**Н.В.Латыпова, Н.А. Соловьева**

# МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

**Ижевск**
**2025**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра математического анализа

Н.В. Латыпова, Н.А. Соловьева

# МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2025

УДК 517.518(075.8)
ББК 22.161я73
Л278

*Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ*

**Рецензент:** канд. физ.-мат. наук, доцент каф. алгебры и топологии ин-та математики, информационных технологий и физики ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» **А.К. Кощеева**

**Латыпова Н.В., Соловьева Н.А.**

Л278 Метрические пространства : учеб.-метод. пособие / Н.В. Латыпова, Н.А. Соловьева. – Ижевск : Удмуртский университет, 2025. – 48 с.

Учебное пособие посвящено изучению такого раздела курса математического анализа, как Метрические пространства, который является базовым не только для последующего изучения дифференциального исчисления функций многих переменных и кратных интегралов в математическом анализе, но и знания которого потребуются для изучения таких дисциплин, как «Топология», «Дифференциальная геометрия» и «Функциональный анализ». Приводятся основные понятия и теоремы, которые подробно иллюстрируются примерами.

Предназначено для студентов бакалавриата направлений по укрупненным группам: 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки», а также будет полезно всем интересующимся математическим анализом

УДК 517.518(075.8)
ББК 22.161я73

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из разделов курса математического анализа, вызывающим наибольшие трудности в понимании и усвоении материала, является раздел "Метрические пространства". Данное пособие призвано помочь преодолеть возникающие трудности студентам математических направлений подготовки.

Пособие состоит из двух частей. В первой части излагается теоретический материал и приводятся примеры и задачи, решение которых иллюстрирует теорию. Во второй части проводится разбор и решение различных задач, а также представлены упражнения для самостоятельного решения, позволяющие студентам более основательно усвоить и закрепить изучаемый материал.

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

## §1. Определение и примеры метрических пространств

**Определение.** Числовая функция $\rho(x, y)$, определенная для любых двух точек $x, y$ из некоторого множества $X$, называется *метрикой (расстоянием между точками $x$ и $y$)*, если она удовлетворяет следующим условиям (аксиомам):

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$ (неотрицательность);

2. $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);

4. для любых трех точек $x, y, z \in X$
   $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство «треугольника»).

Множество $X$, в котором введено расстояние между точками, называется *метрическим пространством.*

**Пример 1. Пространство $\mathbb{R}^n$**

При изучении функций нескольких переменных возникает необходимость в изучении множества упорядоченных наборов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из $n$ действительных чисел. Упорядоченный набор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из $n$ действительных чисел называется $n$-мерной точкой или $n$-мерным вектором.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — $n$-мерные точки и $\lambda$ — некоторое вещественное число. Если во множестве $n$ - мерных точек ввести операции сложения и умножения на число по правилам

$$\begin{gathered} x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \\ \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \end{gathered} \tag{1}$$

то множество $n$-мерных точек становится линейным пространством.

Точка $0 = (0, \ldots, 0)$ будет нулем этого пространства, а точка
$$y = (-1)x = (-x_1, \ldots, -x_n) = -x$$
будет противоположной точке $x$.

Числовая величина
$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{2}$$
называется *скалярным произведением* $n$-мерных векторов $x$ и $y$.

Скалярное произведение обладает следующими *свойствами*, которые доказываются в курсе линейной алгебры:

1. $(x, y) = (y, x)$;
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4. $(x, x) \geqslant 0$;
5. $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

С помощью этих свойств в линейной алгебре выводится неравенство $|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x) \cdot (y, y)}$, называемое *неравенством Коши–Буняковского.*

Формула (2) позволяет записать это неравенство следующим образом:
$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$
Скалярное произведение (2) вносит в линейное пространство $n$-мерных точек структуру евклидова пространства, которое обозначается через $\mathbb{R}^n$.

Неотрицательная величина $\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ называется *нормой* точки $x$ или длиной вектора $x$. Понятие нормы позволяет придать неравенству Коши–Буняковского следующую форму: $|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

Норма обладает следующими *свойствами*:

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство «треугольника»).

Норма позволяет ввести в пространстве $\mathbb{R}^n$ понятие метрики или расстояния.

Число $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ называется *расстоянием* между точками $x$ и $y$ пространства $\mathbb{R}^n$.

Из свойств нормы вытекают следующие *свойства* расстояния:

1. $d(x,y) \geqslant 0$ ;
2. $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
3. $d(x,y) = d(y,x)$ (симметричность);
4. $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ (неравенство «треугольника»).

Неравенство треугольника для нормы методом математической индукции распространяется на любое конечное число векторов $a_i$:

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \|a_i\|.$$

Положим $a_i = (0, \ldots, x_i, \ldots, 0)$. Тогда имеем $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Далее

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|a_i\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Учитывая еще, что при любом $i$ $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2} \geqslant |x_i|$, мы придем в итоге к важному неравенству

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant \|x\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|. \qquad (3)$$

*Частные случаи*

**Пространство $\mathbb{R}^1$**

Точка $x$ есть просто вещественное число. Операции сложения и умножения на скаляр есть обычные операции сложения и умножения чисел. Скалярное произведение $(x, y) = xy$ совпадает с обычным умножением двух действительных чисел. Норма $\|x\| = |x|$ совпадает с абсолютной величиной числа $x$. Геометрическая модель пространства $\mathbb{R}^1$ — числовая ось. Расстояние $d(x, y) = |x - y|$ есть обычное расстояние между двумя точками на прямой.

**Пространство $\mathbb{R}^2$**

Точка $x \in \mathbb{R}^2$ есть пара вещественных чисел. Точку $x = (x_1, x_2)$ можно интерпретировать как точку плоскости, в которую внесена некоторая прямоугольная декартова система координат или как радиус–вектор этой точки. Сложение точек в $\mathbb{R}^2$ есть сложение по правилу «параллелограмма». Норма точки $x$ есть величина

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

равная длине радиус–вектора точки $x$. Если $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, то формула

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

есть хорошо известная формула для расстояния между двумя точками плоскости. Неравенство треугольника

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$$

выражает известную теорему геометрии: любая сторона треугольника не превосходит суммы двух других его сторон.

Таким образом, координатная плоскость может служить геометрической моделью пространства $\mathbb{R}^2$. Аналогичная геометрическая интерпретация имеет место и для пространства $\mathbb{R}^3$. При $n > 3$ пространство $\mathbb{R}^n$ не имеет наглядного геометрического представления, но и в этом случае мы будем широко пользоваться геометрической терминологией. Каждую $n$-мерную точку $x = (x_1, \dots, x_n)$ можно представлять в виде упорядоченной пары из двух точек $x = (y, z)$, где $y = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, а $z = (x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$. Поэтому для пространства $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ при любом $k = 1, 2, \dots, n-1$ имеет место представление

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

*$n$-мерным сегментом или $n$-мерным параллелепипедом* называется множество $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, т.е. множество точек $x \in I$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих неравенствам:

$$\begin{cases} a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \\ a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n. \end{cases}$$

Одно и то же множество $X$ может порождать разные метрические пространства, так как расстояние в $X$ можно определять различными способами. Так во множестве $n$-мерных точек $\mathbb{R}^n$, наряду с метрикой $d(x, y)$, рассматривают метрики

$$d_1(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}, \; d_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Таким образом, метрическое пространство $X$ нельзя отождествлять со множеством $X$. Поэтому еще говорят, что *метрическое пространство есть пара $(X, \rho)$, составленная из множества $X$ и метрики $\rho$.*

**Пример 2. Пространство $\mathbb{C}[a,b]$**

Точками $x = x(t)$ этого пространства являются всевозможные функции, непрерывные на $[a,b]$.

Расстояние между точками $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определяется по формуле

$$\rho(x,y) = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t) - y(t)|.$$

В силу известной теоремы Вейерштрасса для непрерывной функции величина $\rho(x,y)$ определена для любых $x, y \in \mathbb{C}[a,b]$.

**Пример 3. Произвольное пространство с дискретной метрикой**

Всякое множество $X$ можно сделать метрическим пространством, если ввести в нем так называемую *дискретную метрику*:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \neq y, \\ 0, & \text{если} \quad x = y. \end{cases}$$

Если $X$ — метрическое пространство, $E$ — произвольная часть $X$ и во множестве $E$ сохранена метрика пространства $X$, то $E$ в свою очередь является метрическим пространством, которое называют *подпространством* метрического пространства $X$.

**Определение.** Пусть $X$ есть метрическое пространство и $r > 0$. Множества

$$B^*(a;r) = \{x \in X \colon \rho(a,x) \leqslant r\}, B(a;r) = \{x \in X \colon \rho(a,x) < r\}$$

называются соответственно *замкнутым* и *открытым шаром радиуса* $r$ *с центром в точке* $a$. Множество

$$S(a;r) = \{x \in X \colon \rho(a,x) = r\}$$

называется *сферой радиусом* $r$ *с центром в точке* $a$.

**Пример 4.** В пространстве $\mathbb{R}^1$ замкнутый шар $B^*(a;r) = [a-r, a+r]$ — отрезок, открытый шар $B(a;r) = (a-r, a+r)$ —

интервал, сфера $S(a;r)$ состоит из двух точек $x_1 = a - r$ и $x_2 = a + r$.

В пространстве $(\mathbb{R}^n, d)$ замкнутый шар, открытый шар и сфера будут обозначаться соответственно через $B_n^*(a;r)$, $B_n(a;r)$ и $S_{n-1}(a;r)$, где индекс показывает размерность указываемого множества. Соотношения, определяющие множества $B_n^*$, $B_n$ и $S_{n-1}$, примут такой вид

$$B_n^*(a;r)\colon x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant r^2, \; B_n(a;r)\colon x_1^2 + \dots + x_n^2 < r^2,$$
$$S_{n-1}(a;r)\colon x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2.$$

**Определение.** Множество $E \subset X$ называется *ограниченным*, если $\sup\limits_{x,y \in E} \rho(x,y) < \infty$. Величина

$$diam E = \sup_{x,y \in E} \rho(x,y)$$

называется *диаметром* $E$.

## §2. Сходимость в метрическом пространстве

**Определение.** Точка $a \in X$ называется *пределом* последовательности $x_p$, если

$$\lim_{p \to \infty} \rho(x_p, a) = 0, \text{ т.е.}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N = N(\varepsilon) : \; \forall p > N \Rightarrow \rho(x_p, a) < \varepsilon.$$

Записывается этот факт известным уже способом:

$$\lim_{p \to \infty} x_p = a \quad \text{или} \quad x_p \to a \quad \text{при} \quad p \to \infty.$$

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*.

Рассмотрим простейшие свойства сходящихся последовательностей.

**1.** *Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.*

**2.** *Всякая сходящаяся последовательность ограничена.*

**3.** *Если последовательность $x_p \to a$, то и всякая подпоследовательность $x_{p_k} \to a$.*

**Определение.** Последовательность $x_p$ называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши* в метрическом пространстве $X$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall p > N \quad \text{и} \quad \forall q > N \colon \rho(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

**Теорема 1.** *Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.*

**Доказательство.** Пусть $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = a$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon), \forall p > N : \rho(x_p, a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Поэтому $\forall p > N$ и $\forall q > N$ получаем $\rho(x_p, x_q) \leqslant \rho(x_p, a) + \rho(a, x_q) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

Однако обратное утверждение верно не в любом метрическом пространстве.

**Контрпример.** Пусть $X = (0, 1)$ и $\rho(x, y) = |x - y|$. Последовательность $x_p = \dfrac{1}{p}$ фундаментальна, но не имеет предела в пространстве $X$.

**Определение.** Метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность имеет предел, принадлежащий данному метрическому пространству, называется *полным метрическим пространством.*

Известный критерий сходимости Коши означает, что $\mathbb{R}^1$ — полное пространство.

Рассмотрим сейчас более подробно введенные понятия в пространстве $\mathbb{R}^n$.

**Теорема 2.** *Для того чтобы последовательность $x_p \in \mathbb{R}^n$ сходилась к точке $a \in \mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнялись равенства $\lim\limits_{p\to\infty} x_{pi} = a_i$, где $x_p = (x_{p1}, \ldots, x_{pn})$ и $a = (a_1, \ldots, a_n)$.*

**Доказательство.** Необходимость. $\Rightarrow$) Пусть $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = a$.

На основании (3) имеем

$$0 \leqslant |x_{pi} - a_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{pi} - a_i)^2} = \rho(x_p, a).$$

Так как $\rho(x_p, a) \to 0$, то $\lim\limits_{p\to\infty} x_{pi} = a_i$.

Достаточность. $\Leftarrow$) Предположим, что $\lim\limits_{p\to\infty} x_{pi} = a_i$. Тогда

$$\lim_{p\to\infty} \rho(x_p, a) = \lim_{p\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{pi} - a_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lim_{p\to\infty} (x_{pi} - a_i)^2} = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = a$. ■

## §3. Предельные точки

**Определение.** Открытый шар с центром в точке $a$ называется *окрестностью* точки $a$ в метрическом пространстве $X$.

Окрестность точки $a$ радиуса $\delta$ будет обозначаться $O_X(a;\delta)$, а если ясно, о каком пространстве идет речь, то просто $O(a;\delta)$. Так как радиус окрестности произволен, то каждая точка имеет бесконечное множество окрестностей. Множество

$$\dot{O}(a;\delta) = O(a;\delta)\backslash\{a\}$$

называется *проколотой окрестностью* точки $a$.

**Пример.** Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Рассмотрим линейное пространство $n$-мерных точек с метрикой

$$\rho(x, a) = d_1(x, y) = \max\{|x_1 - a_1|, \ldots, |x_n - a_n|\}.$$

В этой метрике неравенство $\rho(x, a) < \delta$, определяющее $\delta$-окрестность точки, принимает следующий вид:

$$|x_1 - a_1| < \delta, |x_2 - a_2| < \delta, \ldots, |x_n - a_n| < \delta.$$

Такую окрестность точки мы будем называть *квадратной* в отличие от *круговой окрестности*

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 < \delta^2,$$

определяемой евклидовой метрикой

$$\rho(x, a) = d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2}.$$

**Определение.** Пусть $X$ — метрическое пространство. Точка $a \in X$ называется *предельной для множества* $E \subset X$, если любая проколотая окрестность точки $a$ содержит хотя бы одну точку множества $E$, то есть если $\forall \varepsilon > 0\colon \dot{O}(a, \varepsilon) \bigcap E \neq \emptyset$. Точка $a \in E$ называется *изолированной точкой множества* $E$, если она не является предельной для $E$, то есть $\exists \delta > 0\colon O(a, \delta) \bigcap E = \{a\}$.

**Примеры.**

1. $X = \mathbb{R}^1$, $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$. Множество имеет единственную предельную точку $a = 0$. Все точки множества $E$ изолированные.

2. $X = \mathbb{R}^1$ , $E = [0, 2] \bigcup \{3\}$. Все точки $[0, 2]$ предельные для $E$. Точка $a = 3$ единственная изолированная точка множества $E$.

3. $X = \mathbb{R}^n$ ,$E = B_n^*(a; r)$. Множество предельных точек множества $E$ есть само $E$, так что у замкнутого шара нет изолированных точек.

4. В дискретной метрике все точки пространства $X$ изолированные, т.к. для $\forall a \in X$ имеем $O\left(a; \frac{1}{2}\right) = \{a\}$.

5. Если $E = \{x_1, \dots, x_p, \dots\}$, $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ и $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = a$, то $a$ — предельная точка множества $E$. Действительно, для $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, $\forall p > N$ $x_p \in O(a;\varepsilon)$, так что найдется $x_p$, для которого будем иметь $0 < \rho(x_p, a) < \varepsilon$.

## §4. Внутренность, внешность и граница множества

**Определение.** Точка $a \in X$ называется *внутренней точкой* множества $E$, если $\exists\delta > 0 : O(a,\delta) \subset E$. Множество $\overset{\circ}{E}$ всех внутренних точек множества $E$ называется *внутренностью* множества $E$.

**Примеры.**

1. $X = \mathbb{R}^2$, $\quad E = (a,b) \times (c,d)$, $\quad \overset{\circ}{E} = E$.
2. $X = \mathbb{R}^1$, $\quad E = [a,b]$, $\quad \overset{\circ}{E} = (a,b)$.
3. $X = [a,b]$ с дискретной метрикой. $E = X$, $\quad \overset{\circ}{E} = [a,b]$.
4. $X = [a,+\infty)$ — подпространство $\mathbb{R}^1$, $E = [a,b]$, $\overset{\circ}{E} = [a,b)$.

Примеры 2, 3, 4 показывают, что понятие внутренней точки и внутренности множества зависят от того, в каком пространстве рассматривается это множество.

**Определение.** Точка $a$ называется *внешней точкой* множества $E$, если

$$\exists\delta > 0 \colon O_X(a;\delta) \bigcap E = \emptyset. \tag{4}$$

Множество всех внешних точек множества $E$ называется *внешностью* множества $E$. Условие (4) равносильно условию

$$O_X(a;\delta) \subset C_X E,$$

так что точка, внешняя для множества $E$, будет внутренней для множества $C_X E = X \backslash E$ — дополнения $E$, а внешность множества $E$ будет внутренностью дополнения множества $E$. Поэтому мы будем обозначать внешность множества $E$ через $\overset{\circ}{C}E$.

**Пример.** $X = \mathbb{R}^2$, $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant r < \rho(x, a) \leqslant R\}$. Множество $E$ — круговое кольцо с центром $a$, $r$ — внутренний радиус, $R$ — внешний радиус.

Внутренность $\overset{\circ}{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < r < \rho(x, a) < R\}$, внешность

$$\overset{\circ}{C}E = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \rho(x, a) < r\} \bigcup \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \rho(x, a) > R\}.$$

**Определение.** Точка $a \in X$ называется *граничной точкой* множества $E \subset X$, если каждая окрестность точки $a$ содержит как точки, принадлежащие $E$, так и точки, не принадлежащие $E$. Множество граничных точек называется *границей* множества $E$ и обозначается $\partial E$.

**Примеры.**

1. $X = \mathbb{R}^2$, $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \ 0 \leqslant r < \rho(x, a) \leqslant R\}$,
   $\partial E = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \ \rho(x, a) = r\} \bigcup \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \rho(x, a) = R\}$.
2. $X = \mathbb{R}^1$, $E = [a, b]$, $\partial E = \{a, b\}$ состоит из двух точек концов сегмента $[a, b]$.
3. $X = \mathbb{R}^2$, $E = [a, b]$, $\partial E = [a, b]$.
4. $X = \mathbb{R}^1$, $E = \mathbb{Q}$ множество рациональных чисел. Тогда

$$\overset{\circ}{E} = \overset{\circ}{C}E = \emptyset, \quad \partial E = (-\infty, +\infty).$$

Из определений видно, что $\forall a \in X$ будет либо внутренней, либо граничной, либо внешней точкой для множества $E$. Значит,

$$\overset{\circ}{E} \bigcup \partial E \bigcup \overset{\circ}{C}E = X.$$

Кроме того, внутренность, внешность и граница множества — дизъюнктные множества.

**Определение.** Множество $\overline{E} = E \bigcup \partial E$ называется *замыканием* множества $E$.

**Примеры.**

1. $X = \mathbb{R}^1, \quad E = (a, b), \quad \overline{E} = (a, b) \bigcup \{a, b\} = [a, b].$

2. $X = \mathbb{R}^1$ или $X = \mathbb{R}^2, \quad E = [a, b], \quad \overline{E} = [a, b].$

3. $X = \mathbb{R}^1, \quad E = \mathbb{Q}, \quad \overline{E} = \mathbb{Q} \bigcup \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^1.$

4. $X = \mathbb{R}^2, \quad E = \{x \colon 0 < r < \rho(x, a) < R\},$
   $\overline{E} = \{x \colon r \leqslant \rho(x, a) \leqslant R\}.$

**Определение.** Пусть $X$ — метрическое пространство. Множество $A$ называется *плотным* во множестве $E$, если для $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall x \in E$, $\exists a \in A \colon \rho(x, a) < \varepsilon$.

Если $E = X$, то говорят, что $A$ *всюду плотно* в $X$.

**Замечание.** Если $A$ плотно в $E$, то по определению это значит, что каждая точка множества $E$ либо принадлежит $A$, либо является предельной для $A$, т.е. $E \subset \overline{A}$.

## §5. Замкнутые и открытые множества

**Определение.** Пусть $X$ — метрическое пространство. Множество $E \subset X$, содержащее все свои предельные точки, называется *замкнутым* в $X$.

Пустое множество и само метрическое пространство $X$ считаются замкнутыми в $X$ множествами.

**Примеры.**

1. Любое конечное множество замкнуто.

2. Во всяком метрическом пространстве сфера $S(a; r)$ есть замкнутое множество.

3. $X = \mathbb{R}^1, \quad E = [a, b]$ – замкнутое множество.

**Определение.** Множество $E \subset X$, все точки которого являются внутренними в $X$, называется *открытым* в $X$, то есть $E = \overset{\circ}{E}$. Или множество $E \subset X$ называется открытым в $X$, если

$$\forall a \in E, \quad \exists \delta > 0 \colon O_X(a;\delta) \subset E.$$

Само метрическое пространство $X$ есть открытое в $X$ множество.

**Примеры.**

1. $E = \emptyset$ — открытое множество. Действительно, $\overset{\circ}{E} \subset E$. Поэтому и $\overset{\circ}{E} = \emptyset$.

2. $X = \mathbb{R}^1, \quad E = (a,b)$ – открытое множество.

3. В дискретном пространстве любое множество $E$ будет открытым, т.к. для $\forall a \in E \colon O\left(a; \frac{1}{2}\right) = \{a\} \subset E$.

4. В пространстве $\mathbb{R}^2$ множество $E = (a,b)$ не есть открытое. Более того, ни одна точка $x \in (a,b)$ не будет внутренней.

5. Открытый шар $B(a;r)$ есть открытое множество.

6. Открытым множеством будет окрестность любой точки. Откуда следует, что внутренность и внешность всякого множества есть открытые множества. При доказательстве достаточно ограничиться случаем множества $\overset{\circ}{E}$, т.к. внешность множества $E$ есть внутренность множества $CE$. Пусть $x_0$ — внутренняя точка множества $E$. Тогда $\exists \delta > 0 \colon \ O(x_0;\delta) \subset E$. Все точки окрестности $O(x_0;\delta)$ — внутренние для $E$. Так что $O(x_0;\delta) \subset \overset{\circ}{E}$.

Связь между замкнутыми и открытыми множествами даёт следующая теорема.

**Теорема 1.** *Для того чтобы множество $E$ было открытым в метрическом пространстве $X$, необходимо и достаточно, чтобы множество $C_X E$ было замкнутым в $X$.*

**Доказательство.** Необходимость. Пусть $E$ открытое множество. Любая точка $a \notin C_X E$ будет точкой множества $E$. Тогда найдется окрестность $O(a;\delta) \subset E$. Поэтому точка $a$ не может быть предельной для множества $C_X E$, и следовательно, это множество замкнуто.

Достаточность. Пусть множество $C_X E$ замкнуто. Тогда $\forall a \in E$ не может быть предельной для $CE$, и значит, $\exists O(a;\delta)\colon O(a;\delta) \bigcap CE = \varnothing$. Эта окрестность, очевидно, содержится в $E$. ■

**Следствие.** *Замыкание любого множества замкнуто.*

**Доказательство.** Так как $\overline{E} = \overset{\circ}{E} \bigcup \partial E$, то $\overline{E} = X \backslash \overset{\circ}{CE}$ и множество $\overline{E}$ замкнуто как дополнение открытого множества $\overset{\circ}{CE}$. ■

Для выяснения поведения замкнутых и открытых множеств при операциях объединения и пересечения множеств нам потребуются законы двойственности указанных операций:

$$X \backslash \bigcup_\alpha E_\alpha = \bigcap_\alpha (X \backslash E_\alpha), \tag{5}$$

$$X \backslash \bigcap_\alpha E_\alpha = \bigcup_\alpha (X \backslash E_\alpha). \tag{6}$$

**Теорема 2.**

1. *Объединение любого семейства открытых множеств есть открытое множество.*
2. *Пересечение любого семейства замкнутых множеств есть множество замкнутое.*
3. *Пересечение любого конечного числа открытых множеств есть открытое множество.*
4. *Объединение любого конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

**Доказательство.** 1. Пусть $G = \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$, где каждое $G_\alpha$ открытое множество, и пусть $a \in G$. Тогда $\exists \alpha\colon a \in G_\alpha$. Так как $G_\alpha$ — открытое множество, то $\exists O(a;\delta) \subset G_\alpha \subset G$.

2. Пусть $F = \bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$, где каждое $F_\alpha$ — замкнутое множество. Тогда, используя (6), имеем

$$CF = \bigcup_{\alpha} CF_\alpha.$$

Каждое $CF_\alpha$ — открытое множество, и в силу утверждения 1 данной теоремы будет открытым и множество $CF$. Применение теоремы 1 завершает доказательство.

3. Пусть $G = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$, где каждое $G_i$ — открытое множество, и $a \in G$. Из определения множества $G$ имеем: при любом $i$, $a \in G_i$, а это значит, что при любом $i$ существует $O(a;\delta_i)$ такая, что $O(a;\delta_i) \subset G_i$. Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Окрестность $O(a;\delta)$ входит в каждое из множеств $G_i$ и, следовательно,

$$O(a;\delta) \subset G.$$

4. Пусть $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$, где каждое $F_i$ — замкнутое множество. На основании (5)

$$CF = \bigcap_{i=1}^{n} CF_i.$$

Каждое $CF_i$ — открытое множество. Значит и $CF$ — открытое множество, а $F$ — замкнутое множество. ■

**Следствие.** *Граница $\partial E$ любого множества $E$ есть замкнутое множество.*

Доказательство вытекает из соображения

$$\partial E = X \diagdown (\overset{\circ}{E} \bigcup \overset{\circ}{C}E).$$

**Пример.** $X = \mathbb{R}^1, \quad G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$.

Каждое $G_n$ — открытое множество, а их пересечение $G$ не есть открытое множество.

Этот пример показывает, что требование конечности числа множеств в утверждениях 3 и 4 Теоремы 2 существенно.

**Замечание.** Отметим без доказательства следующий существенный факт. В пространстве $\mathbb{R}^n$ нет не пустого множества $E$, отличного от всего пространства, одновременно замкнутого и открытого. Это свойство пространства $\mathbb{R}^n$ называется связностью.

**Теорема 3.** *Если $F$ — замкнутое, ограниченное сверху (снизу) множество вещественных чисел, и $\alpha = \sup F$ ($\beta = \inf F$), то $\alpha \in F$ ($\beta \in F$).*

**Доказательство.** Допустим, что $F$ — множество, ограниченное сверху, $\alpha = \sup F$ и $\alpha \notin F$. По свойству точной верхней грани для любого $\delta > 0$ существует $x^* \in F\colon \alpha - \delta < x^* \leqslant \alpha$. Но знака равенства здесь быть не может ($\alpha \notin F$). Поэтому точка $x^* \in \dot{O}(\alpha; \delta)$. Следовательно, $\alpha$ — предельная точка множества $F$, не принадлежащая $F$, что противоречит замкнутости множества $F$. ■

Аналогично доказывается утверждение теоремы о точной нижней грани.

## §6. Вполне ограниченные и компактные множества

**Определение.** Множество точек $M$ называется *$\varepsilon$-сетью* для множества $E$ в метрическом пространстве $X$, если

$$\forall x \in E \quad \exists y \in M\colon \rho(x, y) < \varepsilon.$$

Множество $\{y_1, \ldots, y_N\}$ является $\varepsilon$-сетью для $E$ тогда и только тогда, когда $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} B(y_j, \varepsilon)$.

**Определение.** Множество $E$ называется *вполне ограниченным*, если $\forall \varepsilon > 0$ существует $\varepsilon$-сеть для $E$, состоящая из конечного числа точек.

Из определения сразу следует, что множество $E$ вполне ограниченно тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ множество $E$ можно покрыть конечным набором шаров радиуса $\varepsilon$.

**Теорема 1.** *Всякое вполне ограниченное множество является ограниченным.*

**Доказательство.** Пусть $E$ — вполне ограниченное множество. Возьмем произвольное $\varepsilon$. Пусть $\{y_1, \dots, y_N\}$ есть конечная $\varepsilon$-сеть для $E$. Для любых точек $x, y \in E$ существуют $i, j\colon \rho(x, y_i) < \varepsilon$ и $\rho(y, y_j) < \varepsilon$. Положим $d = \sup\limits_{i,j} \rho(y_i, y_j)$. Имеем

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, y_i) + \rho(y_i, y_j) + \rho(y_j, y) \leqslant \varepsilon + d + \varepsilon \leqslant d + 2\varepsilon.$$

Отсюда $\sup\limits_{x,y} \rho(x, y) \leqslant d + 2\varepsilon$ и множество $E$ ограничено.■

**Теорема 2.** *Всякое ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ является вполне ограниченным.*

**Доказательство.** Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. Имеем $|a_i - x_i| \leqslant \rho(x, a) \leqslant diam E = d$. Отсюда $x_i \in [a_i - d, a_i + d]$. На каждом отрезке $[a_i - d, a_i + d]$ найдется конечная $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$-сеть $M$. Рассмотрим множество

$$M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \{(x_1, \dots, x_n)\colon x_i \in M_i\}.$$

Множество $M$ конечно.

Покажем, что оно образует $\varepsilon$ - сеть для множества $E$. Возьмем произвольный элемент $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. Пусть $y_i \in M_i$ и $|x_i - y_i| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Рассмотрим точку $y = (y_1, \dots, y_n)$. Имеем $y \in M$ и

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что множество $M$ является $\varepsilon$-сетью для множества $E$. ■

**Определение.** Множество $E$ метрического пространства $X$ называется *компактным*, если из любой последовательности элементов множества $E$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к элементу множества $E$.

Свойства:

**1.** *Компактное множество всегда замкнуто.*

**2.** *Замкнутое подмножество компактного множества компактно.*

**3.** *Множество $E$ компактно тогда и только тогда, когда любое бесконечное подмножество множества $E$ имеет предельную точку, принадлежащую $E$.*

**4.** *Множество $E$ компактно тогда и только тогда, когда $E$ полно и вполне ограниченно.*

**Теорема 3.** *Подмножество $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда $E$ замкнуто и ограниченно.*

**Доказательство.** Из теорем 1 и 2 следует, что для подмножества $E$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ свойства вполне ограниченности и ограниченности эквивалентны. В силу полноты $\mathbb{R}^n$ подмножество $E \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда $E$ полно. По свойству 4 получаем требуемый критерий компактности в $\mathbb{R}^n$. ■

**Определение.** Семейство открытых множеств $\{G_\alpha\}$ называется *открытым покрытием множества* $E$, если $E \subset \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$ , т.е. если $\forall x \in E, \quad \exists \alpha \colon x \in G_\alpha$.

**Теорема [Борель, Лебег].** *Для того чтобы метрическое пространство $X$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы из любого открытого покрытия $\{G_\alpha\}$ пространства $X$ можно было выделить конечное подпокрытие, т.е. выбрать конечный набор $G_{\alpha_1}, \ldots, G_{\alpha_N}$ из семейства $\{G_\alpha\}$, покрывающий $X$.*

**Доказательство.** Необходимость. Пусть $\{G_\alpha\}$ — открытое покрытие компактного пространства $X$. Предположим противное, т.е. что из $\{G_\alpha\}$ нельзя извлечь конечное подпокрытие. Возьмем произвольную последовательность $\varepsilon_p > 0$, $\varepsilon_p \to 0$. Множество $X$ вполне ограниченно, поэтому его можно покрыть конечным числом шаров радиуса $\varepsilon_p$. Из этих шаров выберем такой, который не покрывается конечным числом множеств $G_\alpha$. Этот шар обозначим через $B_p$. Пусть $z_p$ — центр шара $B_p$. Существует подпоследовательность $z_{p_k}$, сходящаяся к некоторому элементу $a \in X$. Найдется индекс $\alpha_0$ такой, что $a \in G_{\alpha_0}$. В силу открытости $G_{\alpha_0}$ для некоторого $\varepsilon > 0$ шар $B(a,\varepsilon) \subset G_{\alpha_0}$. Выберем $p_k$ так, чтобы $\varepsilon_{p_k} + \rho(z_{p_k}, a) < \varepsilon$. Тогда если $x \in B_{p_k}$, то

$$\rho(a,x) \leqslant \rho(a, z_{p_k}) + \rho(z_{p_k}, x) \leqslant \rho(a, z_{p_k}) + \varepsilon_{p_k} < \varepsilon.$$

Отсюда $B_{p_k} \subset G_{\alpha_0}$. Это противоречит тому, что шар $B_{p_k}$ не покрывается конечным числом множеств $G_\alpha$.

Достаточность. Пусть $A$ — бесконечное множество в $X$. Предположим противное, т.е. что $A$ не имеет предельных точек в $E$. Тогда для каждого $x \in X$ найдется окрестность $O(x)$ такая, что множество $O(x) \bigcap A$ конечно. Окрестности $O(x)$ образуют открытое покрытие пространства $X$. Извлечем из него конечное подпокрытие $O(x_1), \ldots, O(x_N)$. Так как в каждой окрестности $O(x_j)$ содержится только конечное число элементов множества $A$, то получим противоречие с тем, что множество $A$ бесконечно. Следовательно, множество $A$ имеет предельную точку. Теорема доказана. ■

## §7. Расстояние между множествами

**Определение.** Пусть $A$ и $B$ — какие-то множества метрического пространства. Числовая величина

$$\rho(A,B) = \inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} \rho(x,y) \tag{7}$$

называется *расстоянием между множествами* $A$ и $B$.

Поскольку для любых $x$ и $y$ величина $\rho(x,y) \geqslant 0$, то, во-первых, расстояние $\rho(A,B)$ определено для любых двух непустых множеств $A$ и $B$ и, во-вторых, всегда $\rho(A,B) \geqslant 0$.

Если множество $B$ состоит из одной точки $a$, то расстояние $\rho(A,B)$ называют просто *расстоянием от точки $a$ до* *множества* $A$ и обозначают его $\rho(a, A)$. Так что согласно определению (7)

$$\rho(a, A) = \inf_{x \in A} \rho(x, a). \tag{8}$$

**Теорема.** *Если* $F_1$ *и* $F_2$ *— непересекающиеся замкнутые множества, хотя бы одно из которых компактно, то*

$$\rho(F_1, F_2) > 0.$$

**Доказательство.** Пусть для определенности компактно множество $F_1$. Предположим противное: $\rho(F_1, F_2) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют $x^* \in F_1$ и $y^* \in F_2$ такие, что $\rho(x^*, y^*) < \varepsilon$. Придавая $\varepsilon$ значения $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$, мы построим две последовательности точек $x_n \in F_1$ и $y_n \in F_2$, которые удовлетворяют неравенству $\rho(x_n, y_n) < \dfrac{1}{n}$.

Таким образом, $\rho(x_n, y_n) \to 0$ при $n \to \infty$. В силу компактности множества $F_1$, из $x_n$ можно выделить подпоследовательность $x_{n_k} \to \xi$. Теперь неравенство треугольника

$$\rho(y_{n_k}, \xi) \leqslant \rho(y_{n_k}, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, \xi)$$

и соотношения $\rho(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0$, $\rho(x_{n_k}, \xi) \to 0$ дают нам $\rho(y_{n_k}, \xi) \to 0$. Следовательно, точка $\xi$ предельная для замкнутого множества $F_2$, и поэтому $\xi \in F_2$.

Итак, точка $\xi$ принадлежит обоим множествам $F_1$ и $F_2$ вопреки условию, что множества $F_1$ и $F_2$ не пересекаются. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

**Следствие 1.** *Если* $F_1$ *и* $F_2$ *— непересекающиеся замкнутые множества пространства* $\mathbb{R}^n$ *и, по крайней мере, одно из них ограниченно, то* $\rho(F_1, F_2) > 0$.

**Следствие 2.** *Если* $F$ *— замкнутое множество метрического пространства и* $a \notin F$, *то* $\rho(a, F) > 0$.

## §8. Нормированные пространства

**Определение.** Пусть $X$ — линейное пространство. Неотрицательная числовая функция

$$\|x\|\colon X \to \mathbb{R}$$

называется *нормой* в $X$, если

1) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (положительная однородность или свойство гомотетии);

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство «треугольника» или условие полуаддитивности).

Линейное пространство, в котором введена норма, называется *линейным нормированным пространством.*

**Пример 1. Пространство** $\mathbb{R}^n$

Напомним, что для $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{9}$$

Норму (9) обычно называют евклидовой. В линейном пространстве $n$-мерных точек часто используют еще две нормы:

$$\|x\|_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \tag{10}$$

и

$$\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \tag{11}$$

которые мы также обозначаем знаком $\|\cdot\|$, но с индексами.

Линейные нормированные пространства, определяемые нормами (10), (11), конечно, не совпадают с $\mathbb{R}^n$, хотя все они и порождены одним и тем же линейным пространством.

**Пример 2. Пространство $\mathbb{C}[a, b]$**

Это линейное пространство функций $x = x(t)$, непрерывных на сегменте $[a, b]$, с нормой

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|. \tag{12}$$

Заметим сразу, что из аксиомы 2) вытекает соотношение

$$\| - x\| = \|x\|.$$

Неравенство «треугольника» методом математической индукции легко распространяется на любое конечное число слагаемых, являющихся точками линейного нормированного пространства:

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_p\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_p\|.$$

Также из неравенства треугольника (если заменить $x$ на $x-y$ или $y$ на $y - x$) следуют неравенства

$$\|x - y\| \geqslant \|x\| - \|y\| \quad \text{и} \quad \|y\| \geqslant \|y\| - \|x\|.$$

Поэтому имеем

$$\|x - y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||. \tag{13}$$

**Определение.** Пусть $X$ — линейное пространство и $a, b \in X$. Множество точек

$$x = (1 - t)a + tb, \ -\infty < t < +\infty \tag{14}$$

называется *прямой.* Если в уравнении (14) ограничить изменение параметра $t$ промежутком $0 \leqslant t \leqslant 1$, то полученное множество называется *отрезком*, соединяющим точки $a$ и $b$ и обозначается $[a, b]$. Если же $t \geqslant 0$, то множество (14) называется *лучом.*

Совокупность отрезков, составленных таким образом, что конец каждого предыдущего отрезка является началом следующего, называется *ломаной.*

**Определение.** Множество $A$ линейного пространства $X$ называется *выпуклым*, если любые две его точки входят в $A$ вместе с отрезком, соединяющим эти точки.

**Пример.** Любой шар в линейном нормированном пространстве есть выпуклое множество. В самом деле, пусть $\|x-a\| < r$, $\|y-a\| < r$ и $z = (1-t)x + ty \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$. Тогда

$$\|z-a\| = \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| \leqslant \\ \leqslant (1-t)\|x-a\| + t\|y-a\| < (1-t)r + tr = r.$$

В нормированном пространстве легко ввести расстояние, если положить

$$\rho(x,y) = \|x-y\|.$$

Теперь, как и во всяком метрическом пространстве, в нормированном пространстве можно определить предел последовательности. Только в этом случае утверждение $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = a$ означает следующее:

$$\rho(x_p, a) = \|x_p - a\| \to 0 \quad \text{при} \quad p \to \infty$$

или

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon), \quad \forall p > N\colon \|x_p - a\| < \varepsilon.$$

В одно и то же линейное пространство можно внести разные нормы. Это было проиллюстрировано на примере линейного пространства $\mathbb{R}^n$, в котором рассматривались три разные нормы.

**Определение.** Две нормы $\|x\|_I$ и $\|x\|_{II}$, определенные в одном и том же линейном пространстве $X$, называются *эквивалентными*, если существуют $m > 0$ и $M > 0$ такие, что для любых точек $x \in X$

$$m\|x\|_{II} \leqslant \|x\|_I \leqslant M\|x\|_{II} \,. \tag{15}$$

Обозначение: $\|x\|_I \sim \|x\|_{II}$.

**Лемма.** *Если в линейном пространстве* $X\colon \|x\|_I \sim \|x\|_{II}$ *и точка* $a \in X$, *то*

$$\forall O_{II}(a), \quad \exists O_I(a)\colon O_I(a;\delta_1) \subset O_{II}(a;\delta) \tag{16}$$

$$\forall O_I(a;\delta), \quad \exists O_{II}(a;\delta_1)\colon O_{II}(a;\delta_1) \subset O_I(a;\delta). \qquad (17)$$

**Доказательство.** Отметим прежде всего, что обозначения $O_I$ и $O_{II}$ показывают, в какой метрике берется окрестность точки $a$.

Включение (16) равносильно утверждению

$$\|x-a\|_I < \delta_1 \Longrightarrow \|x-a\|_{II} < \delta.$$

Поэтому рассуждаем так. Пусть $\|x-a\|_I < \delta_1$, где $\delta_1$ пока не определено. В силу (15) имеем

$$\|x-a\|_{II} \leqslant \frac{1}{m}\|x-a\|_I < \frac{1}{m}\delta_1.$$

Выбрав теперь $\delta_1 = m\delta$, получаем требуемое неравенство.

Аналогично доказывается и включение (17). Пусть $\|x-a\|_{II} < \delta_1$. Опять-таки на основании (15)

$$\|x-a\|_I \leqslant M\|x-a\|_{II} < M\delta_1.$$

Взяв $\delta_1 = \frac{1}{M}\delta$, приходим к утверждению

$$\|x-a\|_{II} < \delta_1 \Longrightarrow \|x-a\|_I < \delta,$$

что равносильно включению (17). ■

**Теорема 3.** *Если в линейном пространстве $X$ определены две эквивалентные нормы, то каждое множество $G \subset X$, открытое в одной из метрик, будет открытым и в другой метрике, и наоборот.*

**Доказательство.** Пусть множество $G$ открыто в метрике $I$. Тогда любая точка $a \in G$ входит в $G$ вместе с некоторой окрестностью $O_I(a)$. Согласно лемме существует $O_{II} \subset O_I(a) \subset G$. Значит, $G$ открыто и в метрике $II$. Обратное утверждение доказывается точно так же. ■

Таким образом, в нормированных пространствах с эквивалентными нормами один и тот же набор открытых множеств.

Совокупность всех открытых множеств линейного нормированного пространства $X$ называется его <u>*топологией*</u>, а свойства и понятия пространства, основанные на открытых множествах, называются *топологическими свойствами и понятиями.*

Понятия окрестности, предельной точки, замкнутого множества, замыкания, внутренности и внешности множества, границы являются топологическими понятиями. Топологическим будет и понятие непрерывной функции. Топологические свойства пространства не меняются при переходе к эквивалентной норме.

Следовательно, теорему 3 можно кратко сформулировать в такой форме.

*Линейные нормированные пространства с эквивалентными нормами обладают одной и той же топологией.*

Топологические свойства определяются только топологией пространства, они не нуждаются в метрике. Поэтому возможно широкое обобщение метрического пространства — топологическое пространство. Их изучение составляет предмет отдельной математической дисциплины — топологии.

Отметим еще, что понятия шара, сферы, ограниченного множества не являются топологическими.

Если $\|x\|_I$ и $\|x\|_{II}$ — нормы в линейном пространстве $X$, то запись $x_p \underset{I}{\to} a$ или $x_p \underset{II}{\to} a$ означает сходимость к $a$ по соответствующей норме, т.е. $\|x_p - a\|_I \to 0$ или $\|x_p - a\|_{II} \to 0$.

**Теорема 4.** *Если в линейном пространстве* $X\colon \|x\|_I \sim \|x\|_{II}$, *то условия* $x_p \underset{I}{\to} a$ *и* $x_p \underset{II}{\to} a$ *эквивалентны.*

Доказательство немедленно следует из неравенства

$$m\|x_p - a\|_{II} \leqslant \|x_p - a\|_I \leqslant M\|x_p - a\|_{II} .$$

В заключение рассмотрим еще одну важную теорем.

**Теорема 5.** *В линейном пространстве* $\mathbb{R}^n$ *нормы*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}, \ \|x\|_1 = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x| \ \textit{и} \ \|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

*эквивалентны.*

**Замечание.** Можно доказать более сильное утверждение: в конечномерном линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентны.

**Доказательство.** Неравенство (3) можно записать в виде

$$\|x\|_1 \leqslant \|x\| \leqslant \|x\|_2.$$

Легко видеть, что

$$\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n}|x_i| \leqslant n\|x\|_1.$$

В итоге получаем

$$\|x\|_1 \leqslant \|x\| \leqslant \|x\|_2 \leqslant n\|x\|_1.$$

Это значит, что $\|x\| \sim \|x\|_1$ и $\|x\|_2 \sim \|x\|_1$. ■

Эквивалентность в пространстве $\mathbb{R}^n$ норм $\|x\|$ и $\|x\|_1$ позволяет формулировать все факты и понятия, опирающиеся на понятие окрестности, как в терминах круговой окрестности (т.е. окрестности в норме $\|x\|$), так и в терминах квадратной окрестности (т.е. окрестности в норме $\|x\|_1$).

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

**1.** Проверить аксиомы метрики в пространстве $\mathbb{R}^n$:
a) евклидовой метрики $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$;
b) $d_1(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, \ldots, |x_n-y_n|\}$,
c) $d_2(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$.

*Решение.* a) Очевидно, что $d(x,y) \geqslant 0$. Равенство $d(x,y) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $x_i = y_i$ для всех $i = 1,2,\ldots,n$, т.е. $x = y$. Нетрудно заметить, что $d(x,y) = d(y,x)$. Покажем, что справедливо неравенство «треугольника»: $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

Пусть $x_i - z_i = a_i$, $z_i - y_i = b_i$. Тогда $x_i - y_i = a_i + b_i$. Используя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i + \sum_{i=1}^{n}b_i^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2} + \sum_{i=1}^{n}b_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2 + \sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^2.$$

Следовательно,

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2} =$$

$$= d(x,z) + d(z,y).$$

b) Аксиомы 1) - 3) для $d_1(x,y)$ очевидно выполнены. Проверим аксиому 4.

$$d_1(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, \ldots, |x_n-y_n|\} =$$

$$= \max\{|x_1 - z_1 + z_1 - y_1|, \ldots, |x_n - z_n + z_n - y_n|\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\{|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|, \ldots, |x_n - z_n| + |z_n - y_n|\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\{|x_1 - z_1|, \ldots, |x_n - z_n|\} + \max\{|z_1 - y_1|, \ldots, |z_n - y_n|\} =$$

$$= d_1(x, z) + d_1(z, y).$$

Следовательно, неравенство «треугольника» для $d_1(x, y)$ выполнено.

c) Для функции $d_2(x, y)$ аксиомы 1) - 3) выполнены.

$$d_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + |z_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| =$$

$$= d_2(x, z) + d_2(z, y).$$

Следовательно, аксиома 4 также выполнена. ■

**2.** Проверить аксиомы метрики в пространстве $\mathbb{C}[a, b]$. Точками $x = x(t)$ этого пространства являются всевозможные функции, непрерывные на $[a, b]$. Расстояние между точками $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определяется по формуле

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|.$$

*Решение.* Выполнение первых трех аксиом метрики очевидны. Проверим неравенство «треугольника». Для каждого $t \in [a, b]$ имеем

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |z(t) - y(t)|$$

Тогда

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |z(t) - y(t)|$$

Значит $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y)$. ■

**3.** Является ли функция $\rho(x,y) = |x^2-y^2|$ метрикой в пространстве $\mathbb{R}^1$?

*Решение.* Рассмотрим точки $x=1$ и $y=-1$. В этих точках $\rho(x,y)=0$, т.е. не выполняется вторая аксиома. Значит функция $\rho(x,y)=|x^2-y^2|$ не определяет метрику на числовой прямой. ■

**4.** Задает ли в пространстве $\mathbb{R}^2$ расстояние между точками $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ функция

$$\rho(A,B) = (|x_1-x_2|+|y_1-y_2|)^2?$$

*Решение.* Рассмотрим точки $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$. Вычислим значения функции в этих точках $\rho(A,B) = 4$, $\rho(A,C) = 1, \rho(C,B) = 4$. Это означает, что $\rho(A,B) > \rho(A,C)+\rho(C,B)$. Следовательно не выполнено неравенство «треугольника». Значит функция $\rho(A,B)$ не определяет метрику в пространстве $\mathbb{R}^2$. ■

**5.** Доказать, что во всяком метрическом пространстве сфера $S(a;r) = \{x \in X\colon \rho(a,x)=r\}$ есть замкнутое множество.

*Решение.* В самом деле, если $\xi$ — предельная точка для множества $S(a;r)$, то на сфере можно выделить последовательность точек $x_p \to \xi$ (или, что то же самое, $\rho(x_p,\xi)\to 0$). В силу неравенства

$$|\rho(x_p,a)-\rho(\xi,a)| \leqslant \rho(x_p,\xi) \to 0.$$

Значит, $\lim\limits_{p\to\infty} \rho(x_p,a) = \rho(\xi,a)$. Но $\rho(x_p,a)=r$. Поэтому получаем отсюда $\rho(\xi,a)=r$ и $\xi \in S(a,r)$. ■

**6.** Доказать, что открытый шар

$$B(a;r) = \{x \in X\colon \rho(a,x) < r\}$$

есть открытое множество.

*Решение.* Пусть точка $x_0 \in B(a;r)$. Тогда $\rho(x_0,a) < r$.

Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы $\delta + \rho(x_0, a) = r$. Проверим, что $O(x_0; \delta) \subset B(a; r)$. Если $x \in O(x_0; \delta)$, то $\rho(x, x_0) < \delta$. Поэтому имеем

$$\rho(x, a) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x_0, a) < \delta + \rho(x_0, a) = r,$$

и точка $x \in B(a; r)$. ■

**7.** Доказать, что множество $\mathbb{Q}^n$ всюду плотно в пространстве $\mathbb{R}^n$.

*Решение.* Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$. Для $\forall i$, $\exists r_i \in \mathbb{Q}$: $|x_i - r_i| < \frac{\varepsilon}{n}$. Тогда при $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Q}^n$ в силу неравенства (3) имеем

$$\rho(x, r) = \|x - r\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i - r_i| < \frac{\varepsilon}{n} \cdot n = \varepsilon.$$

■

**8.** Числовая величина

$$\rho(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \rho(x, y)$$

называется *расстоянием между множествами* $A$ и $B$. Для любых двух непустых множеств $A$ и $B$ требуется исследовать случай $\rho(A, B) = 0$.

*Решение.* Если множества $A$ и $B$ имеют общие точки, то, очевидно, $\rho(A, B) = 0$. Обратное, однако, неверно. В качестве примера в пространстве $\mathbb{R}^1$ можно взять два интервала с общим концом. Аналогичный пример в пространстве $\mathbb{R}^2$ дает расстояние между какой-либо ветвью гиперболы и ее асимптотой. В самом деле, пусть $A$ — ветвь гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$, а $B$ — ее асимптота $y = 0$. Рассмотрим точку гиперболы $P\left(x, \dfrac{1}{x}\right)$ и точку асимптоты $Q(x, 0)$. Расстояние $\rho(P, Q) \to 0$ при $x \to \infty$. Поэтому $\rho(A, B) = 0$, хотя множества $A$ и $B$ не имеют общих точек. ■

**9.** Проверить аксиомы нормы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

*Решение.* Свойства 1) и 2) очевидны. Докажем свойство 3), воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

■

**10.** Проверить аксиомы нормы для любых $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$

a) $\|x\|_1 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$, b) $\|x\|_2 = \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$.

*Решение.* a) Нетрудно заметить, что свойства 1) и 2) выполнены. Проверим свойство 3). Для любых $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\|x+y\|_1 = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i + y_i| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i| + |y_i|) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| + \max_{1\leqslant i\leqslant n}|y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

b) Докажем выполнения свойства 3.

$$\|x+y\|_2 = \sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i| + |y_i| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}|x_i| + \sum_{i=1}^{n}|y_i| = \|x\|_2 + \|y\|_2$$

■

**11.** Пространство $\mathbb{C}[a,b]$, непрерывных функций на сегменте $[a,b]$, с нормой $\|x\| = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$. Проверить аксиомы нормы.

*Решение.* 1. Для любых функций $x(t) \in \mathbb{C}[a,b]$

$$\|x\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv 0.$$

2. Для любых функций $x(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ и для любых $\lambda$

$$\|\lambda x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\lambda x(t)| = |\lambda| \ \cdot \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

3. Для любых функций $x(t), y(t) \in \mathbb{C}[a,b]$

$$\|x+y\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)+y(t)| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} (|x(t)| + |y(t)|) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |y(t)| = \|x\| + \|y\|.$$

$\blacksquare$

**12.** Найти диаметр множества $E$, где $E$ — $n-$ мерный куб в пространстве $\mathbb{R}^n$ со стороной $a$, используя евклидову метрику

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

а также

$$d_1(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}, \quad d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

В какой метрике диаметр множества $E$ больше?

*Решение.* Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой. Если $x, y \in E$, где $E$ — $n-$ мерный куб со стороной $a$, то

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leqslant \sqrt{na^2} = a\sqrt{n}.$$

Значит диаметр множества $E$ равен

$$diam E = \sup_{x,y \in E} d(x,y) = a\sqrt{n}.$$

В метрике $d_1(x,y)$ для всех $x, y \in E$

$$d_1(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\} \leqslant \max\{a, \ldots, a\} = a.$$

Тогда $diam E = a$.

В $d_2(x, y)$ $diam E = an$, так как $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} a = an$.

Следовательно, диаметр множества $E$ больше в метрике $d_2(x, y)$. ■

**13.** Проверить непрерывность функции $\rho(x,\, y)$ — метрика пространства $X$.

*Решение.* Для доказательства воспользуемся определением непрерывности по Гейне. Пусть $x$ и $y$ — любые две точки метрического пространства $X$, $x_n \to x$, $y_n \to y$. Тогда в силу неравенства $|\rho(a, b) - \rho(a, c)| \leqslant \rho(b, c)$ имеем

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| = |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y) + \rho(x_n, y) - \rho(x, y)| \leqslant$$

$$\leqslant |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y)| + |\rho(x_n, y) - \rho(x, y)| \leqslant$$

$$\leqslant \rho(y_n, y) + \rho(x_n, x) \to 0$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, функция $\rho(x,\, y)$ непрерывна в каждой точке $(x,\, y)$, т.е. на всем пространстве $X$. Отсюда, в частности, вытекает непрерывность функции $||x|| = \rho(x,\, 0)$ на нормированном пространстве $X$. ■

**14.** Доказать, что в метрическом пространстве сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

*Решение.* Предположим, что $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = a$ и $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = b$. Тогда

$$\rho(a, b) \leqslant \rho(a, x_p) + \rho(x_p, b) \to 0, \quad \text{при} \quad p \to \infty.$$

Отсюда имеем $\rho(a, b) = 0$ и $a = b$. ■

**15.** Доказать, что пространство $\mathbb{R}^n (n > 1)$ полное.

*Решение.* Пусть $x_p \in \mathbb{R}^n$ — фундаментальная последовательность. Числовая последовательность $x_{pi}$ фундаментальна и в силу полноты $\mathbb{R}^1$ последовательность $x_{pi}$ сходится при $p \to \infty$ к некоторому числу $a_i$. Положим $a = (a_1, \ldots, a_n)$. По теореме 2 (см. §2) $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = a$. Полнота $\mathbb{R}^n$ доказана. ■

**16.** Докажите, что любой отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ является вполне ограниченным множеством.

*Решение.* Выберем натуральное число $N$ так, чтобы $\dfrac{b-a}{N} < \varepsilon$. В качестве конечной $\varepsilon$-сети можно взять точки $y_j = a + j \cdot \dfrac{b-a}{N}$ при $j = 0, 1, \ldots, N$. $\blacksquare$

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Являются ли функции $\rho(x,y)$ метрикой в пространстве $\mathbb{R}^1$?

$a)$ $\rho(x,y)=\sin^2(x-y)$; $b)$ $\rho(x,y)=(x-y)^2$;

$c)$ $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$; $d)$ $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|^2}$;

$e)$ $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{x^2+2y^2+1}$; $g)$ $\rho(x,y)=|x\cdot y|$.

**2.** Является ли функция

$$\rho(A,B)=\sqrt[4]{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

где $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ метрикой в пространстве $\mathbb{R}^2$?

**3.** Вычислить расстояние между функциями $x(t)=t^2$, $y(t)=2t+5$ в пространстве $\mathbb{C}[-1,1]$.

**4.** Исследовать последовательность $x_p=\left(\dfrac{1}{p},\dfrac{1}{p^2}\right)\in\mathbb{R}^2$ на сходимость. Изменится ли ответ в задаче в зависимости от метрики?

**5.** Проверить аксиомы метрики в пространстве $l_p$, элементами которого являются последовательности вещественных чисел $\{x_k\}$ таких, что сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p$:

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad 1\leqslant p<\infty.$$

**6.** Проверить аксиомы метрики в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad 1\leqslant p<\infty.$$

**7.** Проверить аксиомы метрики в пространстве $m$ — ограниченных последовательностей вещественных чисел:

$$\rho(x,y)=\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k-y_k|.$$

**8.** $M[a,b]$ — пространство ограниченных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}$. Проверить аксиомы метрики

$$\rho(x,y) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|.$$

**9.** Является ли метрикой в пространстве $\mathbb{C}[a,b]$ функция

$$\rho(x,y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)| dt?$$

**10.** Является ли метрикой в пространстве $M$ — произвольных последовательностей вещественных чисел:

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}?$$

**11.** Изобразите шары $B^*(0;1)$ в пространствах $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ относительно метрик $d(x,y), d_1(x,y), d_2(x,y)$.

**12.** Доказать, что множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел всюду плотно в метрическом пространстве $\mathbb{R}^1$, то есть при любом $\varepsilon > 0$ для каждого вещественного числа $x$ существует рациональное число $r = r(x, \varepsilon)$, такое, что $|x - r| < \varepsilon$.

*Указание.* Вспомните принцип Архимеда и его следствия.

**13.** Найти расстояние между множествами рациональных и иррациональных чисел.

**14.** Доказать, что $\rho(A,B) = \inf\limits_{x \in A} \rho(x,B)$.

**15.** Доказать, что для того чтобы точка $a \notin E$ была предельной для $E$, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(a,E) = 0$.

**16.** Доказать, что для любого множества $E$

$$\overline{E} = \{x \colon \rho(x,E) = 0\}.$$

**17.** Доказать, что для того чтобы множество $F$ было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(a,F) = 0 \Longrightarrow a \in F$.

**18.** Доказать, что если $F_1$ и $F_2$ — непересекающиеся замкнутые множества, и хотя бы одно из которых компактно, то существуют $x_0 \in F_1$ и $y_0 \in F_2$ такие, что

$$\rho(F_1, F_2) = \rho(x_0, y_0).$$

**19.** Вычислить норму функции $f(x) = \sin x + \cos x$ в пространстве $\mathbb{C}[0, \pi]$.

**20.** Вычислить норму функции $f(x) = x^2 - x$ в пространстве $\mathbb{C}[0, 2]$.

**21.** Докажите, что если $x_n, y_n, a, b \in X$, где $X$ — нормированное пространство, и $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$, то из того, что $x_n \to a$, $y_n \to b$, $\lambda_n \to \lambda$, следует, что $x_n \pm y_n \to a \pm b$ и $\lambda_n x_n \to \lambda a$.

**22.** Докажите, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ из условий $x_p \to a$ и $y_p \to b$ следует, что $(x_p, y_p) \to (a, b)$.

**23.** Расшифровать в терминах окрестностей утверждения:
1) точка $a$ не является предельной для множества $E$,
2) точка $a$ не является внутренней для множества $E$,
3) точка $a$ не является внешней для множества $E$,
4) точка $a$ не является граничной для множества $E$,
5) множество $A$ не является всюду плотным в метрическом пространстве $X$.

**24.** В пространстве $\mathbb{R}^2$ заданы множества

$$A = \{(x, y) : \ (x-2)^2 + (y-3)^2 \leqslant 1\},$$

$$B = \{(x, y) : \ y = 0\}, \quad C = \{(x, y) : \ x = 0\}.$$

Найдите расстояние между каждой парой этих множеств в евклидовой метрике. Изменится ли ответ, если взять другую метрику ($d_1(x, y)$, $d_2(x, y)$, естественную метрику)? Поясните!

**25.** Найти диаметр $n$-мерного параллелепипеда.

**26.** Доказать, что в метрическом пространстве всякая сходящаяся последовательность ограничена.

*Указание.* Доказательство копирует доказательство аналогичного утверждения для случая пространства $\mathbb{R}^1$.

**27.** Доказать, что в метрическом пространстве если последовательность $x_p \to a$, то и всякая подпоследовательность $x_{p_k} \to a$.

*Указание.* Доказательство копирует доказательство аналогичного утверждения для случая пространства $\mathbb{R}^1$.

**28.** Докажите утверждение. Для того чтобы последовательность $x_p \in \mathbb{R}^n$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы при любом $i = 1, 2, \ldots, n$ была фундаментальной числовая последовательность $x_{pi}$.

**29.** Пусть $X$ — метрическое пространство и $E \subset X$. Докажите эквивалентность утверждений:

1. каждая проколотая окрестность точки $a$ содержит хотя бы одну точку множества $E$;

2. каждая окрестность точки $a$ содержит бесконечную часть множества $E$;

3. во множестве $E$ можно выделить последовательность попарно различных точек $x_p$, таких, что $x_p \to a$.

**30.** Доказать, что всякое вполне ограниченное множество является ограниченным.

**31.** Доказать, что всякое ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ является вполне ограниченным.

**32.** Доказать, что ограниченное множество

$$E = \{x(t) \in \mathbb{C}[0,1]\colon \sup_{t \in [0,1]} |x(t)| \leqslant 1\}$$

не является вполне ограниченным в пространстве $\mathbb{C}[0;1]$.

**33.** Докажите, что для того чтобы множество $E$ было вполне ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы из любой последовательности элементов множества $E$ можно было извлечь фундаментальную подпоследовательность.

**34.** Докажите, что из любой ограниченной последовательности $x_p \in \mathbb{R}^n$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

**35.** Докажите свойства компактных множеств (см. §6).

**36.** Докажите, что если $x_n, y_n, a, b \in X$ и $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$, то из того, что $x_n \to a$, $y_n \to b$, $\lambda_n \to \lambda$, следует, что $x_n \pm y_n \to a \pm b$ и $\lambda_n x_n \to \lambda a$.

**37.** Докажите, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ из условий $x_p \to a$ и $y_p \to b$ следует, что $(x_p, y_p) \to (a, b)$.

**38.** Проверить, что бинарное отношение $\|x\|_I \sim \|x\|_{II}$ есть отношение эквивалентности.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дать расшифровку на языке $\varepsilon - N$ определения предела последовательности в метрическом пространстве.

2. Дать расшифровку на языке $\varepsilon - N$ определения предела $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где $x_n, a \in X$ — метрическое пространство.

3. Дать расшифровку на языке $\varepsilon - N$ определения предела $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где $x_n, a \in X$ — нормированное пространство.

4. Дать определение предела функции по базе.

5. Дать определение предела функции $f : X \to Y$, где $X, Y$ — метрические пространства на языке $\varepsilon - \delta$.

6. Дать определение предела функции $f : X \to Y$, где $X, Y$ — нормированные пространства на языке $\varepsilon - \delta$.

7. Дать определение предела функции $f : X \to Y$, где $X, Y$ — метрические пространства на языке окрестностей.

8. Дать определение предела функции $f : X \to Y$, где $X, Y$ — нормированные пространства на языке окрестностей.

9. Дать определение предела функции по направлению.

10. Дать определение предела функции по множеству $E$ по Гейне.

11. Дать определение предела функции по множеству $E$ по Коши.

12. Дать определение предела функции $f : X \to Y$, где $X$ — метрическое пространство, а $Y$ — нормированное пространство на языке $\varepsilon - \delta$.

13. Дать определение предела функции $f : X \to Y$, где $Y$ — метрическое пространство, а $X$ — нормированное пространство на языке $\varepsilon - \delta$.

14. Дать определение непрерывной функции по Коши.

15. Дать определение непрерывной функции по Гейне.

16. Дать определение непрерывной функции на языке окрестностей.

17. Дать определение непрерывной функции $f : X \to Y$, где $X, Y$ — нормированные пространства на языке $\varepsilon - \delta$.

18. Дать определение непрерывной функции $f : X \to Y$, где $X, Y$ — метрические пространства на языке $\varepsilon - \delta$.

19. Дать определение непрерывной функции $f : X \to Y$, где $X$ — метрическое пространство, а $Y$ — нормированное пространство на языке $\varepsilon - \delta$.

20. Дать определение непрерывной функции $f : X \to Y$, где $Y$ — метрическое пространство, а $X$ — нормированное пространство на языке $\varepsilon - \delta$.

# СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. – М.: Дрофа, 2008. — 638 с.

2. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Ч. 2 / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. – М.: Высшая школа, 2002. – 710 с.

3. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М.: АСТ, 2009. – 558 с.

4. Дерр, В. Я. Функциональный анализ: лекции и упражнения: учебное пособие / В. Я. Дерр. – М.: КНОРУС, 2013. – 464 с.

5. Ильин, В. А. Математический анализ в 2-х частях. Ч. 2: учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. – М: Юрайт, 2025. – 324 с.

6. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа в 3-х томах. Том 2 в 2-х книгах. Книга 2: учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев. – М.: Юрайт, 2025. – 323 с.

7. Тучинский, Л. И. Основы многомерного анализа / Л.И. Тучинский, И.Я. Шнейберг. Под общ. ред. Е. Л. Тонкова. – Ижевск: Изд. «Удмуртский ун–т», 2010. – 541 с.

8. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. – 864 с.

*Учебное издание*

Латыпова Наталья Владимировна
Соловьева Надежда Александровна

**МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА**

Учебно-методическое пособие

*Авторская редакция*

Подписано в печать 30.10.2025. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 2,8. Уч.-изд. л. 2,4.
Тираж 22 экз. Заказ № 1669.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034 г. Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел.: +7(3412)916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18