

А. С. Банников,
Н. Н. Петров

ВВЕДЕНИЕ
В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ
С ПРОИЗВОДНЫМИ
ДРОБНОГО ПОРЯДКА



Ижевск
2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра дифференциальных уравнений

А. С. Банников, Н. Н. Петров

**ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
ИГРЫ С ПРОИЗВОДНЫМИ
ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

Учебное пособие



Ижевск
2025

УДК 519.8(075.8)

ББК 22.185.1я73

Б 232

Работа выполнена в рамках мероприятий, проводимых в Уральском математическом центре.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензенты: д. ф.-м. н., заведующий лабораторией «Математическая теория управления» УдГУ **В. А. Зайцев**, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник ФГБУН УдмФИЦ УрО РАН **А. И. Карпов**.

Банников А. С., Петров Н. Н.

Б 232 Введение в дифференциальные игры с производными дробного порядка : учеб. пособие. — Ижевск : Удмуртский университет, 2025. — 73 с.

ISBN 978-5-4312-1295-6

Пособие посвящено основным понятиям теории дифференциальных игр с производными дробного порядка и предназначено для студентов программы «Математическая кибернетика» направления «Математика и компьютерные науки».

УДК 519.8(075.8)

ББК 22.185.1я73

ISBN 978-5-4312-1295-6

© Банников А. С., Петров Н. Н., 2025

© ФГБОУ ВО «Удмуртский

государственный университет», 2025

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

В работе используются следующие обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n ;

(x, y) — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$;

$(D^\alpha)f$ — производная по Капуто порядка α функции f ;

$E_\rho(z, \mu)$ — функция Миттаг–Лефлера;

E — единичная матрица;

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ — норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$;

$D_r(z) = \{x: \|x - z\| \leq r\}$ — замкнутый шар радиуса r с центром

в точке z ;

$D_r^0(z) = \{x: \|x - z\| < r\}$ — открытый шар радиуса r с центром

в точке z ;

$S_r(z) = \{x: \|x - z\| = r\}$ — сфера радиуса r с центром в точке z ;

$\text{Int } A$ — внутренность множества A ;

$\text{co } A$ — выпуклая оболочка множества A ;

$\text{ri } A$ — относительная внутренность множества A ;

H^- , H^+ — замкнутые полупространства, определяемые гиперплоскостью H ;

$|M|$ — число элементов конечного множества M ;

$c(A, \varphi)$ — опорная функция множества A ;

Γ — гамма-функция;

$B(x, y)$ — бета функция.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие посвящено задачам преследования-уклонения с участием одного или нескольких преследователей и одного или нескольких убегающих. Данный класс задач относится к задачам принятия решения в условиях конфликтного взаимодействия.

Теория конфликтно управляемых процессов представляет собой интенсивно развивающийся раздел современной математики. В данной теории исследуются задачи управления динамическими процессами в условиях конфликта, который предполагает наличие двух или более сторон, способных воздействовать на процесс с противоположными или несовпадающими целями. Такие динамические процессы, моделируемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, называют также дифференциальными играми [1], термин был введен Р. Айзексом — одним из основоположников теории дифференциальных игр. Развитие теории дифференциальных игр стимулировалось наличием реальных прикладных задач конфликтного управления механическими системами, в том числе военного применения, экономики, экологии, биологии и некоторых других областей. Становление теории дифференциальных игр относится к началу 60-х годов XX века и связано с именами советских и зарубежных математиков Н. Н. Красовского, Л. С. Понтрягина, Л. А. Петросяна, Б. Н. Пшеничного, Р. Айзекса, У. Флеминга.

Одним из направлений развития современной теории дифференциальных игр является исследование задач преследования-уклонения с участием группы участников, причем кроме углубления классических методов исследования, активно ведется поиск игровых задач, к которым применимы ранее разработанные методы.

Хотя понятие дробной производной известно с XVIII века, в последнее время дробное исчисление стало активной областью исследований. Дифференциальные уравнения с производной дробного порядка описывают ряд явлений и процессов, таких как вязкоупру-

гость, диффузия в пористых средах.

Учебное пособие как раз и направлено на знакомство студентов с методами решения новых классов игровых задач — игр, описываемых уравнениями с дробными производными. В пособии рассматриваются задачи простого преследования и задачи преследования с простой матрицей, описываемые уравнениями с производными дробного порядка. При этом рассматриваются как геометрические, так и интегральные ограничения на управления игроков. Умение решать данный класс игровых задач позволяет успешно перейти к нахождению решений в более сложных конфликтных ситуациях.

§ 1. Гамма-функция

Определение 1.1. Функция $\Gamma: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ вида

$$\Gamma(\mu) = \int_0^{+\infty} s^{\mu-1} e^{-s} ds$$

называется гамма-функцией.

Отметим некоторые свойства гамма-функции.

1. $\Gamma(1) = 1$. Действительно,

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-s} ds = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-s}) \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{-A}) = 1.\end{aligned}$$

2. $\Gamma(\mu + 1) = \mu \Gamma(\mu)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\Gamma(\mu + 1) &= \int_0^{+\infty} s^\mu e^{-s} ds = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A s^\mu e^{-s} ds = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A s^\mu d(-e^{-s}) = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-s^\mu e^{-s} \Big|_0^A + \mu \int_0^A s^{\mu-1} e^{-s} ds \right) = \\ &= \mu \int_0^{+\infty} s^{\mu-1} e^{-s} ds = \mu \Gamma(\mu).\end{aligned}$$

3. Если n — натуральное число, то $\Gamma(n + 1) = n!$.

4. $\Gamma(1 - \mu) \cdot \Gamma(\mu) = \frac{\pi}{\sin \pi \mu}$ для всех $\mu \in (0; 1)$. Из данной формулы следует, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

5. $\Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1-2z} \Gamma(2z), z > 0.$

6. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n \cdot n!}, n \in \mathbb{N}.$

7. $\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$

Определение 1.2. Функция $B: (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ вида

$$B(x, y) = \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^{y-1} ds$$

называет бета функцией.

Справедливо равенство

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

§ 2. Функция Миттаг–Леффлера

Определение 2.1. Пусть $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{R}^1$. Функция $E_\rho(z, \mu): \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ вида

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\rho^{-1} + \mu)}$$

называется функцией Миттаг–Леффлера [11].

Отметим некоторые свойства данной функции

1. $E_1(z, 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$
2. $E_\rho(0, \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}.$
3. $zE_{1/2}(-z^2, 2) = z \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin z.$
4. $E_{1/2}(-z^2, 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = \cos z.$
5. $E_1(z, 2) = \frac{e^z - 1}{z}.$
6. $E_\rho(z, \mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} + zE_\rho(z, \mu + \frac{1}{\rho}).$
7. $\int_0^z E_\rho(\lambda t^{1/\rho}, \mu) t^{\mu-1} dt = z^\mu E_\rho(\lambda z^{1/\rho}, \mu + 1), \mu > 0.$
8. $\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^z (z-t)^{\mu-1} e^{\lambda t} dt = z^\mu E_1(\lambda z, \mu + 1), \mu > 0.$
9. $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} E_\rho(\lambda t^{1/\rho}, \mu) t^{\mu-1} dt = z^{\mu+\alpha-1} E_\rho(\lambda z^{1/\rho}, \mu + \alpha), \mu > 0.$
10. $\frac{d}{dt} E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) = at^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha).$
11. $E'_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+k)z^k}{\Gamma(\rho(1+k)+\mu)}.$

Теорема 2.1 (см. [37, теорема 1.2.1, с. 12]).

1. Пусть $\rho > 1$, $\mu > 0$, m — натуральное число. Тогда при $z \rightarrow -\infty$ справедлива следующая асимптотическая оценка

$$E_\rho(z, \mu) = - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - \frac{k}{\rho})} + O\left(\frac{1}{|z|^{m+1}}\right).$$

2. Пусть $\rho \in (\frac{1}{2}, 1]$, $\mu > 0$, m — натуральное число. Тогда при $z \rightarrow \pm\infty$ справедлива следующая асимптотическая оценка

$$E_\rho(z, \mu) = -\rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\mu) - \sum_{k=1}^m \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - \frac{k}{\rho})} + O\left(\frac{1}{|z|^{m+1}}\right).$$

Теорема 2.2 (см. [37, теорема 4.1.1, с. 101]). Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Тогда

$$E_{\frac{1}{\alpha}}(z, \alpha) \geq 0 \quad \text{для всех } z \in \mathbb{R}^1.$$

§ 3. Производная по Капуто

Определение 3.1 ([55]). Пусть n — натуральное число, $q \in (n - 1; n)$, функция $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$, такая что функция $f^{(n-1)}$ является абсолютно-непрерывной на $[0; +\infty)$. Производной по Капуто порядка q функции f называется функция $(D^q)f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ вида

$$(D^q)f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - q)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t - s)^{q-n+1}} ds,$$

где Γ — гамма-функция.

Замечание 3.1. Если $q \in (0; 1)$, то получаем

$$(D^q)f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - q)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t - s)^q} ds.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3.1. Пусть $f(t) = \text{const}$ для всех $t \geq 0$, $q \in (0; 1)$. Тогда $(D^q)f(t) = 0$ для всех $t \geq 0$.

Пример 3.2. Пусть $f(t) = t$, $q \in (0; 1)$. Тогда

$$(D^q)f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - q)} \int_0^t \frac{1}{(t - s)^q} ds = \frac{t^{1-q}}{(1 - q)\Gamma(1 - q)} = \frac{t^{1-q}}{\Gamma(2 - q)}.$$

При $q = \frac{1}{2}$ получаем, что $(D^{1/2})f(t) = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$.

Отметим, что $\lim_{q \rightarrow 1-0} (D^q)f(t) = 1$.

Пример 3.3. Пусть $f(t) = t^2$, $q \in (1; 2)$. Тогда

$$(D^q)f(t) = \frac{1}{\Gamma(2 - q)} \int_0^t \frac{2}{(t - s)^{q-1}} ds = \frac{2t^{2-q}}{\Gamma(3 - q)}.$$

При $q = \frac{3}{2}$ получим $(D^{3/2})f(t) = \frac{4t^{3/2}}{\sqrt{\pi}}$.

Отметим, что $\lim_{q \rightarrow 1+0} (D^q)f(t) = 2t$.

Пример 3.4. Пусть $f(t) = \sqrt{t}$, $q = \frac{1}{2}$. Тогда

$$(D^{1/2})f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{ds}{2\sqrt{s}\sqrt{t-s}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{ts-s^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Теорема 3.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1, n)$, $p > n-1$. Тогда

$$(D^\alpha)t^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} \cdot t^{p-\alpha}.$$

Доказательство. По определению производной по Капу-то имеем

$$\begin{aligned} (D^\alpha)t^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{(s^p)^{(n)}}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} s^{p-n} (t-s)^{n-\alpha-1} ds \end{aligned}$$

Сделаем в последнем интеграле замену $s = yt$. Тогда

$$\begin{aligned} (D^\alpha)t^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} \int_0^1 t^{p-\alpha} y^{p-n} (1-y)^{n-\alpha-1} dy = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} B(p-n+1, n-\alpha) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} \cdot \frac{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p+1-\alpha)} = \\ &= \frac{\Gamma(p+1)t^{p-\alpha}}{\Gamma(p+1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 3.2. Пусть число $\alpha > 0$ и функции $f_1, f_2: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ такие, что существуют $(D^\alpha)f_1, (D^\alpha)f_2$. Тогда для любых констант $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^1$ существует $(D^\alpha)(c_1f_1 + c_2f_2)$ и справедливо равенство

$$(D^\alpha)(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1(D^\alpha)f_1 + c_2(D^\alpha)f_2.$$

Справедливость данного утверждения сразу следует из определения производной и линейности интеграла.

Замечание 3.2. Для производной по Капуто формула

$$(D^\alpha)f \cdot g = g \cdot (D^\alpha)f + f(D^\alpha) \cdot g$$

в общем случае неверна.

Пусть $f(t) = g(t) = t$, $\alpha = \frac{1}{2}$. Тогда $(D^{1/2})t = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$ и поэтому

$$g \cdot (D^\alpha)f + f(D^\alpha) \cdot g = \frac{4\sqrt{t^3}}{\sqrt{\pi}}.$$

В то время как $(D^{1/2})t^2 = \frac{8\sqrt{t^3}}{3\sqrt{\pi}}$.

Упражнения.

- 3.1. Вычислить $(D^{1/3})t$.
- 3.2. Вычислить $(D^{3/2})t^2$.
- 3.3. Вычислить $(D^q)e^t$, $q \in (0; 1)$.
- 3.4. Вычислить $(D^q)e^t$, $q \in (1; 2)$.
- 3.5. Вычислить $(D^{5/2})t^3$.
- 3.6. Вычислить $(D^{3/4})t^2$.
- 3.7. Вычислить $(D^{1/2})(D^{1/2})t$.
- 3.8. Вычислить $(D^{3/2})(D^{1/2})t^2$.
- 3.9. Вычислить $(D^{3/2})(D^{3/2})t^3$.
- 3.10. Вычислить $(D^{1/2})(D^{1/2})(D^{1/2})t^2$.

§ 4. Формула Коши

Пусть n — натуральное число, $q \in (n-1; n)$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$(D^q)z = Az + f(t), \quad (4.1)$$

где $z \in \mathbb{R}^k$, A — квадратная матрица порядка $k \times k$, а вектор-функция $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрерывна.

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$z(0) = z_0^0, \quad \dot{z}(0) = z_1^0, \quad \dots, \quad z^{(n-1)}(0) = z_{n-1}^0. \quad (4.2)$$

Тогда решением задачи Коши (4.1)-(4.2) является вектор-функция z вида [51]

$$z(t) = \sum_{l=0}^{n-1} t^l E_{1/q}(At^q, l+1) z_l^0 + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{1/q}(A(t-s)^q, q) f(s) ds. \quad (4.3)$$

При $q \in (0; 1)$ формула (4.3) принимает вид

$$z(t) = E_{1/q}(At^q, 1) z_0^0 + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{1/q}(A(t-s)^q, q) f(s) ds. \quad (4.4)$$

Если A — нулевая матрица, то формула (4.3) принимает вид

$$z(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{t^l z_l^0}{l!} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s) ds.$$

Если $A = 0$, $q \in (0; 1)$, то

$$z(t) = z_0^0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s) ds. \quad (4.5)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4.1. Рассмотрим задачу Коши

$$(D^{1/2})z = \sqrt{t}, \quad z(0) = 1.$$

Применяя формулу (4.5), получаем

$$z(t) = 1 + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t-s}} ds = 1 + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \sqrt{\frac{s}{t-s}} ds.$$

Сделаем замену $\frac{s}{t-s} = y^2$. Тогда

$$z(t) = 1 + \frac{2t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(y^2 + 1)^2} dy = 1 + \frac{2t}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{\pi}t}{2}.$$

Пример 4.2. Рассмотрим задачу Коши

$$(D^{2/3})z = t, \quad z(0) = 0.$$

Применяя формулу (4.5), получаем

$$z(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \int_0^t s(t-s)^{-\frac{1}{3}} ds.$$

Сделав замену $t-s = y^3$, получим

$$z(t) = \frac{t^2}{2\Gamma(\frac{2}{3})}.$$

Пример 4.3. Рассмотрим задачу Коши

$$(D^q)z = z, \quad z(0) = 1, \quad q \in (0; 1).$$

Применяя формулу (4.4), получаем $z(t) = E_{1/q}(t^q, 1)$.

Пример 4.4. Рассмотрим задачу Коши

$$(D^q)z = z + t, \quad z(0) = 1, \quad q \in (0; 1).$$

Применяя формулу (4.3), получаем

$$z(t) = E_{1/q}(t^q, 1) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{1/q}((t-s)^q, q) s \, ds.$$

Пример 4.5. Рассмотрим задачу Коши

$$(D^{1/2})z = f(t), \quad z(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; 1), \\ t, & t \geq 1. \end{cases}$$

Если $t \in [0; 1)$, то

$$z(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}.$$

Пусть $t \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{t-s}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^t \frac{s}{\sqrt{t-s}} \, ds = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{t} - \sqrt{t-1}) + \frac{2(2t+1)\sqrt{t-1}}{3\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Упражнения.

4.1. Решить задачу Коши

$$(D^{1/2})z = \sqrt[3]{t}, \quad z(0) = 0.$$

4.2. Решить задачу Коши

$$(D^{1/2})z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z, \quad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.3. Решить задачу Коши

$$(D^{1/2})z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z, \quad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.4. Решить задачу Коши

$$(D^{1/2})z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} z, \quad z(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4.5. Решить задачу Коши

$$(D^{1/2})z = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad z(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.6. Решить задачу Коши ($q \in (0; 1)$)

$$(D^q)z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

§ 5. Простое преследование на плоскости при геометрических ограничениях

В данном параграфе рассмотрим наиболее простые модели преследования, а именно, дифференциальные игры на плоскости с двумя участниками: преследователем P и убегающим E . Местоположение преследователя в момент t будем обозначать $x(t)$, а местоположение убегающего в момент t — через $y(t)$.

Пусть $p, q \in (0; 1)$. Закон движения преследователя P имеет вид

$$(D^q)x = u, \quad x(0) = x^0, \quad \|u\| \leq \alpha. \quad (5.1)$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$(D^p)y = v, \quad y(0) = y^0, \quad \|v\| \leq \beta. \quad (5.2)$$

Здесь $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

Если преследователь P выбирает некоторую вектор-функцию $u(t)$ (функцию u называют управлением преследователя), то положение преследователя P в момент t определяется следующим образом

$$x(t) = x^0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{1-q}} ds.$$

Если убегающий выбирает некоторую функцию $v(t)$ (функцию v называют управлением убегающего), то положение убегающего в момент t определяется следующим образом

$$y(t) = y^0 + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t \frac{v(s)}{(t-s)^{1-p}} ds.$$

Пример 5.1. Пусть $x^0 = (1; 0)$, $u(t) = (1; -1)$ для всех $t \geq 0$. Тогда

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{ds}{(t-s)^{1-q}} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} \\ -\frac{t^q}{\Gamma(q+1)} \end{pmatrix}.$$

Пример 5.2. Пусть $y^0 = (0; 0)$,

$$v(t) = \begin{cases} (1; 0), & t \in [0; 1], \\ (0; -1), & t \in (1; +\infty). \end{cases}$$

Тогда для $t \in [0; 1]$ получаем

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{ds}{(t-s)^{1-p}} = \begin{pmatrix} \frac{t^p}{\Gamma(p+1)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В момент $t = 1$ убегающий будет находиться в точке $(\frac{1}{\Gamma(p+1)}; 0)$. Для $t > 1$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{ds}{(t-s)^{1-p}} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_1^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{ds}{(t-s)^{1-p}} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{t^p - (t-1)^p}{\Gamma(p+1)} \\ -\frac{(t-1)^p}{\Gamma(p+1)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Предположим, что убегающий E использует постоянное управление $v(t) = v_0$, $\|v_0\| = \beta$, которое известно преследователю P . Найдем условия, при которых найдутся постоянное управление $u(t) = u$, $\|u\| = \alpha$, и момент $T > 0$, для которых будет выполнено равенство $x(T) = y(T)$ (преследователь P осуществляет поимку убегающего E).

Будем считать, что $\alpha \geq \beta$, $p \geq q$. Тогда

$$y(t) = y_0 + \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} v_0, \quad x(t) = x_0 + \frac{t^p}{\Gamma(p+1)} u.$$

Получаем уравнение относительно u и t .

$$y_0 + \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} v_0 = x_0 + \frac{t^p}{\Gamma(p+1)} u. \quad (5.3)$$

Обозначим $z_0 = y_0 - x_0$, $\gamma = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(q+1)}$. Тогда уравнение (5.3) представимо в виде

$$u = \frac{z_0}{t^p} + \frac{t^q \gamma v_0}{t^p}.$$

Потребуем, чтобы управление u удовлетворяло условию $\|u\| = \alpha$. Получаем уравнение для нахождения t .

$$\alpha = \left\| \frac{z_0}{t^p} + t^{q-p} \gamma v_0 \right\|, \quad \text{или} \quad \alpha^2 = \left\| \frac{z_0}{t^p} + t^{q-p} \gamma v_0 \right\|^2.$$

Последнее уравнение представимо в виде

$$\|z_0\|^2 t^{-2p} + 2\gamma t^{q-2p} (z_0, v_0) + t^{2q-2p} \gamma^2 \|v_0\|^2 - \alpha^2 = 0.$$

Умножив обе части уравнения на t^{2p} , получим уравнение

$$t^{2q} \gamma^2 \|v_0\|^2 - \alpha^2 t^{2p} + 2\gamma t^q (v_0, z_0) + \|z_0\|^2 = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$f(t) = t^{2q} \gamma^2 \|v_0\|^2 - \alpha^2 t^{2p} + 2\gamma t^q (v_0, z_0) + \|z_0\|^2, \quad f(0) = \|z_0\|^2.$$

1. $p > q$. Тогда $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty$. Поэтому уравнение $f(t) = 0$ имеет хотя бы один положительный корень T . Следовательно, в данном случае преследователь P осуществит поимку убегающего E , выбирая свое управление u в виде

$$u = \frac{z_0}{T^p} + \frac{T^q \gamma v_0}{T^p} = z_0 T^{-p} + T^{q-p} \gamma v_0.$$

2. $p = q$. В этом случае $\gamma = 1$. Функция f имеет вид

$$f(t) = t^{2q} (\|v_0\|^2 - \alpha^2) - 2t^q (z_0, v_0) + \|z_0\|^2.$$

Из предположения следует, что $\|v_0\|^2 = \beta^2 \leq \alpha^2$.

2. а) $\alpha = \beta$. Уравнение $f(t) = 0$ будет иметь вид

$$-2t^p(z_0, v_0) = \|z_0\|^2.$$

Поэтому оно имеет положительный корень T тогда и только тогда, когда $(z_0, v_0) < 0$. При этом

$$T = \left(-\frac{\|z_0\|^2}{2(z_0, v_0)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

а управление u преследователя P , гарантирующее поимку в момент T , будет иметь вид

$$u = v_0 + \frac{z_0}{T^p}. \quad (5.4)$$

2. б) $\alpha > \beta$. Тогда $\|v_0\|^2 - \alpha^2 < 0$, и поэтому $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty$. Следовательно, уравнение $f(t) = 0$ имеет хотя бы один положительный корень T . Управление u преследователя P , гарантирующего поимку в момент T , будет иметь вид (5.4).

Рассмотрим далее ситуацию, при которой убегающий использует произвольное управление. Пусть функция $v(t)$ является управлением убегающего E , $t \in [0; +\infty)$. Назовем предысторией $v_t(\cdot)$ управления убегающего в момент t сужение функции v на $[0; t]$.

Определение 5.1. Квазистратегией $\mathcal{U}$ преследователя P называется отображение U , ставящее в соответствие начальным позициям x^0, y^0 и предыстории $v_t(\cdot)$ управления $v(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u: [0; \infty) \rightarrow D_\alpha(0)$.

Обозначим данную игру $G(x^0, y^0)$.

Определение 5.2. В игре $G(x^0, y^0)$ происходит поимка, если существуют момент $T > 0$ и квазистратегия $\mathcal{U}$ преследователя P такие, что для любой измеримой функции $v: [0; +\infty) \rightarrow D_\beta(0)$ найдется момент $T_0 \in [0; T]$ для которого $x(T_0) = y(T_0)$.

Теорема 5.1. Пусть $\alpha > \beta$, $p = q$. Тогда в игре $G(x^0, y^0)$ происходит поимка.

Доказательство. Обозначим $z^0 = x^0 - y^0$. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное управление убегающего. Задаем управление преследователя P следующим образом

$$u(t) = v(t) - \frac{z^0}{\|z^0\|}(\alpha - \beta). \quad (5.5)$$

Тогда

$$\|u(t)\| = \left\| v(t) - \frac{z^0}{\|z^0\|}(\alpha - \beta) \right\| \leq \|v(t)\| + \alpha - \beta \leq \beta + \alpha - \beta = \alpha.$$

Следовательно, управление $u(\cdot)$ является допустимым для преследователя P . Из уравнений (5.1), (5.2) имеем

$$x(t) - y(t) = x^0 - y^0 + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} (u(s) - v(s)) ds.$$

Используя (5.5), получим

$$\begin{aligned} x(t) - y(t) &= \\ &= z^0 - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} \frac{z^0}{\|z^0\|} (\alpha - \beta) ds = z^0 \left(1 - \frac{t^p (\alpha - \beta)}{\Gamma(p+1) \|z^0\|} \right). \end{aligned}$$

Взяв к качестве

$$T = T_0 = \left(\frac{\|z^0\| \Gamma(p+1)}{\alpha - \beta} \right)^{\frac{1}{p}},$$

получим, что $x(T_0) = y(T_0)$. Это и означает, что в игре $G(x^0, y^0)$ происходит поимка. Теорема доказана.

Отметим, что при данном способе преследования поимка происходит в один и тот же момент времени T_0 , хотя в ряде случаев поимка могла произойти раньше из-за нерационального поведения убегающего.

Рассмотрим еще один способ преследования. Считаем, что $p = q$, $\alpha > \beta$. Предположим, что убегающий E в процессе игры использует постоянное управление v , $\|v\| \leq \beta$. Попытаемся найти для преследователя P такое постоянное управление u , $\|u\| \leq \alpha$, при котором поимка произойдет за минимальное время.

Из систем (5.1), (5.2) при фиксированных u, v имеем

$$z(t) = x(t) - y(t) = z^0 + \frac{t^p}{\Gamma(p+1)}(u - v).$$

Приравняв $z(t)$ к нулю, получим

$$z_0 + \frac{t^p}{\Gamma(p+1)}(u - v) = 0.$$

Обозначим $z_1 = \Gamma(p+1)z^0$. Отсюда

$$z_1 - t^p v = -t^p u, \quad \|u\| \leq \alpha. \quad (5.6)$$

Уравнение (5.6) будет разрешимо относительно u , если выполнено неравенство $\|z_1 - t^p v\| \leq t^p \alpha$. Возводя последнее неравенство в квадрат, получаем неравенство

$$\|z_1 - t^p v\|^2 \leq \alpha^2 t^{2p}.$$

Так как $\|z\|^2 = (z, z)$, то получаем неравенство

$$\begin{aligned} (z_1 - t^p v, z_1 - t^p v) &\leq \alpha^2 t^{2p} \quad \text{или} \\ (\alpha^2 - \|v\|^2)t^{2p} + 2t^p(z_1, v) - \|z_1\|^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Рассмотрим квадратное уравнение

$$(\alpha^2 - \|v\|^2)\tau^2 + 2(z_1, v)\tau - \|z_1\|^2 = 0.$$

Данное уравнение имеет два корня

$$\tau_{1,2} = \frac{-(z_1, v) \pm \sqrt{(z_1, v)^2 + \|z_1\|^2(\alpha^2 - \|v\|^2)}}{\alpha^2 - \|v\|^2}.$$

Так как $\alpha^2 - \|v\|^2 > 0$, то корни разных знаков, положительным корнем будет

$$T(z^0, v) = \frac{-(z_1, v) + \sqrt{(z_1, v)^2 + \|z_1\|^2(\alpha^2 - \|v\|^2)}}{\alpha^2 - \|v\|^2}.$$

Поэтому неравенство (5.7) будет справедливо при любом

$$t > (T(z^0, v))^{\frac{1}{p}}.$$

Найдем максимальное значение $(T(z^0, v))^{\frac{1}{p}}$. Если зафиксировать $\|v\|$, то наибольшее значение величины $(T(z^0, v))^{\frac{1}{p}}$ достигается при $v = -\frac{z_1}{\|z_1\|}\|v\|$. Тогда

$$\begin{aligned} (T(z^0, v))^{\frac{1}{p}} &= \left(\frac{\|z_1\|\|v\| + \sqrt{\|z_1\|^2\|v\|^2 + \|z_1\|^2(\alpha^2 - \|v\|^2)}}{\alpha^2 - \|v\|^2} \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\frac{\|z_1\|(\alpha + \|v\|)}{\alpha^2 - \|v\|^2} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\|z_1\|}{\alpha - \|v\|} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Так как $\|v\| \leq \beta$, то

$$(T(z^0, v))^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\|z_1\|}{\alpha - \beta} \right)^{\frac{1}{p}} = T(z^0). \quad (5.8)$$

Таким образом, из (5.6) получаем

$$z_1 + T(z^0, v)(u - v) = 0 \quad \text{или} \quad u = v - \frac{z_1}{T(z^0, v)}.$$

Подставляя управление $v(\cdot)$ в систему (5.2), а управление $u(\cdot)$ в систему (5.1), получим

$$z(t) = x(t) - y(t) = z^0 - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} \frac{z_1}{T(z^0, v(s))} ds.$$

Так как $z_1 = z^0 \Gamma(p+1)$, то

$$z(t) = z^0 - z^0 \int_0^t \frac{p(t-s)^{p-1}}{T(z^0, v(s))} ds = z^0 \left(1 - \int_0^t \frac{p(t-s)^{p-1}}{T(z^0, v(s))} ds \right).$$

Рассмотрим функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \frac{p(t-s)^{p-1}}{T(z^0, v(s))} ds.$$

Тогда $h(0) = 1$, и функция h является непрерывной. Используя неравенство (5.8), имеем

$$\int_0^t \frac{p(t-s)^{p-1}}{T(z^0, v(s))} ds \geq \int_0^t \frac{p(t-s)^{p-1}}{T(z^0)} ds = \frac{t^p}{T(z^0)}.$$

Поэтому

$$h(t) \leq 1 - \frac{t^p}{T(z^0)}.$$

Из последнего неравенства и свойств функции h следует, что существует момент $\tau \in (0; (T(z^0))^{\frac{1}{p}}]$, для которого $h(\tau) = 0$. Значит, $z(\tau) = 0$. Это и означает, что преследователь P осуществил поимку убегающего E .

Замечание 5.1. Знание преследователем P управления убегающего E позволяет преследователю P при неудачном управлении убегающего E завершить поимку раньше момента $(T(z^0))^{\frac{1}{p}}$.

Пример 5.3. Пусть $p = \frac{1}{2}$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $x^0 = (0; 0)$, $y^0 = (-1; 0)$. Тогда $z^0 = (1; 0)$, $T(z^0) = \frac{\pi}{4}$, $(T(z^0))^2 = \frac{\pi^2}{16}$. Пусть убегающий использует постоянное управление $v(t) = (1; 0)$, а преследователь управление $u(t) = (-2; 0)$. Тогда

$$z(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t (t-s)^{-1/2} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - \frac{6\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

поэтому поимка произойдет в момент $\tau = \frac{\pi}{36}$. Отметим, что $\frac{\pi}{36} < \frac{\pi^2}{16}$.

Упражнения.

5.1. Дано $p, q \in (0; 1)$, $p \geq q$, $x_0 = (0; 0)$, $y_0 = (2; 3)$, $v = (-1, 0)$, $\alpha = \beta = 1$.

Сможет ли P осуществить поимку E , если будет использовать постоянное управление u_0 вида: а) $u_0 = (1, 0)$; б) $u_0 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$?

5.2. Дано $p, q \in (0; 1)$, $p = q$, $x_0 = (2; 2)$, $y_0 = (4; 0)$,

$$v(t) = \begin{cases} (-1; 0), & t \in [0; 1], \\ (0; 1), & t > 1 \end{cases}$$

Сможет ли P осуществить поимку E , если а) $\alpha = \beta = 1$, б) $\alpha = 2$, $\beta = 1$?

5.3. Дано $p, q \in (0; 1)$, $p = q$, $x_0 = (0; 0)$, $y_0 = (2; 3)$, $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{2}$,

$$v(t) = \begin{cases} (-1; 1), & t \in [0; 2], \\ (1; -1), & t > 2. \end{cases}$$

Найти u , гарантирующее P поимку E .

§ 6. Простое преследование на плоскости при интегральных ограничениях

В данном параграфе, в отличие от предыдущего, будем рассматривать задачи преследования на плоскости с участием преследователя P и убегающего E , при условии, что на их управления наложены интегральные ограничения.

Определение 6.1. Функция $g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ принадлежит классу $L_2([0; +\infty))$, если она измерима по Лебегу и

$$\int_0^{+\infty} g^2(t) dt < +\infty.$$

Определение 6.2. Функция $g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ принадлежит классу $L_2([0; +\infty))$, если она измерима по Лебегу и

$$\int_0^{+\infty} (g_1^2(t) + \dots + g_k^2(t)) dt < +\infty, \quad (6.1)$$

где $g(t) = (g_1(t), \dots, g_k(t))$.

Если использовать в $\mathbb{R}^k$ норму вида $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_k^2}$, то неравенство (6.1) можно переписать в виде

$$\int_0^{+\infty} \|g(t)\|^2 dt < +\infty.$$

В пространстве $L_2([0; +\infty))$ можно ввести норму (обозначаемую $\|\cdot\|_2$) следующим образом

$$\|g\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} \|g(t)\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Если $g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$, то

$$\|g\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} g^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим задачу преследования двух лиц на плоскости $\mathbb{R}^2$. Местоположение преследователя в момент t будем обозначать $x(t)$, а местоположение убегающего в момент t через $y(t)$.

Пусть $p, q \in (0; 1)$. Закон движения преследователя P имеет вид

$$(D^q)x = u, \quad x(0) = x^0, \quad \|u\|_2 \leq \alpha. \quad (6.2)$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$(D^p)y = v, \quad y(0) = y^0, \quad \|v\|_2 \leq \beta. \quad (6.3)$$

Здесь $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|u\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt \right)^{1/2}, \quad \|v\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} (v_1^2(t) + v_2^2(t)) dt \right)^{1/2}.$$

Если преследователь P выбирает некоторую вектор-функцию $u(t)$ (функцию u называют управлением преследователя), то положение преследователя P в момент t определяется следующим образом

$$x(t) = x^0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{1-q}} ds.$$

Если убегающий выбирает некоторую функцию $v(t)$ (функцию v называют управлением убегающего), то положение убегающего в момент t определяется следующим образом

$$y(t) = y^0 + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t \frac{v(s)}{(t-s)^{1-p}} ds.$$

Определение 6.3. Квазистратегией $\mathcal{U}$ преследователя P называется отображение U , ставящее в соответствие начальным позициям x^0, y^0 , предыстории $v_t(\cdot)$ управления $v(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ такую, что $\|u\|_2 \leq \alpha$.

Обозначим данную игру $G(x^0, y^0)$.

Определение 6.4. В игре $G(x^0, y^0)$ происходит поимка, если существуют момент $T > 0$ и квазистратегия $\mathcal{U}$ преследователя P такие, что для любой измеримой функции $v: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\|v\|_2 \leq \beta$, найдется момент $T_0 \in [0, T]$, для которого $x(T_0) = y(T_0)$.

Лемма 6.1. Пусть $A > 0, B > 0, q \in (\frac{1}{2}; 1)$. Тогда существуют момент $T > 0$ и функция $f: [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ такие, что

$$\int_0^T f^2(s) ds = A, \quad \int_0^T (T-s)^{q-1} f(s) ds = B.$$

Доказательство. Будем искать функцию f в виде

$$f(s) = \frac{K}{(T-s)^{1-q}} \quad \text{для всех } s \in [0; T],$$

где K — числовой параметр, который будет определен ниже. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^T f^2(s) ds &= \int_0^T \frac{K^2}{(T-s)^{2-2q}} ds = \frac{K^2 \cdot T^{2q-1}}{2q-1}, \\ \int_0^T f(s)(T-s)^{q-1} ds &= \int_0^T K(T-s)^{2q-2} ds = \frac{K \cdot T^{2q-1}}{2q-1}. \end{aligned}$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \frac{K^2 \cdot T^{2q-1}}{2q-1} = A, \\ \frac{K \cdot T^{2q-1}}{2q-1} = B. \end{cases}$$

Отсюда $K = \frac{A}{B}, T = \left(\frac{B^2(2q-1)}{A} \right)^{\frac{1}{2q-1}}$. Лемма доказана.

Лемма 6.2. Пусть $A > 0$, $B > 0$. Тогда существуют момент $T > 0$ и функция $f: [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ такие, что

$$\int_0^T f^2(s) ds = A, \quad \int_0^T \frac{f(s)}{\sqrt{T-s}} ds = B.$$

Доказательство. Будем искать функцию f в виде $f(s) = e^{as}$, $s \in [0; T]$, $a > 0$ — числовой параметр, который будет определен ниже. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^T f^2(s) ds &= \int_0^T e^{2as} ds = \frac{e^{2aT} - 1}{2a}, \\ \int_0^T \frac{f(s)}{\sqrt{T-s}} ds &= \int_0^T \frac{e^{as}}{\sqrt{T-s}} ds = 2e^{aT} g(T), \end{aligned}$$

где $g(T) = \int_0^{\sqrt{T}} e^{-ay^2} dy$ (сделана замена $y = \sqrt{T-s}$). Преобразуем функцию g . Сделаем замену $t = \sqrt{a}y$. Получаем

$$\int_0^{\sqrt{T}} e^{-ay^2} dy = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\sqrt{aT}} e^{-t^2} dt.$$

Следовательно,

$$\int_0^T \frac{f(s)}{\sqrt{T-s}} ds = \frac{2e^{aT}}{\sqrt{a}} G(T), \quad \text{где } G(T) = \int_0^{\sqrt{aT}} e^{-t^2} dt.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \frac{e^{2aT}-1}{2a} = A, \\ \frac{2e^{aT}}{\sqrt{a}} G(T) = B. \end{cases}$$

Отсюда $e^{aT} = \frac{B\sqrt{a}}{2G(T)}$, и тогда первое уравнение представимо в виде

$$\frac{B^2}{8G^2(T)} - \frac{1}{2a} = A. \quad (6.4)$$

Выберем $\hat{a} > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{B^2}{2\pi} - \frac{1}{2\hat{a}} < 0$. Тогда

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{B^2}{8G^2(T)} - \frac{1}{2\hat{a}} \right) = \frac{B^2}{2\pi} - \frac{1}{2\hat{a}} < 0,$$

$$\lim_{T \rightarrow +0} \left(\frac{B^2}{8G^2(T)} - \frac{1}{2\hat{a}} \right) = +\infty.$$

Поэтому существует $\hat{T} > 0$, являющийся решением уравнения (6.4). Лемма доказана.

Лемма 6.3. Пусть $A > 0$, $B > 0$, $q \in (0; \frac{1}{2})$. Тогда существуют момент $T > 0$ и функция $f: [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ такие, что

$$\int_0^T f^2(s) ds = A, \quad \int_0^T (T-s)^{q-1} f(s) ds = B.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть n — натуральное число такое, что $1 - q < \frac{n}{n+1}$. Обозначим $p = 1 - q$. Будем искать функцию f в виде

$$f(s) = \frac{K}{(T-s)^{\frac{p}{n}}}, \quad s \in [0; T],$$

K — числовой параметр, который будет определен ниже. Тогда

$$\int_0^T f^2(s) ds = \int_0^T \frac{K^2}{(T-s)^{\frac{2p}{n}}} ds = \frac{K^2 \cdot T^{1-\frac{2p}{n}} n}{n-2p},$$

$$\int_0^T \frac{f(s)}{(T-s)^p} ds = \int_0^T \frac{K}{(T-s)^{p+\frac{p}{n}}} ds = \frac{K \cdot T^{1-p-\frac{p}{n}} n}{n-np-p}.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} K^2 \cdot T^{1-\frac{2p}{n}} = A', & \text{где } A' = \frac{A(n-2p)}{n}, \\ K \cdot T^{1-p-\frac{p}{n}} = B', & \text{где } B' = \frac{B(n-np-p)}{n}. \end{cases}$$

Отсюда

$$K = \frac{B'}{T^{1-p-\frac{p}{n}}}.$$

Подставляя K в первое уравнение, получаем $T^{2p-1} = \frac{A'}{(B')^2}$. Следовательно,

$$T = \left(\frac{A'}{(B')^2} \right)^{\frac{1}{2p-1}}.$$

По T находим K . Лемма доказана.

Теорема 6.1. Пусть $\alpha > \beta$, $p = q$. Тогда в игре $G(x^0, y^0)$ происходит поимка.

Доказательство. Обозначим $z^0 = x^0 - y^0$. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное управление убегающего E . Задаем управление преследователя P следующим образом

$$u(t) = v(t) - \frac{z^0}{\|z^0\|} f(t), \quad t \in [0; T].$$

Функция f и момент T будут определены ниже. Тогда из систем (6.2), (6.3) имеем

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) - y(t) = z^0 + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} (u(s) - v(s)) ds = \\ &= z^0 - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} \frac{z^0}{\|z^0\|} f(s) ds = \\ &= \frac{z^0}{\|z^0\| \Gamma(p)} \left(\|z^0\| \Gamma(p) - \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s) ds \right). \end{aligned}$$

Число T и функцию f выберем так, чтобы выполнялись следующие равенства

$$\int_0^T f^2(s) ds = (\alpha - \beta)^2, \quad \|z^0\| \Gamma(p) = \int_0^T (T-s)^{p-1} f(s) ds.$$

В силу лемм 6.1–6.3 решение данной системы существует. Считая, что $f(s) = 0$ при $s > T$, получаем, что $\|f\|_2 = \alpha - \beta$. Тогда

$$\|u\|_2 = \|v - \frac{z^0}{\|z^0\|} f\|_2 \leq \|v\|_2 + \|f\|_2 \leq \beta + \alpha - \beta = \alpha.$$

Поэтому управление u будет допустимым. Тогда $z(T) = 0$. Это и означает, что в игре $G(x^0, y^0)$ происходит поимка. Теорема доказана.

§ 7. Задача простого группового преследования в игре с дробными производными и геометрическими ограничениями на управления

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $n + 1$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E . Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$(D^q)x_i = u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in U_i. \quad (7.1)$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$(D^q)y = v, \quad y(0) = y^0, \quad v \in V. \quad (7.2)$$

Здесь $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, U_i, V — выпуклые компакты $\mathbb{R}^k$, $q \in (0; 1)$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$.

Будем предполагать, что убегающий E в каждый момент t выбирает значение своей функции $v(t)$ и сообщает о своем выборе каждому из преследователей.

Пусть функция $v(t)$, $t \in [0; +\infty)$, является управлением убегающего E . Назовем предысторией $v_t(\cdot)$ управления убегающего в момент t сужение функции v на $[0; t]$.

Определение 7.1. Квазистратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i называется отображение W_i , ставящее в соответствие начальным позициям $x_1^0, \dots, x_n^0, y^0$, предыстории $v_t(\cdot)$ управления $v(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i: [0; \infty) \rightarrow U_i$.

Обозначим данную игру $G(n + 1)$.

Определение 7.2. В игре $G(n + 1)$ происходит поимка, если существуют момент $T > 0$, квазистратегия $\mathcal{U}_i$, $i \in I$, преследователей P_i , $i \in I$, такие, что для любой измеримой функции $v: [0; +\infty) \rightarrow V$ найдутся момент $T_0 \in [0; T]$ и номер $l \in I$, для которых $x_l(T_0) = y(T_0)$.

Введем новые переменные $z_i = x_i - y$. Тогда вместо систем (7.1), (7.2) получим системы

$$(D^q)z_i = u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \quad (7.3)$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено

Предположение 7.1. Для всех $i \in I$ и $v \in V$

$$0 \in U_i - v.$$

Введем функции $\lambda_i, h_i, i \in I$, вида

$$\begin{aligned} \lambda_i(z_i^0, v) &= \sup\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda z_i^0 \in U_i - v\}, \\ h_i(t) &= 1 - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \lambda_i(z_i^0, v(s)) ds \end{aligned}$$

и число

$$\delta = \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda_i(z_i^0, v).$$

Лемма 7.1. Пусть $\delta > 0$. Тогда существует момент $T > 0$ такой, что для любой измеримой функции $v: [0; +\infty) \rightarrow V$ найдется номер $l \in I$, для которого $h_l(T) \leq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\cdot)$ — произвольная допустимая функция. Рассмотрим

$$H(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t) = n - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i(z_i^0, v(s)) ds.$$

Так как для всех $s \geq 0$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(z_i^0, v(s)) \geq \max_{i \in I} \lambda_i(z_i^0, v(s)),$$

а из определения δ следует, что справедливо неравенство

$$\max_{i \in I} \lambda_i(z_i^0, v(s)) \geq \delta,$$

то для всех $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$H(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t) \leq n - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \delta ds = n - \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}.$$

Функции h_i непрерывны на $[0; +\infty)$. Поэтому и функция H непрерывна на $[0; +\infty)$. Кроме того, $H(0) = n > 0$, $H(t) \leq 0$ для всех $t \geq T = (n\Gamma(q+1))^{\frac{1}{q}}$ и любой допустимой функции $v(\cdot)$. Значит, существует $l \in I$, для которого $h_l(T) \leq 0$. Лемма доказана.

Теорема 7.1. Пусть выполнено предположение 7.1 и $\delta > 0$. Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное управление убегающего E . Рассмотрим момент $T = (n\Gamma(q+1))^{\frac{1}{q}}$ и функции $\hat{h}_i$ вида

$$\hat{h}_i(t) = 1 - \int_0^t (T-s)^{q-1} \lambda_i(z_i^0, v(s)) ds.$$

Задаем управление преследователей P_i следующим образом. Если в момент t выполнено неравенство $\hat{h}_i(t) > 0$, то полагаем

$$u_i(t) = v(t) - \lambda_i(z_i^0, v(t))z_i^0.$$

Если $\hat{h}_i(\tau) = 0$, то считаем, что $\lambda_i(z_i^0, v(t)) = 0$ для всех $t \in [\tau; T]$ и полагаем $u_i(t) = v(t)$ для всех $t \in [\tau; T]$. Из определения функций λ_i и предположения 7.1 следует, что $u_i(t) \in U_i$ для всех $i \in I$, $t \geq 0$.

Подставляя управления u_i в систему (7.3) будем иметь

$$\begin{aligned} z_i(t) &= z_i^0 - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} (u_i(s) - v(s)) ds = \\ &= z_i^0 - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \lambda_i(z_i^0, v(s)) z_i^0 ds. \end{aligned}$$

Из леммы 7.1 следует, что существуют момент $\tau \in [0; T]$ и номер $l \in I$ такие, что $\hat{h}_l(\tau) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} z_l(T) &= z_i^0 - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^T (T-s)^{q-1} \lambda_i(z_i^0, v(s)) z_i^0 ds = \\ &= z_l^0 \left(1 - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\tau (T-s)^{q-1} \lambda_i(z_i^0, v(s)) ds - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_\tau^T (T-s)^{q-1} \lambda_i(z_i^0, v(s)) ds \right) = z_l^0 \hat{h}_l(\tau) = 0. \end{aligned}$$

Это и означает, что в игре $G(n+1)$ происходит поимка. Теорема доказана.

Лемма 7.2 ([2]). Пусть для всех $i \in I$ выполнено $U_i = V = D_1(0)$. Тогда $\delta > 0$ тогда и только тогда, когда

$$0 \in \text{Int co} \{z_1^0, \dots, z_n^0\},$$

причем

$$\lambda_i(z_i^0, v) = \frac{(z_i^0, v) + \sqrt{(z_i^0, v)^2 + \|z_i^0\|^2(1 - \|v\|^2)}}{\|z_i^0\|^2}.$$

Определение 7.3. В игре $G(n+1)$ происходит *уклонение от встречи*, если существует измеримая функция $v: [0, +\infty) \rightarrow V$ такая, что для любых траекторий $x_1(t), \dots, x_n(t)$ преследователей $P_1, \dots, P_n$ и для всех $t \geq 0$ справедливы неравенства

$$x_1(t) \neq y(t), \quad \dots, \quad x_n(t) \neq y(t),$$

где $y(t)$ — траектория убегающего E , порожденная функцией $v(\cdot)$.

Теорема 7.2. Пусть для всех i выполнено $U_i = V = D_1(0)$ и

$$0 \notin \text{Int co} \{z_1^0, \dots, z_n^0\}. \quad (7.4)$$

Тогда в игре $G(n+1)$ происходит уклонение от встречи.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (7.4) следует, что существует вектор v_0 , $\|v_0\| = 1$, такой что $(z_i^0, v_0) \leq 0$ для всех $i \in I$. Задаем управление убегающего E , полагая

$$v(t) = v_0 \text{ для всех } t \geq 0.$$

Пусть $u_i(\cdot)$ — произвольное управление преследователя P_i , $i \in I$. Тогда

$$\begin{aligned} z_i(t) &= z_i^0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} (u_i(s) - v(s)) ds = \\ &= z_i^0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} u_i(s) ds - \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} v_0. \end{aligned}$$

Введем функции

$$\hat{u}_i(t) = \frac{q}{t^q} \int_0^t (t-s)^{q-1} u_i(s) ds.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_i(t)\| &= \left\| \frac{q}{t^q} \int_0^t (t-s)^{q-1} u_i(s) ds \right\| \leq \\ &\leq \frac{q}{t^q} \int_0^t (t-s)^{q-1} \|u_i(s)\| ds \leq \frac{q}{t^q} \int_0^t (t-s)^{q-1} ds = 1. \end{aligned}$$

Кроме того, справедливо равенство

$$\int_0^t (t-s)^{q-1} u_i(s) ds = \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} \hat{u}_i(t).$$

Из последнего равенства следует, что равенство (7) представимо в виде

$$z_i(t) = z_i^0 - \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}v_0 + \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}\hat{u}_i(t).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|z_i(t)\| &= \left\| z_i^0 - \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}v_0 + \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}\hat{u}_i(t) \right\| \geq \\ &\geq \left\| z_i^0 - \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}v_0 \right\| - \left\| \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}\hat{u}_i(t) \right\| \geq \\ &\geq \sqrt{\left(z_i^0 - \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}v_0, z_i^0 - \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}v_0 \right)} - \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} = \\ &= \sqrt{\|z_i^0\|^2 - 2(z_i^0, v_0)t^q/\Gamma(q+1) + t^{2q}/(\Gamma(q+1))^2} - \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}. \end{aligned}$$

Так как $(z_i^0, v_0) \leq 0$, то

$$\begin{aligned} \|z_i(t)\| &\geq \sqrt{\|z_i^0\|^2 + t^{2q}/(\Gamma(q+1))^2} - \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} > \\ &> \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} - \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} = 0. \end{aligned}$$

Получили, что для всех $i \in I$ и для всех $t \geq 0$ справедливо неравенство $\|z_i(t)\| > 0$. Это и означает, что в игре $G(n+1)$ происходит уклонение от встречи. Теорема доказана.

§ 8. Линейная задача группового преследования с геометрическими ограничениями на управления

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $n + 1$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E . Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$(D^q)x_i = ax_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in V. \quad (8.1)$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$(D^q)y = ay + v, \quad y(0) = y^0, \quad v \in V. \quad (8.2)$$

Здесь $q \in (0, 1)$, $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, V — выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$, $I = \{1, \dots, n\}$, a — вещественное число. Кроме того, $x_i^0 \neq y^0$ для всех i .

Вместо систем (8.1), (8.2) рассмотрим системы

$$(D^q)z_i = az_i + u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0, \quad u_i, v \in V. \quad (8.3)$$

Будем предполагать, что убегающий E в каждый момент t выбирает значение своей функции $v(t)$ и сообщает о своем выборе каждому из преследователей.

Пусть функция $v(t)$, $t \in [0; +\infty)$, является управлением убегающего E . Назовем предысторией $v_t(\cdot)$ управления убегающего в момент t сужение функции v на $[0; t]$.

Определение 8.1. Квазистратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i называется отображение W_i , ставящее в соответствие начальным позициям $x_1^0, \dots, x_n^0, y^0$, предыстории $v_t(\cdot)$ управления $v(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i: [0; \infty) \rightarrow V$.

Обозначим данную игру $G(n + 1)$.

Определение 8.2. В игре $G(n+1)$ происходит *поимка*, если существуют момент $T > 0$, квазистратегия $\mathcal{U}_i$, $i \in I$, преследователей P_i , $i \in I$, такие, что для любой измеримой функции $v: [0; +\infty) \rightarrow V$ найдутся момент $T_0 \in [0; T]$ и номер $l \in I$, для которых $z_l(T_0) = 0$.

Пусть далее

$$\lambda_i(v) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda z_i^0 \in V - v\}, \quad i \in I, \quad \delta = \min_{v \in V} \max_{l \in I} \lambda_l(v).$$

Теорема 8.1. Пусть $a < 0$, $\delta > 0$. Тогда в игре $G(n+1)$ происходит *поимка*.

Доказательство. Пусть T — произвольное положительное число,

$$u_i(t) = v(t) - \lambda_i(v(t))z_i^0.$$

Тогда решение системы (8.3) представимо в виде [51]

$$\begin{aligned} z_i(t) &= E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1)z_i^0 - \\ &- \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha) \lambda_i(v(\tau)) z_i^0 d\tau = z_i^0 h_i(t), \quad \text{где} \\ h_i(t) &= E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha) \lambda_i(v(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n h_i(t) &= nE_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \\ &- \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha) \sum_{i=1}^n \lambda_i(v(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Из теоремы 4.1.1 [37, с. 101] следует, что $E_{1/\alpha}(z, \alpha) \geq 0$ для всех $z \in \mathbb{R}^1$. Кроме того, для всех v верно неравенство

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) \geq \max_i \lambda_i(v) \geq \delta_0.$$

Поэтому из (8.5) следует справедливость неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n h_i(t) &\leq H(t) = \\ &= nE_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \delta_0 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha) d\tau. \end{aligned}$$

В силу [11, с. 120] имеем

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha) d\tau = t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} H(t) &= nE_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \delta_0 t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1) = \\ &= nE_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \frac{\delta_0}{a} at^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1). \end{aligned}$$

Так как $a < 0$, то $at^\alpha \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, поэтому справедливы следующие асимптотические оценки [37, с. 12]

$$\begin{aligned} E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) &= -\frac{1}{at^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right), \\ E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1) &= -\frac{1}{at^\alpha} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, при $t \rightarrow +\infty$

$$H(t) = -\frac{n}{at^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + \frac{\delta_0}{a} + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Поэтому существует момент $T > 0$ для которого $H(T) < 0$. Значит, $\sum_{i=1}^n h_i(T) < 0$. Так как $h_i(0) = 1$ для всех i и функции h_i непрерывны, то существуют $T_0 \leq T$ и номер $l \in I$, для которых $h_l(T_0) = 0$. Отсюда, в силу (8.4), получаем $z_l(T_0) = 0$. Следовательно, в игре $G(n+1)$ происходит поимка. Теорема доказана.

Следствие 8.1. Пусть $a < 0$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и

$$0 \in \text{Int co} \{z_1^0, \dots, z_n^0\}.$$

Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

§ 9. Линейная задача группового преследования с фазовыми ограничениями

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $n + 1$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E . Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$(D^\alpha)x_i = ax_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in V. \quad (9.1)$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$(D^\alpha)y = ay + v, \quad y(0) = y^0, \quad v \in V. \quad (9.2)$$

Здесь $\alpha \in (0, 1)$, $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, V — выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$, a — вещественное число. Кроме того, $x_i^0 \neq y^0$ для всех i . Дополнительно предполагается, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества Ω с непустой внутренностью вида

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^k \mid (p_j, y) \leq \mu_j, \quad j = 1, \dots, r\},$$

где $p_1, \dots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, $\mu_1, \dots, \mu_r$ — вещественные числа.

Вместо систем (9.1), (9.2) рассмотрим системы

$$(D^\alpha)z_i = az_i + u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0, \quad u_i, v \in V. \quad (9.3)$$

Будем предполагать, что убегающий E в каждый момент t выбирает значение своей функции $v(t)$ и сообщает о своем выборе каждому из преследователей.

Пусть функция $v(t)$, $t \in [0; +\infty)$, является управлением убегающего E . Назовем предысторией $v_t(\cdot)$ управления убегающего в момент t сужение функции v на $[0; t]$.

Определение 9.1. Квазистратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i называется отображение W_i , ставящее в соответствие начальным позициям $x_1^0, \dots, x_n^0, y^0$, предыстории $v_t(\cdot)$ управления $v(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i: [0; \infty) \rightarrow V$.

Обозначим данную игру $G(n+1)$.

Определение 9.2. В игре $G(n+1)$ происходит *поймка*, если существуют момент $T > 0$, квазистратегия $\mathcal{U}_i$, $i \in I$, преследователей P_i , $i \in I$, такие, что для любой измеримой функции $v: [0; +\infty) \rightarrow V$ найдутся момент $T_0 \in [0; T]$ и номер $l \in I$, для которых $z_l(T_0) = 0$.

Введем следующие обозначения. $I(l) = \{1, \dots, n+l\}$,

$$\lambda_i(v) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda z_i^0 \in V - v\}, \quad i \in I(0),$$

$$\lambda_{n+j}(v) = (p_j, v), \quad j = 1, \dots, r,$$

$$\delta_r = \min_{v \in V} \max_{l \in I(r)} \lambda_l(v), \quad d = \max\{\|v\| \mid v \in V\}.$$

Теорема 9.1. Пусть $a < 0$, $r = 1$, $\delta_1 > 0$. Тогда в игре происходит *поймка*.

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — допустимое управление убегающего. Задаем управления преследователей, полагая

$$u_i(t) = v(t) - \lambda_i(v(t))z_i^0.$$

Тогда решение системы (9.3) представимо в виде

$$z_i(t) = h_i(t)z_i^0,$$

где h_i имеют вид

$$h_i(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha) \lambda_i(v(\tau)) d\tau$$

Так как $v(\cdot)$ убывающего допустима, то $(p_1, y(t)) \leq \mu_1$. Это означает, что для всех $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha)(p_1, v(\tau)) d\tau &\leq \mu(t) = \\ &= \mu_1 - E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1)(p_1, y^0). \end{aligned}$$

Пусть $\Delta_1(t), \Delta_2(t)$ — два подмножества отрезка $[0, t]$ такие, что

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= \{\tau \mid \tau \in [0, t], (p_1, v(\tau)) < \delta_1\}, \\ \Delta_2(t) &= \{\tau \mid \tau \in [0, t], (p_1, v(\tau)) \geq \delta_1\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$G_1(t) + G_2(t) = g(t), \quad -dG_1(t) + \delta_1 G_2(t) \leq \mu(t), \quad \text{где} \quad (9.4)$$

$$\begin{aligned} G_{1,2}(t) &= \int_{\Delta_{1,2}(t)} (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha) d\tau, \\ g(t) &= \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha) d\tau. \end{aligned}$$

Из (9.4) следует, что для всех $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$G_1(t) \geq \frac{\delta_1 g(t) - \mu(t)}{d + \delta_1}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n h_i(t) &\leq n E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \\ &\quad - \int_{\Delta_1(t)} (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t - \tau)^\alpha, \alpha) \max_i \lambda_i(v(\tau)) d\tau \leq \\ &\leq n E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \delta_1 G_1(t) \leq n E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \frac{\delta_1}{d + \delta_1} [\delta_1 g(t) - \mu(t)]. \end{aligned}$$

В силу [37, с. 12] имеем

$$E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) = -\frac{1}{at^\alpha\Gamma(1-\alpha)} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right),$$

$$g(t) = -\frac{1}{a} + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right), \quad \mu(t) = -\frac{(p_1, y^0)}{at^\alpha} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right).$$

Следовательно, при $t \rightarrow +\infty$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n h_i(t) \leq \frac{\delta_1^2}{a(\delta_1 + d)} + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Так как $a < 0$, то существует момент $T > 0$ для которого $\sum_i h_i(T) < 0$. Значит существуют $l \in I(0)$ и $T_0 \in [0, T]$ для которых $z_l(T_0) = 0$. Следовательно, в игре происходит поимка. Теорема доказана.

Следствие 9.1. Пусть $a < 0$, $r = 1$, $V = D_1(0)$ и

$$0 \in \text{Int co} \{z_1^0, \dots, z_n^0, p_1\}.$$

Тогда в игре происходит поимка.

Доказательство. Из условия следствия и леммы 4.1 [5, с. 36] следует, что $\delta_1 > 0$.

Теорема 9.2. Пусть $a < 0$, $V = D_1(0)$, $n \geq k$ и

$$0 \in \text{Int co} \{z_1^0, \dots, z_n^0, p_1, \dots, p_r\}.$$

Тогда в игре происходит поимка.

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 4.1 [5, с. 37].

§ 10. Задача уклонения от группы преследователей

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $n + 1$ лиц: n преследователей P_i , $i = 1, \dots, n$, и убегающего E . Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$(D^\alpha)x_i(t) = ax_i(t) + u_i(t), \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in V. \quad (10.1)$$

Закон движения убегающего имеет вид

$$(D^\alpha)y(t) = ay(t) + v(t), \quad y(0) = y^0, \quad v \in V. \quad (10.2)$$

Здесь $\alpha \in (0, 1)$, $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, V — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$, a — вещественное число. Считаем, что $x_i^0 \neq y^0$ для всех i . Дополнительно предполагается, что убегающий E в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества Ω с непустой внутренностью вида

$$\Omega = \{\xi \in \mathbb{R}^k \mid \langle p_j, \xi \rangle \leq \mu_j, \quad j = 1, \dots, r, \quad r \geq 0\},$$

где p_j , $j = 1, \dots, r$, — единичные векторы $\mathbb{R}^k$, μ_j , $j = 1, \dots, r$, — вещественные числа, такие, что $\text{Int } \Omega \neq \emptyset$; при $r = 0$ считаем, что $\Omega = \mathbb{R}^k$.

Вместо систем (10.1), (10.2) рассмотрим системы

$$(D^\alpha)z_i(t) = az_i(t) + u_i(t) - v(t), \quad z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \quad (10.3)$$

Определение 10.1. Кусочно-программной стратегией S_E убегающего E , заданной на $[0, T]$, соответствующей разбиению σ , называется семейство отображений b_l , $l = 0, \dots, s$, ставящих в соответствие величинам $(t_l, z_1(t_l), \dots, z_n(t_l))$ измеримую функцию $v_l(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $v_l(t) \in V$, $y(t) \in \Omega$ для всех $t \in [t_l, t_{l+1}]$.

Определение 10.2. Кусочно-программной контрстратегией CS_{P_i} преследователя P_i , заданной на $[0, T]$, соответствующей разбиению σ , называется семейство отображений c_l , $l = 0, \dots, s$, ставящих в соответствие величинам $(t_l, z_1(t_l), \dots, z_n(t_l))$ и управлению убегающего $v_l(t)$, $t \in [t_l, t_{l+1})$, измеримую функцию $u_l^i(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$, такую, что $u_l^i(t) \in Q$ для всех $t \in [t_l, t_{l+1}]$.

Определение 10.3. В дифференциальной игре происходит уклонение от встречи, если для любого $T > 0$ существуют разбиение σ отрезка $[0, T]$ и стратегия S_E убегающего E такие, что для любых траекторий $x_i(t)$ преследователей P_i выполнено

$$x_i(t) \neq y(t), \quad t \in [0, T].$$

Пусть далее $\text{Int } A$ и $\text{co } A$ — внутренность и выпуклая оболочка множества A соответственно, $I(l) = \{1, 2, \dots, n + l\}$, $E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}$ — обобщенная функция Миттаг–Леффлера,

$$\lambda_i(v) = \max\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda z_i^0 \in V - v\}, \quad i \in I(0),$$

$$\lambda_{n+j}(v) = \langle p_j, v \rangle, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$\delta_r = \min_{v \in V} \max_{l \in I(r)} \lambda_l(v).$$

Теорема 10.1. Пусть $r = 0$ ($\Omega = \mathbb{R}^k$), $\delta_0 = 0$. Тогда в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что существует $v_0 \in V$ такой, что

$$\lambda_i(v_0) = 0 \quad \text{для всех } i \in I(0).$$

Пусть $T > 0$ — произвольное положительное число. Зададим стратегию убегающего E , полагая

$$\sigma = \{0, T\}, \quad v(t) = v_0 \quad \text{для всех } t \in [0, T].$$

Пусть $u_i(t)$ — произвольное допустимое управление преследователя P_i . Тогда решения систем (10.3) представимы в виде

$$\begin{aligned} z_i(t) &= E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1)z_i^0 + \\ &+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha; \alpha)(u_i(\tau) - v_0) d\tau = \\ &= E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1)z_i^0 + t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha; \alpha + 1)(\bar{u}_i^t - v_0), \end{aligned}$$

где

$$\bar{u}_i^t = \frac{\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha; \alpha) u_i(\tau) d\tau}{t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha; \alpha + 1)} \in V.$$

Действительно, из теоремы 4.1.1 [37, с. 101] следует, что при $0 < \alpha < 1$ функции $E_{1/\alpha}(z; 1)$ и $E_{1/\alpha}(z; \alpha + 1)$ положительны при всех $z \in \mathbb{R}^1$, поэтому при любом значении a и при всех $t > 0$ $\bar{u}_i^t \in V$ в силу выпуклости V .

Покажем, что $z_i(t) \neq 0$ для любого $i = 1, \dots, n$ при всех значениях t , $0 < t \leq T$. Рассуждаем от противного. Если бы для некоторого i_0 нашелся момент времени t^* такой, что было бы выполнено равенство $z_{i_0}(t^*) = 0$, это означало бы, что

$$\bar{u}_{i_0}^{t^*} = v_0 - \frac{E_{1/\alpha}(at^{\alpha}; 1)}{t^{\alpha} E_{1/\alpha}(at^{\alpha}; \alpha + 1)} z_{i_0}^0.$$

В силу определения λ_{i_0} это означало бы, что

$$\lambda_{i_0}(v_0) \geq \frac{E_{1/\alpha}(a(t^*)^\alpha; 1)}{t^{\alpha} E_{1/\alpha}(a(t^*)^\alpha; \alpha + 1)} > 0,$$

что противоречит условию теоремы. Тем самым теорема доказана.

Следствие 10.1. Пусть $r = 0$ ($\Omega = \mathbb{R}^k$), V — выпуклый строго выпуклый компакт с гладкой границей и

$$0 \notin \text{Int co} \{z_1^0, \dots, z_n^0\}.$$

Тогда в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий следствия и [5, с. 15] вытекает, что $\delta_0 = 0$, то есть в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи в силу теоремы 10.1.

Теорема 10.2. Пусть $r = 1$, $\delta_1 = 0$ и $a\mu_1 \leq 0$. Тогда в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что существует $v_0 \in V$ такой, что

$$\lambda_i(v_0) = 0 \text{ для всех } i \in I(0), \quad \lambda_{n+1}(v_0) = \langle p_1, v_0 \rangle \leq 0.$$

Из теоремы 10.1 следует, что если для произвольного $T > 0$ взять разбиение $\sigma = \{0, T\}$ и $v(t) = v_0$, то ни один из преследователей P_i не догонит убегающего E , так как равенство $z_i(t) = 0$ невозможно в силу $\lambda_i(v_0) = 0$, $i \in I(0)$. Осталось лишь убедиться, что убегающий не покидает пределы множества Ω . Рассмотрим скалярное произведение $\langle p_1, y(t) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle p_1, y(t) \rangle &= E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1) \langle p_1, y^0 \rangle + t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha; \alpha + 1) \langle p_1, v_0 \rangle \leq \\ &\leq E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1) \langle p_1, y^0 \rangle. \end{aligned}$$

При $a < 0$ функция $E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1)$ монотонно убывает на отрезке $[0, T]$ от $E_{1/\alpha}(0; 1) = 1$ до $E_{1/\alpha}(aT^\alpha; 1) > 0$, так как ее производная $\frac{d}{dt} E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1) = at^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(at^\alpha; \alpha) < 0$ при всех $t > 0$. Поэтому при $\mu_1 \geq 0$ и при всех $t > 0$

$$\langle p_1, y(t) \rangle \leq E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1) \langle p_1, y^0 \rangle \leq \mu_1.$$

При $a = 0$ $E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1) = E_{1/\alpha}(0; 1) = 1$, поэтому для любого μ_1 и при всех $t > 0$

$$\langle p_1, y(t) \rangle \leq E_{1/\alpha}(0; 1) \langle p_1, y^0 \rangle \leq \mu_1.$$

При $a > 0$ функция $E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1)$ монотонно возрастает на отрезке $[0, T]$ от $E_{1/\alpha}(0; 1) = 1$ до $E_{1/\alpha}(aT^\alpha; 1) > 1$. Поэтому при $\mu_1 \leq 0$ и при всех $t > 0$

$$\langle p_1, y(t) \rangle \leq E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1) \langle p_1, y^0 \rangle \leq \mu_1.$$

Значит, при выполнении условий теоремы управление $v(t) = v_0$ оставляет убегающего в пределах множества Ω . Теорема доказана.

Теорема 10.3 (уклонение в конусе). Пусть $r \geq 1$, $\delta_r = 0$ и $\mu_j = 0$, $j = 1, \dots, r$ (Ω — выпуклый конус). Тогда в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что существует $v_0 \in V$ такой, что

$$\begin{aligned} \lambda_i(v_0) &= 0 \quad \text{для всех } i \in I(0), \\ \lambda_{n+j}(v_0) &= \langle p_j, v_0 \rangle \leq 0, \quad j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Из теоремы 10.1 следует, что если для произвольного $T > 0$ взять разбиение $\sigma = \{0, T\}$ и $v(t) = v_0$, то ни один из преследователей P_i не догонит убегающего E , так как равенство $z_i(t) = 0$ невозможно в силу $\lambda_i(v_0) = 0$, $i \in I(0)$. Из теоремы 10.2 следует, что убегающий не покидает пределы множества Ω , так как при любом значении a и для любого $j = 1, \dots, r$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \langle p_j, y(t) \rangle &= E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1) \langle p_j, y^0 \rangle + t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha; \alpha + 1) \langle p_j, v_0 \rangle \leq \\ &\leq E_{1/\alpha}(at^\alpha; 1) \langle p_j, y^0 \rangle \leq \mu_j = 0. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Значит, при выполнении условий теоремы управление $v(t) = v_0$ оставляет убегающего в пределах выпуклого конуса Ω . Теорема доказана.

Следствие 10.2. Пусть $r > 0$, $\delta_r = 0$ и $a\mu_j \leq 0$ для всех $j = 1, \dots, r$. Тогда в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия $\delta_r = 0$ и теоремы 10.1 следует, что если для произвольного $T > 0$ взять разбиение $\sigma = \{0, T\}$ и $v(t) = v_0$, то ни один из преследователей P_i не догонит убегающего E , так как равенство $z_i(t) = 0$ невозможно в силу $\lambda_i(v_0) = 0$, $i \in I(0)$. Условия $a\mu_j \leq 0$, $j = 1, \dots, r$, обеспечивают выполнение неравенств (10.4), которые, в свою очередь, означают, что убегающий не покидает пределы множества Ω при всех $t > 0$. Значит, в дифференциальной игре происходит уклонение от встречи.

§ 11. Задача о поимке одним преследователем заданного числа убегающих

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $G(1+m)$ с участием $1+m$ лиц: один преследователь P_1 и m убегающих $E_1, \dots, E_m$. Закон движения преследователя P_1 имеет вид

$$(D^\alpha)x_1 = u, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad u \in V.$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$(D^\alpha)y_j = v_j, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad v_j \in V.$$

Здесь $J = \{1, \dots, m\}$, $x_1, y_j, u, v_j \in \mathbb{R}^k$, $V = \{v \mid \|v\| \leq 1\}$, $\alpha \in (0, 1)$, $(D^\alpha)f$ — производная по Капуто функции f порядка α . Считаем, что $x_1^0 \neq y_j^0$ для всех $j \in J$.

Теорема 11.1. Пусть начальные позиции таковы, что $\|y_j^0\| = R$ ($R > 0$) для всех $j \in J$, $\|x_1^0\| > R$. Убегающий E_j использует постоянное управление $v_j = \frac{y_j^0}{\|y_j^0\|}$, $(y_j^0 - x_1^0, v_j) < 0$ для всех $j \in J$, преследователь P_1 знает $v_1, \dots, v_m$. Тогда в игре $G(1+m)$ происходит поимка всех убегающих.

Доказательство. 1. Покажем, что существуют момент $T_m > 0$ и вектор u_m , $\|u_m\| = 1$, для которых будет выполнено равенство $x_1(T_m) = y_m(T_m)$, где $x_1(t)$ — траектория преследователя P_1 , использующая постоянное управление u_m .

Пусть преследователь P_1 использует постоянное управление u на отрезке $[0, T_m]$ (момент T_m будет определен ниже). Тогда

$$x_1(t) = x_1^0 + \frac{t^\alpha u}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad y_m(t) = y_m^0 + \frac{t^\alpha v_m}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Равенство $x_1(t) = y_m(t)$ представимо в виде

$$y_m^0 + \frac{t^\alpha v_0}{\Gamma(1+\alpha)} = x_1^0 + \frac{t^\alpha u_m}{\Gamma(1+\alpha)}. \quad (11.1)$$

Обозначим $z_j^0 = (y_j^0 - x_1^0)\Gamma(1 + \alpha)$, $j \in J$. Из (11.1) следует, что

$$u = v_m + z_m^0 t^{-\alpha}.$$

Потребуем, чтобы $\|u\| = 1$. Получаем уравнение

$$\|z_m^0\|^2 + 2(z_m^0, v_m)t^\alpha = 0.$$

Так как по условию $(z_m^0, v_m) < 0$, то корнем последнего уравнения будет

$$T_m = \left(-\|z_m^0\|^2 / (2(z_m^0, v_m)) \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Полагаем теперь управление преследователя P_1 на $[0, T_m]$ равным $u_m = v_m + z_m^0 \cdot T_m^{-\alpha}$. Получим, что в момент T_m преследователь P_1 осуществит поимку убегающего E_m .

2. Построим далее управление преследователя P_1 , гарантирующее поимку E_{m-1} . Пусть на $[T_m, T_{m-1}]$ преследователь P_1 использует постоянное управление u (момент T_{m-1} будет определен ниже). Тогда для $t > T_m$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_m} (t-s)^{\alpha-1} u_m ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_m}^t (t-s)^{\alpha-1} u ds = \\ &= x_1^0 + \frac{u_m}{\Gamma(1+\alpha)} (t^\alpha - (t-T_m)^\alpha) + \frac{(t-T_m)^\alpha u}{\Gamma(1+\alpha)}, \\ y_{m-1}(t) &= y_{m-1}^0 + \frac{t^\alpha v_{m-1}}{\Gamma(1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Равенство $x_1(t) = y_{m-1}(t)$ представимо в виде

$$(t-T_m)^\alpha u = z_{m-1}^0 + v_{m-1}t^\alpha - (t^\alpha - (t-T_m)^\alpha)u_m.$$

Обозначим $h_m(t) = t^\alpha - (t-T_m)^\alpha$ и рассмотрим функцию

$$f_{m-1}(t) = \|z_{m-1}^0 + v_{m-1}t^\alpha - u_m h_m(t)\|^2 - (t-T_m)^{2\alpha}.$$

Тогда

$$f_{m-1}(T_m) = \|z_{m-1}^0 + v_{m-1}T_m^\alpha - u_m T_m^\alpha\|^2.$$

В силу выбора u_m имеем $u_m T_m^\alpha = v_m T_m^\alpha + z_m^0$. Поэтому

$$f_{m-1}(T_m) = \|z_{m-1}^0 - z_m^0 + T_m^\alpha(v_{m-1} - v_m)\|^2.$$

Так как

$$\begin{aligned} z_{m-1}^0 - z_m^0 &= (y_{m-1}^0 - x_1^0)\Gamma(1 + \alpha) - (y_m^0 - x_1^0)\Gamma(1 + \alpha) = \\ &= \Gamma(1 + \alpha)(y_{m-1}^0 - y_m^0) = \Gamma(1 + \alpha)R(v_{m-1} - v_m), \end{aligned}$$

то

$$f_{m-1}(T_m) = \|v_{m-1} - v_m\|^2 (R\Gamma(1 + \alpha) + T_m^\alpha)^2 > 0.$$

Представим функцию f_{m-1} в виде

$$\begin{aligned} f_{m-1}(t) &= t^\alpha \left(\|z_{m-1}^0\|^2 t^{-\alpha} + 2(z_{m-1}^0, v_{m-1}) - 2(v_{m-1}, u_m)h_m(t) - \right. \\ &\quad \left. - 2t^{-\alpha}h_m(t)(z_{m-1}^0, u_m) + t^{-\alpha}h_m^2(t) + (t^{2\alpha} - (t - T_m)^{2\alpha})t^{-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Так как $(z_{m-1}^0, v_{m-1}) < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_m(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\alpha}h_m^2(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\alpha}(t^{2\alpha} - (t - T_m)^{2\alpha}) = 0$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_{m-1}(t) = -\infty$.

Поэтому существует момент $T_{m-1} > T_m$ для которого

$$f_{m-1}(T_{m-1}) = 0.$$

Выбрав свое постоянное управление u_{m-1} на $[T_m, T_{m-1}]$ в виде

$$u_{m-1} = (T_{m-1} - T_m)^{-\alpha} (z_{m-1}^0 + v_{m-1}T_{m-1}^\alpha - h_m(T_{m-1})u_m),$$

преследователь P_1 в момент T_{m-1} осуществит поимку E_{m-1} .

3. Предположим, что определены векторы $u_m, \dots, u_{k+1}$ и моменты времени $T_m < T_{m-1} < \dots < T_{k+1}$, гарантирующие преследователю P_1 поимку убегающих $E_m, \dots, E_{k+1}$. Построим далее управление преследователя P_1 , гарантирующее поимку убегающего E_k .

Пусть на $[T_{k+1}, T_k]$ преследователь P_1 использует постоянное управление u (момент T_k будет определен ниже). Обозначим

$$h_j(t) = (t - T_{j+1})^\alpha - (t - T_j)^\alpha, \quad s_j(t) = \sum_{l=j}^m u_l h_l(t), \quad j = m-1, \dots, k.$$

Тогда для $t \geq T_{k+1}$ имеем

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{T_m} (t-s)^{\alpha-1} u_m ds + \dots + \right. \\ &+ \dots + \int_{T_{k+2}}^{T_{k+1}} (t-s)^{\alpha-1} u_{k+1} ds + \left. \int_{T_{k+1}}^t (t-s)^{\alpha-1} u ds \right) = \\ &= x_1^0 + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} (h_m(t) u_m + \dots + h_{k+1}(t) u_{k+1} + (t - T_{k+1})^\alpha u) = \\ &= x_1^0 + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} (s_{k+1}(t) + (t - T_{k+1})^\alpha u), \\ y_k(t) &= y_k^0 + \frac{v_k t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Равенство $x_1(t) = y_k(t)$ представимо в виде

$$(t - T_{k+1})^\alpha u = z_k^0 + t^\alpha v_k - s_{k+1}(t).$$

Рассмотрим функцию

$$f_k(t) = \|z_k^0 + t^\alpha v_k - s_{k+1}(t)\|^2 - (t - T_{k+1})^{2\alpha}.$$

Тогда

$$f_k(T_{k+1}) = \|z_k^0 + T_{k+1}^\alpha v_k - s_{k+1}(T_{k+1})\|^2.$$

Из соотношения

$$(T_{k+1} - T_{k+2})^\alpha u_{k+1} = z_{k+1}^0 + T_{k+1}^\alpha v_{k+1} - s_{k+2}(T_{k+1})$$

и равенства

$$\begin{aligned} s_{k+1}(T_{k+1}) &= \sum_{j=k+1}^m u_j h_j(T_{k+1}) = s_{k+2}(T_{k+1}) + u_{k+1} h_{k+1}(T_{k+1}) = \\ &= s_{k+2}(T_{k+1}) + u_{k+1}(T_{k+2} - T_{k+1})^\alpha \end{aligned}$$

следует, что $s_{k+1}(T_{k+1}) = z_{k+1}^0 + T_{k+1}^\alpha v_{k+1}$, поэтому

$$f_k(T_{k+1}) = \|z_k^0 - z_{k+1}^0 + T_{k+1}^\alpha v_k - T_{k+1}^\alpha v_{k+1}\|^2.$$

Так как

$$\begin{aligned} z_k^0 - z_{k+1}^0 &= (y_k^0 - x_1^0)\Gamma(1 + \alpha) - (y_{k+1}^0 - x_1^0)\Gamma(1 + \alpha) = \\ &= \Gamma(1 + \alpha)(y_k^0 - y_{k+1}^0) = \Gamma(1 + \alpha)R(v_k - v_{k+1}), \end{aligned}$$

то

$$f_k(T_{k+1}) = \|v_k - v_{k+1}\|^2 (R\Gamma(1 + \alpha) + T_{k+1}^\alpha)^2 > 0.$$

Кроме того, функция f_k представима в виде

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \\ &= t^\alpha \left(\|z_k^0\|^2 t^{-\alpha} + 2(z_k^0, v_k) - 2(z_k^0, s_{k+1}(t)) t^{-\alpha} - 2(v_k, s_{k+1}(t)) + \right. \\ &\quad \left. + \|s_{k+1}(t)\|^2 t^{-\alpha} + t^{-\alpha} (t^{2\alpha} - (t - T_{k+1})^{2\alpha}) \right). \end{aligned}$$

Так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_j(t) = 0$ для всех $j = k + 1, \dots, m$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\alpha} (t^{2\alpha} - (t - T_{k+1})^{2\alpha}) = 0, \quad (z_k^0, v_k) < 0,$$

то $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_k(t) = -\infty$. Следовательно, существует момент $T_k > T_{k+1}$ для которого $f_k(T_k) = 0$. Выбрав свое управление u_k на $[T_{k+1}, T_k]$ в виде

$$u_k = (T_k - T_{k+1})^{-\alpha} (z_k^0 - s_{k+1}(T_k) + T_k^\alpha v_k),$$

преследователь P_1 в момент T_k осуществит поимку убегающего E_k .

Таким образом доказано, что в игре $G(1, m)$ происходит поимка всех убегающих. Теорема доказана.

Замечание 11.1. Пусть выполнены условия следствия и законы движения каждого участника имеют вид

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{y}_j = v_j, \quad u, v_j \in V, \quad j \in J.$$

Тогда в игре $G(1, m)$ преследователь P_1 осуществит поимку не более одного убегающего [29].

§ 12. Линейная задача группового преследования

В пространстве $\mathbb{R}^k$ рассматривается дифференциальная игра $G(n+1)$ с участием n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и одного убегающего E , описываемый системой вида

$$(D^\alpha)z_i = A_i z_i + B_i u_i - C_i v, \quad u_i \in U_i, \quad v \in V,$$

где $i \in I = \{1, \dots, n\}$, $z_i \in \mathbb{R}^k$, $\alpha \in (0, 1)$, A_i — квадратные матрицы порядка $k \times k$, B_i, C_i — прямоугольные матрицы порядка $k \times q$, $U_i, V \subset \mathbb{R}^q$ — выпуклые компакты. При $t = 0$ заданы начальные условия z_i^0 , $i \in I$.

Целевые множества M_i , $i \in I$, имеют вид $M_i = M_i^1 + M_i^2$, где M_i^1 — линейное подпространство $\mathbb{R}^k$, M_i^2 — выпуклый компакт из L_i^1 — ортогонального дополнения к M_i^1 в $\mathbb{R}^k$. Считаем, что $z_i^0 \notin M_i$ для всех $i \in I$.

Пусть $v: [0, +\infty) \rightarrow V$ — измеримая функция. Предысторией $v_t(\cdot)$ в момент t функции v будем называть сужение функции v на $[0, t]$. Измеримая функция $v: [0, +\infty) \rightarrow V$ называется *допустимой*, если $v(t) \in V$ для всех $t \in [0, +\infty)$.

Определение 12.1. Будем говорить, что задана *квазистратегия* $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i , если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальным данным $z^0 = (z_i^0)$, $i \in I$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в U_i .

Определение 12.2. В игре $G(n+1)$ происходит *поймка*, если существует момент $T_0 = T(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \dots, P_n$ такие, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T_0]$, найдутся номер $j \in I$ и момент $\tau \in [0, T_0]$, для которых $z_j(\tau) \in M_j$.

Определение 12.3. Разностью по Минковскому множеств A и B называется множество

$$A \stackrel{*}{-} B = \{c \mid c + B \subset A\}.$$

Введем следующие обозначения. $\pi_i: \mathbb{R}^k \rightarrow L_i^1$ — оператор ортогонального проектирования, ν_i — размерность L_i^1 ,

$$\xi_i(t) = E_{1/\alpha}(A_i t^\alpha, 1) z_i^0, \quad F_i(t, \tau) = (t - \tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(A_i(t - \tau)^\alpha, \alpha), \\ \Delta = \{(t, \tau) \mid t \geq 0, \tau \in [0, t]\}.$$

Предположение 12.1. Существуют матричные функции $D_i(t, \tau)$ порядка $k \times k$, измеримые по (t, τ) , $(t, \tau) \in \Delta$, такие, что для всех $(t, \tau) \in \Delta$ непусты множества

$$W_i(t, \tau) = \pi_i F_i(t, \tau) B_i U_i \stackrel{*}{-} \pi_i D_i(t, \tau) F_i(t, \tau) C_i V.$$

Введем многозначные отображения

$$W_i^*(t, \tau, v) = \pi_i F_i(t, \tau) B_i U_i - \pi_i D_i(t, \tau) F_i(t, \tau) C_i v, \\ M_i^2(t) = M_i^2 \stackrel{*}{-} \int_0^t \pi_i (D_i(t, s) - \mathbb{E}) F_i(t, s) V ds,$$

где $\mathbb{E}$ — единичная матрица.

Предположение 12.2. Для всех $i \in I$, $t \geq 0$ имеет место неравенство

$$M_i^2(t) \neq \emptyset.$$

Возьмем измеримый селектор $\gamma_i(t, \tau) \in W_i(t, \tau)$. Определим далее

$$\eta_i(t) = \pi_i \xi_i(t) + \int_0^t \gamma_i(t, \tau) d\tau.$$

Теорема 12.1. Пусть выполнены предположения 12.1, 12.2 и существуют номер $l \in I$ и момент $T > 0$, для которых существует селектор $\gamma_l(T, \tau) \in W(T, \tau)$ такой, что $\eta_l(T) \in M_l^2(T)$. Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

Доказательство. Рассмотрим многозначные отображения

$$U_l^2(\tau, v) = \{u_l \in U_l: \pi_l F_l(T, \tau) B_l u_l - \pi_l D_l(T, \tau) F_l(T, \tau) C_l v - \gamma_l(T, \tau) = 0\}.$$

Из предположения 12.1 следует, что $U_l^2(\tau, v) \neq \emptyset$ для всех $\tau \in [0, T]$, $v \in V$. В силу теоремы измеримого выбора [53], в $U_l(\tau, v)$ существует хотя бы один измеримый селектор $u_l(\tau, v)$. Задаем управление преследователя P_l , полагая

$$u_l(t) = u_l^2(t, v(t)), \quad t \in [0, T].$$

Управления остальных преследователей задаем произвольным образом. Получаем

$$\begin{aligned} \pi_l z_l(T) &= \pi_l \xi_l(T) + \int_0^T (\pi_l F_l(T, s) B_l u_l(s) - \pi_l F_l(T, s) C_l v(s)) ds = \\ &= \eta_l(T) + \\ &+ \int_0^T (\pi_l F_l(T, s) B_l u_l(s) - \pi_l D_l(T, s) F_l(T, s) C_l v(s) - \gamma_l(T, s)) ds + \\ &+ \int_0^T (\pi_l D_l(T, s) F_l(T, s) C_l v(s) - \pi_l F_l(T, s) C_l v_l(s)) ds = \\ &= \eta_l(T) + \int_0^T (\pi_l D_l(T, s) F_l(T, s) C_l v(s) - \pi_l F_l(T, s) C_l v_l(s)) ds \subset \\ &\subset M_l^2(T) + \int_0^T (\pi_l D_l(T, s) F_l(T, s) C_l v(s) - \pi_l F_l(T, s) C_l v_l(s)) ds = \\ &= M_l^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В дальнейшем будем считать, что $\eta_i(t) \notin M_i^2(t)$ для всех $i \in I$, $t \geq 0$. Определим функции

$$\begin{aligned} & \lambda_i(t, \tau, v, \gamma_i(\cdot)) = \\ & = \sup\{\lambda \geq 0 \mid W_i^*(t, \tau, v) - \gamma_i(t, \tau) \cap \lambda(M_i^2(t) - \eta_i(t)) \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

и момент времени

$$T = \min\{t \geq 0 \mid \inf_{v(\cdot)} \max_{i \in I} \int_0^t \lambda_i(t, \tau, v(\tau), \gamma_i(\cdot)) d\tau \geq 1\}.$$

Если неравенство в скобках не имеет места для конечного $t \geq 0$, то полагаем $T = +\infty$. Если $\lambda_i(t, \tau, v, \gamma_i(\cdot)) = +\infty$ при некоторых $(t, \tau) \in \Delta$, $i \in I$, $v \in V$, то будем считать, что

$$\int_0^t \lambda_i(t, \tau, v(\tau), \gamma_i(\cdot)) d\tau = +\infty.$$

Теорема 12.2 ([22]). Пусть существуют $\gamma_i(t, \tau)$, $i \in I$, $(t, \tau) \in \Delta$, для которых выполнены предположения 12.1, 12.2 и $T < +\infty$. Тогда в игре $G(n+1)$ происходит поимка.

§ 13. Дополнение

Существуют другие определения производных дробного порядка. Приведем некоторые из них.

1. Производная Римана–Лиувилля.

Пусть даны n — натуральное число, $\alpha \in (n - 1, n)$, функция $f: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Определение 13.1. Функция $(D_*^\alpha)f: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$ вида

$$(D_*^\alpha)f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t \frac{f(s)}{(t - s)^{\alpha+1-n}} ds$$

называется производной Римана–Лиувилля функции f порядка α .

Замечание 13.1. Отметим, что

$$(D_*^\alpha)f \neq (D^\alpha)f.$$

Пример 13.1. Пусть $f(t) = c$ для всех $t \geq t_0$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда

$$(D_*^\alpha)f(t) = \frac{c}{\Gamma(1 - \alpha)} t^{-\alpha}.$$

Пример 13.2. Пусть $f(t) = t$ для всех $t \geq 0$, $\alpha = 1/2$. Тогда

$$(D_*^\alpha)f(t) = \frac{4t - 2t^2}{\sqrt{\pi}}.$$

2. Производная Хильфера.

Определение 13.2. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $f: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$. Интегралом Римана–Лиувилля порядка α называется функция вида

$$(I^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f(s)}{(t - s)^{1-\alpha}} ds.$$

Определение 13.3. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $\mu \in [0, 1]$, $f: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$. Производной Хильфера порядка α типа μ функции f называется функция

$$(D^{\alpha, \mu} f)(t) = I^{\mu(1-\alpha)} \frac{d}{dt} (I^{(1-\mu)(1-\alpha)} f)(t).$$

Замечание 13.2. При $\mu = 0$ производная Хильфера совпадает с производной Римана–Лиувилля, а при $\mu = 1$ производная Хильфера совпадает с производной Капуто.

Пример 13.3. Рассмотрим функцию-константу $f(t) = c$, $t \geq 0$, для которой производные Римана–Лиувилля и Капуто различаются:

$$\begin{aligned} (D^\alpha) f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\frac{d}{ds} c}{(t-s)^\alpha} ds = 0; \\ (D_*^\alpha) f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{c}{(t-s)^\alpha} ds = c \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Вычислим производную Хильфера $(D^{\alpha, \mu} f)(t)$:

$$\begin{aligned} (D^{\alpha, \mu} f)(t) &= I^{\mu(1-\alpha)} \frac{d}{dt} (I^{(1-\mu)(1-\alpha)} f)(t) = \\ &= I^{\mu(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \begin{cases} c \frac{t^{(1-\mu)(1-\alpha)}}{\Gamma((1-\mu)(1-\alpha)+1)}, & 0 \leq \mu < 1, \\ c, & \mu = 1, \end{cases} = \\ &= I^{\mu(1-\alpha)} \begin{cases} \frac{ct^{(1-\mu)(1-\alpha)-1}}{\Gamma((1-\mu)(1-\alpha))}, & 0 \leq \mu < 1, \\ 0, & \mu = 1, \end{cases} = \\ &= \begin{cases} c \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, & 0 \leq \mu < 1, \\ 0, & \mu = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Айзекс Р.* Дифференциальные игры / Р. Айзекс. — Москва: Мир, 1967. — 480с.
- [2] *Банников А. С., Петров Н. Н., Чиркова Л. С.* Введение в дифференциальные игры / А. С. Банников, Н. Н. Петров, Л. С. Чиркова. — Ижевск: Изд-во Удмуртск. ун-та, 2013. — 47с.
- [3] *Берж К.* Общая теория игр нескольких лиц / К. Берж. — Москва: ИФМЛ, 1961. — 128с.
- [4] *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление (линейная теория) / В. И. Благодатских. — Москва: Высшая школа, 2001. — 239с.
- [5] *Благодатских А. И., Петров Н. Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов / А. И. Благодатских, Н. Н. Петров. — Ижевск: Изд-во Удмуртск. ун-та, 2009. — 266с.
- [6] *Вайсборд Э. М., Жуковский В. И.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения / Э. М. Вайсборд, В. И. Жуковский. — Москва: Советское радио, 1980. — 304с.
- [7] *Воробьев Н. Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры / Н. Н. Воробьев. — Москва: Наука, 1984. — 495с.

- [8] *Воробьев Н. Н.* Лекции по теории игр для экономистов кибернетиков / Н. Н. Воробьев. — Москва: Наука, 1985. — 271с.
- [9] *Григоренко Н. Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами / Н. Л. Григоренко. — Москва: Изд-во Московского ун-та, 1990. — 197с.
- [10] *Гусятников П. Б.* Теория дифференциальных игр / П. Б. Гусятников. — Москва: Изд-во МФТИ, 1982. — 99с.
- [11] *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М. М. Джрбашян. — Москва: Наука, 1966. — 672с.
- [12] *Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г.* Введение в прикладную теорию игр / Г. Н. Дюбин, В. Г. Суздаль. — Москва: Наука, 1981. — 336с.
- [13] *Жуковский В. И., Чикрий А. А.* Линейно-квадратичные дифференциальные игры / В. И. Жуковский, А. А. Чикрий. — Киев: Наук. думка, 1994. — 322с.
- [14] *Клейменов А. Ф.* Неантагонистические позиционные дифференциальные игры / А. Ф. Клейменов. — Екатеринбург: Наука, 1995. — 184с.
- [15] *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встречи движений / Н. Н. Красовский. — Москва: Наука, 1970. — 420с.
- [16] *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой: задача о минимуме гарантированного результата / Н. Н. Красовский. — Москва: Наука, 1985. — 520с.
- [17] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры / Н. Н. Красовский, А. И. Субботин. — Москва: Наука, 1974. — 455с.

- [18] *Кривонос Ю. Г., Матичин И. И., Чикрий А. А.* Динамические игры с разрывными траекториями / Ю. Г. Кривонос, И. И. Матичин, А. А. Чикрий. — Киев: Наук. думка, 2005. — 222с.
- [19] *Крушевский А. В.* Теория игр / А. В. Крушевский. — Киев: Вища школа, 1977. — 216с.
- [20] *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А. Б. Куржанский. — Москва: Наука, 1971. — 392с.
- [21] *Лагунов В. Н.* Введение в дифференциальные игры / В. Н. Лагунов. — Вильнюс: Изд-во Ин-та математ. и киберн. АН Литвы, 1979. — 342с.
- [22] *Мачтакова А. И., Петров Н. Н.* К линейной задаче группового преследования с дробными производными / А. И. Мачтакова, Н. Н. Петров // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2022. — Т. 28. № 3. — С. 129–141.
- [23] *Мезенцев А. В.* Дифференциальные игры с интегральными ограничениями / А. В. Мезенцов. — Москва: МГУ, 1988. — 134с.
- [24] *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики / Э. Мулен. — Москва: Мир, 1985. — 200с.
- [25] *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. — Москва: Физматлит, 2003. — 272с.
- [26] *Никольский М. С.* Первый прямой метод Л. С. Понтрягина в дифференциальных играх / М. С. Никольский. — Москва: МГУ, 1988. — 64с.
- [27] *Оуэн Г.* Теория игр / Г. Оуэн. — Москва: Мир, 1971. — 270с.

- [28] *Партхасаратхи Т., Рагхаван Т.* Некоторые вопросы теории игр двух лиц / Т. Партсаратхи, Т. Рагхаван. — Москва: Мир, 1974. — 296с.
- [29] *Петров Н. Н., Петров Н. Никандр.* О дифференциальной игре «казаки-разбойники» / Петров Н. Н., Петров Н. Никандр. // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19. № 8. — С. 1366–1374.
- [30] *Петросян Л. А.* Дифференциальные игры преследования / Л. А. Петросян. — Л.: Изд-во Ленинг. ун-та, 1977. — 224с.
- [31] *Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А.* Теория игр / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. — Москва: Высшая школа, 1998. — 304с.
- [32] *Петросян Л. А., Томский Г. В.* Геометрия простого преследования / Л. А. Петросян, Г. В. Томский. — Новосибирск: Наука, 1983. — 144с.
- [33] *Петросян Л. А., Томский Г. В.* Динамические игры и их приложения / Л. А. Петросян, Г. В. Томский. — Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1982. — 252с.
- [34] *Петросян Н. А., Гарнаев А. Ю.* Игры поиска / Л. А. Петросян, А. Ю. Гарнаев. — Санкт-Петербург: Изд-во Санкт-Петерб. ун-та, 1992. — 216с.
- [35] *Петросян Л. А., Рихсиев Б. Б.* Преследование на плоскости / Л. А. Петросян, Б. Б. Рихсиев. — Москва: Наука, 1991. — 96с.
- [36] *Понтрягин Л. С.* Избранные научные труды. Т. 2 / Л. С. Понтрягин. — Москва: Наука, 1988. — 576с.

- [37] *Попов А. Ю., Седлецкий А. М.* Распределение корней функции Миттаг–Леффлера / Попов А. Ю., А. М. Седлецкий // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2011. — Т. 40. — С. 3–171.
- [38] *Протасов И. Д.* Теория игр и исследования операций / И. Д. Протасов. — Москва: Гелиос АРВ, 2003. — 368с.
- [39] *Пшеничный Б. Н.* Простое преследование несколькими объектами / Б. Н. Пшеничный // Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145–146.
- [40] *Пшеничный Б. Н., Остапенко В. В.* Дифференциальные игры / Б. Н. Пшеничный, В. В. Остапенко. — Киев: Наукова думка, 1992. — 260с.
- [41] *Рихсиев Б. Б.* Дифференциальные игры с простым движением / Б. Б. Рихсиев. — Ташкент: Фан, 1989. — 232с.
- [42] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. — Москва: Мир, 1973. — 472с.
- [43] *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688с.
- [44] *Сатимов Н. Ю.* Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр / Н. Ю. Сатимов. — Ташкент: Изд-во Национальной библиотеки Узбекистана имени Алишера Навои, 2019. — 230с.
- [45] *Сатимов Н., Рихсиев Б. Б.* Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления / Н. Ю. Сатимов, Б. Б. Рихсиев. — Ташкент: Фан, 2000. — 178с.

- [46] *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления / А. И. Субботин, А. Г. Ченцов. — Москва: Мир, 1981. — 288с.
- [47] *Ухоботов В. И.* Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями общего вида / В. И. Ухоботов. — Челябинск: Изд-во Челябинск. ун-та, 1998. — 78с.
- [48] *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования / А. Ф. Филиппов // Вестник МГУ. Серия Математика, механика. — 1959. — № 2. — С. 25–32.
- [49] *Черноусько Ф. Л., Меликян А. А.* Игровые задачи управления и поиска / Ф. Л. Черноусько, А. А. Меликян. — Москва: Наука, 1978. — 272с.
- [50] *Чикрий А. А.* Конфликтно управляемые процессы / А. А. Чикрий. — Киев: Наукова думка, 1992. — 386с.
- [51] *Чикрий А. А., Матичин И. И.* Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка / А. А. Чикрий, И. И. Матичин // Доповіді Національної академії наук України. — 2007. — № 1. — С. 50–55.
- [52] *Харшаньи Дж., Зельтен Р.* Общая теория выбора равновесия в играх / Дж. Харшаньи, О. Зельтен. — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2001. — 406с.
- [53] *Aubin J. P., Frankowska H.* Set-valued analysis / J. P. Aubin, H. Frankowska. — Boston: Birkhäuser, 1990.— 461p.
- [54] *Blaquiere A., Gerard F., Leitmann G.* Quantitative and qualitative differential games / A. Blaquiere, F. Gerard, G. Leitmann. — New York: Academic Press, 1969. — 322p.

- [55] *Caputo M.* Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II // Geophys. R. Astr. Soc. 1967. No. 13. P. 529–539.
- [56] *Friedman A.* Differential games / A. Friedman. — New York: John Wiley and Sons, 1971. — 368p.
- [57] *Hajek O.* Pursuit games / O. Hajek. — New York: Academic Press, 1975. — 266p.
- [58] *Lewin J.* Differential games: theory and methods for solving game problems with singular surfaces / J. Lewin. — New York: Springer, 1994. — 242p.

СОДЕРЖАНИЕ

Обозначения	3
Предисловие	4
Гамма-функция	6
Функция Миттаг–Лефлера	8
Производная по Капуто	10
Формула Коши	13
Простое преследование на плоскости при геометрических ограничениях	17
Простое преследование на плоскости при интегральных ограничениях	26
Задача простого группового преследования с геометрическими ограничениями на управления	33
Линейная задача группового преследования с геометрическими ограничениями на управления	39
Линейная задача группового преследования с фазовыми ограничениями	43
Задача уклонения от группы преследователей	47
Задача о поимке одним преследователем заданного числа убегающих	53
Линейная задача группового преследования	59
Дополнение	63
Список рекомендуемой литературы	64

Учебное издание

Банников Александр Сергеевич,
Петров Николай Никандрович

**ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
ИГРЫ С ПРОИЗВОДНЫМИ
ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

Учебное пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 25.09.2025. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 4,24. Уч.-изд. л. 2,96.
Тираж 29 экз. Заказ № 1469.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4 Б, каб. 021
Тел.: +7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра
«Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18, 91-73-05