С. Н. Попова, Э. А. Фахразиева (УдГУ, Ижевск, Россия) “К свойству локальной назначаемости полного спектра показателей Ляпунова линейных гибридных систем” (12 мая 2025 г.).

Рассмотрим линейную однородную гибридную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(k)y(k), \\ y(k+1) = A_{21}(k)x(k) + A_{22}(k)y(k), \end{cases} \tag{1}$$

где $t\in[k,k+1)$, $k\in\mathbb{N}_0\doteq\{0,1,2,\ldots\}$, $x\in\mathbb{R}^{n_1}$, $y\in\mathbb{R}^{n_2}$, функция $A_{11}\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$ ограничена, кусочно-непрерывна, может иметь лишь разрывы первого рода и непрерывна справа в точках разрыва; функции $A_{j2}\colon\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}^{n_j\times n_2}$ $(j=1,2)$ и $A_{21}\colon\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}^{n_2\times n_1}$ ограничены. Положим $n\doteq n_1+n_2$. Систему (1) отождествим с матрицей

$$A(t)=\begin{pmatrix}A_{11}(t) & A_{12}(k)\\ A_{21}(k) & A_{22}(k)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n},\quad t\in[k,k+1),\ \ k\in\mathbb{N}_0.$$

Множество всех систем вида (1), удовлетворяющих поставленным условиям, обозначим как $\mathcal{M}_n$. Метрика в этом множестве равномерная на множестве $[0,+\infty)$.

Под *решением системы* (1) понимаем функцию

$$z=z(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(k)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n,\quad t\in[k,k+1),\ \ k\in\mathbb{N}_0,$$

такую, что $x(t)$ и $y(k)$ удовлетворяют системе (1) при $t\in(k,k+1)$, при этом функция $x(t)$ непрерывна на $[0,+\infty)$.

Пусть $X(t,s)$ — матрица Коши системы

$$\dot{x}(t)=A_{11}(t)x(t).$$

Положим

$$Z(k+1,k)=\begin{pmatrix}X(k+1,k) & \int\limits_k^{k+1}X(k+1,s)\,ds\,A_{12}(k)\\ A_{21}(k) & A_{22}(k)\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{N}_0,$$

$$Z(k,l)=Z(k,k-1)Z(k-1,k-2)\ldots Z(l+1,l),\quad k,l\in\mathbb{N}_0,\ \ k>l.$$

Тогда для произвольного решения $z(\cdot)$ системы (1) имеет место равенство

$$z(k)=Z(k,l)z(l),\quad k,l\in\mathbb{N}_0,\ \ k>l.$$

Будем называть матрицу $Z(k,l)$, $k,l\in\mathbb{N}_0$, $k>l$, *матрицей* (*оператором*) *Коши* гибридной системы (1) в целочисленные моменты времени.

Обозначим через $\mathcal{M}_n^0$ подмножество множества $\mathcal{M}_n$, состоящее из систем вида (1), для которых последовательность $\{Z(k+1,k)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ вполне ограничена [1].

Определение 1. *Показателями Ляпунова* системы $A(\cdot)\in\mathcal{M}_n^0$ будем называть величины $\lambda_i(A)\doteq\inf_{F\in\mathcal{G}^i}\overline{\lim}_{k\to\infty}k^{-1}\ln\|Z|_F(k,0)\|$, $i=\overline{1,n}$, где $\mathcal{G}^i$ — множество i-мерных линейных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$, $Z|_F$ — сужение оператора Коши системы $A(\cdot)$ на подпространство $F\subset\mathbb{R}^n$. *Полным спектром* показателей Ляпунова системы $A(\cdot)$ назовём набор $\lambda(A)\doteq\bigl(\lambda_1(A),\lambda_2(A),\ldots,\lambda_n(A)\bigr)$.

Заметим, что $\lambda_1(C)\leqslant\lambda_2(C)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(C)$ для любой системы $C(\cdot)\in\mathcal{M}_n^0$, поэтому полный спектр каждой такой системы принадлежит множеству $\mathbb{R}^n_\leqslant$ всех упорядоченных по неубыванию наборов n чисел. Метрику во множестве $\mathbb{R}^n_\leqslant$ полагаем индуцированной нормой пространства $\mathbb{R}^n$. Итак, имеем отображение $C\mapsto\lambda(C)$, определённое на $\mathcal{M}_n^0$ и действующее в $\mathbb{R}^n_\leqslant$. Для произвольного $\varepsilon>0$ обозначим $\mathcal{O}_\varepsilon\bigl(\lambda(A)\bigr)\doteq\bigl\{\mu\in\mathbb{R}^n_\leqslant\colon\max_{i=\overline{1,n}}|\mu_i-\lambda_i(A)|\bigr\}$.

Наряду с системой (1) рассмотрим также управляемую систему

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\bigl(A_{11}(t)+U_{11}(t)\bigr)x(t)+\bigl(A_{12}(k)+U_{12}(k)\bigr)y(k),\\ y(k+1)=\bigl(A_{21}(k)+U_{21}(k)\bigr)x(k)+\bigl(A_{22}(k)+U_{22}(k)\bigr)y(k),\end{cases}\tag{2}$$

в которой каждое матричное управление $U_{ij}(\cdot)$ обладает теми же свойствами, что и соответствующий матричный коэффициент $A_{ij}(\cdot)$, $i,j\in\{1,2\}$. Систему (2) отождествляем с матрицей $A(\cdot)+U(\cdot)$, где

$$U(t)=\begin{pmatrix}U_{11}(t) & U_{12}(k)\\ U_{21}(k) & U_{22}(k)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n},\quad t\in[k,k+1),\ \ k\in\mathbb{N}_0.$$

Положим $\|U\|_C\doteq\sup_{t\in[0,+\infty)}\|U(t)\|$.

Заметим, что если $A(\cdot)\in\mathcal{M}_n^0$, то при достаточно малой $\|U\|_C$ система $A(\cdot)+U(\cdot)$ также принадлежит множеству $\mathcal{M}_n^0$, поэтому для неё определён полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(A+U)$.

Определение 2. Полный спектр показателей Ляпунова системы $A(\cdot)\in\mathcal{M}_n^0$ называется *устойчивым*, если отображение $C\mapsto\lambda(C)$ непрерывно в точке $C\equiv A$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что для каждой системы (2), удовлетворяющей условию $\|U\|_C<\delta$, выполнено включение $\lambda(A+U)\in\mathcal{O}_\varepsilon(\lambda(A))$.

Определение 3. Полный спектр показателей Ляпунова системы $A(\cdot)\in\mathcal{M}_n^0$ называется *локально назначаемым*, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что для каждого $\mu\in\mathcal{O}_\delta\big(\lambda(A)\big)$ найдётся матричное управление $U(\cdot)$, удовлетворяющее оценке $\|U\|_C<\varepsilon$ и обеспечивающее выполнение равенства $\lambda(A+U)=\mu$.

Определения 1, 2 и 3 — это непосредственный перенос на гибридные системы соответствующих определений, известных для систем как с непрерывным [2–5], так и с дискретным (см., например, [6]) временем.

Теорема. *Если полный спектр показателей Ляпунова системы $A(\cdot)\in\mathcal{M}_n^0$ устойчив, то он локально назначаем.*

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской федерации в рамках государственного задания № FEWS-2024-0009.

Литература

1. Демидович, В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений / В.Б. Демидович // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 7. — С. 1247–1255.
2. Ляпунов, А.М. Собр. соч.: В 6 т. Т. 2. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов. — М.–Л. : Изд-во АН СССР, 1956. — 473 с.
3. Миллионщиков, В.М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I / В.М. Миллионщиков // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16, № 8. — С. 1408–1416.
4. Изобов, Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова / Н.А. Изобов. — Минск : Изд-во БГУ, 2006. — 320 с.
5. Макаров, Е.К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова. — Минск : Беларус. навука, 2012. — 407 с.
6. Proportional local assignability of Lyapunov spectrum of linear discrete time-varying systems / A. Babiarz, I. Banshchikova, A. Czornik [et al.] // SIAM J. Control. Optim. — 2019. — V. 57, № 2. — P. 1355–1377.