

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В АБСОЛЮТНЫХ УЗЛОВЫХ КООРДИНАТАХ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ СХВАТОВ

© 2025 г. *А.С. Караваяев, С.П. Копысов, Н.С. Недожогин*

Удмуртский Государственный Университет
karavaev-alexander@yandex.ru

DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2025-04-07>

Рассмотрено применение конечно-элементного подхода в терминах абсолютных узловых координат (ANCF) для решения задач теории упругости в контексте мягких роботов, связанных с моделированием механического поведения пневматических схватов (актуаторов) под действием внутреннего давления. В отличие от традиционного ANCF подхода использованы только абсолютные координаты узлов в качестве наборов узловых степеней свободы конечного элемента, что позволяет проводить расчеты на неструктурированных шестигранных сетках и описывать сложную геометрическую форму пневматических схватов. Применяемые в статье гиперупругие модели материалов задаются через функцию плотности энергии деформации. Для построения матрицы жесткости применяется алгоритм автоматического дифференцирования второго порядка, гарантированно обеспечивающий ее симметричный вид и обладающий аналитической точностью вычисления производной. В рамках представленных примеров моделирования отмечена надежность модели Огдена в части обеспечения устойчивости численного решения задачи. Показано, что особенности изменения формы схвата (набухание, изгиб, скручивание, наличие самоконтакта поверхностей) зависят от характеристик его конструкции. Осуществлено сравнение полученных результатов с численными и экспериментальными данными из других исследований.

Ключевые слова: абсолютные узловые координаты, пневматический схват, мягкие роботы, гиперупругая модель материала, автоматическое дифференцирование второго порядка.

FINITE ELEMENT MODELING IN ABSOLUTE NODAL COORDINATE FORMULATION OF MECHANICAL BEHAVIOR OF PNEUMATIC ACTUATORS

A.S. Karavaev, S.P. Kopysov, N.S. Nedozhogin

Udmurt State University

The application of the finite element method in terms of absolute nodal coordinate formulation (ANCF) for solving elasticity problems in the field of soft robots is considered.

These problems are related to modeling the mechanical behavior of pneumatic actuators under internal pressure. In contrast to the traditional ANCF approach, only absolute node coordinates are used as sets of nodal degrees of freedom of the finite element. This allows calculations to be performed on unstructured hexahedral meshes and to describe the complex geometric shape of pneumatic actuators. The hyperelastic material models used in the article are specified through the strain energy density function. To construct the stiffness matrix, a second - order automatic differentiation algorithm is used. This algorithm guarantees matrix symmetrical form and has analytical accuracy in calculating the derivative. Within the presented modeling examples, the reliability of the Ogden model in terms of ensuring the stability of the problem numerical solution is shown. It is demonstrated that the features of the actuator shape change (swelling, bending, twisting, presence of self-contact of surfaces) depend on the characteristics of the actuator design. The obtained results are compared with numerical and experimental data from other studies.

Key words: absolute nodal coordinate formulation, pneumatic actuator, soft robots, hyperelastic material model, second-order automatic differentiation.

1. Введение

Мягкие роботы – один из разделов робототехники, в котором рассматриваются роботы, выполненные из различных мягких высокоэластичных материалов, способных менять свою форму. Отдельное направление исследований связывается с пневматическими схватами (актуаторами), предназначенными для деликатного манипулирования различными объектами без их предварительной идентификации с помощью компьютерного зрения или какого-либо программирования. Мягкий пневматический хват может выполнять различные функции и движения, такие как захват предметов, изгиб, скручивание и др. [1]. Конструкции пневматических схватов [2] в основном состоят из корпуса с монолитной камерой. При подаче внутреннего давления камера пневматического схвата наполняется и хват совершает определенное движение. На механическое поведение схвата оказывает влияние большой набор параметров, таких как высота секций камеры, общая длина схвата, толщина стенок, наличие нерастяжимого вдоль заданного направления слоя и др. Дальнейшее развитие практического применения пневматических схватов возможно при всестороннем исследовании их механического поведения на основе современных численных методов.

Проблемы различных подходов при описании произвольного движения деформируемых тел известны [3]. Во многих случаях используется формулировка уравнений с так называемой коротационной (вращательной) системой координат, в которой для каждого конечного элемента определяется система координат вращения, соответствующая среднему движению твердого тела. В противоположность такому подходу в данной статье выполне-

на новая постановка задачи с применением абсолютных узловых координат (Absolute Nodal Coordinate Formulation – ANCF) [4].

Представленные ниже численные эксперименты выполнялись в программном комплексе собственной разработки, включающем генератор построения шестигранных неструктурированных сеток [5] и конечно-элементный решатель на основе ANCF подхода [6].

2. Постановка задачи теории упругости в терминах абсолютных координат и описание моделей высокоэластичных материалов

В отличие от классического метода перемещений постановка ANCF использует изменение координат узлов относительно отсчетной конфигурации для описания деформации конечных элементов. Достаточно активно развиваются исследования ANCF для определения напряженно-деформированного состояния балок, оболочек, пластин, кабелей и т.д. [7]. Далее будем использовать постановку, в которой в качестве наборов узловых степеней свободы конечного элемента используются только абсолютные координаты узлов, что дает возможность применять ANCF-подход для вычислений на неструктурированных шестигранных сетках [6;8].

Рассмотрим однородное изотропное упругое тело, занимающее в начальном недеформированном состоянии область пространства Ω и ограниченное поверхностью Γ .

Пусть $\mathbf{X} = (x, y, z)^T$ и $\mathbf{x}(\mathbf{X})$ – абсолютные (глобальные) координаты материальной точки в отсчётной и текущей конфигурации области Ω .

Неизвестный вектор координат точки внутри шестигранной ячейки определим как $\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{r}$, где $\mathbf{N}$ – матрица функций форм линейного шестигранного элемента, $\mathbf{r}$ – вектор степеней свободы узлов шестигранника, включающий только сами позиции узлов $\{\mathbf{x}\}$ без производных по каждой координате $\mathbf{r} = \{\mathbf{x}\}$.

Согласно [6] искомое поле текущих абсолютных узловых координат $\mathbf{r}$ должно удовлетворять уравнению:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\Gamma = \mathbf{F}_{\varepsilon} + \mathbf{F}_{ext} = 0, \quad (1)$$

где ω – плотность энергии деформации, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{p}$ – вектора внешних объемных и поверхностных нагрузок, $\mathbf{F}_{\varepsilon}$ и $\mathbf{F}_{exp}$ – вектора упругих и внешних сил.

При этом в некоторых зонах Γ_u границы области Ω могут накладываться кинематические условия закрепления: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ на Γ_u .

В результате конечно-элементной дискретизации выражение (1) преобразуется в систему алгебраических уравнений относительно приращения абсолютных координат $\Delta \mathbf{r}$:

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}^{i-1})\Delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_\varepsilon(\mathbf{r}^{i-1}) + \mathbf{F}_{ext} = 0, \quad (2)$$

где i – текущий шаг квазистатической задачи теории упругости, $\mathbf{r}^{i-1}$ – точка линеаризации, значение которой равно абсолютным координатам узлов с предыдущего шага ($i-1$). Матрица жесткости $\mathbf{K}$ – симметричная, имеет вид матрицы Гессе и получается путем двойного дифференцирования плотности энергии деформации тела:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}} d\Omega. \quad (3)$$

Выбор модели материала мягкого схвата и ее описание оказывают существенное влияние на результаты численного моделирования. В стандартных комплексах программ в основном используются модели гиперупругих материалов [9], свойства которых задаются через плотность энергии деформации ω , в большинстве случаев выражающейся через тензоры деформации Грина-Лагранжа ε или Коши-Грина $\mathbf{C}$. Указанные величины в свою очередь зависят от градиента деформации $\mathbf{F}$:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T - \mathbf{I}), \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T, \quad \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (4)$$

В частности, для линейно-упругой модели материала плотность энергии деформации записывается в виде:

$$\omega = \frac{1}{2} \varepsilon^T \mathbf{D} \varepsilon, \quad (5)$$

где $\mathbf{D}$ – матрица упругих постоянных.

Плотность энергии деформации несжимаемых гиперупругих моделей разделяется на объемную и девиаторную части, которые задают ответ материала на сдвиговые и объемные нагрузки. Одной из наиболее простых является неогукова гиперупругая модель материала [9]:

$$\omega = c_{10}(\text{tr}(\bar{\mathbf{C}}) - 3) + G(J - 1)^2, \quad (6)$$

где c_{10} – постоянная материала, задающая его упругий сдвиговые свойства, $\bar{\mathbf{C}}$ – девиаторная составляющая тензора Коши-Грина, J – определитель градиента деформации, G – безразмерный параметр штрафа, отвечающий за степень несжимаемости материала.

При моделировании работы мягких схватов также используется модель Йо [10]:

$$\omega = c_{10}(\text{tr}(\bar{\mathbf{C}}) - 3) + c_{20}(\text{tr}(\bar{\mathbf{C}}) - 3)^2 + G(J - 1)^2, \quad (7)$$

где c_{10} , c_{20} – постоянные материала.

Для расчетов задач, включающих случаи больших деформаций ($>400\%$), распространено применение гиперупругой модели Огдена [11], плотность энергии деформации которой зависит от компонент главных удлинений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\omega = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) + G(J-1)^2, \quad (8)$$

где μ_i, α_i – постоянные материала.

Нерастяжимый вдоль направления a слой ортотропного материала может задаваться согласно [12]:

$$\omega_a = \omega + G(\mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{a} - 1)^2, \quad (9)$$

где ω_a – преобразованная плотность энергии деформации после введения ортотропных свойств, ω – плотность энергии деформации, G – безразмерный параметр штрафа, определяющий степень нерастяжимости материала.

Поскольку аналитическое нахождение частных производных плотности энергии деформации в выражении (3) является затруднительным, необходимо использовать различные численные методы. Наиболее предпочтительным среди них является автоматическое дифференцирование (АД), обладающее точностью, сравнимой с аналитическим расчетом вплоть до погрешностей машинных вычислений.

3. Применение технологии автоматического дифференцирования в рамках ANCF подхода

Методы АД известны уже несколько десятилетий, но их использование в МКЭ стало развиваться относительно недавно [13]. Пусть $U = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ есть множество функций, имеющих частные производные второго порядка в некоторой точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим множество четырехмерных векторов M вида $\tilde{\mathbf{m}} = (u(x_0, y_0) u_x(x_0, y_0) u_y(x_0, y_0) u_{xy}(x_0, y_0))^T \in \mathbb{R}^4$, где $u(x_0, y_0)$ – значение функции $u \in U$ в точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $u_x(x_0, y_0), u_y(x_0, y_0), u_{xy}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ – значения ее частных производных в этой же точке.

Согласно [6] введение на множестве M соответствующего перечня арифметических операций (сложение, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и др.) позволяет одновременно вычислять в точке (x_0, y_0) значения и частные производные до второго порядка функции $u = u(x, y) \in U$, состоящей из произвольной комбинации её переменных и констант.

Рассмотрим применение АД для построения глобальной матрицы же-

сткости $\mathbf{K}$ модели Огдена вида (8). Матрица $\mathbf{K}$ определяется через суммирование локальных матриц жесткости конечных элементов $\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{k}^e$. Локальная матрица жесткости шестигранного элемента вычисляется с помощью квадратурных формул Гаусса:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}} d\Omega = \sum_{\xi} \sum_{\eta} \sum_{\varsigma} \frac{\partial^2 \omega(\xi, \eta, \varsigma)}{\partial^2 r(\xi, \eta, \varsigma)} W_{\xi} W_{\eta} W_{\varsigma} \det J(\xi, \eta, \varsigma), \quad (10)$$

где ξ, η, ς – координаты текущей локальной точки интегрирования, $J(\xi, \eta, \varsigma)$ – матрица Якоби шестигранной ячейки, $W_{\xi}, W_{\eta}, W_{\varsigma}$ – весовые коэффициенты.

Когда тело находится в недеформированном состоянии ($\varepsilon = 0$) компоненты его главных удлинений равны нулю, что приводит к неопределенностям при вычислении выражения (10) методом АД. Например, на шаге 11.2.2 представленного ниже алгоритма АД возникает операция деления на ноль. В связи с этим, в рассматриваемом алгоритме на первом шаге решения задачи вместо модели Огдена используется неогукова модель с параметрами, описывающими свойства рассчитываемого материала.

На каждом шаге решения квазистатической задачи теории упругости алгоритм АД нахождения компоненты матрицы $\mathbf{k}^e \in \mathbb{R}^{24 \times 24}$ (24 – число степеней свободы шестигранного элемента) в локальной точке интегрирования (ξ, η, ς) включает следующие шаги:

1. Цикл по $j = 1 \dots 24$.

2. Цикл по $i = 1 \dots 24$.

3. Вычисление матрицы производных функций форм $\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y, \mathbf{B}_z \in \mathbb{R}^{3 \times 24}$ в глобальных координатах:

$$\mathbf{B}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} & 0 & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial \alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial \alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} & 0 & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial \alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha = x, y, z,$$

$$\begin{pmatrix} \partial N_s / \partial x \\ \partial N_s / \partial y \\ \partial N_s / \partial z \end{pmatrix} = J^{-1}(\xi, \eta, \varsigma) \begin{pmatrix} \partial N_s / \partial \xi \\ \partial N_s / \partial \eta \\ \partial N_s / \partial \varsigma \end{pmatrix}, \quad s = 1 \dots 8.$$

4. Инициализация матриц $\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y, \mathbf{B}_z$ в рамках множества M , т.е. присвоение матрицам значения:

$$\tilde{\mathbf{B}}_\alpha \in M^{3 \times 24}, \quad \tilde{b}_{mn} = (b_{mn} \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T,$$

где $\alpha = x, y, z$ и $\tilde{b}_{mn}, b_{mn}$ – элементы $\tilde{\mathbf{B}}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha$ соответственно.

5. Инициализация вектора $\tilde{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^{24 \times 1}$ абсолютных узловых координат ячейки в рамках множества M :

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = \begin{pmatrix} r_i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_j = \begin{pmatrix} r_j \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_m = \begin{pmatrix} r_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m \neq i, j.$$

6. Вычисление вектора производных абсолютных узловых координат по каждому направлению:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial x} = \tilde{\mathbf{B}}_x \tilde{\mathbf{r}}, \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial y} = \tilde{\mathbf{B}}_y \tilde{\mathbf{r}}, \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial z} = \tilde{\mathbf{B}}_z \tilde{\mathbf{r}}, \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial y}, \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial z} \in M^{3 \times 1}.$$

7. Вычисление градиента деформации $\tilde{\mathbf{F}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} = \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial z} \right)^T \in M^{3 \times 3}$.

8. Вычисление определителя градиента деформации $\tilde{J} = \det \tilde{\mathbf{F}} \in M$.

9. Вычисление девиаторной части градиента деформации

$$\tilde{\mathbf{F}}_d = \tilde{\mathbf{F}} / \tilde{J}^{1/3} \in M^{3 \times 3}.$$

10. Вычисление девиаторной части тензора деформации Коши-Грина

$$\tilde{\mathbf{C}}_d = \tilde{\mathbf{F}}_d \tilde{\mathbf{F}}_d^T \in M^{3 \times 3}.$$

11. Вычисление функции плотности энергии деформации $\tilde{\omega} \in M$.

11.1. В случае недеформированного состояния ($\varepsilon = 0$):

$$\tilde{\omega} = c_{10}(\text{tr}(\tilde{\mathbf{C}}_d) - 3) + G(\tilde{J} - 1)^2.$$

11.2. В случае деформированного состояния ($\varepsilon \neq 0$):

11.2.1. Вычисление величин $\tilde{p}, \tilde{q} \in M$:

$$\tilde{q} = \frac{\text{tr}(\tilde{\mathbf{C}}_d)}{3}, \quad \tilde{p} = \left(\frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^3 (\tilde{c}_{ii} - \tilde{q})^2 + 2(\tilde{c}_{12}^2 + \tilde{c}_{13}^2 + \tilde{c}_{23}^2) \right) \right)^{1/2},$$

где $\tilde{c}_{ii}$ – элементы $\tilde{\mathbf{C}}_d$.

11.2.2. Вычисление величины $\tilde{\gamma} \in M$:

$$\tilde{\gamma} = \left(\gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial r_i}, \frac{\partial \gamma}{\partial r_j}, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r_i \partial r_j} \right)^T = \frac{1}{2} \det \left(\frac{1}{\tilde{p}} (\tilde{\mathbf{C}}_d - \tilde{q} \mathbf{I}) \right)$$

с коррекцией значения первого элемента: $\gamma = \text{sign}(\gamma)$ при $|\gamma| > 1$.

11.2.3. Вычисление значения $\tilde{\varphi} = \frac{1}{3} \arccos(\tilde{\gamma}) \in M$.

11.2.4. Вычисление собственных значений $\tilde{e}_i \in M$ тензора $\tilde{\mathbf{C}}_d$:

$$\tilde{e}_1 = \tilde{q} + 2\tilde{p} \cos(\tilde{\varphi}), \quad \tilde{e}_3 = \tilde{q} + 2\tilde{p} \cos(\tilde{\varphi} + \frac{2}{3}\pi), \quad \tilde{e}_2 = 3\tilde{q} - \tilde{e}_1 - \tilde{e}_3.$$

11.2.5. Получение компонент главных удлинений $\tilde{\lambda}_i \in M$:

$$\tilde{\lambda}_i = (\tilde{e}_i)^{1/2} \in M, \quad i = 1, 2, 3.$$

11.2.6. Расчет плотности энергии деформации:

$$\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\tilde{\lambda}_1^{\alpha_i} + \tilde{\lambda}_2^{\alpha_i} + \tilde{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3) + G(\tilde{J} - 1)^2.$$

12. Нахождение значения элемента $k_{ij}^e \in \mathbb{R}$ матрицы $\mathbf{k}^e$ в точке (ξ, η, ς) :

$$k_{ij}^e = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r_i \partial r_j} W_\xi W_\eta W_\varsigma \det J(\xi, \eta, \varsigma),$$

где $\frac{\partial^2 \omega}{\partial r_i \partial r_j}$ – последний элемент $\tilde{\omega} = \left(\omega, \frac{\partial \omega}{\partial r_i}, \frac{\partial \omega}{\partial r_j}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial r_i \partial r_j} \right)^T$.

13. Конец цикла по i .

14. Конец цикла по j .

Предложенный подход двойного автоматического дифференцирования функции ω гарантированно формирует симметричную матрицу жесткости. При этом отсутствует необходимость аналитического вычисления второго тензора напряжений Пиолы-Киргофа, что является обязательной процедурой в некоторых других конечно-элементных алгоритмах, решающих сходный класс задач.

4. Численное моделирование механического поведения пневматических схватов

Для построения неструктурированных шестигранных сеток представленных в статье расчетных моделей использовались возможности ранее разработанного сеточного генератора [5]. Генератор относится к семейству методов на основе регулярной сетки и является универсальным с точки зре-

ния возможности использования в качестве исходных данных как объемного (воксельного), так и STL-поверхностного представления геометрии модели. Примеры построенных шестигранных сеток изображены на рис.1б, 2б, 3б. Для всех сгенерированных сеток выполнялись следующие условия по характеристикам качества ячеек [5]: минимальный нормированный якобиан больше 0.5, максимальная скошенность меньше 0.66, максимальное аспектное соотношение меньше 4.

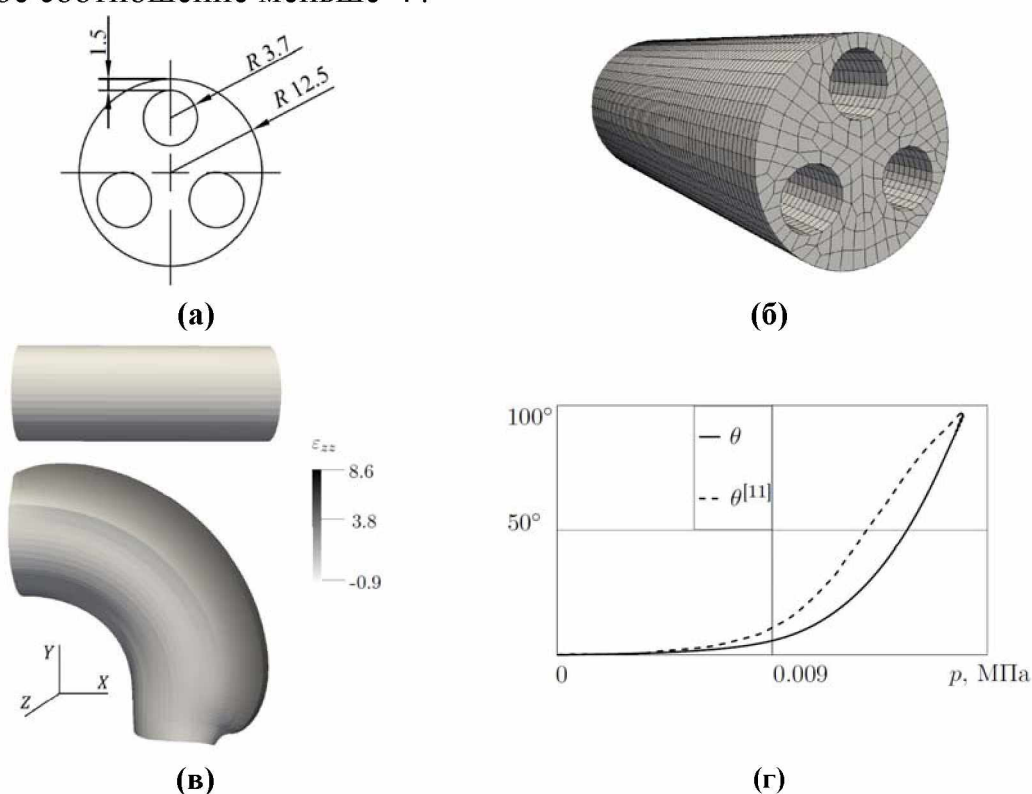


Рис.1. Задача деформирования пневматического схвата с тремя цилиндрическими камерами: схема строения (размерность мм) (а); неструктурированная шестигранная сетка модели (б); первоначальная и конечная (деформированная) формы схвата с распределением компоненты деформации (в); значение угла наклона свободного конца схвата в зависимости от давления (г).

Функции плотности энергии деформации используемых при расчетах моделей материалов описаны ранее в разделе 2.

Рассмотрим моделирование механического поведения пневматического схвата [11], схема строения которого приведена на рис.1а. Цилиндрическая форма содержит три продольных цилиндрических камеры, закрытых с одного торца сплошной стенкой. Общая длина схвата – 65 мм, длина цилиндрических отверстий – 60 мм. Параметры модели Огдена, описывающей упругие свойства материала: $\mu_1 = 0.024361$ МПа, $\mu_2 = 6.6703 \times 10^{-5}$ МПа, $\mu_3 = 4.5381 \times 10^{-4}$ МПа, $\alpha_1 = 1.7138$, $\alpha_2 = 7.0679$, $\alpha_3 = -3.3659$. Для обеспе-

чения устойчивости работы алгоритма значение μ_3 было задано с отрицательным знаком [11]. При первоначальном расчете движения схвата вместо модели Огдена использовалась соответствующая неогукова с параметром $c_{10} = 0.01218$ МПа [11]. Под действием давления, подаваемого в одну из камер вплоть до значения 0.017 МПа, осуществляется поворот свободного конца схвата, при этом имеющая незначительную толщину внешняя стенка камеры значительно деформируется (рис.1в). На рис.1г приведены графики значений угла наклона свободного конца схвата относительно оси абсцисс, полученные алгоритмом (θ) и по данным численного моделирования ($\theta^{[11]}$) из работы [11]. Итоговые величины угла наклона практически совпадают, при этом согласно расчетам из [11] схват демонстрирует больший угол наклона в процессе промежуточных расчетов. Отметим, что использование вместо модели Огдена; соответствующих моделей неогука и Муни-Ривлина [11]; позволило провести расчеты только до значений давления в 0.006 МПа. На последующих шагах моделирования указанные материалы демонстрировали нефизичное поведение и компьютерная программа совершала аварийную остановку.

Схема строения (в разрезе) схвата, камера которого содержит три поперечные «гофрообразные» секции, изображена на рис.2а. В рамках конечно-элементных вычислений рассматривалась половина модели схвата толщиной 12 мм [14]. Согласно экспериментальным данным из [14] при незначительных деформациях напечатанный с помощью 3D принтера материал схвата демонстрирует линейно-упругое поведение ($E = 15$ МПа, $\nu = 0.49$). В процессе наращивания давления в камере вплоть до значения 0.15 МПа схват совершает изгибающее движение (рис 2в). Графики значения угла наклона свободного конца схвата относительно оси абсцисс, полученные алгоритмом (θ) и по данным эксперимента (θ^{exp}) из [14], изображены на рисунке 2г. Отмечается хорошее совпадение итоговых значений угла наклона близких к 66° , при этом для численного моделирования в [14] получено несколько большее значение равное 69° .

Более сильная амплитуда изгиба схватом может быть достигнута за счет увеличения его общей длины и числа поперечных секций, а также добавления в основание слоя нерастяжимого ортотропного материала. Рассмотрим схему строения схвата, изображенную на рис.3а. Камера схвата состоит из 14 прямоугольных секций полых внутри и соединенных снизу общим основанием, при этом в целях повышения свойств гибкости в основание схвата добавлен слой (5 мм) ортотропного материала, нерастяжимого вдоль оси абсцисс [15].

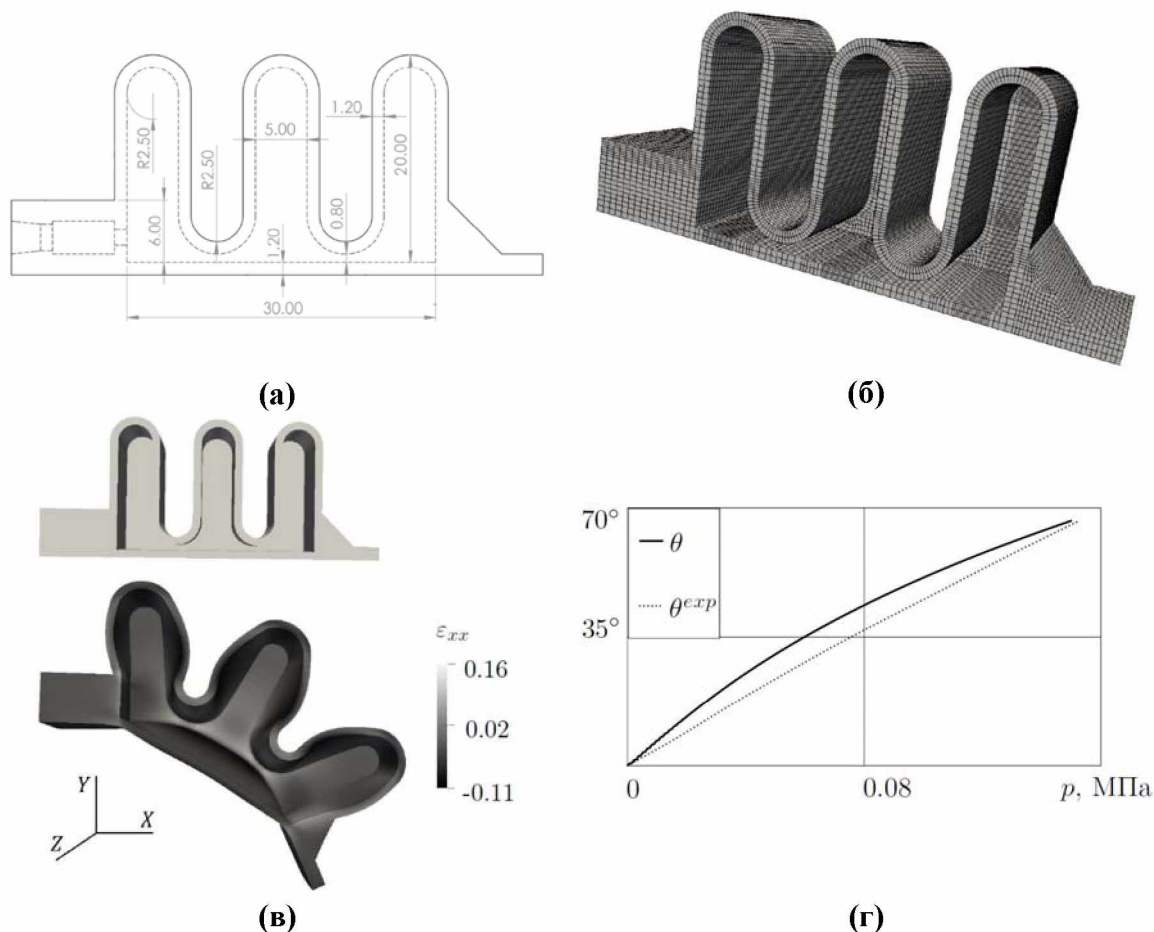


Рис.2. Задача деформирования пневматического схвата с тремя поперечными секциями: схема строения (размерность мм) (а); неструктурированная шестигранная сетка модели (б); первоначальная и конечная (деформированная) формы схвата с распределением компоненты деформации (в); значение угла наклона свободного конца схвата в зависимости от давления (г).

На начальном этапе деформации схвата численные результаты наиболее близкие к экспериментальным показывает линейно-упругий материал ($E = 12$ МПа, $\nu = 0.48$) [15]. При наращивании давления внутри камеры схват приобретает изогнутую форму (рис.3в). Решение задачи проведено вплоть до значения давления равного 0.1 МПа, при котором еще не наблюдается эффекта контакта поперечных перегородок. На рис.3г приведены значения перемещения свободного конца схвата (по осям абсцисс и ординат) для разработанного метода (u_x и u_y), а также численных ($u_x^{[15]}$, $u_y^{[15]}$) и экспериментальных (u_x^{exp} , u_y^{exp}) данных из [15].

Контакт стенок секций камеры можно избежать, увеличив высоту перегородки между секциями. Конструкция изображенного на рис.4а схвата, обладающего нулевым углом наклона секций камеры относительно его основания, создана по аналогии с примером из работы [10]. С учетом того, что

в [10] не приводятся исчерпывающих данных по схеме строения схвата, в данном исследовании были воспроизведены только некоторые его размерные характеристики, такие как длина (140 мм), ширина (15 мм), высота (14.5 мм), толщина основания (3.5 мм) и др.

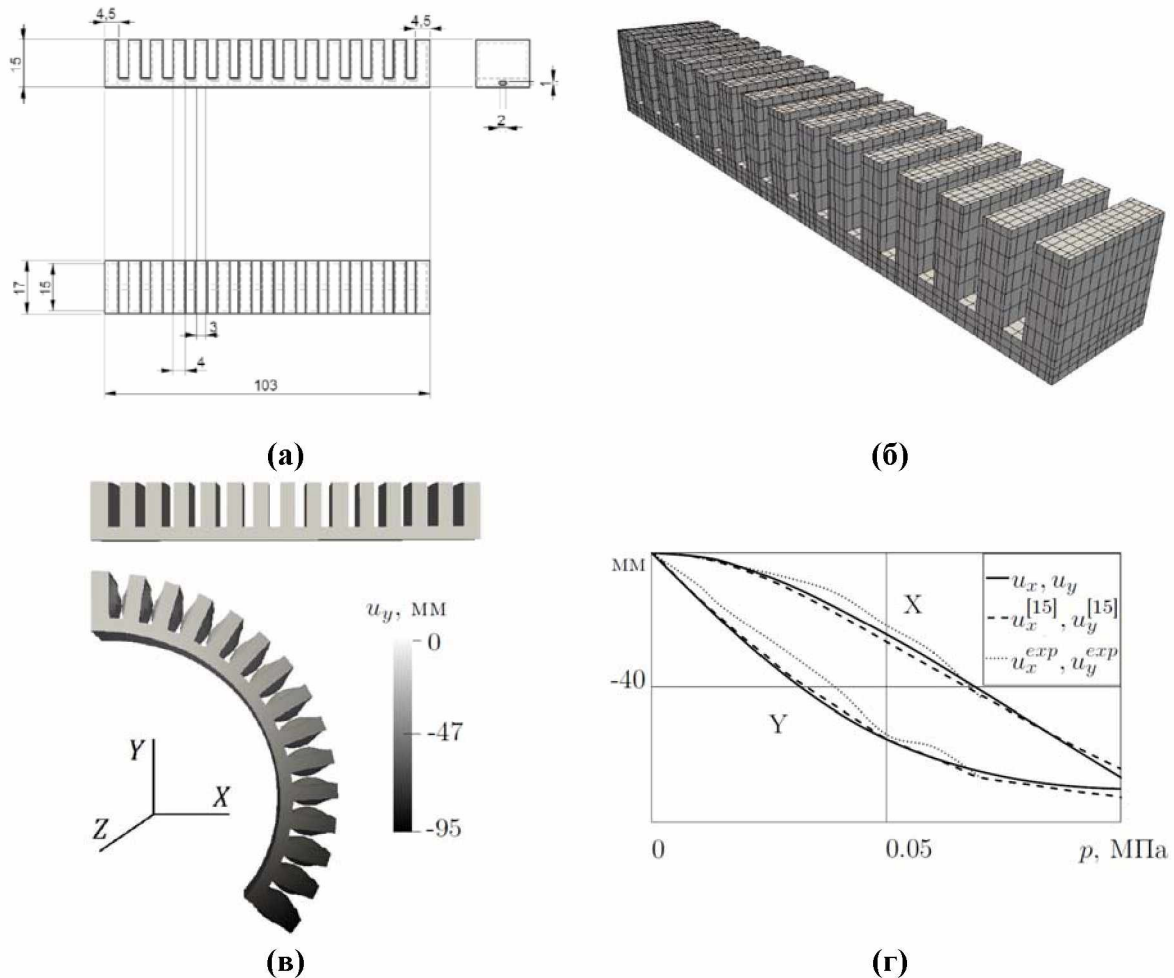


Рис.3. Задача деформирования пневматического схвата с нерастяжимым слоем: схема строения (размерность мм) (а); неструктурированная шестигранная сетка модели (б); первоначальная и конечная (деформированная) формы схвата с распределением компоненты перемещения (в); значение компонент перемещения свободного конца схвата в зависимости от давления (г).

Упругое поведение материала описывалось двухкомпонентной моделью Йо с параметрами $c_{10} = 0.125$ МПа и $c_{20} = 0.0075$ МПа. В задаче предполагалось действие силы тяжести по направлению оси ординат (рис.4а), значение плотности было принято равным 1080 гр/мм куб. На рис.4а изображена деформированная форма схвата по достижению давления в 0.09 МПа внутри его камеры. Рис.4б демонстрирует величины угла наклона свободного конца схвата относительно оси ординат в зависимости от подаваемого давления, полученные алгоритмом (θ) и по данным численного моделирова-

ния ($\theta^{[10]}$) из работы [10]. Данные рис.4б свидетельствуют о том, что разработанный схват, претерпевает аналогичный изгиб, что и в [10].

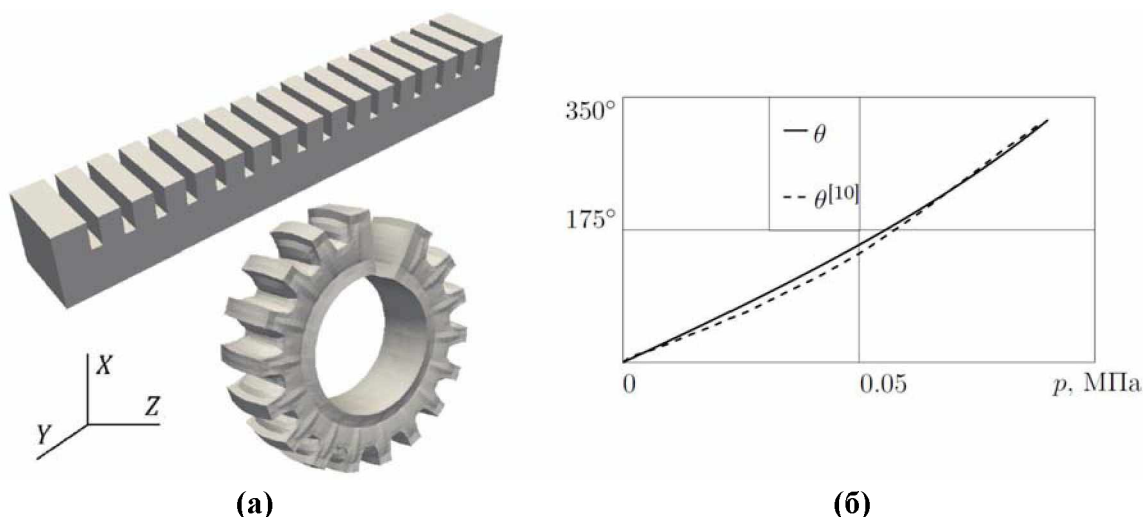


Рис.4. Задача деформирования пневматического схвата с нулевым углом наклона секций относительно основания: первоначальная и конечная (деформированная) формы схвата (а); значение угла наклона свободного конца схвата в зависимости от давления (б).

Далее рассмотрим схват, обладающий 30° углом наклона секций камеры относительно его основания. Для такого схвата в процессе деформирования, наряду с изгибом наблюдается эффект скручивания (рис.5а).

Проекции конечной формы ребра OA схвата (рис.5б) на плоскости OXY и OYZ изображены на рис.5в, г. Сравнение полученных алгоритмом значений координаты y с численными ($y^{[10]}$) и экспериментальными данными (y^{exp}) из [10] говорит о том, что разработанный схват демонстрирует в целом схожий результат изменения формы, что и схват с аналогичным расположением поперечных секций из [10].

В целях сокращения времени расчета представленных квазистатических задач теории упругости, содержащих от 400 до 5000 вычислительных шагов, при решении системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) равновесия наряду с имеющейся внутри программного комплекса процедурой также применялся решатель, реализованный в виде внешней библиотеки, возможности которого описаны в [16]. В отличие от встроенного метода сопряженных градиентов, организующего параллельные вычисления на ядрах центрального процессора, в [16] для реализации данного и других методов используется технология CUDA, обеспечивающая доступ к вычислительным ресурсам графических процессоров видеокарт Nvidia. В табл.1 для каждой из задач представлена размерность N матрицы СЛАУ, число ее ненулевых

элементов nnz , а также средние значения времени в секундах и числа итераций решения СЛАУ встроенной процедурой t_{cpu} , I_{cpu} и внешней библиотекой t_{gpu} , I_{gpu} . Согласно показателю $S = t_{cpu} / t_{gpu}$ использование решателя на GPU позволило сократить время решения СЛАУ от 1.7 до 4.4 раза.

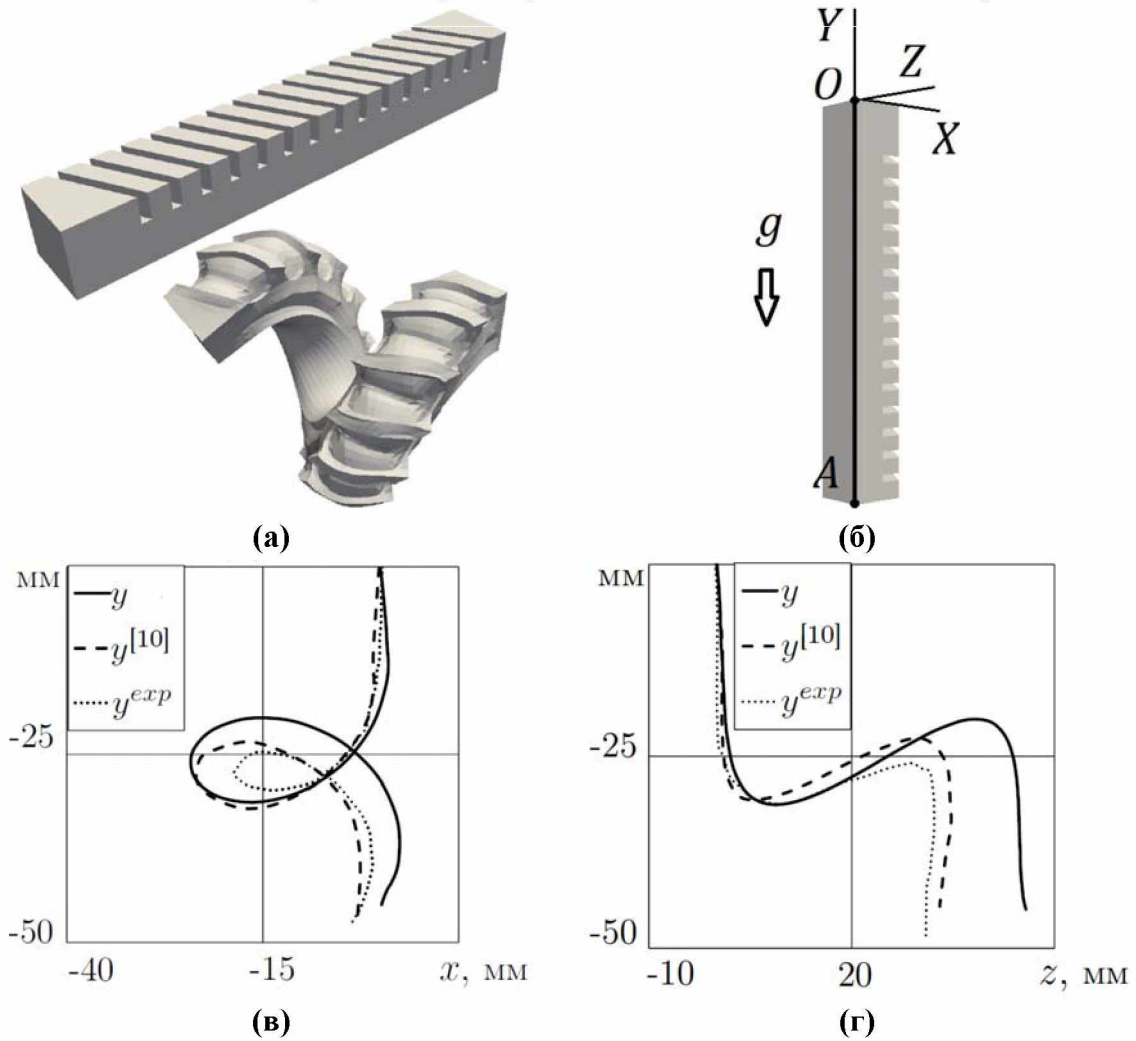


Рис.5. Задача деформирования пневматического схвата с 30° углом наклона секций относительно основания: первоначальная и конечная (деформированная) формы схвата (а); начальное положение схвата относительно осей координат и вектора силы тяжести (б); проекции конечной формы ребра OA схвата на плоскости OXY (в) и OYZ (г).

Таблица 1. Временные затраты на решение СЛАУ

Задача деформирования схвата с	N	nnz	t_{cpu}	t_{gpu}	S	I_{cpu}	I_{gpu}
3 цилиндрическими камерами [11]	39618	2673468	1.24	0.7	1.8	2020	2013
3 поперечными секциями [14]	159597	10443555	34.7	7.9	4.4	10614	11569
нерастяжимым слоем [15]	73887	4542129	2.1	1.2	1.8	3693	4065
нулевым углом наклона секций [10]	38937	2386521	4.7	2.7	1.7	7704	9874
30° углом наклона секций [10]	38397	2372373	8.8	4.2	2.1	14058	15604

Вычисления осуществлены на ЭВМ со следующими характеристиками аппаратно-программного обеспечения: процессоры – два восьмиядерных Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2620 v4 с частотой 2.10 ГГц; оперативная память – 64 ГБ, восемь 8 ГБ DIMM DDR4 с частотой 2667 МГц; видеокарта – Nvidia GeForce RTX 2070, GDDR6 – 8Гб; технология CUDA – версия 11.4.100.

5. Заключение

Продемонстрирована возможность применения построенного на основе МКЭ - формулировки в терминах ANCF метода для решения задач теории упругости, связанных с моделированием механического поведения пневматических схватов. Рассмотренные примеры показывают в целом удовлетворительную согласованность результатов, полученных разработанным методом, экспериментально и на основе других численных подходов. Показана надежность модели Огдена в части обеспечения устойчивости решения задачи, включающей эффекты больших деформаций. Продемонстрированы особенности изменения формы схватов в зависимости от конструкции камеры. Тонкая стенка секций в камере ведет к их значительной деформации (набуханию) и возникновению, в некоторых случаях, контактов между ними. При этом самоконтакта секций можно избежать, увеличив высоту перегородки между секциями. Прямое расположение секций камеры относительно основания схвата обеспечивает его изгиб, при косом расположении секций наряду с изгибом также наблюдается эффект скручивания.

Предполагается дальнейшее развитие представленного метода в части решения задач контактного взаимодействия, в том числе связанных с моделированием процессов фиксации (захвата) пневматическими схватами других упругих объектов с последующим сравнением полученных численных результатов с данными самостоятельно проведенных практических экспериментов. Также планируется организовать параллельную реализацию на графических процессорах видеокарт не только решателя СЛАУ, но и других частей алгоритма, таких как вычисление матрицы жесткости, контактных условий и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *H. Su, X. Hou, X. Zhang, W. Qi, S. Cai, X. Xiong, J. Guo.* Pneumatic Soft Robots: Challenges and Benefit // *Actuators*, 2022, v.11, 14 p.
2. *M.S. Xavier M. S. et al.* Soft Pneumatic Actuators: A Review of Design, Fabrication, Modeling, Sensing, Control and Applications // *IEEE Access*, 2022, v.10, p.59442-59485.
3. *C. Armanini, F. Boyer, A.T. Mathew, C. Duriez, F. Renda.* Soft Robots Modeling: A Structured Overview // *IEEE Transactions on Robotics*, 2023, v.9, p.1728-1748.
4. *A.A Shabana.* ANCF reference node for multibody system analysis // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: J. Multi-body Dynamics*, 2014, v.229, № 1, p.109-112.

5. А.С. Караваев, С.П. Копысов. Построение адаптивных шестигранных сеток из поверхностной и воксельной геометрических моделей // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2023, т.33, № 3, с.534-547.
A.S. Karavaev, S.P. Kopysov. Postroenie adaptivnykh shestigrannykh setok iz poverkhnostnoi i vokselnoi geometricheskikh modelei // Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompiuternye nauki, 2023, v.33, № 3, p.534-547.
6. А.С. Караваев, С.П. Копысов. Конечно-элементное моделирование нелинейных задач упругости в абсолютных узловых координатах на неструктурированных шестигранных сетках // Вычислительная механика сплошных сред, 2024, т.17, № 2, с.232–237.
A.S. Karavaev, S.P. Kopysov. Konechno-elementnoe modelirovanie nelineinykh zadach uprugosti v absoliutnykh uzlovykh koordinatakh ne nestrukturirovannykh shestigrannykh setkakh // Vychislitelnaia mekhanika sploshnykh sred, 2024, v.17, № 2, p.232-237
7. K. Otsuka, K. Makihara, H. Sugiyama. Recent Advances in the Absolute Nodal Coordinate Formulation: Literature Review From 2012 to 2020 // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2022, v. 17, № 8, p.080803(3)–080803(18).
8. H. Kim, H. Lee, K. Lee, H. Cho, M. Cho. Efficient flexible multibody dynamic analysis via improved C0 absolute nodal coordinate formulation-based element // Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2022, Vol. 29, № 25, P. 4125–4137.
9. H.B. Khaniki, M.H. Ghayesh, R. Chin et al. A review on the nonlinear dynamics of hyperelastic structures // Nonlinear Dyn, 2022, v.110, p.963–994.
10. T. Wang, L. Ge, G. Gu. Programmable design of soft pneu-net actuators with oblique chambers can generate coupled bending and twisting motions // Sensors and Actuators A, 2018, v.271, p.131–138.
11. L. Ding, L. Niu, Y. Su. Dynamic Finite Element Modeling and Simulation of Soft Robots // Chin. J. Mech. Eng, 2022, v.35, 14 p.
12. P. Wriggers, J. Schrode, F. Auricchio. Finite element formulations for large strain anisotropic material with inextensible fibers // Advanced Model. and Simulation in Engineering Sciences, 2016, v.3, 18 p.
13. A. Vigliotti, F. Auricchio. Automatic Differentiation for Solid Mechanics // Arch Computat Methods Eng, 2021, v.28, p.875–895.
14. G. Kahraman, Z. Zhizhou, Y. Jehan, X. Gu. Grace. Computational and Experimental Design Exploration of 3D-Printed Soft Pneumatic Actuators // Advanced Intelligent Systems, 2020, v. 2, issue 7, 7 p.
15. C. Zheng. Design and simulation of a pneumatic actuator bending soft robotics based on 3D printing Engineering / Theses, Dissertations and Capstones [e-resource], 2018, 94 p. URL: <https://mds.marshall.edu/etd/1243>
16. Н.С. Недождогин, С.П. Копысов, А.К. Новиков. Параллельное решение систем линейных алгебраических уравнений на гибридной архитектуре CPU+GPU // Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика», 2020, т. 9, № 2, с.40–54.
N.S. Nedozhogin, S.P. Kopysov, A.K. Novikov. Parallelnoe reshenie sistem lineinykh algebraicheskikh uravnenii na gibridnoi arkhitekture CPU+GPU // Vestnik IUUrGU. Seriya "Vychislitelnaia matematika i informatika", 2020, v.9, № 2, p.40-54.

Поступила в редакцию 26.11.2024

После доработки 04.02.2025

Принята к публикации 17.03.2025