RU EN ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ ISSN 2079-3316
научная статья искусственный интеллект, интеллектуальные системы, нейронные сети

УДК 004.421.2 + 004.891.2 + 510.649
10.25209/2079-3316-2025-16-4-119-154

Прикладные модели и задачи силлогистики

Юрий Михайлович **Сметанин**✉
Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
✉*gms1234gms@rambler.ru*

Аннотация. Проблемы становления понятийного (когнитивного) мышления тесно связаны с приложениями логики. Однако, при этом не менее тесно они связаны с философией. В приложениях важно не только формально, но и содержательно понимать: что есть **истина** и **ложь**; почему и как *логическая модель причинно-следственных связей может оказаться неадекватна реальности.*

Силлогистики Аристотелева типа (Васильева Н.А., Венна, Керрола), алгебра логики Буля могут быть построены на общей онтологической основе – алгебраической системе, включающей Булеву алгебру множеств и объемные отношения между модельными множествами.

Рассматривается силлогистика L_{S_2}, обладающая свойством модельной полноты. В ней определено непарадоксальное логическое следование. Областью интерпретации формул являются дискретные диаграммы Венна (ДДВ), построенные на модельных множествах. Универсум и модельные множества задаются как конечные множества из неотрицательных целых чисел.

Установление того факта, что логическое содержание посылки включает в себя логическое содержание заключения для любых правильных формул, сводится к проверке включения множеств, которые являются семантическими значениями посылки и заключения. Это указывает на наличие свойства разрешимости силлогистики. Формула может быть односмысловой (ОС) или многосмысловой (МС). Семейство ДДВ является семантическим значением МС формулы. ОС Формула в качестве семантического значения имеет одну ДДВ. Все формулы разделяются на законы, выполнимые формулы и противоречия.

Рассмотрены содержательные примеры, подтверждающие теоретические положения. Предложенная силлогистика была протестирована для решения задач с максимальным количеством модельных множеств, равным 22. При создании программного обеспечения, основанного на распараллеливании процесса вычисления семантического значения формулы, можно решать задачи со значительно большим количеством модельных множеств.

Ключевые слова и фразы: Прикладная силлогистика, конституенты, парадоксы материальной импликации, дискретные диаграммы Венна, логическое следование, модусы Аристотеля, логико-семантические модели

Для цитирования: Сметанин Ю. М. *Прикладные модели и задачи силлогистики* // Программные системы: теория и приложения. 2025. **Т. 16**. № 4(67). С. 119–154. `https://psta.psiras.ru/read/psta2025_4_119-154.pdf`

Введение

В будущем информационном обществе основным богатством станут когнитивные способности людей творить новые знания и технологии, то есть их творческий потенциал. Когнитивные способности не наследуются, поэтому с необходимостью появится новое богатство в форме интеллектуального капитала и новая экономика, несущая в себе новые способы обращения капитала знаний. Потребуются люди, обладающие способностью выявлять скрытые закономерности мироустройства, строить содержательные интерпретации происходящего, систематизировать имеющиеся знания и порождать новые идеи, создавать концепции и теории, то есть люди, способные к пониманию мира. Недостаток таких людей в обществе *чреват катастрофическими последствиями* при передаче прав по принятию решений искусственному интеллекту в любой сфере деятельности.

В процессе трудовой деятельности у человека развивается способность сравнивать, видеть логические связи между предметами и явлениями, а затем и обобщать увиденное. Такое обобщение влечет за собой формирование, усвоение, перенос, обобщение и конкретизацию понятий – как уже существующих в социуме, так и созданных внутри собственного опыта. Логические компоненты мышления [**12**] относятся к методологическим знаниям, без которых невозможно разрабатывать способы решения творческих задач. Это умение необходимо в грядущем информационном обществе.

В предлагаемой ассертотической силлогистике устранен основной недостаток, которым является многосмысловость интерпретации их конъюнктивных формул и атомарных суждений в диаграммах Венна и вычислительные трудности связанные с их цифровым представлением.

Показано, что рассуждения с использованием предлагаемой силлогистики проще и «точнее». Разработано программное средство для моделирования логической задачи и выявления логического следования. Полученные результаты используются при обучении студентов и магистрантов.

В работе рассматриваются и сравниваются модели классической логики на примере Булевой логики высказываний, ассертотической силлогистики Аристотеля и ее обобщения и силлогистики L_{S_2}. Оценивается их пригодность для решения следующих задач.

Задача 1 : проверить логическое следование заданного заключения из заданных посылок.

Задача 2 : выявить как можно больше следствий из данной системы посылок.

Задача 3 : возможно ли, изменив данную совокупность посылок, получить нужное следствие.

1. Предварительные замечания про адекватность логико-семантических моделей

1. Главным качеством любой модели является ее адекватность поставленной цели, то есть возможность реализации цели на основе познания данной модели. Каждая модель является сознательным (бессознательным) упрощением оригинала и поэтому является его проекцией в область, в которой некоторые, не важные с точки зрения достижения цели свойства оригинала, не воспроизводимы.

Не менее важным качеством модели является ее вычислительная сложность и наглядность интерпретации результатов вычислений. Наилучшие модели имеют существенное (с точки зрения цели) сходство с оригиналом и существенное различие, выражаемое в отсутствии воспроизводимости тех свойств, которые в ней не целесообразно отражать. Например, модель цилиндрической бочки в виде круга не имеет сходства с оригиналом, существенного для принятия решений о том, какие точки внутри нее, изображаемые их двумерными проекциями, ближе расположены к центру ее дна – точке O. Очевидно, эта модель не может служить для сравнения расстояний от точек внутри бочки до центра ее дна.

2. Импликативное высказывание представляет в языке логики условное высказывание вида «если ..., то ...» обычного языка. Оно играет особую роль как в повседневных, так и в научных рассуждениях, *основной его функцией является обоснование одного путем ссылки на нечто другое.* В логике эта роль отражается посредством импликации и понятия логического следования. Имеется несколько импликаций, различающихся своими формальными свойствами. Наиболее известны из них:

(*а*) Материальная импликация, определяемая стандартной таблицей истинности (является парадоксальной).

(*б*) Строгая импликация утверждает, что заключение B необходимо вытекает из посылки A.

(*в*) Релевантная (уместная) импликация предполагает наличие смысловой связи между суждениями A и B.

Строгая импликация определяется через модальное понятие (логической) невозможности: «A строго имплицирует B» означает «Невозможно, чтобы A было истинно, а B ложно». Она тоже парадоксальна. В ней логически истинное (необходимое) высказывание вытекает из любого другого высказывания и из логически ложного высказывания вытекает какое угодно высказывание.

В релевантной импликации нельзя сказать, что истинное высказывание может быть обосновано путем ссылки на любое высказывание и что с помощью ложного высказывания можно обосновать какое угодно высказывание, то есть она требует привязки к конкретной области – учета в ней смысловой связанности A и B, то есть не универсальна. Для того, чтобы правильно сформулировать и решать прикладные задачи, необходимо использовать в системе посылок только истинные суждения. В научной деятельности истинность суждений определяется гносеологическими предпосылками, которые являются отражением реальности в понятиях третьего мира по К. Попперу [**7**]. Процесс верификации истины является нетривиальным творческим процессом, наверное, не алгоритмизируемым в принципе. В отличие от этого, при обучении конкретным наукам, посылки любого рассуждения уже верифицированы на истинность в рамках существующих на данный момент научных истин. Поэтому решение в них учебных задач (*а*)–(*в*) формирует так называемое логичное мышление [**10**].

3. Третьей проблемой является ответ на вопрос «что есть истина?» для предметной области. Логика – наука о формах правильного мышления. Правильное мышление приближает нас к истине. В реальности истина одна и конкретна, заблуждение многолико, а правда у каждого своя. Из этого и из формализации понятия истины в современной логике, следует, что оно, по крайне мере, является интуитивным.

Это обусловлено проекционным механизмом, на основе которого получаются ментальные модели понятий окружающего мира [**11**]. Понятия у каждого индивидуума имеют инвариантную общую для всех часть и личностную компоненту, которая отражает механизм индивидуальной проекции явлений мира в его психику. Это подтверждается фундаментальными исследованиями А. Тарского. Им утверждается, что любое предложение для научного языка, трактуемое как истина, не дает критерия, на основании которого можно было бы определить, является ли оно в данном языке истинным или ложным.

«Рассмотрим, например, следующее предложение: „*Три биссектрисы любого треугольника пересекаются в одной точке*“. Вопрос об истинности этого предложения сводится к тому, что данное высказывание является истинным в том случае, если биссектрисы треугольника всегда пересекаются в одной точке, и ложным, если они не всегда пересекаются в одной точке. То есть, в мире, описываемом предложениями данного языка, истинность утверждения о биссектрисах сводится к его выполнимости в данном мире, по существу, к семантическому смыслу данного утверждения» [**8**] с. 141.

Аналогично для других частных наук: решение вопроса о том, истинно данное утверждение или нет, является задачей конкретной науки, а не логики или теории истины.

Тарский предложил также и общее определение истины, обсуждение которого выходит за рамки данной работы. Оно идентично понятию выполнимости формул в исчислении классов [9]. Таким образом, предложение является истинным, если выполняется его смысловое содержание в области интерпретации, то есть оно отмечает действительное положение дел в модели конкретного мира. Следовательно, истинность утверждения состоит в его согласии с реальностью, что также указывает на адекватность логической модели в которой оно получено.

Мы будем использовать интуитивное понятие истины как выполнимости заданного логического отношения в модифицированной логике классов Порецкого П. С. (1846-1907), названной *ассертотической силлогистикой* L_{S_2}.

Замечание 1. *Для конструирования формул*[1] *из атомарных суждений силлогистики* L_{S_2} *мы используем три логических операции «и, или, не», обозначаемых как* $\left\langle \cdot, +, ' \right\rangle$. *Также обозначаются операции пересечения, объединения и дополнения множеств до универсума. Какая операция имеется ввиду всегда видно из контекста формулы.*

Операция конъюнкции двух правильно построенных формул (ППФ) Q_1 *и* Q_2 *есть ППФ. Эта конъюнкция* – $Q_1 \cdot Q_2$ *есть выполнимая формула (она выполняется в области интерпретации), если выполняются оба составляющих ее конъюнкта. ППФ* – $Q_1 + Q_2$ *выполнима, если выполняется хотя бы один из ее дизъюнктов. ППФ* – Q_1' *выполняется, если не выполняется* Q_1. *Все ППФ делятся на три класса* выполнимые, законы и противоречия *см. определения 5 и 6 в разделе 2.4.2.*

2. Используемые теоретические результаты

2.1. Генетическое родство логики Буля и силлогистики Аристотеля

Рассмотрим алгебраические системы

$$(1)\quad \lambda = \langle \omega, \{\,\cdot,\ +,\ '\,\},\ \{\subseteq\}\rangle,\quad \omega = \{1\},\quad x_i \subseteq \omega,\quad i = \overline{1,n};$$

$$(2)\ \Lambda_{\subseteq} = \langle \Omega(\tilde{\aleph}_i)\{+,\ \cdot,\ '\}, \{\subseteq\}\rangle,\quad \aleph_i \subseteq \Omega(\tilde{\aleph}_i),\quad i = \overline{1,n};$$

$$(3)\quad A = \left\langle U(\tilde{X}_n), \{+,\cdot,'\}, \{=,\subset\} \right\rangle,\quad X_i \subseteq U(\tilde{X}_n) \subseteq \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\},\quad i = \overline{1,n}.$$

[1] выражающих утверждения естественного языка

Опорные множества (универсум) этих алгебраических систем $\omega(\tilde{x}_n)$, $\Omega(\tilde{\aleph}_i)$, $U(\tilde{X}_n)$ содержат любые множества, составленные из объединений некоторых или всех конституент множеств $\tilde{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\tilde{\aleph}_i = \tilde{\aleph}_1, \tilde{\aleph}_2, \ldots, \tilde{\aleph}_n$, $\tilde{X}_n = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n)$[2]. Некоторые из конституент могут быть пустыми. Например, констиуенты модельных множеств $\tilde{\aleph}_i$ составляются и нумеруются по принципу

$$K(j) = {\aleph_1}^{\sigma_1} \cdot {\aleph_2}^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot {\aleph_n}^{\sigma_n}, \quad \aleph_i^{\sigma_i} = \begin{cases} \aleph_i, & \sigma_i = 1 \\ {\aleph_i}', & \sigma_i = 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$j = (\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n)_{(2)},$$

где индекс в последней записи означает двоичную систему счисления.

Логика высказываний строится на основе (1), традиционная силлогистика Аристотеля – на основе (2). Рассматриваемая в работе универсальная ассертотическая силлогистика базируется на (3).

2.2. Вырожденная модель

Алгебраическая система (1) включает в себя вырожденную булеву алгебру множеств. Опорное множество[3] $\omega(\tilde{x}_n) = \{1\}$ является одноэлементным и может быть составлено как объединение полных конъюнкций (конституент) модельных множеств (булевых переменных). Отличительной чертой логики Буля является вырожденность ее булевой алгебры, в результате чего моделирование в ней причинно-следственных связей связано с парадоксами материальной импликации (см. пример 1). Область интерпретации представлена пустым и универсальным множествами. Алгебра логики Буля имеет модель логического следования для булевых переменных со значениями $\emptyset$ и $\{1\}$ в виде отношения равенства и не строгого включения множеств

$$x \subseteq y \equiv \underbrace{(\emptyset \subseteq \emptyset) + (\emptyset \subseteq \{1\})}_{The\, source\, of\, paradoxes} + (\{1\} \subseteq \{1\}).$$

Как легко видеть это отношение тождественно материальной импликации.

2.2.1. *Модель с противоречивой системой посылок*

Пример 1. *Рассмотрим модель в классической логике высказываний. Пусть имеются пять булевых признаков. От логических отношений между ними зависит появление некоторого интересующего нас события (явления) S. Бинарный индикатор наличия S обозначим как s. Пусть*

[2] эти множества принято называть модельными

[3] по традиции обозначается как 1, пустое множество обозначается как 0

требуется проверить гипотезу о существовании причинно-следственных связей между признаками, используя модель, задаваемую формулой (5). *При этом подразумевается, что связи в реальности реализуются, если антецеденты импликаций истинны. Проверить, является ли данная система посылок противоречивой, и, если это так, то как ее изменить, чтобы устранить противоречие.*

Решение. Отметим еще раз, что импликации 1, 2, 4, 5, 6, если они отражают реальные явления, должны быть истинны в непарадоксальном смысле, то есть истинны в случае истинности антецедента. Из нижнего равенства, среди двух равносильных равенств (5), легко получить изоморфную ему формулу силлогистики L_{S_2} рассматриваемой в данной работе (см. пример 2):

$$\begin{gathered}
s:\quad \underbrace{(x_1x_5 \Rightarrow x_2)}_{1}\cdot\underbrace{({x_5}' \Rightarrow x_2{x_3}')}_{2}\cdot\underbrace{(x_1{x_3}' + {x_1}'x_3)}_{3}\cdot\underbrace{(x_5 \Rightarrow {x_4}')}_{4}\\
\cdot\underbrace{({x_2}' \Rightarrow {x_3}'x_5)}_{5}\cdot\underbrace{({x_2}'x_3 \Rightarrow x_4{x_5}')}_{6} = 1,\\
\underbrace{((x_1x_5)' + x_2)}_{1}\cdot\underbrace{(x_5 + x_2{x_3}')}_{2}\cdot\underbrace{(x_1{x_3}' + {x_1}'x_3)}_{3}\cdot\underbrace{({x_5}' + {x_4}')}_{4}\\
\cdot\underbrace{(x_2 + {x_3}'x_5)}_{5}\cdot\underbrace{(({x_2}'x_3)' + x_4{x_5}')}_{6} = 1,
\end{gathered}\tag{5}$$

(6)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	j
0	1	1	0	1	13
1	1	0	0	0	24
1	1	0	0	1	25
1	1	0	1	0	26

.

С точки зрения логики высказываний, формулы из левой части равенств (5) не являются противоречием, так как существуют четыре выполняющих подстановки (6).

Однако, на подстановке номер 13 из (6) первая импликация истинна, когда антецедент ложен поэтому она неправильно отражает причину появления события S . На подстановке 24 ложным является анетецедент импликации номер 2. Тоже самое для подстановки 25, на которой ложен антецедент импликации 5. На подстановке 26 ложен антецедент импликации 5 и 6. Таким образом, формула (5) является неадекватной моделью. Смотри также пример 2. □

Замечание 2. *Выполнимость формулы алгебры логики не гарантирует того, что она является адекватной моделью.*

2.3. Логики с непарадоксальным логическим следованием

Алгебраическая система (2) является базой для построения логик с непарадоксальной моделью следования, например силлогистики Аристотеля, Васильева, Керрола [4]. Причинно-следственные связи отражаются отношением нестрогого включения $X \subseteq Y$ непустых и неуниверсальных подмножеств универсума U. Пусть $e \in U$, тогда из $e \in X$ логически следует, что $e \in Y$. Обратное утверждение может не выполнятся:

$$X \subseteq Y \equiv (e \in X \vDash e \in Y) \cdot [(e \in Y \nvDash e \in X) \oplus (e \in Y \vDash e \in X)]. \tag{7}$$

Замечание 3. *Поскольку в математике пустое множество не является элементом непустого, то категорическое суждение AXY равносильно по смыслу утверждению – «все элементы X являются элементами множества Y». Это указывает на непустоту множеств X и Y. Исходя из этого, была построена традиционная силлогистика.*

Основным недостатком ее является многосмысловость суждений и модельная неполнота [4]. Модельная неполнота означает, что не каждой модельной схеме можно сопоставить формулу, семантику которой эта модельная схема выражает. Достоинством является то, что модель причинно-следственных связей (7) непарадоксальна, потому что при $X = \emptyset$ ее нельзя применять (она становится бессмысленной).

Использование традиционных диаграмм Венна для для верификации логического следования рассмотрено в работе [3]. Нетривиальной задачей является построение диаграммы Венна для заданных отношений между модельными множествами и ее визуализация с помощью компьютера. Эта задача решается посредством перехода к дискретным диаграммам Венна.

Силлогистика Аристотеля оперирует многосмысловыми категорическими суждениями. Относительно их семантического содержания, которое имел в виду Стагирит, исследователи до настоящего времени не пришли к полному согласию [4]. Предполагаемая причина этого в мировоззрении Аристотеля[4,5].

---

[4] То, что преподавал Аристотель Александру Македонскому в роще около Миезы про управление государством и то, что он опубликовал для остальных, по свидетельству Плутарха разнятся.

Прошу извинить за возможные некорректности. Якобы Аристотель отвечал, что упреки Александра в опубликовании тайных знаний напрасны, так как они опубликованы и как бы не опубликованы. Это двуличие подтверждается в его трудах о государстве, где вместо равенства граждан предлагается сословная иерархия и при этом провозглашается лозунг «ребята, давайте жить дружно». При этом практическая реализация учения о государстве на основе предлагаемой структуры сводится к неоглашенному принципу «разделяй и властвуй», см. [6] страницы 119-120.

[5] Логика, нацеленная на герметизацию исповедуемых элитой знаний, чревата

Путь имеется конечный список букв $X, Y, \ldots, Z$ (возможно с индексами) которыми обозначены модельные множества представляющие термины рассуждений. Проанализируем категорические суждения традиционной силлогистики интерпретируя их в терминах объемных соотношений модельных множеств.

Общеутвердительные: AXY – все элементы множества X являются элементами множества Y.

Общеотрицательные: EXY – все элементы множества X не являются элементами множества Y.

Частноутвердительные: IXY – некоторые (возможно все) элементы множества X являются элементами Y.

Частноотрицательные: OXY – некоторые (возможно все) элементы множества X являются элементами Y.

Пустое множество не содержит элементов, поэтому во всех категорических суждениях множества X и Y не пустые. Для того, чтобы в традиционной силлогистике решать прикладные задачи, ее необходимо пополнить утверждениями о пустом и универсальном множестве и отношении их с терминами. Смысловое содержание бинарных отношений на фоне универсума изображено на рисунке 1. В нижнем ряду указаны невырожденные отношения, называемые жергонновыми потому, что первые пять из них без учета универсума были использованы Жергонном. Существует и шестнадцатое отношение $G_0(X, Y)$, в котором универсум и модельные множества пусты. Эта противоречивая модель, не имеющая прикладного значения, не входит в список бинарных отношений Жергонна.

По традиции областью интерпретации силлогистик, построенных на основе алгебраических систем (1)–(3), выбраны классические диаграммы Венна. Принципиальное отличие силлогистики S_{L_2} построенной на основе третьей из них (3) от аристотелевой в том, что формуле, состоящей из конъюнкции ее базовых сужений, сопоставляется в точности одна диаграмма Венна, в то время как категорические суждения и их конъюнкции имеют многосмысловое содержание.

2.4. Асертотическая силлогистика L_{S_2}

В основе предлагаемой силлогистики лежит третья из алгебраических систем (3). Она может быть, при упорядочении модельных множеств, представлена модельной схемой (8), которую также уместно называть алгебраической онтологией (А-онтология). Эта схема выражает семантику логического отношения между модельными множествами. Будем называть ее *дискретной диаграммой Венна* (ДДВ).

кризисом власти и катастрофическими ошибками искусственного интеллекта.

$$I_n = \left\langle U(\widetilde{X}_n), X_1, X_2, \ldots, X_n \right\rangle, \qquad \widetilde{X}_n = \langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle, \tag{8}$$

где $U = U(\widetilde{X}_n) \subseteq \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ – универсум, $X_i \subseteq U$ – модельные множества, составленные из номеров конституент $K(j)$ в (8).

Универсум $U(n) = U(\widetilde{X}_n)$ из (8) и модельные множества носят название конституентных множеств.

$$\begin{gathered} K(j) = {X_1}^{\sigma_1} \cdot {X_2}^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot {X_n}^{\sigma_n}, \qquad X_i^{\sigma_i} = \begin{cases} X_i, & \sigma_i = 1 \\ X_i', & \sigma_i = 0, \end{cases} \\ j = (\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n)_{(2)}. \end{gathered} \tag{9}$$

Двойственной к конституенте $K(j)$ (9) является дизституента $D(j')$.

$$\begin{gathered} D(j') = K(j)' = {X_1}^{\sigma_1'} + {X_2}^{\sigma_2'} + \ldots + {X_n}^{\sigma_n'}, \quad j' {=} (\sigma_1' \sigma_2' \ldots \sigma_n')_{(2)}; \\ \sigma_i' = 1 - \sigma_i; \qquad j' = 2^n - j - 1; \qquad D(j') = U(\tilde{X}_n^0) \setminus \{j\}. \end{gathered} \tag{10}$$

Модельная схема (8) определяется объемами своих модельных множеств. Схемы отличаются одна от другой составом непустых (либо пустых) конституент.[6]

Между заданным набором модельных множеств $\tilde{X}_i = \langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ и семейством непустых конституент существует однозначное соответствие. Непустые конституенты будем называть конституентами *единицы*, а пустые констиуентами *нуля*, а их совокупности *единицей* ($\mathbf{M}$) и *нулем* ($\mathbf{N}$) модельной схемы (8). Введем в рассмотрение каноническую дискретную модельную схему (11) в которой $\mathbf{N}(U^0(n)) = \emptyset$,

$${I_n}^0 = \left\langle U(\tilde{X}_n^0), X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0 \right\rangle, \qquad \tilde{X}_n^0 = \langle X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0 \rangle, \tag{11}$$

где $U^0(n) = U(\tilde{X}_n^0) = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, а модельные множества X_i^0 определяются как константы наборами кортежей

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & * & \ldots & * & * \\ * & \mathrm{I} & \ldots & * & * \\ & & \ldots & & \\ * & * & \ldots & \mathrm{I} & * \\ * & * & \ldots & * & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{matrix} = X_1^0 \\ = X_2^0 \\ \ldots \\ = X_{n-1}^0 \\ = X_n^0 \end{matrix}, \tag{12}$$

где $\mathrm{I} = \{1\}, \quad * = \{0, 1\}, \quad X_i^0 = \left\langle \underbrace{\{0,1\}}_{1} \times \underbrace{\{0,1\}}_{2} \times \cdots \times \underbrace{\{1\}}_{i} \times \cdots \times \underbrace{\{0,1\}}_{n} \right\rangle.$

Произвольная схема (13) с универсумом $U(n) = U(\widetilde{X}_n) \subseteq U^0(n)$ выражает n-арное логическое отношение и получается из канонической

[6] Число таких схем не более $2^{(2^n)} - 1$. Схема с пустым универсумом не рассматривается.

путем исключения из нее семейства пустых конституент с номерами из $\mathbf{N} = U^0(n) \setminus U(n)$. На этом основан алгоритм сопоставления формуле силлогистики L_{S_2} ее семантического значения. Его можно визуализировать дискретной диаграммой Венна. Для $U(n) \subset U^0(n)$ справедливо равенство

$$I_n = \Big\langle U(n), \underbrace{X_1^0 \cdot U(n)}_{X_1}, \underbrace{X_2^0 \cdot U(n)}_{X_2}, \ldots, \underbrace{X_n^0 \cdot U(n)}_{X_n} \Big\rangle. \tag{13}$$

Из (13) следует, что универсум $U(n)$ однозначно определяет модельные множества X_i поэтому он также выражает n-арное логическое отношение и модельную схему (8). Число n в алгебраических системах (1)–(3) будем называть *размерностью модельной схемы.* В атомарных суждениях (14) силлогистики L_{S_2} [1] могут использоваться ППФ алгебры множеств Буля. Эти суждения задают объемные отношения в универсуме. Семантика

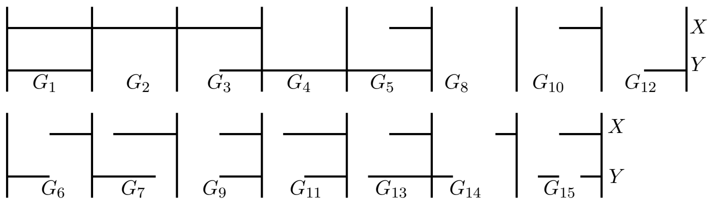

Рисунок 1. Бинарные жергонновы логических отношения

их дана равносильностями (15)–(17), которые наглядно изображаются бинарными жергонновыми отношениями $G_{13}(X,Y), G_9(X,Y), G_{15}(X,Y)$ см. рисунок 1.

$$NOB_S = \Big\langle \underbrace{A(X,Y)}_{S_1}, \underbrace{Eq(X,Y)}_{S_2}, \underbrace{IO(X,Y)}_{S_3}, \underbrace{X = U}_{S_4}, \underbrace{X \subset U}_{S_5} \Big\rangle, \tag{14}$$

$$A(X,Y) \equiv (X \subset Y) \cdot (X \subset U) \cdot (X' \subset U) \cdot (Y \subset U) \cdot (Y' \subset U), \tag{15}$$

$$Eq(X,Y) \equiv (X = Y) \cdot (X \subset U) \cdot (X' \subset U) \cdot (Y \subset U) \cdot (Y' \subset U), \tag{16}$$

$$IO(X,Y) \equiv (X \cdot Y \neq \emptyset) \cdot (X \cdot Y' \neq \emptyset) \cdot (X' \cdot Y \neq \emptyset) \cdot (X' \cdot Y' \neq \emptyset). \tag{17}$$

Определение 1. *Правильно построенные формулы (ППФ) в L_{S_2}:*

1. *Атомарные формулы из (14) есть ППФ;*
2. *Если F_1 и F_2 ППФ, то $(F_1)'$, $(F_1 \cdot F_2)$, $(F_1 + F_2)$ есть ППФ.*

2.4.1. *Отличия традиционной и универсальной ассертотических силлогистик*

Для традиционной силлогистики выполняются соотношения квадрата Пселла.

$$
\begin{aligned}
AXY &\equiv G_9(X,Y)+G_{13}(X,Y),\\
OXY &\equiv G_6(X,Y)+G_7(X,Y)+G_{11}(X,Y)+G_{14}(X,Y)+G_{15}(X,Y)\\
&\equiv (AXY)',\\
EXY &\equiv G_6(X,Y)+G_{14}(X,Y),\\
IXY &\equiv G_7(X,Y)+G_9(X,Y)+G_{11}(X,Y)+G_{13}(X,Y)+G_{15}(X,Y)\\
&\equiv (EXY)'.
\end{aligned}
$$

В L_{S_2} выполняются аналогичные соотношения. Только включают они все жергонновы отношения, но при этом AXY необходимо заменить на $X \subseteq Y$, а EXY на $X \subseteq Y'$:

$$
\begin{aligned}
&(X \subseteq Y)' \equiv (G1+G4+G5+G8+G9+G12+G13)'\\
&\equiv X \nsubseteq Y \equiv (G2+G3+G6+G7+G10+G11+G14+G15),\\
&(X \subseteq Y')' \equiv (G_2+G_4+G_6+G_8+G_{10}+G_{12}+G_{14})'\\
&\equiv X \nsubseteq Y' \equiv (G_1+G_3+G_5+G_7+G_9+G_{11}+G_{13}+G_{15}).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

ППФ в L_{S_2} делятся на односмысловые и многосмысловые. Например, $Eq(X,Y') = G_6(X,Y)$, $A(X',Y) = G_7(X,Y)$, $Eq(X,Y) = G_9(X,Y)$, $A(X',Y') = G_{11}(X,Y)$, $A(X,Y) = G_{13}(X,Y)$, $A(X,Y') = G_{14}$ и $IO(X,Y) = G_{15}(X,Y)$ – невырожденные односмысловые отношения Жергонна в которых модельные множества непусты и неуниверсальны. $G_{10}(X,Y) \equiv (X \subset U)\cdot(X' \subset U)\cdot(Y' = U)$ – вырожденное односмысловое отношение. Атомарные суждения L_{S_2} позволяют однозначно выразить посредством ППФ любое отношение Жергонна. В первом ряду рисунка 1 показаны вырожденные отношения, которые не несут логической связи между X и Y (см. замечание 3).

Все невырожденные отношения Жергонна представляются одной из атомарных формул S_1, S_2 и S_3, а вырожденные конъюнкцией S_4 и S_5. Например, $G_{12}(X,Y) = (X' = U)\cdot(Y \subset U)\cdot(Y' \subset U)$.

Особое место занимает отношение логической независимости $IO(\tilde{X}_n)$. Для $n > 2$ оно представлено канонической схемой (12).

Утверждение $X = U$ эквивалентно по смыслу дизъюнктивному высказыванию $G_1+G_2+G_3$, а $X \subset U$ эквивалентно $G_4+G_5+G_6+G_7+G_8+G_9+G_{10}+G_{11}+G_{12}+G_{13}+G_{14}+G_{15}$ или отрицанию суждения $G_1+G_2+G_3$.

Замечание 4. *Еще одним принципиальным отличием, наряду с использованием ДДВ, является отказ от погружения нашей силлогистики в логику предикатов. Например, если ASP и OSP выражать* [4] *с. 49 как*

$$(19)\qquad SaP \equiv \forall x(S(x) \Rightarrow P(x)) \cdot \exists x(S(x) \equiv A(S,P) + Eq(S,P))$$

$$(20)\qquad \begin{aligned} SoP &\equiv \exists x(S(x) \cdot P(x)') + (\exists x S(x))' \\ &\equiv Eq(S,P') + A(S',P) + A(S',P') + A(S,P') + IO(S,P), \end{aligned}$$

то теряется различение многосмысловости представленное диаграммами Венна на рисунке 1 в обозначениях $X \equiv P$ и $Y \equiv S$. Так как формулы в левых частях равносильностей принимают в качестве семантического значения только значения истина *либо* ложь, *в отличии от* выполнимость, невыполнимость *для атомарных суждений L_{S_2}, соотнесенных с модальностью возможность. Особенно ярко невозможность такого различения иллюстрируется в примерах 3 и 4, логическое следствие в которых нельзя представить в традиционной силлогистике и в логике предикатов.*

2.4.2. *Основные определения и утверждения*

Для определения классов односмысловых (ОС) и многосмысловых (МС) формул рассмотрим конъюнкции формул типа $A(F_i(\tilde{X}_n), F_j(\tilde{X}_n))$, $Eq(F_m(\tilde{X}_n), F_k(\tilde{X}_n))$, $F_r(\tilde{X}_n) = U$ и покажем, как из канонической модельной схемы получить семантическое значение – $U_1(n)$ и $U_2(n)$ первой и второй. В универсумах $U_1(n)$ и $U_2(n)$ выполняются отношения $F_i(\tilde{X}_n) \subset F_j\tilde{X}_n$, $F_m(\tilde{X}_n) = F_k(\tilde{X}_n)$. Учитывая равносильности

$$(21)\qquad \begin{aligned} A(X,Y) &\equiv X \cdot Y' = \emptyset \equiv X' + Y = U \\ Eq(X,Y) &\equiv (X \cdot Y' + X' \cdot Y) = \emptyset \equiv (X' + Y') \cdot (X+Y)' = U, \end{aligned}$$

универсумы $U_1(n)$ и $U_2(n)$ выражаются как

$$\mathbf{M}(A(F_i(\tilde{X}_n), F_j(\tilde{X}_n))) = U_1(n) = F_i(\tilde{X}_n)' + F_j(\tilde{X}_n) \text{ и}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(Eq(F_m(\tilde{X}_n), F_k(\tilde{X}_n))) &= U_2(n) \\ &= (F_m(\tilde{X}_n)' + F_k(\tilde{X}_n)) \cdot (F_m(\tilde{X}_n + (F_k(\tilde{X}_n)'). \end{aligned}$$

Единица конъюнкции этих формул есть пересечение их *единиц* $M(A(F_i(\tilde{X}_n), F_j(\tilde{X}_n)) \cdot Eq(F_m(\tilde{X}_n), F_k(\tilde{X}_n)) = U_1(n) \cdot U_2(n)$. Если в конъюнкции используется формула $F_r(\tilde{X}_n) = U$, то $\mathbf{M}(F_r(\tilde{X}_n)) = F_r(\tilde{X}_n)$.

Замечание 5. *Отметим, что единицы суждений S_1, S_2, S_4, полученные вышеуказанным способом, являются максимальными по числу непустых конститент среди всех остальных, в которых выполняются задаваемые формулами логические отношения. Поэтому пересечение* *их единиц также является максимальным универсумом. С учетом этого будем считать, что эти суждения и их формулы являются односмысловыми* (*см.* рисунок 2). *На нем в левой части изображена* единица, *получаемая из конъюнкции условий задачи Буля* (пример 6). *В центре показана* единица *формулы, полученной из конъюнкции условий Буля путем добавления конъюнкта $X_1 = U$. Чтобы исключить из нее конституенту $K(29)$, нужно добавить в ее формулу еще один конъюнктивный член $D(2)$*

$$\mathbf{M}(K(29)' = U) \equiv \mathbf{M}(\overbrace{(\underbrace{X_{1'} + X_{2'} + X_{3'} + X_4 + X_{5'})}_{D(2)} = U}^{S4}) = U^0(5) \setminus \{29\}.$$

Утверждение 1. Единица *равенства $D(j) = U$ получается из канонической схемы следующим образом $M(D(j) = U) = U^0(n) \setminus \{j'\}$ см.* (10). *Это позволяет любой модельной схеме с $U(n) \subset U^0(n)$ сопоставить ОС ППФ $Q(\tilde{X}_n)$ такую, что $M(Q(\tilde{X}_n)) = U(n)$. Этот факт указывает на модельную полноту силлогистики L_{S_2}, см.* замечание 5. *Согласно ему любой модельной схеме может быть поставлена в соответствие формула – конъюнкция дизституент, каждая из которых выражает пустоту одной из конституент с номером из нуля данной схемы, двойственным к номеру дизституенты.*

Все ППФ L_{S_2} разбиваются односмысловые (ОС) и многосмысловые (МС)[7], см. определение 2. Различие между ними заключается в том, что первым сопоставляется семантическое значение в виде одной модельной схемы, семантика вторых есть семейство модельных схем.

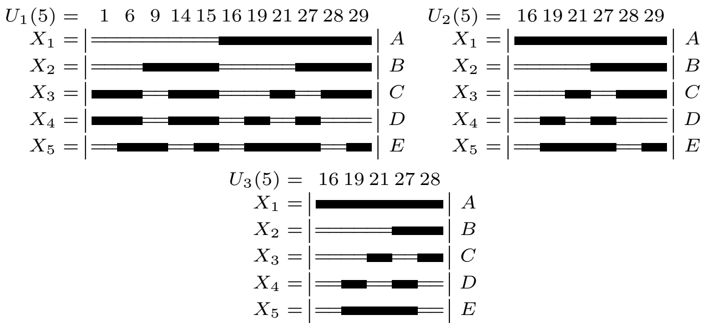

Рисунок 2. Модель задачи Буля, в которой содержится искомое

[7] в предыдущих работах они назывались конъюнктивными и неконъюнктивными

Итак, любую модельную схему с заданым универсумом $U(n)$ можно получить из канонической (13) посредством удаления некоторого количества конституент. В то же время, любой модельной схеме можно сопоставить ОС ППФ, семантическим значением которой является эта схема. Для того, чтобы получить схему с заданными посредством ППФ логическими отношениями, предложен М-алгоритм вычисления семантического значения ППФ [1], который обладает высоким уровнем параллелизма на уровне задач, уровне данных, уровне алгоритмов, реализующих операции над конституентными множествами.

В основе алгоритма лежит процедура вычисления модельной схемы для ОС ППФ. Любая ОС ППФ предствляется как конъюнкция не менее одного из атомарных конъюнктов

$$A(F_1(\tilde{X_n}), F_2(\tilde{X_n})), \qquad Eq(F_1(\tilde{X_n}), F_2(\tilde{X_n})), \qquad IO(F_1(\tilde{X_n}), F_2(\tilde{X_n})),$$
$$F_2(\tilde{X_n}) = U(n), \qquad F_1(\tilde{X_n}) \subset U(n).$$

Алгоритм пытается построить максимальную по объему универсума модельную схему, в которой выполняются все атомарные конъюнкты и принимает ее универсум за семантическое значение ОС формулы:

- Если в получаемой модельной схеме выполняются не все атомарные конъюнкты, то такая формула считается противоречием.
- Если выполняются все, то формула является законом либо выполнимой.

Особенностью алгоритма построения максимальной модельной схемы по конъюнкции атомарных формул является то, что для конъюнктов, выражающих суждения S_3 и S_5, *единицы* не вычисляются, вместо этого в универсуме получаемой пересечением *единиц* конъюнктов, выражающих суждения S_1, S_2, S_4, проверяется выполнение (невыполнение) их отношений и отношений, задаваемых суждениями S_3, S_5. См. определение 2.

В искомой модельной схеме, если это возможно, должны выполняться все отношения, задаваемые этими конъюнктами. Для получения ее из канонической модельной схемы (12) с универсумом $U^0(n)$ необходимо убрать некоторое семейство конституентных номеров, которые входят в объединение нулей неделимых конъюнктов. Вычисление их регламентируется теоремой 1. Теорема гарантирует однозначность получения результата в процессе введения отношений, логическое содержание которых задается неделимыми конъюнктами.

В случае использования конъюнктов S_3 и S_5 для однозначности получения результата – *единицы* ППФ используется следующее соглашение:

Соглашение 1. *Условимся применять следующие правила для вычисления единиц атомарных конъюнктов и итоговой единицы ОС формулы составленной их них. Для вычисления единиц атомарных суждений используется каноническая схема (11):*

(1) Вычисляются единицы суждений S_1, S_2, S_4.
(2) Находится пересечение этих единиц, которое принимается за единицу всей формулы.
(3) Проверяется выполнение объемных отношений между модельными множествами определяемых суждениями S_3, S_5.
(4) Определяется статус всей формулы – выполнимая, противоречие, закон, см. определение 5.

Теорема 1. *Использование соглашения 1 приводит к вычислению максимальной по объему множества единицы ОС ППФ.*

Определение 2. *Определение ОС и МС формул:*

Атомарные формулы S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 являются[8] ОС ППФ.
Конъюнкция ОС фомул есть ОС формула.
Отрицание ОС формулы есть МС формула.
Дизъюнкция ППФ есть МС формула.
Конъюнкция ППФ, среди конъюнтов которой есть хотя бы одна МС формула, есть МС формула.

Замечание 6. *Существует одноодназначное соответствие*[9] *между булевым уравнением и атомарной формулой ОС ППФ типа* S_4*. При этом имеет место логическое следование* (22) *которое утверждает, что если изоморфизм Булевой логики и формул алгебры множеств имеет место, то имеет место и изоморфизм Булева уравнения и формулы типа* S_4*, см. также соотношения* (21)*:*

$$F(\tilde{x_n}) \leftrightarrow F(\tilde{X_n}) \vDash [F(\tilde{x_n}) = 1] \leftrightarrow [F(\tilde{X_n}) = U]. \tag{22}$$

Соответствие устанавливается с помощью характеристических функций $x_i(e)$ *множеств* $X_i \subseteq U$:

$$\forall e \in U \left(x_i = x_i(e) = \begin{cases} 1, & e \in X_i, \\ 0, & e \notin X_i, \end{cases} \quad i = \overline{1, n} \right). \tag{23}$$

[8] с учетом соглашения 1
[9] отметим, что к S_4 приводятся формулы S_1 и S_2, см. равносильности (21).

СДНФ логики Буля сопоставляется совершенная нормальная форма конституентая (СНФК)[10]*, составленная из непустых конституент. СКНФ логики Буля, составленной из полных дизъюнкций, сопоставляется совершенная нормальная форма дизституентная* (СНФД). *Дизституента*[11] *нумеруется следуя* (10). *Например,*

$$K(2)' = \underbrace{(X_1' \cdot X_2 \cdot X_3')'}_{0\,1\,0} = D(5) = \underbrace{X_1 + X_2' + X_3}_{1\,0\,1},$$

$$K(i)' = D(i'); i' = 2^n - 1 - i.$$

Определение 3. *Пусть $Q_1(\tilde{X}_i)$ и $Q_2(\tilde{X}_i)$ две ОС ППФ, будем называть их* ортогональными*, если их конъюнкция является противоречием, то есть не существует модельной схемы (A-онтологии) в которой обе они выполняются.*

Из изоморфизма ППФ булевой логики и ППФ Булевой алгебры множеств следует

Утверждение 2. *В силу правила построения МС ППФ она может быть представлена как дизъюнкция двух или более ОС ППФ. Дизъюнкцию ОС ППФ можно представить как дизъюнкцию ортогональных ОС ППФ, используя тождество*

$$Q_1(\tilde{X}_i) + Q_2(\tilde{X}_i) \equiv Q_1(\tilde{X}_i) \cdot Q_2(\tilde{X}_i) + Q_1(\tilde{X}_i)' \cdot Q_2(\tilde{X}_i) + Q_1(\tilde{X}_i) \cdot Q_2(\tilde{X}_i)'.$$

Если какой-то из дизъюнктов в правой части равенства является противоречием, то его можно убрать из итоговой формулы, в результате останутся только выполнимые ОС ППФ, см. определение 5.

Определение 4. *МС ППФ, состоящая из ортогональных дизъюнктов, ни один из которых не является противоречием, называется* приведенной к ортогональному виду*, или коротко* приведенной МС.

Теорема 2. *Любую МС ППФ можно представить формулой, приведенной к ортогональному виду.*

Любая ППФ L_{S_2}, с точки зрения выполнимости своего логического содержания, в универсуме сопоставленном, ее семантическому значению, относится к одному из трех классов (*закон, выполнимая, противоречие*).

Определение 5. *Классификатор односмысловых ППФ.*

Односмысловая ППФ $Q(\tilde{X}_n)$ является:

---

[10] ее также называют совершенной нормальной формой Кантора

[11] П. С. Порецкий называл дизституенты продуцентами, а конституенты – конституантами

законом, если и только если, она имеет семантическим значением универсум канонической дискретной диаграммы Венна $M(Q(\tilde{X}_n)) = U^0(n) = \{0, 1, \ldots 2^n - 1\}$.[12]

выполнимой, если и только если, в конституентном множестве, которое представляет ее семантическое значение, выполняются логические отношения, задаваемые всеми атомарными конъюнктами, из которых она состоит.

противоречием, если и только если, в конституентном множестве, которое представляет ее семантическое значение, не выполняется логические отношения задаваемые хотя бы одним ее конъюнктом, либо оно является пустым множеством.

Доказано, что для любой ОС ППФ имеет место равенство (24), в котором X_i^0 являются константами и определяются соотношением (12).

$$M(Q(\tilde{X}_n)) = M(Q(\tilde{X}_n^0)) \tag{24}$$

Определение 6. *Классификатор многосмысловых ППФ. Многосмысловая ППФ* $\Phi(\tilde{X}_n)$ *приведенная*[13] *к ортогональному виду согласно определению 4 является:*

законом, если ее ортогональные дизъюнкты выражают все возможные[14] для данного n модельные схемы. В частности, МС ППФ-дизъюнкция формул выражающих жергонновы отношения для $n = 2$ есть *закон.*

выполнимой, если и только если, среди ее ортогональных дизъюнктов есть хотя бы один, являющийся выполнимой ОС ППФ, и сама формула не является законом.

противоречием, если и только если все ортогональные дизъюнкты являются противоречиями.

Например, отрицание формулы $A(X, Y)$ при $n = 2$ на основе тождества исключенного шестнадцатого представленное в приведенной форме имеет в соответствии с рисунком 1 14 смыслов:

$$\begin{aligned}
\underbrace{A(X,Y)'}_{(G_{13})'} \equiv{} & \underbrace{(X = U)\cdot(X = Y)}_{G_1} + \underbrace{(X = U)\cdot(Y' = X)}_{G_2} \\
& + \underbrace{(X = U)\cdot(Y \subset U)\cdot(Y' \subset U)}_{G_3} + \underbrace{(Y = U)\cdot(X' = U)}_{G_4} \\
& + \underbrace{(Y = U)\cdot(X \subset U)\cdot(X' \subset U)}_{G_5} + \underbrace{Eq(X, Y')}_{G_6} + \underbrace{(A(X', Y)}_{G_7}
\end{aligned}$$

[12] ОС– *закон* указывает на независимость образующих его модельных множеств.

[13] Исходная формула для приведенной МС также относится к ее классу выполнимости.

[14] Их ровно $2^{(2^n)} - 1$. Невозможным считается соотношение $\forall i(X_i = U = \emptyset)$.

$$+\underbrace{(X'=U)\cdot(Y'=U)}_{G_8}+\underbrace{Eq(X,Y)}_{G_9}$$
$$+\underbrace{(Y'=U)\cdot(X\subset U)\cdot(X'\subset U)}_{G_{10}}+\underbrace{A(X',Y')}_{G_{11}}$$
$$+\underbrace{(X'=U)\cdot(Y\subset U)\cdot(Y'\subset U)}_{G_{12}}+\underbrace{A(X',Y)}_{G_{14}}+\underbrace{IO(X,Y)}_{G_{15}}.$$

Аналогично, для $n>2$ можно говорить об n-арных логических жергонновых отношениях[15], число которых равно $2^{(2^n)}-1$. В частности, для $n=3$ имеют место тождества исключенного 256-го.

Пример 2. *Построенная на основе равенства* (5) *и отмеченного в замечании* 6 *сответствия ОС ППФ* (25) *есть* противоречие (*см. рисунок* 3)*. Слева изображена дискретная диаграмма, выражающая семантику* (25)*. В ней логические отношения задаваемые ее конъюнктами не выполняются* (*для отношения 1 вместо* G_{13} *имеет место* G_5)*, также не выполнены отношения 5 и 6. Формула* (25) *есть* противоречие*. Ее диаграмма изображена на рисунке* 3 *слева.*

$$\underbrace{((X_1\cdot X_5)'+X_2)}_{1}\cdot\underbrace{(X_5+X_2X_3{}')}_{2}\cdot\underbrace{(X_1\cdot X_3{}'+X_1{}'\cdot X_3)}_{3}\cdot\underbrace{(X_5{}'+X_4{}')}_{4}\cdot\underbrace{(X_2+X_3{}'\cdot X_5)}_{5}\cdot\underbrace{((X_2{}'\cdot X_3)'+X_4\cdot X_5{}')}_{6}=U. \tag{25}$$

Для того, чтобы получить выполнимую формулу, достаточно убрать из (25) *два последних конъюнкта и формула* (26) *будет выполнимой.*

$$\underbrace{A(X_1\cdot X_5,X_2)}_{1}\cdot\underbrace{A(X_5{}',X_2\cdot X_3{}')}_{2}\cdot\underbrace{(X_1\cdot X_3{}'+X_1{}'\cdot X_3)}_{3}\cdot\underbrace{A(X_5,X_4{}')}_{4}=U. \tag{26}$$

Ее диаграмма на рисунке 3 *справа. Все отношения* (26) *выполняются.*

Для того, чтобы вычислить семантическое значение МС ППФ, необходимо сначала ее представить виде дизъюнкции взаимно ортогональных ОС, из которых убраны все противоречивые.

Семантическим значением МС является семейство множеств – семантические значения составляющих МС взаимно ортогональных дизъюнктов.

[15] В естественном языке жергонновы отношения арности более 2 выражаются традиционно через бинарные. Например, «Тигры это млекопитающие и тигры не живут в воде и тигры не живут в районах Крайнего Севера и тигры являются хищниками». Это в общепринятых умолчаниях в обычной речи звучит как «Тигры это хищные млекопитающие, не живущие в воде и районах Крайнего Севера»

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	j
0	1	1	0	1	13
1	1	0	0	0	24
1	1	0	0	1	25
1	1	0	1	0	26

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	j
0	1	1	0	0	5
0	1	1	0	1	13
1	1	0	0	0	24
1	1	0	0	1	25
1	1	0	1	0	26

Рисунок 3. Семантика формул (25) и (26) первая из них есть противоречие

Например,

$$\underbrace{M(A(X,Y)')}_{G'_{13}} = \Big\langle \underbrace{\{1\}}_{G_1}, \underbrace{\{2\}}_{G_2}, \underbrace{\{2,3\}}_{G_3}, \underbrace{\{1\}}_{G_4}, \underbrace{\{1,3\}}_{G_5}, \underbrace{\{1,2\}}_{G_6}, \underbrace{\{1,2,3\}}_{G_7}, \underbrace{\{0\}}_{G_8}, \underbrace{\{0,3\}}_{G_9}, \underbrace{\{0,2\}}_{G_{10}}, \underbrace{\{0,2,3\}}_{G_{11}}, \underbrace{\{0,1\}}_{G_{12}}, \underbrace{\{0,1,2\}}_{G_{14}}, \underbrace{\{0,1,2,3\}}_{G_{15}} \Big\rangle. \tag{27}$$

Замечание 7. *Отрицание противоречия является законом. Например, $(G_1 \cdot G_6)' = C'_1 + G'_6$ – закон. Применяя тождества исключенного шестнадцатого к G_1 и G_2 получим дизъюнкцию всех бинарных отношений Жергонна.*

Замечание 8. *Жергонновыми столь же уместно называть n-арные отношения для $n > 2$. Их количество определяется числом $2^{2^n} - 1$, для $n = 3$ справедливы тождества исключенного 256-го.*

2.5. Верификация логического следования в L_{S_2}

2.5.1. *Логическое содержание*

Выполнимая ОС ППФ задает логическое содержание n-арного отношения между объемами модельных множеств. Формуле сопоставляется максимальная по объему *единица*. Разные формулы могут иметь одну и ту же единицу, значит, их логическое содержание одинаково. Чем больше логическое содержание, тем меньше объем семантического значения формулы.

Утверждение 3. *Логическое содержание закона $IO(\tilde{X}_n)$ отсутствует (это отношение независимости) так как* нуль *этой ОС формулы* $\mathrm{N}(IO(\tilde{X}_n)) = \emptyset$. *Любую ОС формулу, кроме закона, можно рассматривать как приведенную МС формулу с одним ортогональным дизъюнктом, или как конъюнкцию дизституент* нуля этой формулы. *В соответствии с утверждением 1, $D(i) = K(i')' = U^0(n) \setminus \{i'\}$, и потому чем больше объем* нуля *формулы, – тем больше дизституент в ее представлении и тем больше ее логическое содержание.*

2.5.2. *Критерий непарадоксальности MS формулы*

Закон для МС формулы утверждает, что после ее приведения к ортогональному виду число ее дизъюнктов совпадает с числом $2^{2^n}-1$, см. определение 6 и замечание 7. Это означает, что в рассматриваемом n-мерном «пространстве» модельных множеств выполняется в точности одно из n-арных отношений Жергонна. Иными словами, искомое нами логическое следование будет непарадоксально, если из противоречия и закона ничего не следует и закон не следует ни из чего.

2.5.3. *Логическое следование между выполнимыми ППФ*

Определение 7. *Пусть $\Phi_1(\tilde{X}_n)$ и $\Phi_2(\tilde{X}_n)$ выполнимые приведенные формулы (см. определение 4).*

$\Phi_2(\tilde{X}_n)$ – заключение логически следует из формулы $\Phi_1(\tilde{X}_n)$ – посылки тогда и только тогда когда, для каждого ортогонального дизъюнкта посылки P *существует единственный ортогональный дизъюнкт заключения –* Z *такой, что выполнимость* P *всегда влечет за собой выполнимость* Z. *Логическое следование обозначается знаком* $\vDash$.

Замечание 9. *Факт следования* $\mathrm{P} \vDash \mathrm{Z}$ *для ОС ППФ может быть установлен одним из двух способов*[16]. *Либо посредством теоремы 3, либо устанавливается выполнимость формулы Φ_2 в конституентном множестве $M(\Phi_1)$.*

Теорема 3. *Пусть Φ_1 и Φ_2 выполнимые ОС ППФ, построенные в семействе модельных множеств размерности n. Логическое содержание Φ_2 является частью логического содержания Φ_1 (имеет место логическое следование)*

$$\Phi_1 \vDash \Phi_2,$$

тогда и только тогда, когда их единицы (объемы универсумов) находятся в соотношении $M(\Phi_1) \subseteq M(\Phi_2) \subset U^0(n)$. При этом строгое включение между $M(\Phi_1)$ и $M(\Phi_2)$ выполняется только тогда, когда

$$\big(\Phi_1) \vDash \Phi_2\big) \cdot \big(\Phi_2 \nvDash \Phi_1\big).$$

Доказательство теоремы 3. Утверждение теоремы следует из сравнения логических содержаний этих формул, представленных в виде **СНФД** (см. замечание 6). □

[16] иллюстрацию см. в примере 4 и замечании 7

3. Интерпретация логико-семантических моделей

Логико - семантическая модель это совокупность ППФ и ее семантического значения. Рассмотренные теоретические положения проиллюстрируем на примере решения задач 1–3.

Задача 1: Даны посылки $P_1, P_2, \ldots, P_k$ в виде ППФ, доказать, что из них логически следует ППФ заключения Z. Задача 1 решается путем проверки логического следования $P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_k \models Z$. Проверяется, что выполнение логического отношения, посылки, влечет выполнение отношения заключения. Вычисление *единиц* реализовано программно [1, 2].

Таблица 1. Результаты анализа и исправления правильных модусов традиционной силлогистики

Фигура 1	*Имя*	*Фигура* 2	*Имя*
1. AAA	Barbara	7. AOO	Baroco
2. EAE	Celarent	8. EAE **(2)**	Cesare
3. AII	Darii	9. AEE	Camestres
4. EIO	Ferio	10. EIO **(4)**	Festino
5. AAI✠ **(1)**	Barbari	11. AEO✠ **(9)**	Camestros
6. EAO✠ **(2)**	Celaront	12. EAO✠ **(2)**	Cesaro
Фигура 3	*Имя*	*Фигура* 4	*Имя*
13. OAO	Bocardo	19. AEO✠ **(9)**	Camenos
14. IAI	Disamis	20. IAI **(14)**	Dimaris
15. AII **(3)**	Datisi	21. AEE **(9)**	Camenes
16. EIO **(4)**	Ferison	22. EIO **(4)**	Fresison
17. AAI✠	Darapti	23. AAI✠	Bramantip
18. EAO✠	Felapton	24. EAO✠ **(18)**	Fesapo

Задача 2: Дан список посылок $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Вывести интересные, с прикладной точки зрения, следствия из них.

Задача 3: Как нужно изменить посылки, чтобы получить из них требуемое следствие?

Алгебраический подход к решению задач 1–3 изложен в работах [1, 2]. В работе [2] также рассматриваются различные примеры решения задач 1–3 выходящих за пределы логики одноместных предикатов к которой сводится силлогистика L_{S_2}.

Задача вычисления дискретной диаграммы Венна и преобразования ее для решения задач 1–3 актуальна для разработки алгоритмов искусственного интеллекта[17]. В работе [1] предложен параллельный алгоритм вычисления дискретной диаграммы Венна для ОС ППФ. Модель предметной области есть совокупность релевантных ей ППФ в L_{S_2}.

3.1. Анализ и исправление правильных модусов Аристотеля

Все модусы в количестве двадцати четырех делятся на четыре фигуры. Модусы, помеченные в таблице 1 мальтийским крестом✠, требуют уточнения, поскольку категорические суждения традиционной силлогистики не позволяют корректно выразить их заключения. При уточнении каждому из ортогональных дизъюнктов посылки сопоставлялось его следствие в виде дизъюнкта заключения (см. примеры 3 и 4). Посылки этих модусов можно представить диъюнкцией четырех ортогональных дизъюнктов (четыре смысла посылок), а заключение представлено пятью ортогональными дизъюнктами.

Ранее среди модусов было выделено пять дублирующих. Их оказалось гораздо больше. Для них номер равносильного модуса указан справа в кругых скобках.

Замечание 10. *Из способа выявления логического следования в определении 7 вытекает, что в случае его наличия оно может быть представлено в форме таблицы решений. В примерах 3 и 4 это показано.*

Пример 3. *Модус четвертой фигуры AAI Bramantip, имеет вид $APM \cdot AMS \models ISP$. В L_{S_2} он выражается как*

$$\underbrace{Eq(P,M)\cdot Eq(M,S)}_{1} + \underbrace{A(P,M)\cdot Eq(M,S)}_{2} + \underbrace{Eq(P,M)\cdot A(M,S)}_{3} + \underbrace{A(P,M)\cdot A(M,S)}_{4}$$
$$\models \underbrace{Eq(S,P)}_{1} + \underbrace{A(S',P')}_{2,3,4} + \underbrace{A(S',P) + A(S,P) + IO(S,P)}_{impossibly}.$$

Верификация логического следования показала, что три последних суждения заключения не следуют ни из одного из ортогональных дизъюнктов посылки. Такие модусы подлежат исправлению.

[17]Алгоритм построения дискретной диаграммы для числа переменных не более 22 реализован.

Пример 4. *Исправленные модусы Darapti, Felapton, Bramantip не имеют дублеров. Darapti имеет вид*[18]

$$\underbrace{Eq(M,P)\cdot Eq(M,S)}_{1}+\underbrace{A(M,P)\cdot Eq(M,S)}_{2}+\underbrace{Eq(M,P)\cdot A(M,S)}_{3}+\underbrace{A(M,P)\cdot A(M,S)}_{4}$$
$$\models \underbrace{A(S',P)+A(S',P')}_{impossibly}+\underbrace{Eq(S,P)}_{1}+\underbrace{A(S,P)}_{2,3}+\underbrace{IO(S,P)}_{4},$$

а Felapton имеет вид

$$\underbrace{Eq(M,P')\cdot Eq(M,S)}_{1}+\underbrace{A(M,P')\cdot Eq(M,S)}_{2}+\underbrace{Eq(M,P')\cdot A(M,S)}_{3}+\underbrace{A(M,P')\cdot A(M,S)}_{4}$$
$$\models \underbrace{A(S',P')}_{impossibly}+\underbrace{Eq(S,P')}_{1}+\underbrace{A(S,P')}_{2}+\underbrace{A(S',P)}_{3}+\underbrace{IO(S,P)}_{4}.$$

Замечание 11. *Рассмотрим принципиальные различия правил номер три и четыре логического следования модусе Felapton*
$R_3 : \underbrace{Eq(M,P')\cdot A(M,S)}_{3} \models \underbrace{A(S',P)}_{3}$ *и* $R_4 : \underbrace{A(M,P')\cdot A(M,S)}_{4} \models \underbrace{IO(S,P)}_{4}$.
На рисунке 4 показана единица *посылки и* единица *заключения приведенного к размерности $n=3$ и, вычисленная с использованием соглашения 1 для правила R_3. При этом выполняется утверждение теоремы 3 и* единица *заключения максимальна согласно теореме 1. Следование имеет место. Для R_4 (см. рисунок 5) максимальная* единица *заключения, приведенная к размерности посылки, является по соглашению 1 законом. Условия применимости теоремы 3 не выполняются. Факт следования устанавливается вторым способом – проверкой выполнимости $IO(S,P)$ в модельной схеме определяемой множеством $\mathbf{M}(A(M,P')\cdot A(M,S))$ –* единицей *просылки, см. замечание 9.*

Таким образом различных правильных и исправленных модусов выраженных в S_{L_2} всего одиннадцать (см. таблица 1).

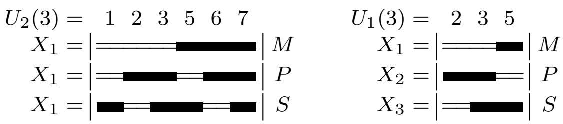

Рисунок 4. $\mathbf{M}(Eq(M,P)\cdot A(M,S)) = \{2,3,5\} \subset \mathbf{M}(A(S',P)) = \{12,3,5,6,7\}$

[18] $IO(S,P)$ является законом в множестве модельных схем размерности 3, а при $n=2$ это ОС формула

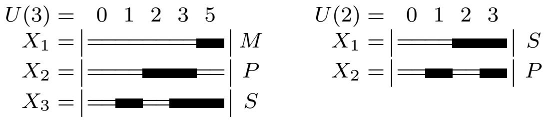

Рисунок 5. $IO(S, P)$ выполнима в $\mathbf{M}(A(M, P) \cdot A(M, S)) = \{0, 1, 2, 3, 5\}$

3.2. Задача Буля

Рассмотрим применение Асертотической силлогистики L_{S_2} на примере задачи Буля [3, с. 64-75].

Пример 5. *Пусть булевы переменные a, b, c, d, e есть характеристические функции модельных множеств A, B, C, D, E[19] образующих универсум $U(5) \subseteq U^0(5) = \{0, 1, \ldots, 2^5 - 1\}$. Модельные множества (признаки) находятся в логических отношениях:*

1. *Если одновременно отсутствуют признаки A и C, то обнаруживается признак E вместе с одним из признаков B или D, но не с обоими*
$$P_1.\ A(A' \cdot C', E \cdot (B + D) \cdot (B \cdot D)').$$
2. *Всюду, где встречаются одновременно признаки A и D при отсутствии E, либо обнаруживаются оба признака B и C, либо оба отсутствуют*
$$P_2.\ A(A \cdot D \cdot E', (B \cdot C + B' \cdot C')) \equiv G_{13}(A \cdot D \cdot E', (B \cdot C + B' \cdot C')).$$
3. *Всюду, где имеет место признак A вместе с B или E или вместе с обоими, обнаруживается также один и только один из признаков C и D. И, наоборот, всюду, где наблюдается один и только один из признаков C и D, обнаруживается также признак A вместе с B или E или же с обоими*
$$P_3.\ Eq(A \cdot (B + E + B \cdot E), C \cdot D' + C' \cdot D).$$

Вычисление единицы *конъюнкции посылок P_1, P_2, P_3 дает результат, изображенный в виде левой диаграммы* на рисунке 2*. Изображение* единицы *с помощью диаграммы Венна можно посмотреть в работе* [3], *рисунок 36 на с. 68. Требуется узнать:*

(а) *Какие заключения в каждом случае можно вывести из наличия признака A относительно признаков B, C и D?*

(б) *Решить вопрос о том, есть ли между признаками B, C, D какие-нибудь отношения, имеющие между ними место независимо от наличия или отсутствия остальных признаков (и если да, то какие именно?)*

[19] например, наличие признака A в данной ситуации означает, что переменная $a = \{1\}$

(в) *Аналогичным образом ответить на вопрос о том, что следует из наличия признака B относительно признаков A, C и D (равно как и наоборот, когда из наличия или отсутствия признаков этой последней группы можно сделать заключение о наличии или отсутствии признака B).*

(г) *Констатировать, что следует для признаков A, C, D самих по себе (т. е. независимо от остальных).*

Решение. Шредер в 1890 году установил, что посылки Буля противоречивы в том смысле, что в реальности нельзя сопоставить причинно-следственную связь второй посылке задачи [**3**, с. 74]. Программа, вычисляющая *единицу* конъюнкции посылок также указывает, что в получившемся универсуме вместо отношения G_{13} имеет место (выполняется) отношение G_{12} у которого субъект пустое множество. Поэтому конъюнкция посылок есть противоречие. Согласно Шредеру сопоставим вычисленной по посылкам Буля *единице*, *выполнимую* формулу

$$\underbrace{A(A'\cdot C', B\cdot E)}_{P_1}\cdot\underbrace{A(A\cdot D, E)}_{P_2}\cdot\underbrace{Eq(A\cdot(B+E), C\cdot D'+C'\cdot D)}_{P_3}=U, \tag{28}$$

имеющую такое же семантическое значение, что и конъюнкция посылок задачи Буля. Будем решать задачу с непротиворечивыми посылками от Шредера и вопросами от Буля.

Ответ на вопрос 1 считывается с рисунка 6. Левой диаграмме соответствует формула (29)

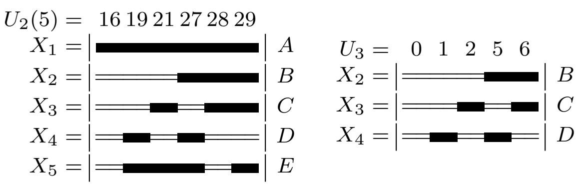

Рисунок 6. Что следует из наличия признака A относительно признаков B, C, D

$$[\underbrace{A(A'\cdot C', B\cdot E)}_{P_1}\cdot\underbrace{A(A\cdot D, E)}_{P_2}\cdot\underbrace{Eq(A\cdot(B+E), C\cdot D'+C'\cdot D)}_{P_3}\cdot(A)]=U \tag{29}$$

Убирая признаки A и E получаем правую диаграмму с *единицей*[20]

$$\begin{aligned} M = U_r &= \{0,1,2,5,6\} \\ &= (B'\cdot C'\cdot D' + B'\cdot C'\cdot D + B'\cdot C\cdot D' + B\cdot C'\cdot D + B\cdot C\cdot D') \end{aligned}$$

[20] Процесс целенаправленной перестройки диаграмм алгоритмизирован

$$= (B' \cdot C' + B' \cdot C \cdot D' + B \cdot (C' \cdot D + C \cdot D'))$$
$$= [B' \cdot (C' + C \cdot D') + B \cdot (C \oplus D)] = (B' \cdot (C' + D') + B \cdot (C \oplus D)).$$

То есть при наличии A имеет место либо отсутствие B совместно с отсутствием C либо D либо обоих вместе, либо присутствиеB совместно с C либо D, но не обоих вместе.

Формальное выявление этого следствия представлено ниже. Нужно установить логическое следование между двумя ОС формулами:

$$A \cdot (A[A' \cdot C', E \cdot (B + D) \cdot (B \cdot D)] \cdot A[A \cdot D \cdot E', (B \cdot C + B' \cdot C')] \cdot Eq[A \cdot (B + E), C \cdot D' + C' \cdot D] \models A \cdot [B', (C' + D')] \cdot A[B, C \oplus D]. \tag{30}$$

Единица заключения приведенна размерности посылки $n = 5$ представлена множеством $\{16, 17, 18, 19, 20, 21, 26, 27, 28, 29\}$ которое включает в себя *единицу* посылки $\{16, 19, 21, 27, 28, 29\}$. Следование имеет место. Обратного следования нет.

Поставим дополнительный вопрос к решаемой задаче.

Каким образом нужно изменить формулу заключения, чтобы из нее следовала посылка?

В нашей формализации ответ находится следующим образом. В формулу заключения нужно ввести конъюнкты в виде дизститует, которые исключат из ее *единицы* контитуенты с номерами из множества $\{16, 17, 18, 19, 20, 21, 26, 27, 28, 29\} \setminus \{16, 19, 21, 27, 28, 29\} = \{17, 18, 20, 26\}$.

Ответ на вопрос 2 (ничего не следует) считывается с рисунка 7.

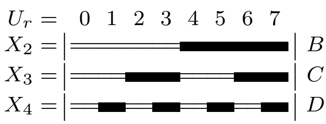

Рисунок 7. Признаки B, C, D независимы в совокупности $U_r = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2^3 - 1\}$

Для ответа на 3-й вопрос достаточно проанализировать рисунки 8, 9 и 10. Из рисунка 8 имеем:

$$U_r = \{0, 3, 5, 6\} = A' \cdot C' \cdot D' + A' \cdot C \cdot D + A \cdot C' \cdot D + A \cdot C \cdot D'$$
$$= A' \cdot (C' \cdot D' + C \cdot D) + A \cdot (C' \cdot D + C' \cdot D).$$

Это означает, что при наличии признака B и отсутствии признака A признаки C и D либо оба присутствуют, либо оба отсутствуют. Также при наличии B и наличии A присутствует только один из признаков C либо D, но не оба вместе.

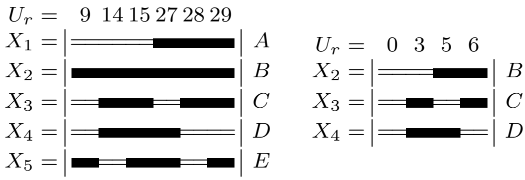

Рисунок 8. Что следует из наличия B относительно A, C, D

Пусть B отсутствует, см. рисунок 9. Тогда присутствуют C и D при отсутствии A, либо присутствует только A, либо присутствует признак A с одним из других, но не с обоими одновременно.

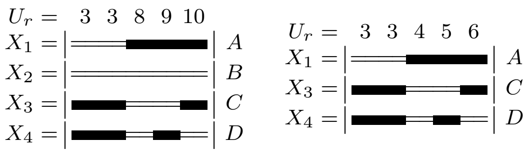

Рисунок 9. Следствие отсутствия признака B относительно A, C, D

Для ответа на вторую часть третьего вопроса переупорядочим модельные множества и рассмотрим три таблицы решений на рисунке 10. Левая получена из *единицы* задачи Буля, в которой изменен порядок

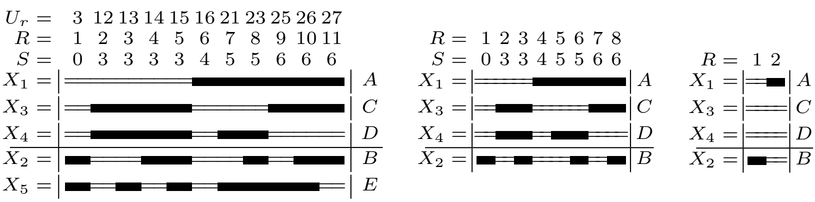

Рисунок 10. Как из отношения между A, C, D заключить о наличии (отсутствии) B

следования модельных множеств. Естественно, что отношения между ними прежние. Уберем из нее признак E. Это приведет к новому универсуму и сокращению правил за счет убирания одинаковых номеров конституент. Изменения отражены в средней таблице. Убрав из нее противоречивые правила (R_2, R_3); (R_5, R_6); (R_7, R_8), у которых ситуации в правилах совпадают, а решения разные, мы получим правую таблицу с двумя правилами, из которой следует, что при отсутствии A, C и D признак B обязательно присутствует. При наличии A и отсутствии C и D обязательно отсутствует B.

Для ответа на четвертый вопрос достаточно проанализировать диаграммы рисунка 11,

$$(31)\quad N = \underbrace{A' \cdot C' \cdot D}_{1} + \underbrace{A' \cdot C \cdot D'}_{2} + \underbrace{A \cdot C \cdot D}_{7} = \emptyset \equiv$$
$$(A + C + D') \cdot (A + C' + D) \cdot (A' + C' + D') = U$$

и сформулировать отношения задаваемые равносильными равенствами на русском языке. □

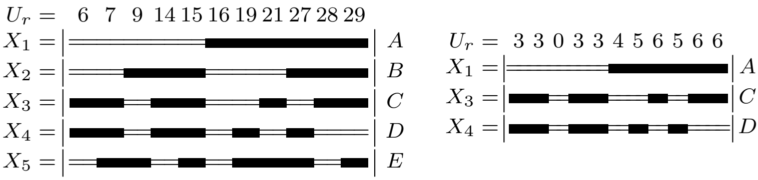

Рисунок 11. Следствия из соотношения признаков A, C, D

3.3. Задача о паровом катке

Пример 6. *Сконструирована специально для испытания метода резолюций [5]. Волки* (V), *лисицы* (F), *птицы* (P), *гусеницы* (G) *и улитки* (U) *являются животными и существует хотя бы один экземпляр каждого из них. Также, существует злак* (Z), *и злаки являются растениями* (R). *Каждое животное любит есть либо все растения, либо всех травоядных животных, которые намного меньше его. Гусеницы и улитки намного меньше птиц, которые намного меньше лисиц, которые, в свою очередь, намного меньше волков. Волки не любят есть лисиц или злаки, а птицы любят есть гусениц, но не любят улиток. Гусеницы и улитки любят есть некоторые растения. Доказать, что существует животное, которое любит есть животных, поедающих злаки.*

Пусть

(1) Ur – *универсум (растения и животные)* $(= X_0)$;
(2) A – *животные* $(= X_1)$;
(3) V – *волки* $(= X_2)$;
(4) F – *лисицы* $(= X_3)$;
(5) P – *птицы* $(= X_4)$;
(6) G – *гусеницы* $(= X_5)$;
(7) U – *улитки* $(= X_6)$;
(8) R – *растения* $(= X_7)$;
(9) Z – *злаки* $(= X_8)$.

По смыслу задачи классы животных и растений с заданными выше именами, образуют разбиение универсума.

(10) $X_iX_j = \varnothing$ *при* $j \neq i$ *для* $i, j = 2, 3, \ldots, 7$; $A\,(X_8, X_7)$, *и* $X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = X_1$.

Доказать, что существует животное, которое любит есть животных, поедающих злаки.

$$(32)\quad \exists x\exists y\exists z\exists t(x,y,z\in X_1)\cdot(t\in X_8)\cdot(LE(x,y))\cdot(LE(y,z))\cdot(LE(z,t)).$$

Решение. Для того, чтобы сформулировать вопрос задачи в виде формулы ОС ППФ L_{S_2} нужно построить множество животных Set, которые едят злаки и которых едят другие животные и проверить, что это множество не является пустым. В качестве объектов для конструирования у нас выступают вышеопределенны мноджества и два вычислимых двуместных предиката «быть больше» $Bb(Ur,Ur)$ и «любит есть» $Le(Ur,Ur)$. Область истинности этих предикатов заданы таблицами 2, 3. С помощью программы, реализующей M-алгоритм построена А-онтология, удовлетворяющую соотношениям объемов указанных классов, см. рисунок 12:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	
						|r						|r	|r	|r	271
						|z	|z					|z	|z	|z	391
|u					|u			|u	|u	|u	|u	|u			17020
|g				|g				|g	|g	|g	|g	|g	|g		17534
|p			|p					|p	|p		|p	|p			18540
|f		|f						|f							20544
|v	|v														24576
животные	волки	лисицы	птицы	гусеницы	улитки	растения	злаки	меньше волков	меньше лисиц	меньше птиц	едят волки	едят лисы	едят птицы	едят улитки	

Рисунок 12. А-онтология выражающая соотношения (9)-(27) задачи «паровой каток»

(*11*) $X_1+X_7=X_0$, то есть животные и растения составляют универсум; Иначе говоря, животные — это волки или лисицы, или птицы, или гусеницы, или улитки;

(*12*) $A(X_8,X_7)$, то есть злаки являются растениями;

(*13*) $X_7\cdot X_1={X_0}'$; $X_2\cdot(X_3+X_4+X_5+X_6)={X_0}'$; $X_3\cdot(X_4+X_5+X_6)={X_0}'$; $X_4\cdot(X_5+X_6)={X_0}'$; $X_5\cdot X_6={X_0}'$, то есть попарные пересечения видов животных пусты;

(*14*) $X_7\cdot X_1={X_0}'$, то есть пересечение множеств животных и растений пусто.

Введем в рассмотрение множества X_9–X_{15}, построенные исходя из условий задачи.

(15) $X_9 = X_1 \cdot {X_2}'$, то есть множество животных меньше волка;
(16) $X_{10} = X_1 \cdot X' \cdot {X_3}'$, то есть множество животных меньше лисы;
(17) $X_{11} = X_1 \cdot {X_2}' \cdot {X_3}' \cdot {X_4}'$, то есть множество животных меньше птиц;
(18) $X_{12} = (X_1+X_7) \cdot {X_2}' \cdot {X_3}' {X_7}'$, то есть множество растений и животных, которыми любят питаться волки;
(19) $X_{13} = (X_1 + X_7) \cdot {X_2}' {X_3}'$, то есть множество растений и животных, которыми питаются лисицы;
(20) $X_{14} = (X_1 + X_7) \cdot {X_2}' \cdot {X_3}' \cdot {X_4}' {X_6}'$, то есть множество растений и животных, которыми питаются птицы;
(21) $X_{15} = (X_1 + X_7) \cdot {X_2}' \cdot {X_3}' \cdot {X_4}' \cdot {X_5}' \cdot {X_6}'$, то есть множество растений, которыми питаются улитки и гусеницы.

Продолжим формализацию условий задачи. Введем соответствие $Bb(X, Y) \subset X_0 \times X_0$, выражающее отношение «быть больше» на множестве животных и соответствие $Le(X, Y) \subset X_0 \times X_0$, выражающее отношение «любит есть» на элементах универсума.

Каждое животное любит есть либо все растения, либо всех травоядных животных, которые намного меньше его. Соответствие Bb отчасти совпадает с Le (см. таблицы 2, 3). Оно включает пары $\langle G, R\rangle$, $\langle G, Z\rangle$,

Таблица 2. Релевантные пары из Gl_{B_b}

много больше (Bb)	V	F	P	G	U	R	Z
$X_2 = V$	0	1	1	1	1	1	1
$X_3 = F$	0	0	1	1	1	1	1
$X_4 = P$	0	0	0	1	1	1	1
$X_5 = G$	0	0	0	0	0	1	1
$X_6 = U$	0	0	0	0	0	1	1
$X_7 = R$	0	0	0	0	0	0	0
$X_8 = Z$	0	0	0	0	0	0	0

$\langle U, R\rangle$, $\langle U, Z\rangle$ и в нем отсутствуют пары-исключения $\langle V, F\rangle$, $\langle V, Z\rangle$, $\langle P, U\rangle$.

Множества $X_9 - X_{15}$ построены. Добавим равенства, определяющие эти множества в А-онтологию (см. рисунок 7).

(21) $Eq(X_9, X_1 \cdot {X_2}')$ – множество животных меньше волков;
(22) $Eq(X_{10}, X_1 \cdot X2' \cdot {X_3}')$ – множество животных меньше лисиц;
(23) $Eq(X_{11}, X_1 \cdot {X_2}' \cdot {X_3}' \cdot {X_4}')$ – множество животных меньше птиц;
(24) $Eq(X_{12}, (X_1 + X_7) \cdot {X_2}' \cdot {X_3}' \cdot {X_8}')$ – множество животных и растений, которых любят есть волки;
(25) $Eq(X_{13}, (X_1 + X_7) \cdot {X_2}' \cdot {X_3}')$ – множество животных и растений, которых любят есть лисы;

Таблица 3. Релевантные пары из Gl_{L_e}

любит есть (Le)	V	F	P	G	U	R	Z
$X_2 = V$	0	0	1	1	1	0	0
$X_3 = F$	0	0	1	1	1	1	1
$X_4 = P$	0	0	0	1	0	1	1
$X_5 = G$	0	0	0	0	0	1	1
$X_6 = U$	0	0	0	0	0	1	1
$X_7 = R$	0	0	0	0	0	0	0
$X_8 = Z$	0	0	0	0	0	0	0

(26) $Eq(X_{14}, (X_1 + X_7) \cdot {X_2}' \cdot {X_3}' \cdot {X_4}' \cdot {X_6}')$ – множество растений и животных,которых любят есть птицы;

(27) $Eq(X_{15}, X_7)$; – множество растений, которых любят есть гусеницы и улитки.

Для того, чтобы сформулировать вопрос задачи в виде формулы ОС ППФ L_{S_2}, нужно построить множество животных Set, которые едят злаки и которых едят другие животные. И проверить, что это множество не является пустым. Обозначим область прибытия соответствия Le с областью отправления X как $Le(X)$, а область прибытия обратного соответствия для Le с областью отправления Y как $Le^{-1}(Y)$. Обозначим множество категорий животных которые едят растения (значит в том числе и злаки) через X_{16}. При этом $X_{16} = Le^{-1}(\{R\})$.

Множество животных, которые любят есть животных из множества X_{16}, обозначим как X_{17} при этом $X_{17} = Le^{-1}(X_{16})$. Для решения задачи теперь достаточно проверить, что множество категорий животных $Set = X_{17}$ непустое множество.

Алгоритм и программа вычисления множеств X_{16}, X_{17} синтезируются как формальная процедура на основании таблицы 3 которая входит в исходную формализацию задачи[21]. Таким образом, при условии доработки программной системы, с целью вычисления множеств X_{16}, X_{17} по связывающему их предикату, задачу можно считать решенной. Можно перечислить конкретные пищевые цепочки подтверждающие это. Например,
$\langle\{P, G, U\} = Le(\{V\}; Le(\{P, G, U\}) = \{R\}\rangle$. □

Выводы

Рассмотренную силлогистику с одной стороны, можно назвать *невырожденной логикой Буля* с областью итерпретации в множествах из целых

[21] предикат $Le(X, Y), X, Y \subseteq X_0 \times X_0$ очевидно является вычислимым

неотрицательных чисел. Семантика формул наглядно изображается дискретными диаграммами Венна. Вместо *истины* и *лжи* используется более адекватные константы определяемые по семантическому значению формулы. Этими константами являются *выполнимость*, *невыполнимость*. Указан эффективный компьютерный способ проверки логического следования между ППФ и выполнимости формул. В этом смысле предлагаемая силлогистика обладает свойством разрешимости.

С другой стороны, по классификации [4] L_{S_2}, это *чистая, расширенная, не экзистенциональная, свободная силлогистика.*

Использование S_{L_2} возможно в системах искусственного интеллекта и в обучении. С ее помощью, при маштабировании программной системы (увеличении размерности решаемых задач) и включении в программу процедур вычисления областей отправления и прибытия соответствий сопоставляемых конечным двуместным предикатам[22], по видимому можно решать реальные прикладные задачи ИИ.

Итерес к компьтерной реализации силлогистических моделей будет возрастать в связи с их близостью к естественому языку и бурным развитием нейросетей на основе лингвистических процессоров подобных *Chat GPT*. Это подтверждается наличием работ по решению задачи *Steamroller* в формализациях, близких к естественному языку. Библиография и хороший обзор дан в публикации [**13**].

Благодарности. *Хочется отметить высопрофессиональную работу зам. Главного редактора Знаменского Сергея Витальевича. Разработанный им шаблон статьи журнала «Программные системы. . . » является лучшим из известных автору. Кроме того, хотелось бы отметить его терпение и внимание при работе по улучшению качества статьи совместно с автором. Также хочу выразить благодарность научному редактору Непейводе Н. Н. и рецензентам за ценные замечания.*

Список использованных источников

[1] Сметанин Ю. М. *Использование распределенных вычислений при моделировании предметной области в универсальной силлогистике* // Программные системы: теория и приложения.– 2024.– Т. **15**.– № 2(53).– С. 86–112. ↑129, 133, 140, 141

[2] Сметанин Ю. М. *Верификация логического следования в неклассической многозначной логике* // Изв. ИМИ УдГУ.– 2017.– Т. **50**.– С. 62–82. ↑140

[3] Кузичев А. С. *Диаграммы Венна*.– М.: Наука.– 1968.– 253 с. URL ↑126, 143, 144

[4] А Бочаров В., Маркин В. И. *Силлогистические теории*.– М.: Прогресс-Традиция.– 2010.– ISBN 978-5-8982-6361-4.– 336 с. ↑126, 131, 151

[22] многоместные предикаты можно выражать через соответствия определяемые в их доменах

[5] Васильев С. Н., Жерлов А. К., Федосов Е. А., Федунов Б. Е. *Интеллектное управление динамическими системами*.– М.: Физматлит.– 2000.– ISBN 5-9221-0050-5.– 352 с. ↑147
[6] Плутарх *Сравнительные жизнеописания в двух томах*.– Т. 2.– М.: Наука.– 1994.– ISBN 5-02-011570-3.– 672 с. URL ↑126
[7] Поппер К. Р. *Объективное знание. Эволюционный подход*.– М.: Эдиториал УРСС.– 2002.– ISBN 5-8360-0327-0.– 384 с. ↑122
[8] Тарский А. *Истина и доказательство* // Вопросы философии.– 1972.– № 8(55).– С. 136–145. ↑122
[9] Tarski A. *The concept of truth in formalized languages* // *Logic, Semantics and Metamathematics*, Oxford: Clarendon Press.– 1956.– ISBN 0915144751.– Pp. 152–278. ↑123
[10] Петров Ю. А. *Азбука логичного мышления*.– М.: Изд-во Моск. Ун-та.– 1991.– ISBN 5-211-01486-3.– 104 с. ↑122
[11] Вальков К. И. *Проекционный схематизм — инструмент и метод*, учебное пособие.– Л.: ЛИСИ.– 1988.– 83 с. ↑122
[12] Калошина И. П. *Психология творческой деятельности*, учеб. пособие для студентов вузов.– М.: ЮНИТИ-ДАНА.– 2012.– ISBN 978-5-238-01430-2.– 655 с. ↑120
[13] McGinness L., Baumgartner P. *Steamroller Problems: An Evaluation of LLM Reasoning Capability with Automated Theorem Prover Strategies*.– 2024. arXiv 2407.20244v1 [cs.CL] doi ↑151

Поступила в редакцию	04.09.2025;
одобрена после рецензирования	18.09.2025;
принята к публикации	21.09.2025;
опубликована онлайн	12.10.2025.

Рекомендовал к публикации *д.ф.-м.н. Н. Н. Непейвода*

Информация об авторе:

Юрий Михайлович Сметанин
к.ф.- м.н., доцент кафедры математического анализа ИМИТиФ УдГУ, Ижевск. Научные интересы прикладная логика, алгоритмы логико - семантического моделирования
iD 0000-0002-2508-4939
e-mail: ***gms1234gms@rambler.ru***

Декларация об отсутствии личной заинтересованности: *благополучие автора не зависит от результатов исследования.*

PROGRAM SYSTEMS: THEORY AND APPLICATIONS ISSN 2079-3316
Research Article ARTIFICIAL INTELLIGENCE, INTELLIGENCE SYSTEMS, NEURAL NETWORKS

UDC 004.421.2 + 004.891.2 + 510.649
10.25209/2079-3316-2025-16-4-119-154

Applied models and problems of syllogistics

Iurii Mikhailovich **Smetanin**
Udmurt State University, Izhevsk, Russia
✉*gms1234gms@rambler.ru*

Abstract. Problems of the formation of conceptual (cognitive) thinking are closely related to applications of logic. However, they are no less closely related to philosophy. In applications, it is important not only formally, but also meaningfully to understand what is “*TRUE* “ and “ *FALSE*” and why the logical model of causal relationships may be inadequate to reality.

It is shown that Aristotelian type syllogistics (Vasiliev N.A., Venn, Kerrol), the Bul logic algebra, can be built on a general ontological basis — Algebraic system, including the Boolean algebra of sets and volumetric relations between model sets.

In syllogistics, non-paradoxical logical following is defined.

The area of formula intepretation is discrete Venn diagrams (DDV). Universum and model sets are given as finite sets of non-negative integers.

Establishing that the logical content of the premise includes the logical content of the conclusion for any formulas boils down to verifying the inclusion of sets that are semantic meanings of the premise and conclusion. This indicates the presence of the solvability property of syllogistics. The formula can be single-sense (OS) or multi-sense (MS). The DDV family is the semantic value of the MS formula. OS Formula has one DDV as its semantic meaning. All formulas are divided into laws, doables, and contradictions.

Substantial examples confirming theoretical provisions are considered. The proposed syllogistics was tested to solve problems with a maximum number of model sets of 22. When creating software based on parallelizing the process of calculating the semantic value of a formula, you can solve problems with a significantly larger number of model sets.(*In Russian*).

Key words and phrases: Applied syllogistics, discrete Venn diagrams, logical-semantic models

2020 *Mathematics Subject Classification*: 97P99; 97U99

For citation: Iurii M. Smetanin. *Applied models and problems of syllogistics*. Program Systems: Theory and Applications, 2025, **16**:4(67), pp. 119–154. (*In Russ.*). https://psta.psiras.ru/read/psta2025_4_119-154.pdf

References

[1] Yu. M. Smetanin. “The use of distributed computing in domain modeling in universal syllogistics”, *Program Systems: Theory and Applications*, **15**:2(53) (2024), pp. 86–112 (in Russian).

[2] Yu. M. Smetanin. “Verification of the logical sequence in nonclassical multivalued logic”, *Izv. IMI UdGU*, **50** (2017), pp. 62–82 (in Russian).

[3] A. S. Kuzichev. *Venn Diagrams*, Nauka, M., 1968, 253 pp. (in Russian).

[4] Bocharov V. A, V. I. Markin. *Syllogistic Theories*, Progress-Tradiciya, M., 2010, ISBN 978-5-8982-6361-4, 336 pp. (in Russian).

[5] S. N. Vasil’ev, A. K. Zherlov, E. A. Fedosov, B. E. Fedunov. *Intelligent Control of Dynamic Systems*, Fizmatlit, M., 2000, ISBN 5-9221-0050-5, 352 pp. (in Russian).

[6] Plutarx. *Comparative Biographies in Two Volumes*. V. 2, Nauka, M., 1994, ISBN 5-02-011570-3, 672 pp. (in Russian).

[7] K. R. Popper. *Objective Knowledge: An Evolutionary Approach*, Editorial URSS, M., 2002, ISBN 5-8360-0327-0, 384 pp. (in Russian).

[8] A. Tarskij. “Truth and proof”, *Voprosy filosofii*, 1972, no. 8(55), pp. 136–145 (in Russian).

[9] A. Tarski. “The concept of truth in formalized languages”, *Logic, Semantics and Metamathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1956, ISBN 0915144751, pp. 152–278.

[10] Yu. A. Petrov. *ABCs of Logical Thinking*, Izd-vo Mosk. Un-ta, M., 1991, ISBN 5-211-01486-3, 104 pp. (in Russian).

[11] K. I. Val’kov. *Projection Schematism — Tool and Method*, uchebnoe posobie, LISI, L., 1988, 83 pp. (in Russian).

[12] I. P. Kaloshina. *Psychology of Creative Activity*, ucheb. posobie dlya studentov vuzov, YuNITI-DANA, M., 2012, ISBN 978-5-238-01430-2, 655 pp. (in Russian).

[13] L. McGinness, P. Baumgartner. *Steamroller Problems: An Evaluation of LLM Reasoning Capability with Automated Theorem Prover Strategies*, 2024. arXiv 2407.20244v1 [cs.CL]