{i,j}^l, k - K_0 \leq l \leq k\}$. Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение $I: \{u_{i,j}^l\}_k \rightarrow u_{i,j}(\cdot) \in C[t_k - \tau, t_k + \frac{\Delta}{2}]$. В дальнейшем будем использовать кусочно-линейную интерполяцию с экстраполяцией продолжением.

Введем промежуточный временной слой $u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$. Рассмотрим дискретную систему на первом полушаге

$$(u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^k)/(\Delta/2) = d(u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \frac{u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h^2} + \\ + d(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h^2} + \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad i, j = 1, \dots, J-1. \quad (4)$$

Здесь $u_{i,j}(t)$ — результат кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением, $\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}u_{i,j}^k - \frac{1}{2}u_{i,j}^{k-1}$,

$$\tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = f(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}, u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{k+\frac{1}{2}})), \dots, u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_N(t_{k+\frac{1}{2}}))).$$

Система дополняется соответствующими начальными и граничными условиями.

На втором полушаге решается система относительно $u_{i,j}^{k+1}$

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta/2} = d(u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \frac{u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h^2} + \\ + d(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{h^2} + \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad i, j = 1, \dots, J-1. \quad (5)$$

Теорема 1. Системы (4) и (5) однозначно разрешимы и могут быть эффективно решены методом прогонки.

Введем разностные операторы

$$\Lambda_x[u_{i,j}^k] = d(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \frac{u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k}{h^2},$$

$$\Lambda_y[u_{i,j}^k] = d(u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \frac{u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k}{h^2}.$$

Определим погрешность метода (4), (5)

$$\varepsilon_{i,j}^k = u(x^i, y_j, t_k) - u_{i,j}^k, \\ i = 1, \dots, J-1, \quad j = 1, \dots, J-1, \quad k = 0, \dots, K.$$

Для каждого временного слоя с номером $k = 0, 1, \dots, M$ введем вектор послойной погрешности $\varepsilon^k = (\varepsilon_{1,1}^k, \varepsilon_{1,2}^k, \dots, \varepsilon_{J-1,J-1}^k)$ с нормой

$$\|\varepsilon^k\| = \sum_{i=1}^{J-1} \sum_{j=1}^{J-1} h^2 (\varepsilon_{i,j}^k)^2.$$

Определение 1. Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если существует константа C , не зависящая от h и Δ , такая, что $\|\varepsilon^k\| \leq C(h^p + \Delta^q)$ для всех $k = 1, \dots, K$.

Определение 2. Будем говорить, что выполняются условия устойчивости, если операторы Λ_x и Λ_y отрицательно определены.

Замечание 1. Условия устойчивости заведомо выполняются для уравнений с постоянным коэффициентом диффузии $d(u) = d > 0$.

Замечание 2. Условия устойчивости для уравнений с коэффициентом диффузии, зависящим от искомой функции, могут не выполняться.

Замечание 3. Если зависимость $d(u)$ линейная, причем u неотрицательная величина (как в модельной задаче А.Г. Масловской [1]), то условия устойчивости выполняются.

Теорема 2. Пусть выполняются условия устойчивости, тогда метод (4) и (5) сходится с порядком $h^2 + \Delta^2$.

1. Maslovskaya A., Kuttler Ch., Shevkun I., Chebotarev A., Kovtanyuk A. Quorum sensing model for nutrient-dependent evolution of cultured bacteria: theoretical framework and in silico study // Nonlinear Dynamics. 2025. Vol. 113. P. 7519–7534.

2. *Пименов В.Г., Лекомцев А.В.* Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 102–118.
3. *Лекомцев А.В.* Сходимость численного метода решения квазилинейного уравнения теплопроводности с запаздыванием // Вестник Башкирского университета. 2022. Т. 27, № 3. С. 508–513.

Математическое моделирование влияния температуры на распространение вирусной инфекции

К. А. Рюмина

*Москва, Российский Университет Дружбы Народов
им. Патриса Лумумбы*

*Москва, Научно-исследовательский институт медицины труда
имени академика Н.Ф. Измерова
e-mail: ryumina-ka@pfur.ru*

Экспериментально было показано, что распространение респираторной вирусной инфекции можно описать уравнением диффузии [1]. В данной работе рассматривается математическая модель, учитывающая роль температуры в процессе распространения инфекции. Отметим, что ранее были проведены исследования для упрощенной модели и для иммунного ответа [2, 3]. Рассматриваемая система описывается следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} &= -a(T)UV, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= a(T)UV - \beta I, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b(T)I(t - \tau) - \sigma(T)V, \\ \frac{dT}{dt} &= \alpha_T(T_s(V) - T), \end{cases}$$

где V — концентрация вируса, I — концентрация инфицированных клеток, U — концентрация неинфицированных клеток, T — температура тела. T_s — значение “нормальной” температуры тела.

Определяющими характеристиками моделей такого типа, имеющими физиологическое значение, являются скорость распространения волны (вирулентность человека) и полная вирусная нагрузка (тяжесть заболевания). В работе оцениваются эти характеристики и исследуется их зависимость от параметров температуры.

1. *Peacock P., et al.* The SARS-CoV-2 variant, Omicron, shows rapid replication in human primary nasal epithelial cultures and efficiently uses the endosomal route of entry // bioRxiv. 2022.
2. *Ait Mahiout L., Mozokhina A., Tokarev A., Volpert V.* Virus replication and competition in a cell culture: Application to the SARS-CoV-2 variants // Applied Mathematics Letters. 2022. Art. no. 133.
3. *Мозохина А.С., Рюмина К.А.* Многомасштабная математическая модель распространения респираторной инфекции с учетом иммунного ответа // СМФН. 2024. С. 654–668

О постановке граничных условий в динамических задачах теории упругости

А. В. Селезнева

Ижевск, Удмуртский государственный университет
e-mail: zukova16@mail.ru

Динамические задачи теории упругости являются важной составляющей механики деформируемого твёрдого тела и находят широкое применение при моделировании конструкций, подверженных временным нагрузкам. Решение задач данного типа возможно различными методами, в том числе и методом конечных элементов (МКЭ).

Одним из ключевых аспектов при решении таких задач является корректная постановка граничных условий. В зависимости от особенностей модели и характера задачи, граничные условия могут задаваться как в традиционной (сильной), так и в «слабой» форме (термин «слабая» здесь относится исключительно к способу задания граничных условий, а не к формулировке задачи).

Наложение граничных условий в традиционной форме (т.е. путем модификации соответствующих строк и столбцов матрицы системы и правой части уравнений) не вызывает трудностей на внешней границе области. Однако, поскольку граничные условия в традиционной форме приводят к изменению размерности матрицы системы и модификации ее элементов, возможно возникновение сложностей в решении системы, связанных с ее обусловленностью.

В сопряженных задачах, в задачах с изменяющимися границами использование слабых методов, таких как метод Нитше [1], становится актуальным. Этот метод основан на добавлении дополнительных слагаемых в вариационную форму, что позволяет учесть граничные условия без изменения структуры матрицы. Несмотря на необходимость подбора параметров и повышенные вычислительные затраты, метод демонстрирует хорошую сходимость и точность.

Применение слабых граничных условий существенно расширяет круг решаемых задач. Метод Нитше позволяет эффективно учитывать как равенства (например, условия идеального контакта), так и неравенства (условия одностороннего контакта или трения) на интерфейсных границах. Кроме того, метод находит широкое применение в задачах со сложной геометрией благодаря реализации подхода погружения вычислительной области в фоновую сетку, что особенно актуально при моделировании нестандартных границ и многосвязных областей. В последние годы метод Нитше получил значительное распространение в случаях, когда традиционные подходы к заданию граничных условий оказываются неэффективными или трудно реализуемыми.

Современные библиотеки для конечно-элементного анализа, такие как Gridap [2] и FEniCS [3], предлагают высокоуровневые интерфейсы на языках Julia и Python [4] соответственно. Эти

инструменты позволяют формулировать задачи в слабой форме, используя синтаксис, близкий к математической нотации, что существенно упрощает процесс численного моделирования.

В рамках исследования выполнен сравнительный анализ традиционного (сильного) способа наложения граничных условий и слабых методов. Численное решение динамической задачи теории упругости в трехмерной постановке рассмотрено с использованием обоих подходов на различных типах расчетных сеток: как на стандартных сетках, точно аппроксимирующих геометрию границу области, так и на фоновых сетках с погруженной границей.

В данной работе все вычислительные эксперименты были реализованы с использованием пакета Gridap на языке программирования Julia, который обеспечивает эффективные средства для формулировки и решения вариационных задач, в том числе и на фоновых сетках. Для верификации результатов была проведена серия сравнительных расчетов с эталонными решениями [5], полученными в пакете FEniCS. Особое внимание уделялось корректности реализации слабых граничных условий методом Нитше. Результаты численного моделирования показали, что слабые методы наложения граничных условий, в частности метод Нитше и метод CutFEM [6], обеспечивают точность и устойчивость, сопоставимые с традиционными подходами. При этом они обладают большей универсальностью при работе со сложной геометрией.

1. *Nitsche J.* Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. 1971. No. 36 (1). S. 9–15.
2. *Verdugo F., Badia S.* The software design of Gridap: A Finite Element package based on the Julia JIT compiler // Computer Physics Communications. 2022. Vol. 276. Art. no. 10834.
3. *Logg A., Wells G.N.* Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method // Springer. 2011. Vol. 84.
4. *Селезнева А.В., Копысов С.П.* Автоматизация конечно-элементных вычислений при решении прикладных задач // Теория управления и математическое моделирование: тезисы докл. Всерос. конф., 13–17 июня 2022 г. Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2022. С. 359–362.

5. *Erlicher S., Bonaventura L., Bursi O.* The analysis of the Generalized- α method for non-linear dynamic problems // Computational Mechanics. 2002. Vol. 28, no. 1. P. 83–104.
6. *Burman E., Hansbo P.* Fictitious domain finite element methods using cut elements: II. A stabilized Nitsche method // Applied Numerical Mathematics. 2012. Vol. 62, no. 4. P. 328–341.

Моделирование сортировочных транспортных систем сетью массового обслуживания

Н. В. Сергеева, Д. Д. Шабанова, И. Е. Тананко

*Саратов, Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского*
e-mail: sergeevanv@info.sgu.ru, shabanovadaria04@gmail.com,
tanankoie.sgu@gmail.com

Решение задач анализа, проектирования и оптимизации систем управления производством [1], систем логистики [2], транспортных систем [3] все чаще связано с созданием и использованием сетей массового обслуживания [4] в качестве математических моделей таких систем.

В данной работе построена математическая модель железнодорожной сортировочной станции открытой сетью массового обслуживания.

Типовые сортировочные станции выполняют следующие действия: прием поездов в парк прибытия, отцепление локомотива, расформирование состава на сортировочной горке, накопление вагонов в сортировочном парке, выставление состава в парк отправления, подключение локомотива, отправление поезда со станции.

Математическая модель. Прием поездов в парк прибытия, отцепление локомотива и расформирование состава на сортировочной горке отобразим в модели системой массового обслуживания с групповым поступлением требований. Процесс накоп-

ления вагонов в сортировочном парке представим в модели системы обслуживания с ординарным потоком и групповым обслуживанием требований. И наконец, простейшей системой обслуживания отобразим процессы: выставление состава в парк отправления, подключение локомотива и отправление поезда со станции.

Таким образом, сеть массового обслуживания состоит из L систем массового обслуживания (СМО) трех типов.

Система S_1 представляет собой начальную систему типа $M^b/M/1$, в которую из источника поступает групповой пуассоновский поток требований с интенсивностью λ_0 . В каждой группе приходит случайное число требований, равномерно распределенное на отрезке $[\alpha, \beta]$. Требования обслуживаются по одному. Длительности обслуживания требований независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром μ_1 . Группы заявок обслуживаются в порядке их поступления. В системе имеется один обслуживающий прибор.

После обслуживания в системе S_1 требование переходит в систему S_i , $i = 2, \dots, L-1$, согласно вероятностям перехода θ_{1i} , причем $\sum_{i=2}^{L-1} \theta_{1i} = 1$. Системы S_i представляют собой системы типа $M/M^{b_i}/1$ с групповым обслуживанием требованием. Размер группы определяется для каждой системы дискретной равномерно распределенной на отрезке $[\alpha, \beta]$ случайной величиной. Длительности обслуживания групп заявок имеют экспоненциальное распределение с параметром μ_i . После завершения обслуживания в системе S_i , $i = 2, \dots, L-1$, группа заявок переходит с вероятностью $\theta_{iL} = 1$ в систему S_L . Система S_L представляет собой систему с групповым входящим потоком заявок и групповым обслуживанием. Однако для упрощения модели система S_L будет представлять собой систему типа $M/M/1$.

Системы S_1 и S_L отображают в модели приемо-отправочные парки, системы S_i , $i = 2, \dots, L-1$ отображают сортировочно-отправочный парк.

Поскольку все требования поступают в первую систему для расформирования группы, затем по одному распределяются между системами $S_2, \dots, S_{L-1}$ для формирования новых групп, а затем проходят через систему S_L в составе новой группы и покидают сеть, то данную сеть можно рассматривать как сеть Джексо-

на. В этом случае, для вычисления теоретических характеристик систем сети можно рассматривать системы обслуживания с групповым входящим потоком, групповым обслуживанием. Основной характеристикой сети массового обслуживания является математическое ожидание длительности пребывания требований в сети. Для нашей модели данная характеристика может быть вычислена по формуле

$$\tau = \bar{u}_1 + \sum_{i=2}^{L-1} \bar{u}_i \theta_{1i} + \bar{u}_L,$$

где $\bar{u}_i$ — математическое ожидание длительности пребывания требований с системе S_i , $i = 1, \dots, L$.

Характеристики $\bar{u}_i$ вычисляются по различным формулам в зависимости от типа системы. Для системы типа $M^b/M/1$ [5]:

$$\bar{u}_1 = \frac{l^{(2)} + l}{2\mu_1 l(1 - \rho_1)}, \quad \rho_1 = \frac{l\lambda_0}{\mu_1},$$

где $l = \sum_{k=1}^{\infty} k l_k$ — математическое ожидание числа требований в группе, l_k — вероятности поступления в систему группы размера k , $l^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 l_k$ — второй начальный момент числа требований в группе.

Для системы типа $M/M^{b_i}/1$ [6]:

$$\bar{u}_i = \frac{b_i - 1}{2\lambda_i} + \frac{1}{M - \lambda_i},$$

где M — корень уравнения:

$$M^{b_i+1} - (\lambda_i + \mu_i)M^{b_i} + \lambda_i^{b_i}\mu_i = 0,$$

принадлежащий интервалу

$$\left(\frac{b_i(\lambda_i + \mu_i)}{b_i + 1}, \frac{(\lambda_i + \mu_i)^{b_i+1} - \lambda_i^{b_i}\mu_i}{(\lambda_i + \mu_i)^{b_i}} \right).$$

Для системы типа $M/M/1$ [4]:

$$\bar{u}_L = \frac{1}{\mu_L} \frac{1}{1 - \rho_L}, \quad \rho_L = \frac{\lambda_0}{\mu_L}.$$

Полученные выражения были использованы для вычисления характеристик функционирования железнодорожной сортировочной станции (ЖСС) Анисовка Энгельсского района Саратовской области. Модельная сеть массового обслуживания состоит из 26 систем обслуживания. Для подтверждения теоретических результатов была создана имитационная модель функционирования рассмотренной ЖСС.

1. *Прангизвили И.В., Амбарцумян А.А.* Основы построения АСУ сложными технологическими процессами. Москва: Энергоатомиздат, 1994.
2. *Шапиро Дж.* Моделирование цепи поставок. Санкт-Петербург: Питер, 2006.
3. *Горев А.Э., Бёттгер К., Прохоров А.В., Гизатуллин Р.Р.* Основы транспортного моделирования: Практическое пособие. Санкт-Петербург: КОСТА, 2015.
4. *Митрофанов Ю.И.* Анализ сетей массового обслуживания. Саратов: Научная книга, 2005.
5. *Бочаров П.П., Печенкин А.В.* Теория массового обслуживания. Москва: РУДН, 1995.
6. *Stankevich E., Tananko I., Pagano M.* Optimization of Open Queuing Networks with Batch Services // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 16. Art. no. 3027.

Невырожденная Булева логика

Ю. М. Сметанин

Ижевск, ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»

e-mail: gms1234gms@rambler.ru

В. М. Сметанина

Москва, МГТУ имени Н.Э. Баумана

e-mail: 2003Vikasmets@gmail.com

Логико-семантические модели явлений окружающего мира

выражают их причинно-следственные связи.

В работе рассматриваются прикладные аспекты использования построенных логико-семантических моделей для решения следующих задач.

Задача 1. Даны посылки $P_1, P_2, \dots, P_k$, доказать, что из них логически в семантическом смысле следует Z :

$$P_1 \& P_2 \& \dots \& P_k \models Z.$$

Задача 2. Дан список посылок $P_1, P_2, \dots, P_k$. Вывести интересные, с прикладной точки зрения, следствия из них.

Задача 3. Как нужно изменить посылки, чтобы получить из них требуемое следствие.

Задачи 1–3 решаются нами посредством алгоритмической проверки логического следования в семантическом смысле.

Сравним различные модели, используемые для построения логик, пригодных для решения этих задач. Булева логика высказываний построена в рамках алгебраической системы (АС):

$$\lambda = \langle \omega(\tilde{x}_n), \{ \cdot, +, \prime \}, \{ \subseteq \} \rangle, \omega = \{1\}, x_i \subseteq \{1\}, i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Опорное множество $\omega(\tilde{x}_n) = \{1\}$ является одноэлементным и может быть составлено как объединение полных конъюнкций (конституент) модельных множеств (Булевых переменных x_i). Отличительной чертой логики Буля является вырожденность ее Булевой алгебры, в результате чего описание в ней причинно-следственных связей связано с парадоксами материальной импликации, выражаемой в ней равносильностью

$$X \Rightarrow Y \equiv X' + Y.$$

Логика Аристотеля (силлогистика) построена на основе АС:

$$\Lambda = \langle \Omega(\tilde{x}_n), \{ \cdot, +, \prime \}, \{ \subseteq \} \rangle. \quad (2)$$

Достоинством является возможность непарадоксального отражения причинно-следственных связей, выделение структуры атомарных суждений (субъект, предикат). Область интерпретации

формул этой силлогистики более содержательна и наглядно выражается в форме модельных схем (диаграмм Венна [1]), бинарные логические отношения смотри на рис. 1. Недостаток — многосмысловость атомарных (категорических суждений) — общеутвердительного, общеотрицательного, частно-утвердительного и частно-отрицательного AXY , EXY , IXY , OXY , а также сложности, связанные с компьютерной обработкой и визуализацией традиционных диаграмм Венна для числа модельных множеств больше 20. Например, смысловое содержание общеутвердительного и его отрицания частно-отрицательного суждений выражается в традиционной силлогистике Аристотеля двумя и пятью Жергонновыми отношениями $AXY \equiv G_9 \oplus G_{13}$; $OXY \equiv G_6 \oplus G_7 \oplus G_{11} \oplus G_{14} \oplus G_{15}$ (см. рис. 1).

Рассмотрим АС:

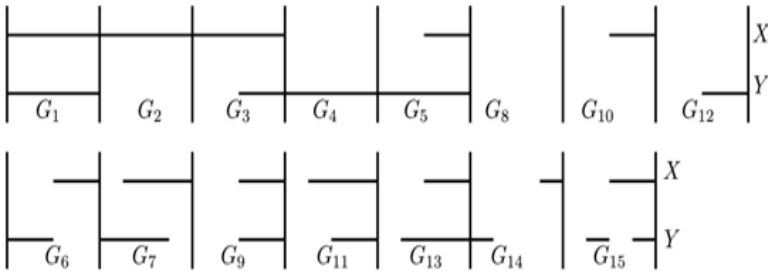


Рис. 1: Пятнадцать бинарных Жергонновых логических отношений

$$\langle B(\tilde{X}_n), W_F, W_R \rangle, \quad (3)$$

где $W_F = \{+, \cdot, '\}$, $W_R = \{=, \subset\}$, $X_i \subseteq \{0, 1, \dots, 2^n - 1\} = U^0$, $B(\tilde{X}_n) \subseteq U^0$, $i = \overline{1, n}$. Выражающую эту алгебраическую систему модельную схему A с данной нумерацией X_i будем называть дискретной диаграммой Венна или A -онтологией:

$$A = \langle U, X_1, X_2, \dots, X_n \rangle, \quad \tilde{X}_i = \langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle, U = B(\tilde{X}_n).$$

Построенную в рамках АС (3) универсальную силлогистику L_{S_2} можно назвать невырожденной Булевой логикой [2, 3]. Модель предметной области деятельности в L_{S_2} представляет собой

правильно построенную формулу (ППФ). Атомарные суждения (5) в L_{S_2} выражают объемные отношения модельных множеств. Семантика дана равносильностями (6)–(8).

$$NOB_S = \langle \underbrace{A(X, Y)}_{S_1}, \underbrace{Eq(X, Y)}_{S_2}, \underbrace{IO(X, Y)}_{S_3}, \underbrace{X = U}_{S_4}, \underbrace{X \subset U}_{S_5} \rangle, \quad (5)$$

$$G_{13} : A(X, Y) \equiv (X \subset Y) \cdot \\ \cdot (X \subset U) \cdot (X' \subset U) \cdot (Y \subset U) \cdot (Y' \subset U), \quad (6)$$

$$G_9 : Eq(X, Y) \equiv (X = Y) \cdot (X \subset U) \cdot \\ \cdot (X' \subset U) \cdot (Y \subset U) \cdot (Y' \subset U), \quad (7)$$

$$G_{15} : IO(X, Y) \equiv (X \cdot Y \neq \emptyset) \cdot \\ \cdot (X \cdot Y' \neq \emptyset) \cdot (X' \cdot Y \neq \emptyset) \cdot (X' \cdot Y' \neq \emptyset). \quad (8)$$

Все ППФ делятся на два класса: конъюнктивные (КППФ) и неконъюнктивные (НКППФ). Различие между ними заключается в том, что первые являются односмысловыми (однозначными), а вторые многосмысловыми (многозначными). Расчеты и принятие решений (выводы) в рамках логики L_{S_2} сводятся к вычислению и анализу семантических значений ППФ. Семантическим значением КППФ является множество неотрицательных целых чисел (конституентное множество), которое определяет дискретную диаграмму Венна [3]. Семантическим значением НКППФ является семейство конституентных множеств.

В [2, 3] показано, что верификация логического следования между посылкой и следствием осуществляется алгоритмически. Алгоритм вычислений семантического значения ППФ реализован программно и используется в учебном процессе. Логика обладает свойством полноты, то есть имеется алгоритм проверки существования логического следования между двумя любыми ППФ.

Пример. Модус AAI (*Bramantip*) четвертой фигуры

$$APM \cdot AMS \models ISP.$$

В L_{S2} он выражается НКППФ вида

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{Eq(P, M) \cdot Eq(M, S)}_1 + \underbrace{A(P, M) \cdot Eq(M, S)}_2 + \underbrace{Eq(P, M) \cdot A(M, S)}_3 + \\
 \underbrace{A(P, M) \cdot A(M, S)}_4 \models \underbrace{Eq(S, P)}_1 + \underbrace{A(S', P')}_2 + \\
 + \underbrace{A(S', P) + A(S, P) + IO(S, P)}_{2,3,4} \underbrace{\hspace{1cm}}_{impossibly}.
 \end{array}$$

Разбор случаев 1–4 с помощью алгоритма вычисления семантического значения показывает, что следствия $A(S', P)$, $A(S, P)$, $IO(S, P)$ не имеют места. Получено существенное уточнение модуса, которое невозможно сделать в силлогистике Аристотеля.

Преимущество моделирования с использованием логики L_{S2} иллюстрируется в докладе примерами решения задач 1–3.

1. Кузичев А.С. Диаграммы Венна. Москва: Наука, 1968.
2. Сметанин Ю.М. Верификация логического следования в неклассической многозначной логике // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2017. Т. 50. С. 62–82.
3. Сметанин Ю.М. Использование распределенных вычислений при моделировании предметной области в универсальной силлогистике // Программные системы: теория и приложения. 2024. Т. 15, № 2. С. 87–112.

Моделирование процессов в щелочных электролитах при электролизе

В. Ю. Чебакова

*Казань, Казанский федеральный университет
Казань, Академия наук Республики Татарстан, Институт
прикладных исследований Академии наук Республики
Татарстан,
e-mail: vchebakova@mail.ru*

Основной задачей данной работы является исследование процессов в щелочных электролитах и построение математического аппарата для нахождения констант скоростей приэлектродных процессов и их интеграция в математическую модель, описывающую пространственные распределения внутренних характеристик гетерогенных систем в межэлектродном пространстве. При моделировании процесса электролиза в электролите между плоско-параллельными электродами предположим потенциальность электрического поля, тогда математическая постановка будет состоять из системы уравнений, содержащей следующие начально-краевые, краевые задачи:

1) Начально-краевые задачи для концентраций заряженных ионов (уравнения диффузии–конвекции с начальными и граничными условиями). Общее их количество будет зависеть от состава электролита.

2) Краевая задача для потенциала электрического поля (уравнение Пуассона с граничными условиями).

Задачи, входящие в математическую модель, обладают рядом особенностей, усложняющих решение:

а) Большие градиенты концентрации в приэлектродных областях приводят к вычислительной ошибке при численном вычислении потока частиц в приэлектродных областях.

б) Область с преобладанием связанной диффузии в центре межэлектродного промежутка соседствует с приэлектродными областями, где доминирует конвекция. Такая смена преобладающих процессов приводит к смене типа уравнений, что дает ограничение на используемые методы решения.

в) Наличие сильного градиента электрического поля в приэлектродных областях приводит к преобладанию процесса конвекции. Таким образом, возникает проблема аппроксимации производной первого порядка при использовании неявных схем. Аппроксимация центральной разностной производной, может привести к нарушению диагонального преобладания и, следовательно, к неустойчивости вычислений при решении системы алгебраических уравнений. В случае же использования направленных разностей при аппроксимации уменьшается порядок точности вычислений.

В данной работе разработан численный алгоритм решения одномерной задачи, который содержит в себе возможность решения кинетической задачи на поверхности раздела металлический электрод — жидкий электролит. Данный алгоритм состоит из двух блоков. Первый блок является самостоятельной задачей по поиску констант скоростей процессов и представляет решение «0»-мерной задачи. Путем решения обратной кинетической задачи модифицированным методом прямого поиска вычисляются скорости констант стадийных реакций. Далее эти данные можно использовать либо для решения задачи прогнозирования выхода путем прямого решения систем кинетических уравнений методом Рунге–Кутты, либо расчета пространственных характеристик во втором блоке алгоритма. Кинетические задачи позволяют оценить вклады приэлектродных процессов и построить первоначальный прогноз выделения газа. Метод, применяемый в первом блоке, описан и верифицирован в работах [1–4]. Второй блок представляет собой решение начально-краевых и краевых задач в «одномерном» приближении. Разностные схемы решения данных задач строились интегро-интерполяционным способом. Расчеты, проводимые для верифицирования алгоритма, по количеству выделившегося газа показали хорошее схождение, как на катоде, так и на аноде. Расчет пространственных характеристик показал характерные градиенты, т. е. хорошее качественное схождение.

Работа выполнена за счет гранта Академии наук Республики Татарстан, предоставленного молодым кандидатам наук (постдокторантам) с целью защиты докторской диссертации, выполнения научно-исследовательских работ, а также выполнения трудовых функций в научных и образовательных организациях Республики Татарстан в рамках Государственной программы Республики Татарстан «Научно-технологическое развитие Рес-

публики Татарстан».

1. *Кашапов Л.Н., Кудрявый А.Д., Чебакова В.Ю., Кормушин К.В.* Влияние выделения водорода на процессы осаждения цинка // Информационно-технологический вестник. 2023. Т. 4, № 38. С. 143–162.
2. *Кашапов Л.Н., Кашапов Н.Ф., Чебакова В.Ю.* Математическое моделирование катодных процессов при получении водорода // Вестник Технологического университета. 2023. Т. 26, № 1. С. 99–105.
3. *Кашапов Р.Н., Кашапов Л.Н., Кашапов Н.Ф., Чебакова В.Ю.* Кинетика двухфазных газожидкостных сред в процессах электролиза // Теплофизика высоких температур. 2021. Т. 59, № 6. С. 869–876.
4. *Кашапов Н.Ф., Чебакова В.Ю., Чебакова Е.В., Кормушин К.В.* Алгоритм численного исследования прикатодных процессов электровыделения цинка // Вестник Югорского государственного университета. 2024. Т. 20, № 1. С. 11–18.

Метод доли смещения для расчета горения полимерных материалов

А. А. Шаклеин, А. И. Карпов, Г. Морар

*Ижевск, Удмуртский федеральный исследовательский центр
УрО РАН*

e-mail: shaklein@udman.ru, karpov@udman.ru, morarga19@gmail.com

Работа посвящена исследованию горения полимерных материалов. Горение в газе часто описывается одной необратимой реакцией, что обычно позволяет адекватно оценить тепловыделение в результате сгорания. Однако при необходимости оценки количества образующихся при горении и выбрасываемых в окружающую среду вредных веществ требуется использовать детальные кинетические механизмы. Минус такого подхода заключается том, что получающаяся система уравнений, включающая химическую кинетику, становится жесткой, что обусловлено широким спектром характерных времен протекания реакций.

В случае диффузионного горения газовых смесей для снижения вычислительных затрат используется методика замены основного пламени набором одномерных пламен (flamelet метод для расчетов параметров турбулентного горения). В работе предлагается адаптация данного метода к исследованию горения полимерных материалов. Основными особенностями здесь, которые следует учесть и разрешить, являются непостоянные по области газоприхода с межфазной поверхности (поверхности горения) температура поверхности и массовая скорость газификации.

Система уравнений формулируется в следующем виде [1]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + (\rho - \rho_a) g_j,$$

$$\rho \frac{\partial Z}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial Z}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \rho D \frac{\partial Z}{\partial x_i}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial Z_k}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial Z_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \rho D \frac{\partial Z_k}{\partial x_i}, \quad (2)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T'}{\partial t} + \rho u_i c_p \frac{\partial T'}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda \frac{\partial T'}{\partial x_i}, \quad (3)$$

$$p = \rho R T.$$

Уравнение (1) описывает перенос Z — доли смешения. Этот параметр представляет собой новую одномерную систему координат, которая заменяет основную систему x_i . Такое преобразование справедливо вблизи стехиометрической поверхности горения, где Z направлена по нормали к этой поверхности. Однако в данной работе это условие пренебрегается, и проводится оценка возможности описания всей области пламени.

Уравнение (2) используется для учета расположения пламени относительно поверхности горения, оценки теплового потока в твердый материал и скорости газификации горючего.

Для описания неравномерной температуры горячей поверхности (соответственно, и температуры горючего на границе газоприхода) в систему уравнений входит уравнение (3), которое получается разделением исходного уравнения сохранения

энергии на две части: собственно уравнение (3) и адиабатическая часть, которая рассчитывается для одномерных пламен. В случае расчетов горения жидких горючих материалов (расплавов полимеров), температура поверхности равна температуре кипения, количество параметров модели снижается на единицу, уравнение (3) опускается.

Параметры реагирующего газа (температура, концентрации компонентов) определяются серией одномерных расчетов диффузионного пламени в противотоке и интерполируются на основную область в виде $T = f_T(T', Z, Z_k)$.

Проведены расчеты распространения диффузионного пламени вниз по вертикальной поверхности полиметилметакрилата (ПММА) с использованием скелетного кинетического механизма на 29 компонентов и 33 реакции горения метилметакрилата. Расчеты показывают, что предлагаемая методика показывает существенное завышение скорости распространения пламени по сравнению с измерениями. Также наблюдается заметное отличие измеренной и расчетной температуры во фронте пламени. Данный эффект объясняется тем, что при горении твердого материала пламя располагается достаточно близко к твердому материалу, и в области фронта пламени образуется зона, которую невозможно описать комбинацией одномерных пламен.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 22-79-10066.

1. *Shaklein A., Karpov A., Trubachev S., Morar G., Balobanov N., Mitriukova E.* A mixture fraction approach to predict polymer burning // *Polymers*. 2024. Vol. 16. Art. no. 3313.

Характеристики практической сходимости метода конечных разностей для нелинейной задачи типа «реакция-диффузия» при моделировании бактериального роста

И. А. Шевкун, А. Г. Масловская

Иннополис, Университет Иннополис

e-mail: shevkun.i.a@gmail.com, a.maslovskaya@innopolis.ru

В настоящее время микроорганизмы являются значимыми объектами междисциплинарных наук. Одним из распространенных методов микробиологической диагностики является выделение чистых культур и их выращивание в лабораторных условиях на питательных средах [1]. В настоящей работе исследуется и развивается модель бактериальной популяционной динамики, которая формализуется с помощью начально-краевой задачи для нелинейной системы уравнений в частных производных типа реакция-диффузия [2] (в нормированном представлении):

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} &= D_n \Delta n - nb, \\ \frac{\partial b}{\partial t} &= \nabla(D_b \nabla b) + nb, \\ -L &\leq x \leq L, -L \leq y \leq L\end{aligned}\tag{1}$$

где $n(x, y, t)$ — концентрация питательного субстрата; $b(x, y, t)$ — концентрация бактерий; σ — параметр модели, характеризующий концентрацию питательного вещества.

Начальные и краевые условия определяются в виде:

$$n(x, y, 0) = n_0 \equiv const, \quad b(x, y, 0) = b_0(x, y), \quad -L \leq x, y \leq L, \tag{2}$$

$$\left. \frac{\partial n}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial b}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \quad 0 < t \leq T, \tag{3}$$

где $\beta_0 = \beta_M \exp(-(x^2 + y^2)/C^2)$; β_M и C — параметры модели; Γ — граница расчетной области; $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к Γ .

Для решения задачи (1)–(3) использован метод конечных разностей с применением подхода дробных шагов [3], вычислительная схема подробно описана в [4]. Настоящее исследование сфокусировано на установлении характеристик практической сходимости конечно-разностной схемы. С этой целью применено правило Рунге со схемой двойного пересчета и одновременным изменением параметров сетки по пространственным переменным и времени. Оценка относительной погрешности выполнялась с помощью l_2 -нормы:

$$\delta_U = ||U - \tilde{U}||/||\tilde{U}||$$

где U — численное решение при числе разбиений по пространственным переменным — N и по времени — K ; $\tilde{U}$ — численное решение при удвоенном числе разбиений $2N$ и $2K$.

Результаты оценки относительной погрешности концентраций биомассы $b(x, y, t)$ и питания $n(x, y, t)$ представлены в таблице 1.

Таблица 1: Зависимость параметров K , σ_b и σ_n от N

	2000	4000	8000	16000	32000
K	10000	20000	40000	80000	160000
δ_b	0.0811	0.0389	0.0148	0.0106	0.0083
δ_n	0.0418	0.0158	0.0093	0.0071	0.0064

Таким образом, применение сконструированной вычислительной схемы при уменьшении шага сетки разбиения приводит к снижению относительной погрешности решения в одних и тех же узлах, что позволяет нам говорить о практической сходимости этой схемы. Важным аспектом применения настоящего результата является возможность численного моделирования динамики бактериальной популяции при учете процессов коммуникации микробного сообщества [5] и в условиях внешнего ингибирования антибактериальными препаратами [6].

1. *Matsushita M., Wakita J., Itoh H., Rafols I., Matsuyama T., Sakaguchi H., Mimura M.* Interface growth and pattern formation in bacterial colonies // *Physica A*. 1998. Vol. 249. P. 517–527.

2. *Kawasaki K., Mochizuki A., Matsushita M., Umeda T., Shigesada N.* Modeling spatio-temporal patterns generated by *Bacillus subtilis* // Journal of Theoretical Biology. 1997. Vol. 188. P. 177–185.
3. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
4. *Шевкун И.А., Масловская А.Г.* Вариация моделей дендритоподобной морфологии бактериальных культур: численная реализация в рамках реакционно-диффузионного приближения // Вестник Амурского государственного университета. Серия: Естественные и экономические науки. 2023. № 101. С. 30–39.
5. *Maslovskaya A., Kuttler Ch., Shevkun I., Chebotarev A., Kovtanyuk A.* Quorum sensing model for nutrient-dependent evolution of cultured bacteria: theoretical framework and *in silico* study // Nonlinear Dynamics. 2025. No. 113. P. 7519–7534.
6. *Maslovskaya A.G., Shevkun I.A., Kuttler Ch.* The evolution model of cultured bacteria with external growth inhibition: computational techniques and *in silico* studies // EPiC Series in Computing: Proceedings of 3rd International Workshop on Mathematical Modeling and Scientific Computing. 2024. Vol. 104. P. 209–220.

Двухэтапный метод параметрической идентификации для дискретных моделей хаотических процессов

А. С. Шелудько

Челябинск, Южно-Уральский государственный университет
e-mail: sheludkoas@susu.ru

Рассматривается класс дискретных моделей хаотических процессов [1], заданных в виде одномерных отображений вида

$$x_k = f(x_{k-1}, \lambda), \tag{1}$$

где x_k — переменная состояния, λ — параметр модели, k — номер временного шага. В задаче параметрической идентификации

необходимо найти оценки начального условия x_0 и параметра λ по последовательности зашумленных измерений

$$y_k = x_k + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где v_k — ошибки измерений, N — число измерений. Для данной постановки методы параметрической идентификации, как правило, основываются на решении задачи минимизации

$$\min_{x_0 \in \tilde{X}_0, \lambda \in \Lambda} F(x_0, \lambda), \quad (3)$$

где F — целевая функция, которая определяет меру близости реализации модели (1) к измерениям (2) [2, 3]. Основная сложность при таком подходе состоит в том, что целевая функция F является многоэкстремальной [3, 4], при этом при небольшом числе измерений N значения целевой функции в точках локального экстремума могут отличаться незначительно [5]. Это приводит к необходимости применения алгоритмов глобальной оптимизации для решения задачи минимизации (3). Также становится перспективной разработка методов предварительной обработки измерений (2), которые позволяют уменьшить множество поиска $P = X_0 \times \Lambda$ переменных целевой функции F .

В данной работе для решения рассмотренной задачи предлагается двухэтапный метод параметрической идентификации. На первом этапе используется алгоритм гарантированного оценивания [6], который позволяет уточнить множество поиска P . Алгоритм гарантированного оценивания основан на множественном (интервальном) представлении неопределенности о неизвестных переменных [7, 8] и представляет собой рекуррентную процедуру построения множественных оценок переменной состояния x_k и параметра λ отображения (1). Данная процедура может быть реализована в прямом и обратном времени, что позволяет в результате получить уточненные множества возможных значений $\tilde{X}_0$ и $\tilde{\Lambda}$ начального условия x_0 и параметра λ соответственно. При этом при корректных априорных предположениях гарантируется, что найденные множественные оценки $\tilde{X}_0, \tilde{\Lambda}$ содержат истинные значения неизвестных переменных. Таким образом, результатом первого этапа является уточненное множество поиска $\tilde{P} \subseteq P$, где $\tilde{P} = \tilde{X}_0 \times \tilde{\Lambda}$. Такая предварительная обработка последовательности измерений (2) на первом этапе позволяет уменьшить

число локальных экстремумов целевой функции F и в дальнейшем сократить время вычислений при применении алгоритмов глобальной оптимизации.

На втором этапе используется алгоритм роя частиц [5] для нахождения точечных оценок начального условия x_0 и параметра λ в результате решения задачи минимизации (3). Алгоритм роя частиц является одним из распространенных эвристических алгоритмов глобальной оптимизации, которые применяются при параметрической идентификации моделей хаотических процессов [9, 10]. Алгоритм основан на рассмотрении множества частиц, которые перемещаются по индивидуальным траекториям в пространстве переменных целевой функции. Каждая частица хранит информацию о своем наилучшем положении – точке траектории, в которой значение целевой функции было минимальным. Между частицами также происходит обмен информацией о наилучшем положении среди всех частиц – точке, которая принимается за приближение к точке глобального минимума. Основными достоинствами алгоритма роя частиц являются относительно небольшое число параметров и возможность параллельной реализации. Кроме того, алгоритм можно модифицировать для решения задачи идентификации в реальном времени. При получении нового измерения относительное расположение экстремумов целевой функции меняется незначительно, поэтому полный перезапуск вычислений не требуется: на новой итерации алгоритма используются уже найденные наилучшие положения частиц.

Вопрос выбора параметров алгоритма роя частиц для поиска глобального минимума целевой функции обсуждался в [5]. Эффективность применения алгоритма гарантированного оценивания как процедуры уточнения множества поиска была показана в [6]. Данная работа объединяет результаты этих исследований.

1. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: Физматлит, 2007.
2. Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Современные проблемы моделирования по временным рядам // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Физика». 2006. Т. 6, № 1–2. С. 3–27.
3. Jafari S., Sprott J. C., Pham V.-T., Golpayegani S.M.R.H., Jafari A.H. A new cost function for parameter estimation of chaotic

systems using return maps as fingerprints // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24, no. 10.

4. *Елсаков С.М., Ширяев В.И.* О многоэкстремальности в задачах оценивания состояния систем детерминированного хаоса // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2009. № 3. С. 37–41.
5. *Sheludko A.S.* Application of particle swarm optimization for parameter estimation of the logistic map // Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming and Computer Software». 2024. Vol. 17, no. 3. P. 102–111.
6. *Шелудько А.С.* Гарантированное оценивание параметров дискретных моделей хаотических процессов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Вычислительная математика и информатика». 2018. Т. 7, № 1. С. 25–39.
7. *Куржанский А.Б., Фурасов В.Д.* Идентификация нелинейных процессов – гарантированные оценки // Автоматика и телемеханика. 1999. № 6. С. 70–87.
8. *Кумков С.И., Жолен Л.* Сравнение методов интервального анализа и стандартных статистических методов в задаче оценивания экспериментальных данных с неопределенностью // Измерительная техника. 2019. № 2. С. 13–17.
9. *He Q., Wang L., Liu B.* Parameter estimation for chaotic systems by particle swarm optimization // Chaos, Solitons & Fractals. 2007. Vol. 32, no. 2. P. 654–661.
10. *Modares H., Alfi A., Fateh M.-M.* Parameter identification of chaotic dynamic systems through an improved particle swarm optimization // Expert Systems with Applications. 2010. Vol. 37, no. 5. P. 3714–3720.

О моделировании развивающихся систем

В. А. Шишкин

Пермь, ПГНИУ

e-mail: vsh1791@mail.ru

Пусть состояние системы S в момент времени t описывается

вектором $S(t)$ — элементом пространства возможных состояний $\mathbb{S}$. В соответствии с возможными типами величин пространство $\mathbb{S}$ можно представить в виде декартова произведения $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2$, где $\mathbb{S}_1$ описывает возможные количественные значения, а $\mathbb{S}_2$ — качественные. Пусть функция перехода $\phi_S: \mathbb{S} \times \mathbb{X} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}$ описывает переход S из состояния $S(t_1)$ в $S(t_2)$ при наличии внешнего воздействия $x \in \mathbb{X}$ на временном интервале $T = [t_1, t_2] \in \mathbb{T}$:

$$S(t_2) = \phi_S(S(t_1), x, T).$$

Изменения, происходящие с S при переходе $S(t_1) \rightarrow S(t_2)$ можно разделить на количественные (рост и убывание): $S_1(t_1) \rightarrow S_1(t_2)$, $S_1 \in \mathbb{S}_1$, и качественные (развитие и деградация, или отрицательное развитие): $S_2(t_1) \rightarrow S_2(t_2)$, $S_2 \in \mathbb{S}_2$.

В отличие от количественных, качественные величины не могут быть измерены, так как отсутствует необходимый для этого объективный инструмент, независимый от наблюдателя. Например, “рост” как количественная величина с единицей измерения “метр”, может быть измерен, например, линейкой, но выбор значений величины “рост” из множества “низкий”, “средний” и “высокий” существенно зависит от эксперта (и его роста), выполняющего это действие.

Для формализации субъективных понятий, которые основаны на количественных величинах, можно использовать нечёткие подмножества $\langle \mu_X(u), u \rangle$ (μ_X — функция принадлежности) универсального множества U , состоящего из структур (скаляров, векторов, матриц и т.п.) с количественными элементами [1]. Если элементы U — скалярные величины (например, из $\mathbb{R}$), то отношение порядка в классе нечётких подмножеств строится с использованием ожидаемых значений, минимальных или максимальных значений α -уровней и т.п. [2, Часть III]. Если элементы U — более сложные структуры, то для построения отношений порядка можно использовать подходы из теории многокритериальной оптимизации (выбор главного критерия, лексикографическое упорядочение, свёртки и т.п.).

Если часть элементов S_2 выражают неформализуемые понятия, которые не основаны на количественных значениях, (например, “ценность” или “удовлетворённость”), то для их формального представления можно использовать неточные множества вида $\langle \underline{X}, \overline{X} \rangle$ ($\underline{X}$ — нижнее приближение, $\overline{X}$ — верхнее) [2, Часть IV].

При этом отношение порядка в классе неточных множеств описывающих некоторое неформализуемое понятие определяется с учётом принадлежности элемента к нижнему или верхнему приближениям (если $x \in \underline{X}$, $y \in \overline{X}$ и $z \notin \overline{X}$, то $x \succ y \succ x$). Также при определении отношения порядка учитывается упорядоченность множества понятий (“менее ценный” $\prec$ “ценный” $\prec$ “более ценный”).

Пусть функция $f: S \times X \times T \rightarrow Y$, где Y — множество возможных значений на выходе, описывает функционирование системы S .

Если модель системы S представлена в виде чёрного ящика, отображающего вход в выход:

$$y = \hat{f}(x, t | S) + \varepsilon,$$

то *развитие* системы не может быть описано на основе анализа изменений её структуры (так как ящик — чёрный). Изменение *качества* функционирования может задаваться, например, с учётом времени и/или входного воздействия:

$$y = \hat{f}_{i,j}(x, t | S) + \varepsilon, \quad x \in X_i \subseteq X, \quad t \in T_j \subseteq T.$$

Заметим, что при использовании нечёткой классификации ($X_i \cap X_{i'} \neq \emptyset$, $i \neq i'$, и/или $T_j \cap T_{j'} \neq \emptyset$, $j \neq j'$) модель $\hat{f}_{i,j}$ можно определить в виде (иерархической) ассоциативной машины (см. например [3, Ch. 7]).

Если при моделировании учитывается структура системы до определённого уровня детализации (на нижнем уровне каждый элемент моделируется как чёрный ящик), то значение качественной составляющей состояния S_2 определяется на основе анализа структуры системы (графа с узлами—составными частями и рёбрами—связями). Заметим, что изменение связей, даже при постоянном составе, может привести к *качественному* изменению системы (например, аллотропия и полиморфизм). Также изменение числа элементов и связей может привести к необходимости качественного изменения модели функционирования (например, переход от агентного моделирования к агрегированным моделям с интегральными показателями).

Если известна структура системы до определённого уровня детализации, то на основе морфологического анализа можно

определить предельные возможности системы для определённого качественного состояния (стресс-анализ). Это позволяет задать границы, в которых будет находиться прогнозное значение. Знание предельных возможностей также определяет потенциальную осуществимость — разрешимость задачи синтеза системы, обладающей заданными свойствами.

При моделировании развивающихся систем требуется учитывать, что качественные оценки — субъективны. Различные формализации для одной и той же модели одной и той же системы могут дать различные результаты. Поэтому при моделировании, а также при предоставлении полученных результатов следовало бы явно указывать (желательно, формализовано, чтобы не было разночтений) смысл значений качественных величин.

1. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближённых решений. М.: Мир, 1976.
2. *Лю Б.* Теория и практика неопределённого программирования. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
3. *Haykin S.* Neural Networks. A Comprehensive Foundations. 2nd edition. Pearson Prentice Hall, 1999.

Авторский указатель

- Abrashkin P. M., 213
Agayeva N. A., 201
Azamov A. A., 10
Bychkov E. V., 28
Bykova T. S., 14
Kim I. G., 25
Kinzebulatov D., 17
Litvinov V. L., 204
Litvinova K. V., 204
Makarov P. A., 206
Pankratova Y. B., 18
Petrosyan L. A., 18
Pokladova Yu. V., 213
Samatov B. T., 10, 21
Shcheglov V. I., 206
Tashpulatov S. M., 209
Turgunboeva M. A., 10
Umaraliyeva N. T., 21
Velmisov P. A., 213
Zaitsev V. A., 14, 25
Zamyshlyayeva A. A., 28
Акманова С. В., 31
Андрюкова В. Ю., 216
Антоновская О. Г., 220
Асташова И. В., 35
Базулкина А. А., 39
Баринов А. М., 73
Барсегян В. Р., 42, 46, 49
Бесклубная А. В., 220
Благодатских А. И., 53
Бутерин С. А., 56
Вилисов А. А., 58
Гермидер О. В., 222
Гомоюнов М. И., 60
Давлетов Д. Б., 62
Дмитриев М. С., 224
Егоренков В. А., 227
Елсаков А. П., 66
Ершов А. А., 62
Заккур Д., 115
Иванюхин А. В., 70
Изместьев И. В., 73
Иткина Н. Б., 249
Казаков А. Л., 237
Калинин А. В., 229
Карпов А. И., 287
Карпук В. В., 190
Кашапов Н. Ф., 224
Коносевиц Б. И., 231
Коносевиц Ю. Б., 231
Королева М. Р., 235
Костин Г. В., 76
Костоусова Е. К., 80
Крахотко В. В., 83
Кривулин Н. П., 86
Крупенников Е. А., 142
Лаптинский В. Н., 89
Лашин Д. А., 35
Лебедев П. Д., 156
Леднов А. П., 93
Лемперт А. А., 237
Лискина Е. Ю., 241
Майков Д. Н., 243
Макаров С. С., 243
Максимова И. С., 96
Манакова Н. А., 246

Марков С. И., 249
 Мартыненко С. И., 251
 Мартынов С. И., 254
 Масловская А. Г., 290
 Матевосян А. Г., 46
 Мельников Н. Б., 99
 Метельский А. В., 190
 Михайлов А. В., 103
 Можегова Е. С., 105
 Морар Г., 287
 Муминов С. Ю., 258
 Мухсинов Е. М., 109, 112
 Назаров Б. Р., 109
 Нгуен Д. М., 237
 Недожогин Н. С., 260
 Николаева Н. Г., 246
 Новиков А. К., 263
 Павлова Н. Г., 266
 Парилина Е. М., 115
 Пацко В. С., 118
 Петров Н. Н., 121
 Петросян Г. Г., 124
 Пименов В. Г., 269
 Писарева А. М., 115
 Попова С. Н., 127
 Проскурников А. В., 66
 Размыслович Г. П., 83
 Родина Л. И., 129
 Ронжина М. И., 99
 Румянцев А. Н., 132
 Рюмина К. А., 273
 Седаков А. А., 58
 Селезнева А. В., 274
 Сергеева Н. В., 277
 Серков Д. А., 135
 Симкина А. В., 139
 Сметанин Ю. М., 280
 Сметанина В. М., 280
 Смирнова В. Б., 66
 Солодуша С. В., 49
 Субботина Н. Н., 142
 Сумин В. И., 145
 Тананко И. Е., 277
 Тарасов В. Н., 216
 Тарасова О. И., 149
 Тарасьев А. М., 152
 Ткач Л. Ю., 254
 Тонков Л. Е., 235
 Трубников Г. И., 118
 Тюхтина А. А., 229
 Урбан О. И., 194
 Усова А. А., 152
 Успенский А. А., 156
 Ушаков В. Н., 62
 Фахразиева Э. А., 127
 Федотов А. А., 118
 Филиновский А. В., 35
 Фомина Е. С., 121
 Хайлов Е. Н., 183
 Хакимов Р. И., 112
 Хартовский В. Е., 186, 190, 194
 Хлебников М. В., 197
 Цехан О. Б., 159
 Чебакова В. Ю., 224, 285
 Ченцов А. Г., 163, 166
 Ченцов П. А., 166
 Черникова А. В., 170
 Чернов А. В., 173
 Чернова А. А., 235
 Шабанова Д. Д., 277
 Шабуров А. А., 177
 Шаклеин А. А., 287
 Шевкун И. А., 290
 Шелудько А. С., 292
 Шишкин В. А., 295
 Щелчков К. А., 180

Научное издание

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Часть 2

Материалы Всероссийской конференции с международным участием
«Теория управления и математическое моделирование», посвященной
памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова

Ответственные за выпуск А.С. Банников, Т.С. Быкова, С.Н. Попова

Авторская редакция

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

Подписано в печать 26.05.2025. Формат 60х84/16.

Усл. печ. л. 17,43. Уч.-изд. л. 17,55.

Тираж 100 экз. Заказ № 836.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел.: + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра
«Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2
Тел. 68-57-18, 91-73-05