МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

Восьмые Богдановские чтения. Дифференциальные уравнения

Материалы Международной научной конференции

2–5 декабря 2025 года,
г. Минск, Республика Беларусь

Минск, 2025

УДК 517
ББК 22.161.61я43
В 78

Составители:
С. Г. Красовский, А. А. Леваков, А. В. Филипцов

В 78 **Восьмые** Богдановские чтения. Дифференциальные уравнения: материалы Международной научной конференции, Минск, 2–5 дек. 2025 г. / Белорус. гос. ун-т; Ин-т математики НАН Беларуси / сост. С. Г. Красовский, А. А. Леваков, А. В. Филипцов. – Минск : ИВЦ Минфина, 2025. – 265 с.

ISBN 978-985-880-693-4.

Сборник содержит доклады, представленные на Международной научной конференции «Восьмые Богдановские чтения. Дифференциальные уравнения», посвященной 105-летию со дня рождения профессора Ю. С. Богданова. В сборник вошли доклады по асимптотической, аналитической и качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными, математическому моделированию, теории управления, стохастических дифференциальных уравнений и методике преподавания математики.

УДК 517
ББК 22.161.61я43

ISBN 978-985-880-693-4

К СВОЙСТВУ ОТКРЫТОСТИ ПОЛНОГО СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

С.Н. Попова, Э.А. Фахразиева

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
udsu.popova.sn@gmail.com, elmiraf12@mail.ru

Аннотация. Исследованы локальные свойства полного спектра показателей Ляпунова линейной гибридной дискретно-непрерывной системы.

Ключевые слова: линейная гибридная система; показатели Ляпунова.

Рассмотрим линейную однородную гибридную систему

$$\dot{x}(t)=A_{11}(t)x(t)+A_{12}(k)y(k),\quad y(k+1)=A_{21}(k)x(k)+A_{22}(k)y(k), \tag{1}$$

где $t\in[k,k+1)$, $k\in\mathbb{N}_0\doteq\{0,1,2,\dots\}$, $x\in\mathbb{R}^{n_1}$, $y\in\mathbb{R}^{n_2}$, функция $A_{11}\colon[0,+\infty)\to\to\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$ ограничена, кусочно непрерывна, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывна справа в точках разрыва; функции $A_{j2}\colon\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}^{n_j\times n_2}$ $(j=1,2)$ и $A_{21}\colon\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}^{n_2\times n_1}$ ограничены. Положим $n\doteq n_1+n_2$. Систему (1) отождествим с матрицей

$$A(t)=\begin{pmatrix}A_{11}(t) & A_{12}(k)\\ A_{21}(k) & A_{22}(k)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n},\quad t\in[k,k+1),\quad k\in\mathbb{N}_0.$$

Множество всех систем вида (1), удовлетворяющих поставленным условиям, обозначим через $\mathcal{M}_n$. Метрика в этом множестве – равномерная на $[0,+\infty)$. Решением системы (1) называем функцию

$$z=z(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(k)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n,\quad t\in[k,k+1),\quad k\in\mathbb{N}_0,$$

такую, что $x(t)$ и $y(k)$ удовлетворяют системе (1) при $t\in(k,k{+}1)$, при этом функция $x(t)$ непрерывна на $[0,+\infty)$.

Пусть $X(t,s)$ – матрица Коши системы $\dot{x}(t)=A_{11}(t)x(t)$. Положим

$$X_A(k+1,k)=\begin{pmatrix}X(k+1,k) & \int\limits_k^{k+1}X(k+1,s)\,ds\cdot A_{12}(k)\\ A_{21}(k) & A_{22}(k)\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{N}_0,$$

$$X_A(k,l)=X_A(k,k-1)X_A(k-1,k-2)\cdots X_A(l+1,l),\quad k,l\in\mathbb{N}_0,\quad k>l.$$

Тогда для произвольного решения $z(\cdot)$ системы (1) имеет место равенство

$$z(k)=X_A(k,l)z(l),\quad k,l\in\mathbb{N}_0,\quad k>l.$$

Будем называть матрицу $X_A(k,l)$, $k,l\in\mathbb{N}_0$, $k>l$, *матрицей (оператором) Коши* гибридной системы (1) в целочисленные моменты времени. Обозначим через $\mathcal{M}_n^0$ подмножество множества $\mathcal{M}_n$, состоящее из систем вида (1), для которых последовательность $(X_A(k+1,k))_{k\in\mathbb{N}_0}$ вполне ограничена [1], т.е. матрица $X_A(k{+}1,k)$ обратима при каждом $k\in\mathbb{N}_0$, и найдется такое $a>0$, что $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}_0}\|X_A^{-1}(k+1,k)\|\leqslant a$.

Определение. *Показателями Ляпунова* системы $A(\cdot)\in\mathcal{M}_n^0$ будем называть величины

$$\lambda_i(A)\doteq\inf_{F\in\mathcal{G}^i}\varlimsup_{k\to\infty}k^{-1}\ln\|\left.X_A\right|_F(k,0)\|,\quad i=1,\dots,n,$$

где $\mathcal{G}^i$ – множество i-мерных линейных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, $\left.X_A\right|_F$ – сужение оператора Коши системы $A(\cdot)$ на подпространство $F\subset\mathbb{R}^n$. *Полным спектром* показателей Ляпунова системы $A(\cdot)$ назовем набор $\lambda(A)\doteq\big(\lambda_1(A),\lambda_2(A),\dots\dots,\lambda_n(A)\big)$.

Заметим, что $\lambda_1(C) \leqslant \lambda_2(C) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(C)$ для любой системы $C(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$, поэтому полный спектр каждой такой системы принадлежит множеству $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$ всех упорядоченных по неубыванию наборов n чисел. Метрику во множестве $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$ полагаем индуцированной нормой пространства $\mathbb{R}^n$. Итак, имеем отображение $C \mapsto \lambda(C)$, определенное на $\mathcal{M}_n^0$ и действующее в $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big) \doteq \Big\{\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}\colon \max_{i=1,\ldots,n} |\mu_i - \lambda_i(A)| < \varepsilon\Big\}.$$

Наряду с системой (1) рассмотрим также возмущенную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \big(A_{11}(t) + Q_{11}(t)\big)x(t) + \big(A_{12}(k) + Q_{12}(k)\big)y(k), \\ y(k+1) &= \big(A_{21}(k) + Q_{21}(k)\big)x(k) + \big(A_{22}(k) + Q_{22}(k)\big)y(k), \end{aligned} \tag{2}$$

в которой каждое возмущение $Q_{ij}(\cdot)$ обладает теми же свойствами, что и соответствующий матричный коэффициент $A_{ij}(\cdot)$, $i, j \in \{1, 2\}$. Систему (2) отождествляем с матрицей $A(\cdot) + Q(\cdot)$, где

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(k) \\ Q_{21}(k) & Q_{22}(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad t \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Положим $\|Q\|_C \doteq \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \|Q(t)\|$.

Заметим, что если $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$, то при достаточно малой $\|Q\|_C$ система $A(\cdot) + {}$ ${}+Q(\cdot)$ также принадлежит множеству $\mathcal{M}_n^0$, поэтому для нее определен полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(A+Q) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$.

Определение 2. Полный спектр показателей Ляпунова системы $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$ называется *устойчивым*, если отображение $C \mapsto \lambda(C)$ непрерывно в точке $C \equiv A$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждой системы (2), удовлетворяющей условию $\|Q\|_C < \delta$, выполнено включение $\lambda(A+Q) \in \mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big)$.

Определение 3. Полный спектр показателей Ляпунова системы $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$ называется *открытым*, если отображение $C \mapsto \lambda(C)$ открыто в точке $C \equiv A$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого $\mu \in \mathcal{O}_\delta\big(\lambda(A)\big)$ найдется возмущение $Q(\cdot)$, удовлетворяющее оценке $\|Q\|_C < \varepsilon$ и обеспечивающее выполнение равенства $\lambda(A+Q) = \mu$.

Определения 1, 2 и 3 – это непосредственный перенос на гибридные системы соответствующих определений, известных как для систем с непрерывным временем [2–5], так и для систем с дискретным временем (см., например, [6]).

Теорема 1. *Если полный спектр системы $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^0$ устойчив, то он открыт.*

Теорема 2. *Пусть $n_1 = n_2 = 1$. Тогда полный спектр системы $A(\cdot) \in \mathcal{M}_2^0$ открыт.*

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект FEWS-2024-0009).

Библиографические ссылки

1. *Демидович В. Б.* Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. №7. С. 1247–1255.

2. *Ляпунов А. М.* Собр. соч.: В 6 т. Т. 2. Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

3. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 8. С. 1408–1416.

4. *Изобов Н. А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Мн.: Изд-во БГУ, 2006.

5. *Макаров Е. К., Попова С. Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Мн.: Беларуская навука, 2012.

6. *Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S.* Proportional local assignability of Lyapunov spectrum of linear discrete time-varying systems // SIAM J. Control. Optim. 2019. V. 57. № 2. P. 1355–1377.

СОДЕРЖАНИЕ

Уравнения с частными производными. Математическое моделирование

Marmysh D.E., Zhuravkov M.A. Analytical boundary element method with machine learning methods for integral damage analysis 167

Теория управления. Стохастические дифференциальные уравнения

Методика преподавания математики

Научное издание

Восьмые Богдановские чтения.
Дифференциальные уравнения

Материалы Международной научной конференции
2–5 декабря 2025 года

Ответственный за выпуск *С. Г. Красовский*
Компьютерная верстка *С. Г. Красовского*

Подписано в печать 20.11.2025 г.
Формат 60 × 84 $^1/_8$. Усл. печ. л. 30,81. Уч.-изд. л. 27,73.
Тираж 99 экз. Зак. 769.

Республиканское унитарное предприятие
«Информационно-вычислительный центр
Министерства финансов Республики Беларусь».
Свидетельства о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/161 от 27.01.2014, № 2/41 от 29.01.2014.
Ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.