Л. П. Сметанина, О. В. Максимова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (DIFFERENTIAL EQUATIONS)

Ижевск
2026

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра математического анализа

Л. П. Сметанина, О. В. Максимова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

(Differential Equations)

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2026

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.61я73
С502

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: канд. пед. наук, доцент, зав. каф. алгебры и топологии ин-та математики, информационных технологий и физики ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» **Т. М. Банникова.**

Сметанина Л. П., Максимова О. В.

С502 Дифференциальные уравнения (Differential Equations) : учеб.-метод. пособие / Л. П. Сметанина, О. В. Максимова. − Ижевск : Удмуртский университет, 2026. – 1,3 Мб. − Текст : электронный.

В учебно-методическом пособии приведены основные теоретические сведения о дифференциальных уравнениях, предложены алгоритмы решения уравнений разных видов, а также представлены варианты индивидуальных заданий.

Данное пособие предназначено для иностранных и русскоязычных студентов уровня бакалавриата и специалитета всех направлений и всех форм обучения Института нефти и газа им. М.С. Гуцериева и Института экономики и управления в Удмуртском государственном университете.

Минимальные системные требования:
Celeron 1600 Mhz; 128 Мб RAM; Windows XP/7/8 и выше, 8x DVD-ROM
разрешение экрана 1024×768 или выше; программа для просмотра pdf.

Сметанина Людмила Петровна, Максимова Ольга Васильевна
Дифференциальные уравнения (Differential Equations)
Учебно-методическое пособие

Подписано к использованию 06.02.2026
Объем электронного издания 1,3 Мб
Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, д. 4Б, каб. 021
Тел. : +7(3412)916-364 E-mail: editorial@udsu.ru

Содержание

Введение

Данное учебно-методическое пособие подготовлено преподавателями кафедры математического анализа и отражает опыт при проведении занятий и организации самостоятельной работы студентов Института нефти и газа им. М.С.Гуцириева и Института экономики и управления в Удмуртском государственном университете.

Пособие предназначено для методического обеспечения раздела «Дифференциальные уравнения» курса «Высшая математика», «Математика», «Математический анализ» при обучении русскоязычных и иностранных студентов.

В пособии содержатся краткие теоретические сведения о дифференциальных уравнениях и примеры их применения, алгоритмы решения дифференциальных уравнений разных типов. Пособие содержит большое количество примеров с решениями и варианты типовых заданий.

Индивидуальные задания могут быть использованы для организации работы на практических занятиях и в качестве заданий для самостоятельной работы студентов.

Пособие предназначено обеспечить студентов наглядным вспомогательным материалом и индивидуальными заданиями при изучении курса и может быть использовано для студентов других нематематических направлений УдГУ.

1 Основные определения и обозначения

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ) называется соотношение вида

$$F\left(x,\, y,\, y',\, \dots,\, y^{(n)}\right) = 0,$$

связывающее независимую переменную x, функцию $y(x)$ и ее производные до n-го порядка включительно.

Уравнение

$$F(x,\, y,\, y') = 0$$

называется **дифференциальным уравнением первого порядка**.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x,\, y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x,\, y)$$

называется **дифференциальным уравнением, разрешенным относительно производной**.

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x,\, y)dx + N(x,\, y)dy = 0$$

называется **ДУ первого порядка в симметричной форме**.

Решением дифференциального уравнения называется функция

$$y = \varphi(x),$$

которая, будучи подставлена в уравнение, обращает его в тождество.

Иногда решение ДУ $y = \varphi(x)$ находят в неявном виде $\Psi(x,\, y) = 0$. Данное равенство неявно определяет функцию $y = \varphi(x)$, являющуюся решением заданного дифференциального уравнения.

График функции $y = \varphi(x)$ называется **интегральной кривой**.

Процесс нахождения решения ДУ называется **интегрированием**. В общем случае данный процесс приводит к бесконечному множеству решений (функций), отличающихся некоторыми числовыми величинами.

Условие, что при некотором x_0 функция принимает значение y_0 или $y(x_0) = y_0$ называется **начальным условием**.

Задача нахождения решения ДУ $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$, называется **задачей Коши**.

Геометрически решить задачу Коши означает, что нужно найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M_0(x_0,\, y_0)$.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Пусть функция $f(x,\, y)$ определена в некоторой области D на плоскости xOy. Если существует окрестность Ω точки $M_0(x_0,\, y_0) \in D$, в которой функция непрерывна по совокупности переменных и имеет ограниченную частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, то найдется интервал $(x_0 - h,\, x_0 + h)$ на оси Ox, на котором существует и, притом, единственное решение задачи Коши $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x,\, y)$, принимающее при $x = x_0$ значение y_0.

Общим решением ДУ $\dfrac{dy}{dx} = f(x,\, y)$ в области Ω существования и единственности решения задачи Коши называется однопараметрическое семейство функций $y = \varphi(x,\, C)$, такое что:

1. при любом допустимом числовом значении C функция $y = \varphi(x,\, C)$ является решением уравнения, т. е. $\varphi'_x(x,\, C) \equiv f(x, y)$ при $x \in (x_0 - h,\, x_0 + h)$;

2. каково бы ни было начальное условие $y(x_0) = y_0$, можно подобрать такое значение C_0, что решение $y = \varphi(x,\, C_0)$ будет удовлетворять начальному условию $\varphi(x_0,\, C_0) = y_0$.

Частным решением ДУ называется решение, получаемое из общего решения при каком-то конкретном значении произвольной постоянной C (включая $\pm\infty$).

В процессе интегрирования часто приходят к уравнению $\Phi(x,\, y,\, C) = 0$, неявно задающему общее решение. Это уравнение называется **общим интегралом**.

1.1 Defenitions

A ordinary differential equation (D E) is an equation that relates an independent variable x, an unknown function of this variable $y(x)$ and the derivatives of this function up to and including the n-th order.

The highest order of the derivative present in the differential equation is called **the order of the differential equation**.

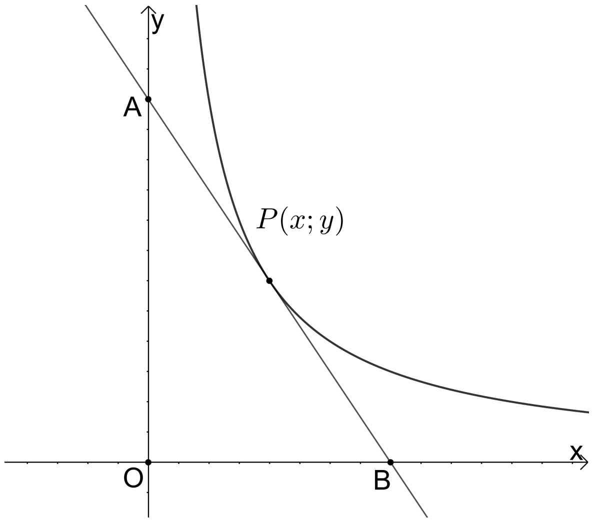
An equation $F(x,\, y,\, y') = 0$, containing only first derevative is called **an equation of the first order** and also

$$y' = f(x,\, y) \quad \text{or} \quad \frac{dy}{dx} = f(x,\, y)$$

is called **the reduced form of an ordinary first-order differential equation**.

Example. Find the curve passing through $M(2;\, 3)$ such that the part of the tangent between the coordinate axes is bisected at the point of tangency.

Every tangent is bisected at the point of tangency. Let $P(x;\,y)$ be the middle point of the tangent AB.



Then by similar triangles $OA = 2y,\ \ OB = 2x$. the slope of the curve at $P(x;\,y)$ is $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{OA}{OB} = -\dfrac{y}{x}$.

This can be written

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad xy = C.$$

Since the curve passed through $M(2;\,3)$ we must the have $C = 2 \cdot 3 = 6$.

Hence the equation of curve is $xy = 6$.

2 Основные типы уравнений первого порядка

2.1 Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Уравнение $f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy$ называется **дифференциальным уравнением с разделенными переменными**.

Формула $\displaystyle\int f_1(x)\,dx = \int f_2(y)\,dy + C$ — общий интеграл этого уравнения.

Уравнение $f_1(x)\cdot g_1(y)\cdot dx + f_2(x)\cdot g_2(y)\cdot dy = 0$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**.

Путем деления на $g_1(y)\cdot f_2(x)$ уравнение с разделяющимися переменными приводится к уравнению с разделенными переменными. При делении на $g_1(y)\cdot f_2(x)$ могут потеряться решения, обращающие функции $g_1(y)$, $f_2(x)$ в ноль.

Пример 1.

Проинтегрировать уравнение $x\cdot\sqrt{1-y^2}\cdot dx + y\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot dy = 0$.

Дифференциальное уравнение определено в области $D: \begin{cases} y^2 \le 1, \\ x^2 \le 1, \\ x^2 + y^2 \ne 0. \end{cases}$

Делим на $\sqrt{1-y^2}\cdot\sqrt{1-x^2}$, где $\sqrt{1-y^2} \ne 0$ и $\sqrt{1-x^2} \ne 0$. В результате получаем уравнение с разделенными переменными

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0.$$

Интегрируя, получаем $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$.

При разделении переменных потеряны решения $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$.

Пример 2. Решить ДУ $y' = xy^2 + 2xy$.

Перепишем уравнение в виде: $\dfrac{dy}{dx} = x\cdot(y^2 + 2y)$ и произведем разделение переменных, поделив обе части на $(y^2 + 2y)$ и умножив на dx. Тогда $\dfrac{dy}{y^2 + 2y} = xdx$ (далее необходимо проверить возможные решения $y = 0$ и $y = -2$).

Вычисляем интеграл от рациональной дроби

$$\int \frac{dy}{y^2 + 2y} = \int \left(\frac{A}{y} + \frac{B}{y+2}\right) dy.$$

Методом неопределенных коэффициентов получаем $A = \dfrac{1}{2}$, $B = -\dfrac{1}{2}$;

$$\int \frac{dy}{y^2+2y} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y+2} = \frac{1}{2}(\ln|y| - \ln|y+2)| + C_1.$$

Находим $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_2$. Таким образом,

$$\frac{1}{2}\Big(\ln|y| - \ln|y+2|\Big) + C_1 = \frac{1}{2}x^2 + C_2$$

или

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = x^2 + \ln|C_3|\,, \quad \ln|C_3| = (C_2 - C_1)\cdot 2.$$

Общий интеграл удобно преобразовать к виду

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = \ln\Big(|C_3|\cdot e^{x^2}\Big).$$

Полученное равенство можно упростить

$$\frac{y}{y+2} = C\cdot e^{x^2}, \quad C = \pm C_3.$$

Потерянные решения уравнения $y = 0$ и $y = -2$ проверяем подстановкой в исходное дифференциальное уравнение.

Некоторые уравнения, например, уравнения вида $y' = f(ax+by+c)$ можно привести к дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z = ax+by+c$.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение $y' = (x+y)^2$.

Пусть $z = x+y$, тогда $z' = 1+y'$. Решаем дифференциальное уравнение

$$z' = 1+z^2 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{1+z^2} = dx \;\Rightarrow\; \operatorname{arctg} z = x + C \;\Rightarrow$$
$$\operatorname{arctg}(x+y) = x + C \quad \text{или} \quad y = \operatorname{tg}(x+C) - x.$$

Пример 2. Решить уравнение $y' = \sqrt{2x+y+1}$.

Используя замену $z = 2x+y+1$, находим z'.

$$z' = 2 + y' \quad \Leftrightarrow \quad y' = z' - 2.$$

Уравнение примет вид $z' - 2 = \sqrt{z}$.

Разделяя переменные, получаем $\dfrac{dz}{\sqrt{z}+2} = dx$. Вычислим интеграл

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}+2} = \begin{bmatrix} z = t^2, \\ dz = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{2t\,dt}{t+2} = 2\int \frac{(t+2-2)\,dt}{t+2} =$$
$$= 2\int 1\,dt - 2\int \frac{2\,d(t+2)}{t+2} = 2\Big(t - 2\ln|t+2|\Big) + C =$$
$$= 2\sqrt{z} - 4\ln(\sqrt{z}+2) + C.$$

Интегрируя уравнение с разделяющимися переменными, получаем

$$2\sqrt{z} - 4\ln\left(\sqrt{z}+2\right) = x + C.$$

Обратная замена z на $2x+y+1$ позволяет записать общий интеграл

$$\sqrt{2x+y+1} - 4\ln\left(\sqrt{2x+y+1}+2\right) = x + C.$$

2.1.1 Separation of the variable

If a differential equation has the form $f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy$, one term containing only x and dx, the other only y and dy, then the variables are said to be separated.

The solution is $\displaystyle\int f_1(x)\,dx = \int f_2(y)\,dy + C$, where C is the constant of integration.

Equation $y' = f(x)\cdot g(y)$ or $f_1(x)\cdot g_1(y)\,dx = f_2(x)\cdot g_2(y)\,dy$ it's cannot be integrated. We cannot obtain a solution by direct integration. By division we can however reduce this equation to the form $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx = \dfrac{g_2(y)}{g_(y)}\,dy$, in which the variables are separated.

Example. Solve the equation $\left(1+x^2\right)\,dy - xy\,dx = 0$.

Separating the variables, this becomes

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x\,dx}{1+x^2},$$
$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\left|\sqrt{1+x^2}\cdot C\right| \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y = C\sqrt{1+x^2}.$$

Some equations, for example, equations of the form $y' = f(ax+by+c)$, can be reduced to differential equations with separable variables by replacing $z = ax+by+c$.

Example. Solve $y' = (-2x+y)^2 - 7,\ \ y(0) = 0.$

If we let $z = -2x + y$, then $z' = -2 + y' \ \Rightarrow\ y' = z' + 2.$

Into $\quad z' + 2 = z^2 - 7$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = z^2 - 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z^2-9} = dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{6}\ln\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 6x + \ln|C_1|,$$

$$\ln\left|\frac{z-3}{(z+3)\cdot C_1}\right| = 6x \quad \Rightarrow \quad \frac{z-3}{z+3} = C\cdot e^{6x}, \quad C = \pm C_1$$

and $\quad y = 2x + \dfrac{3(1+Ce^{6x})}{1-Ce^{6x}}.$

Applying the initial condition $y(0) = 0$, the last equation gives $C = -1$ and particular solution $\ y = 2x + \dfrac{3(1-e^{6x})}{1+e^{6x}}.$

2.2 Однородные уравнения

Функция $f(x,\, y)$ называется **однородной k-го измерения**, если при любом допустимом t справедливо равенство $f(tx,\, ty) = t^k\cdot f(x,\, y)$.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x,\, y)$ называется **однородным**, если $f(x,\, y)$ — однородная функция нулевого измерения.

Однородное уравнение всегда можно представить в виде $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

С помощью замены $\dfrac{y}{x} = z$ уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{y}{x} = z \quad \Rightarrow \quad y = zx, \qquad y' = z'x + z, \qquad z'x + z = \varphi(z);$$

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dz}{\varphi(z)-z} = \ln|x| + \ln|C|\,.$$

При обратной замене z на $\dfrac{y}{x}$, получаем общий интеграл уравнения.

Заметим, что если $\varphi(z) - z \equiv 0$, то уравнение имеет вид $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$. Его общее решение $y = Cx$.

Если обращается в нуль при $z = z_0$, то существует решение $z = z_0$, или $y = z_0\,x$.

Пример 1. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Это однородное уравнение. Делаем замену $z = \dfrac{y}{x}$,

$$z' \cdot x + z = z + \operatorname{ctg} z \quad \Rightarrow \quad z' \cdot x = \frac{1}{\operatorname{tg} z} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} z \, dz = \frac{dx}{x},$$
$$-\ln|\cos z| + \ln|C_1| = \ln|x| \quad \Leftrightarrow \quad \ln|x \cdot \cos z| = \ln|C_1| \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x \cdot \cos z = C, \quad C = \pm C_1.$$

Потерянные решения находим из условия $\operatorname{tg}(z) = 0$, или $z = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$.

Окончательно, $x \cdot \cos\dfrac{y}{x} = C$ и $y = \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) \cdot x, \quad n \in Z$ — потерянные решения.

2.2.1 Homogeneous equation

If a function possesses the property $f(tx,\, ty) = t^k \cdot f(x,\, y)$ for some real k, then $f(x,\, y)$ is said to be homogeneous function of degree k.

For example, $f(x,\, y) = x^3 + y^3$ is a homogeneous function of degree 3, since $f(tx,\, ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3\left(x^3 + y^3\right) = t^3 \cdot f(x,\, y)$.

The functions $f(x,\, y) = \dfrac{x - 2y}{3x + y}$ and $g(x,\, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ are homogeneous of degree 0 and -1 respect fully, becase

$$f(tx,\, ty) = \frac{tx - 2ty}{3tx + ty} = \frac{t(x - 2y)}{t(3x + y)} = \frac{x - 2y}{3x + y} = t^0 \cdot f(x,\, y)$$

and

$$g(tx,\, ty) = \frac{1}{\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}} = \frac{1}{t \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} = t^{-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = t^{-1} \cdot g(x,\, y).$$

A first order diff equation $y' = f(x,\, y)$ is said to be homogeneous equation if $f(x,\, y)$ is homogeneous function of degree 0.

Example 2. Solve $\left(x^2 - 2xy\right) \cdot y' = xy - y^2$.

$$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\dfrac{y}{x} - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1 - 2 \cdot \dfrac{y}{x}},$$
$$\frac{y}{x} = z \quad \Rightarrow \quad y = zx, \quad y' = z'x + z,$$

$$z'x+z=\frac{z-z^2}{1-2z} \quad\Rightarrow\quad z'x=\frac{z^2}{1-2z} \quad\Rightarrow\quad \frac{1-2z}{z^2}\,dz=\frac{dx}{x},$$
$$-\frac{1}{z}-2\ln|z|=\ln|C_1\cdot x| \quad\Rightarrow\quad \ln\left|x\cdot C_1\cdot z^2\right|=-\frac{1}{z} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad Cxz^2=e^{-1/z} \quad\Rightarrow\quad C\left(\frac{y}{x}\right)^2=e^{-x/y},\quad C=\pm C_1.$$

2.3 Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным

Существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут быть приведены к однородным уравнениям.

Это уравнения вида $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, где c_1 и c_2 не обращаются одновременно в нуль (так как в случае $c_1=c_2=0$ уравнение является однородным).

Случай 1. Пусть определитель $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$.

Положим $\begin{cases}x=x_1+h,\\ y=y_1+k,\end{cases}$ где h и k определяются из линейной системы $\begin{cases}a_1h+b_1k+c_1=0,\\ a_2h+b_2k+c_2=0.\end{cases}$

Учитывая, что $dx=dx_1$ и $dy=dy_1$, после подстановки получаем однородное уравнение $\dfrac{dy_1}{dx_1}=f\left(\dfrac{a_1x_1+b_1y_1}{a_2x_1+b_2y_1}\right)$.

Случай 2. Если определитель $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$, то исходное уравнение приводится к виду $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right)$, где $\lambda=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1}$.

Далее применяем подстановку $a_1x+b_1y=z$. Полученное ДУ решается разделением переменных.

Пример 1. Решить уравнение $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0$.

Получаем

$$(x-2y+3)\frac{dy}{dx}=-2x-y+1 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y+1}{x-2y+3}.$$

Находим значение определителя $\Delta=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4+1=5\neq 0$.

Положим $\begin{cases}x=x_1+h,\\ y=y_1+k.\end{cases}$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} -2h - k + 1 = 0, \\ h - 2k + 3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h = -\dfrac{1}{5}, \\ k = \dfrac{7}{5}. \end{cases}$$

Применяя замену $\begin{cases} x = x_1 - \dfrac{1}{5}, \\ y = y_1 + \dfrac{7}{5} \end{cases}$ получаем однородное уравнение $\dfrac{dy_1}{dx_1} = \dfrac{-2x_1 - y_1}{x_1 - 2y_1}$.

При использовании замены $\dfrac{y_1}{x_1} = z, \quad y_1 = zx_1, \quad y_1' = z'x_1 + z$ уравнение примет вид $z'x_1 + z = \dfrac{2+z}{2z-1}$.

Разделяем переменные в уравнении $\dfrac{dz}{dx_1} \cdot x_1 = \dfrac{2(1+z-z^2)}{2z-1}$.

И получаем интеграл $-\dfrac{1}{2} \ln \left|1 + z - z^2\right| = \ln |x_1| + \ln |C_1|$ или, избавляясь от логарифмов, получаем $\ln \left|1 + z - z^2\right| = -2 \ln |C_1 x_1| \Rightarrow 1 + z - z^2 = \dfrac{C}{x_1^2}$, $C = \pm C_1^2$.

Переходим теперь к первоначальной функции y и переменной x.

$$1 + \frac{5y-7}{5x+1} - \left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2 = \frac{25\,C}{(5x+1)^2}.$$

Пример 2. Решить уравнение $y' = \dfrac{x+y+1}{2x+2y-3}$.

Вычисляем $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Перепишем уравнение в виде $y' = \dfrac{x+y+1}{2(x+y)-3}$ и произведем замену $z = x + y \quad z' = 1 + y'$. Получим ДУ

$$z' - 1 = \frac{z+1}{2z-3} \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{z+1}{2z-3} + 1 \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{3z-2}{2z-3}.$$

Разделим переменные $\dfrac{(2z-3)}{3z-2} dz = dx$.

Выделим целую часть дроби $\begin{array}{l|l} 2z-3 & 3z-2 \\ \cline{2-2} \underline{2z-{}^4/_3} & {}^2/_3 \\ \quad -{}^5/_3 & \end{array}$.

$$\int \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{3(3z-2)}\right) dz = x + C \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}z - \frac{5}{9}\ln|3z-2| = x + C$$

или $\quad \dfrac{2}{3}(x+y) - \dfrac{5}{9}\ln|3x+3y-2| = x + C$ — есть общий интеграл.

2.4 Линейные уравнения 1-го порядка

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной, которое может быть представлено в виде $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, где $p(x)$, $q(x)$ — непрерывные в области Ω функции.

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$ называется **линейным однородным уравнением**.

Рассмотрим методы решения.

2.4.1 Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)

Согласно методу Лагранжа, сначала находим общее решение однородного уравнения $y' + p(x) \cdot y = 0$, соответствующего данному неоднородному уравнению $y' + p(x) \cdot y = q(x)$.

Затем решение неоднородного линейного уравнения определяется в том же виде, но произвольная постоянная C, входящая в общее решение однородного уравнения считается функцией от переменной x. При этом общее решение однородного уравнения с замененной постоянной C на $C(x)$ является общим решением неоднородного линейного уравнения.

Решаем однородное уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$. Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx,$$

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx + \ln|C_1|\,,$$

$$\ln\left|\frac{y}{C_1}\right| = -\int p(x)\,dx.$$

Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$y = C\, e^{-\int p(x)\, dx}, \quad \text{где } C = \pm C_1.$$

Решение неоднородного уравнения $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ ищем в виде

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)\, dx},$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} \cdot e^{-\int p(x)\, dx} + C(x) \cdot e^{-\int p(x)\, dx} \cdot (-p(x)).$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC(x)}{dx} \cdot e^{-\int p(x)\, dx} - C(x)\, p(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} + p(x)\, C(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} = q(x),$$
$$\frac{dC(x)}{dx} \cdot e^{-\int p(x)\, dx} = q(x),$$
$$dC(x) = q(x) \cdot e^{\int p(x)\, dx}.$$

Тогда

$$C(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)\, dx}\, dx + C.$$

Окончательно получаем ответ

$$y = e^{-\int p(x)\, dx} \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)\, dx}\, dx + C \right).$$

Пример. Решить уравнение $y' + 2y = e^{-x}$.
Составляем и решаем однородное уравнение:

$$y' + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -2 \cdot dx,$$
$$\ln|y| = -2x + \ln|C_1|,$$
$$y = C \cdot e^{-2x}, \quad \text{где } \; C = \pm C_1.$$

Ищем решение неоднородного уравнения в виде

$$y = C(x) \cdot e^{-2x},$$
$$y' = (C(x))' \cdot e^{-2x} + C(x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2).$$

При подстановке в исходное уравнение получаем

$$(C(x))' \cdot e^{-2x} + C(x) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) + 2 \cdot C(x) \cdot e^{-2x} = e^{-x},$$

$$(C(x))' \cdot e^{-2x} = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad dC(x) = e^x \, dx,$$
$$C(x) = \int e^x \, dx + C \quad \Rightarrow \quad C(x) = e^x + C.$$

Ответ. Общее решение уравнения $y' + 2y = e^{-x}$ есть $y = (e^x + C) \cdot e^{-2x}$ или $y = e^x + C \cdot e^{-2x}$.

2.4.2 Метод Бернулли

Якоб Бернулли (1654—1705) — швейцарский математик.

Согласно этому методу, решение ДУ определяются в виде произведения $y = u(x) \cdot v(x)$ двух функций $u(x)$ и $v(x)$. При этом $y' = v \cdot \dfrac{du}{dx} + u \cdot \dfrac{dv}{dx}$ или $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

После подстановки исходное уравнение примет вид:

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + p(x) \cdot u \cdot v = q(x),$$
$$v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \left(\frac{dv}{dx} + p(x) \cdot v \right) = q(x).$$

Функции $u(x)$ и $v(x)$ определяются из системы $\begin{cases} v' + p(x) \cdot v = 0, \\ u' \cdot v = q(x). \end{cases}$

Заметим, что в качестве $v(x)$ берется любое частное решение первого уравнения системы.

Пример 1. Решить уравнение $y' + 2x \cdot y = e^{-x^2}$.

Положим

$$y = u \cdot v, \quad \Rightarrow \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v',$$
$$u' \cdot v + u \cdot v' + 2x \cdot u \cdot v = e^{-x^2}.$$

Составим систему $\begin{cases} v' + 2xv = 0, \\ u'v = e^{-x^2}. \end{cases}$

Решаем уравнение $\dfrac{dv}{v} = -2xdx$. Результат интегрирования $\ln |v| = -x^2$.

Берем решение $v = e^{-x^2}$ и подставляем во второе уравнение $u' \cdot v = e^{-x^2}$.

Тогда $u' \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2} \;\Rightarrow\; u' = 1 \;\Rightarrow\; du = dx \;\Rightarrow\; u = x + C$.

Ответ: $y = (x + C) \cdot e^{-x^2}$.

Пример 2. Решить уравнение $y' - \dfrac{2}{x} \cdot y = 2x^3$.

Это уравнение является линейным и неоднородным, где $p(x) = -\dfrac{2}{x}$

и $q(x) = 2x^3$.

Положим $y = u(x) \cdot v(x)$. Составим систему $\begin{cases} v' - \dfrac{2}{x} \cdot v = 0, \\ u' \cdot v = 2x^3. \end{cases}$

Из первого уравнения системы $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{2}{x}\,dx$.

Следовательно $\ln|v| = 2\ln|x| \;\Rightarrow\; v = x^2$.

Решим второе уравнение

$$u' \cdot x^2 = 2x^3 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad u = x^2 + C.$$

Ответ: $y(x) = \big(x^2 + C\big) \cdot x^2$.

2.4.3 Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = q(x) \cdot y^{\alpha},$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — функции от x, α — постоянное число такое, что $\alpha \neq 0; 1$.

Методы интегрирования:

1) сведение к линейному уравнению;

2) решение методом Бернулли;

3) метод вариации произвольной постоянной.

Рассмотрим методы на примерах.

1) Уравнение Бернулли приводится к линейному заменой $z = y^{1-\alpha}$.

Пример 1. Решить задачу Коши $\begin{cases} y' - \dfrac{2y}{x} = 2x \cdot \sqrt{y}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

Замена $z = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$, $z(1) = 1$, $z' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y'$.

Обе части уравнения поделим на $2\sqrt{y}$. Тогда

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' - \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2y = \frac{2x\sqrt{y}}{2\sqrt{y}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' - \frac{2}{x} \cdot \sqrt{y} = x.$$

Для функции z получим уравнение $z' - \dfrac{2}{x}z = x$. Это линейное уравнение решаем методом Бернулли. Замена

$z(x) = u(x) \cdot v(x)$, $z'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Тогда $u' \cdot v + u \cdot v' - \dfrac{2}{x} \cdot u \cdot v = x$. Составим систему $\begin{cases} v' - \dfrac{2}{x} \cdot v = 0, \\ u' \cdot v = x. \end{cases}$

Решение уравнений системы

$$\frac{dv}{v} = \frac{2}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = 2\ln|x| \quad \Rightarrow \quad v = x^2,$$

$$u' \cdot x^2 = x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad u = \ln|x| + C.$$

Тогда $z = u \cdot v = (\ln|x| + C) \cdot x^2$.

При $z(1) = 1 \;\Rightarrow\; C = 1 \;\Rightarrow\; z = (\ln|x| + 1) \cdot x^2 \;\Rightarrow\; y = (\ln|x| + 1)^2 \cdot x^4$.

2) Уравнение Бернулли можно решить методом Бернулли.

Пример 2. Решить уравнение $y' - \frac{1}{x} \cdot y = xy^2$.

Положим $y = u(x) \cdot v(x), \quad y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Подставляя в уравнение, получим $u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{1}{x} \cdot u \cdot v = x \cdot u^2 \cdot v^2$.

Составляем систему $\begin{cases} v' - \dfrac{1}{x}v = 0, \\ u' \cdot v = x \cdot u^2 \cdot v^2. \end{cases}$

Разделяем переменные в первом уравнении $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$ и интегрируем $\ln|v| = \ln|x|$. Берем частное решение $v = x$. Для второго уравнения системы

$$\frac{du}{u^2} = x^2\,dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{u} = \frac{x^3}{3} + C \quad \Rightarrow \quad u = \frac{-1}{\dfrac{x^3}{3} + C}.$$

Обратная замена $y = u \cdot v = \dfrac{-x}{\dfrac{x^3}{3} + C}$. Ответ: $y = \dfrac{-3x}{x^3 + 3C}$.

3) Решение методом вариации произвольной постоянной.

Пример 3. Решить уравнение $y' - \frac{y}{x} = x \cdot y^2$.

Составляем однородное уравнение $y' - \frac{y}{x} = 0$.

Находим его общее решение $y = Cx$.

Решение уравнения Бернулли ищем в виде $y = C(x) \cdot x$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем $(C(x))' \cdot x = x^3 \cdot C^2(x)$,

$$\frac{dC(x)}{C^2(x)} = x^2\,dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{C(x)} = \frac{x^3}{3} + C \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{-1}{\dfrac{x^3}{3} + C}.$$

Ответ: $y(x) = \dfrac{-3x}{x^3 + 3C}$.

2.5 Linear Equation

A differential equation of the form $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, where $p(x)$ and $q(x)$ are function of x or constants, is called **linear**.

A differential equation of the form $y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$ is called **equation Bernully** (reduced to linear form).

This equation can be made linear by change of variable. If we take $z = y^{1-n}$ as new variable, the equation becomes

$$\frac{1}{1-n} \cdot z' + p \cdot z = q,$$

which is linear.

Example. $y' + \frac{2}{x} \cdot y = \frac{y^3}{x^3}$.

Solution:

$$z = y^{1-3} = y^{-2} \quad \Rightarrow \quad z' = -2y^{-3} \cdot y',$$

multiplying by $\left(-2y^{-3}\right)$ we get the equation

$$-2y^{-3} \cdot y' + \frac{2}{x} \cdot \left(-2y^{-3}\right) \cdot y = -2y^{-3} \cdot \frac{y^3}{x^3}$$

or linear equation $\quad z' - \frac{4}{x} \cdot z = -\frac{2}{x^3}.$

$$z = u(x) \cdot v(x), \quad z' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = u'v + uv',$$

$$u'v + uv' - \frac{4}{x}\, uv = -\frac{2}{x^3},$$

$$\begin{cases} \text{а)} \quad v' - \frac{4}{x} \cdot v = 0, \\ \text{б)} \quad u \cdot v = -\frac{2}{x^3}, \end{cases}$$

а) $\frac{dv}{v} = \frac{4}{x}\, dx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = 4 \ln|x| \quad \Rightarrow \quad$ let $\; v = x^4,$

б) $u' \cdot x^4 = -\frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{2}{x^7}\, dx \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{3x^6} + C,$

$$z = \left(\frac{1}{3x^6} + C\right) \cdot x^4 \quad \Rightarrow \quad z = Cx^4 + \frac{1}{3x^2}$$

or, since $\; z = y^{-2}$, then $\; \frac{1}{y^2} = Cx^4 + \frac{1}{3x^2}.$

3 Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$, где $f(x)$ — заданная непрерывная функция, интегрируется в квадратурах .

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1,$$
$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)\,dx \right) dx + C_1 x + C_2$$

и так далее.

2. Если дифференциальное уравнение порядка $n \geq 2$ имеет вид $F\left(x,\, y^{(k)},\, y^{(k+1)},\, \ldots,\, y^{(n)}\right) = 0$, т. е. не содержит искомой функции и ее производных до порядка $(k-1)$ включительно, то порядок уравнения может быть понижен с помощью замены $y^{(k)} = z$, где $z = z(x)$.

Пример. Найдем решения уравнения $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}$.

Уравнение не содержит y и y', поэтому порядок уравнения понижается до первого с помощью замены $y'' = z$ (при этом $y''' = z'$).

После замены уравнение принимает вид

$$x^3 \cdot z' + x^2 \cdot z = \sqrt{x}$$

или

$$z' + \frac{1}{x} \cdot z = x^{-5/2},$$

т. е. становится линейным уравнением первого порядка.

Положим $z = u(x) \cdot v(x)$, $\quad z' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{1}{x} \cdot u \cdot v = x^{-5/2},$$
$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' + \frac{1}{x} v \right) = x^{-5/2},$$
$$\begin{cases} v' + \dfrac{1}{x} \cdot v = 0, \\ u' \cdot v = x^{-5/2}. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы: $\quad \dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -\ln|x|.$

Берем частное решение $v = \dfrac{1}{x}$.

Тогда $u' \cdot \dfrac{1}{x} = x^{-5/2}$ или $du = x^{-3/2}$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&u = \frac{x^{-1/2}}{(-1/2)} + C_1,\\
&z = u \cdot v = \frac{1}{x} \cdot \left(-2x^{-1/2} + C_1\right) = \frac{C_1}{x} - 2x^{-3/2},\\
&y'' = z = \frac{C_1}{x} - 2x^{-3/2},\\
&y' = \int y''\,dx = C_1 \ln x - \frac{2x^{-1/2}}{(-1/2)} + C_2 = C_1 \ln x + 4x^{-1/2} + C_2,\\
&y = \int y'\,dx = C_1 \int \ln x\,dx + 8\sqrt{x} + C_2 x + C_2 =\\
&\quad = C_1 x \cdot (\ln x - 1) + 8\sqrt{x} + C_2 x + C_3.
\end{aligned}
$$

Решая дифференциальные уравнения, полезно помнить, что общее решение уравнения n-го порядка содержит n произвольных постоянных. В примере проинтегрировано уравнение третьего порядка, его общее решение содержит три произвольные константы.

3. Если уравнение не содержит независимой переменной, т. е. имеет вид $F\left(y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n)}\right) = 0$, то порядок уравнения понижается на единицу с помощью замены $y' = p(y)$. При этом y рассматривается как новая независимая переменная, а p — как новая неизвестная функция. Производные y'', …, $y^{(n)}$ выражаются через p и производные функции p по y.

Выразим, например, y''.

Поскольку $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$, то

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Аналогично выражается y''':

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = p \cdot \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2 \cdot \frac{d^2p}{dy^2}.$$

Пример. Найдем решение уравнения $y'' = 2y^3$, удовлетворяющее начальным условиям $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$.

Примем y за новую независимую переменную, а $y' = p(y)$ — за новую неизвестную функцию. Тогда $y'' = p \cdot \dfrac{dp}{dy} = p \cdot p'$ и данное уравнение в новых переменных примет вид $p \cdot \dfrac{dp}{dy} = 2y^3$.

В последнем уравнении, разделяя переменные, получаем $p\,dp = 2y^3\,dy$, и после интегрирования результат имеет вид $p^2 = y^4 + C_1$.

Произвольную константу C_1 определяем, используя начальные условия $y\Big|_{x=-1} = 1$, $p\Big|_{x=-1} = y'\Big|_{x=-1} = 1$. Подставляя эти условия в найденное решение, получаем $C_1 = 0$. Поэтому $p^2 = y^4$ или $p = \pm y^2$, т. е. $y' = \pm y^2$.

Заметим, что данным начальным условиям может удовлетворять только решение уравнения $y' = y^2$ (в случае $y' = -y^2$, если $y = 1$, то $y' = -1$).

Общее решение уравнения $y' = y^2$ дается формулой $y = -(x + C_2)^{-1}$ или $y = -\dfrac{1}{x + C_2}$. Из условия $y\Big|_{x=-1} = 1$ следует, что $C_2 = 1$, и искомым решением будет $y = -\dfrac{1}{x}$.

3.1 Special types of second order equations

I. Equation Immediately Integrable.

An equation of the form $y'' = f(x)$ can be solved directly by two integrations.

The first integration gives $y' = \displaystyle\int f(x)\,dx + C_1$, a second integration gives the general solution in the form

$$y = \int \left(\int f(x)\,dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

Example.

$y'' = \cos x$, then $y' = \sin x + C_1$ and $y = -\cos x + C_1 x + C_2$.

II. Equations not containing y.

An equation not containing y can be solved for the second derivative and so reduced to the form $y'' = f(x,\, y')$.

Take as new variable $z = y'$, then $y'' = z'$ and so $y'' = f(x,\, y')$ can be written as $z' = f(x,\, z)$. This is a first-order equation whose solution has the form $z = F(x,\, C_1)$ where C_1 is the constant of integration.

Substituting y' for z, we have $y' = F(x,\, C_1)$, whence $y = \displaystyle\int F(x,\, C_1)\,dx + C_2$.

Example. Consider a differential equation $(1 + x) \cdot y'' + y' = 0$.

$$y' = z, \quad y'' = z',$$

$$\text{then} \quad (1 + x) \cdot z' + z = 0,$$

$$\text{or} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{z}{1 + x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{1 + x},$$

$$\ln|z| = -\ln|1+x| + \ln|C|,$$
$$\ln|z| = \ln\left|\frac{C}{1+x}\right| \quad \Rightarrow \quad z = \frac{C_1}{1+x}, \quad C_1 = \pm C,$$
$$y' = \frac{C_1}{1+x} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{C_1}{1+x}\,dx,$$
$$y = C_1 \ln|1+x| + C_2.$$

III. Equations not containing x.

An equation not containing x can be reduced to the form $y'' = f(y,\, p)$, where $y' = p(y)$ and write the second devirative in the form

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}.$$

These substitutions bring to the form

$$y \cdot \frac{dp}{dy} = f(y,\, p).$$

This is a first-order equation which can be solved for p.

Replacing p by $\dfrac{dy}{dx}$ the result is a first-order equation which can be solved by a separation of variables.

Example. $y \cdot y'' = y^2 \cdot y' + (y')^2$.

Substituting $y' = p(y),\ y'' = p \cdot \dfrac{dp}{dy}$ the equation becomes $y \cdot p \cdot \dfrac{dp}{dy} = y^2 \cdot p + p^2$.

Dividing by p we obtain the equation $y \cdot \dfrac{dp}{dy} = y^2 + p$.

The solution of this equation is $\dfrac{p}{y} = y + C_1$ or $y' = y \cdot (y + C_1)$ and $x = \displaystyle\int \frac{dy}{y(y+C_1)} = \frac{1}{C_1} \ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right| + C_2$.

In solving this problem we divides both sides of the equation by p. The value of the variable $p = 0$ gives $y = C$. Such a solution is called singular.

4 Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

Линейным дифференциальным уравнением n–го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции y и ее производных y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$ вида

$$y^{(n)} + p_1 \cdot y^{(n-1)} + p_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} \cdot y' + p_n \cdot y = f(x),$$

где p_1, $\ldots$, p_n — функции от x или постоянные величины.

Левую часть этого уравнения обозначим $L(y)$, т. е.

$$y^{(n)} + p_1 \cdot y^{(n-1)} + p_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} \cdot y' + p_n \cdot y = L(y).$$

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение $L(y) = 0$ называется **линейным однородным уравнением**,

если $f(x) \neq 0$, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется **линейным неоднородным уравнением**,

если все коэффициенты p_0, p_1, p_2, $\ldots$, p_n — постоянные числа, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется **линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами**.

Рассмотрим методы решения линейных уравнений, начиная с уравнения второго порядка.

4.1 Линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0,$$

где p, $q \in R$.

Решения уравнения $y_1(x)$, $y_2(x)$ называются **линейно независимыми на интервале** (a, b), если из того, что линейная комбинация $C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) \equiv 0$ следует, что $C_1 = C_2 = 0$.

Фундаментальная система решений (ФСР) — система линейно-независимых частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$.

Теорема. Если частные решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно независимы на (a, b), то функция $y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные, является общим решением однородного дифференциального уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$.

Решения такого уравнения будем искать в виде $y(x) = e^{kx}$, где k — некоторое число. Подставляя $y(x)$ в однородное дифференциальное уравнение

получим
$$k^2 \cdot e^{kx} + p \cdot k \cdot e^{kx} + q \cdot e^{kx} = 0, \quad (e^{kx} \neq 0)$$
или уравнение
$$k^2 + p \cdot k + q = 0,$$
которое называется **характеристическим уравнением** для уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$.

У этого квадратного уравнения корни k_1, k_2 могут быть:

1. действительными и различными $k_1 \neq k_2$;

2. действительными и совпадающими $k_1 = k_2$;

3. комплексными сопряженными $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$.

Рассмотрим случаи.

1. Если $k_1 \neq k_2$, то
$$y_1(x) = e^{k_1 x}, \quad y_2(x) = e^{k_2 x}.$$
Эти решения линейно независимы, так как $\dfrac{y_1}{y_2} \neq Const$. Тогда общее решение имеет вид:
$$y(x) = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}.$$

Пример. Решить уравнение $y'' - 5y' + 4y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 5 \cdot k + 4 = 0$.

$D = 25 - 16 = 9 > 0$ и корни характеристического уравнения $k_1 = 1$, $k_2 = 4$ действительные и различные.

Следовательно, $y(x) = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{4x}$.

2. Если $k_1 = k_2 = k$, то одно решение находится сразу $y_1(x) = e^{kx}$. Второе частное решение линейно независимое с первым можно взять в виде $y_2(x) = x \cdot e^{kx}$.

Легко убедиться с помощью подстановки, что $y_2(x)$ есть решение уравнения и в том, что оно линейно независимо с первым частным решением, так как $\dfrac{y_1}{y_2} \neq Const$. Поэтому общее решение имеет вид
$$y(x) = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}.$$

Пример. Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$.

$D = 36 - 36 = 0$ и корни $k_1 = k_2 = 3$.

Поэтому $y_1(x) = e^{3x}$, $\quad y_2(x) = x \cdot e^{3x}$ и
$$y(x) = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot x \cdot e^{3x}.$$

3. Если корни комплексные сопряженные, то $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, $(D < 0)$.

Частные решения есть

$$\tilde{y}_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x + i\cdot\sin\beta x), \quad \tilde{y}_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x - i\cdot\sin\beta x).$$

Частными решениями будут также функции

$$y_1 = e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x.$$

Они линейно независимы, потому что $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \operatorname{tg}\beta x \neq Const$. Поэтому общее решение можно выразить в виде

$$y(x) = C_1\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x + C_2\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x.$$

Пример. Решить уравнение $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 2 = 0$.

$D = 4 - 8 = -4 < 0 \;\Rightarrow\; k_1 = 1 + i,\; k_2 = 1 - i$.

Тогда $y(x) = C_1\cdot e^x\cdot\cos x + C_2\cdot e^x\cdot\sin x$.

4.2 Линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1\cdot y^{(n-1)} + p_2\cdot y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}\cdot y' + p_n\cdot y = 0,$$

где p_i — действительные числа $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$.

Ищем решение уравнения в виде $y(x) = e^{kx}$.

Алгоритм нахождения решения следующий:

1) составляем характеристическое уравнение $k^n + p_1\cdot k^{n-1} + \ldots + p_n = 0$;

2) находим корни характеристического уравнения;

3) по виду корней выписываем частные линейно независимые решения (фундаментальную систему решений), имея в виду, что:

каждому действительному корню k кратности один соответствует одно частное решение $y(x) = e^{kx}$;

каждой паре комплексных сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ соответствует пара частных решений вида $y_1(x) = e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x$, $y_2(x) = e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x$;

каждому действительному корню k кратности r соответствует r линейно независимых частных решений вида e^{kx}, $x \cdot e^{kx}$, $\ldots$, $x^{r-1} \cdot e^{kx}$;

каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности r отвечает $2 \cdot r$ частных решений вида

$$e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x,\ x \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x,\ \ldots,\ x^{r-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x,$$
$$e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x,\ x \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x,\ \ldots,\ x^{r-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x.$$

Число таким образом построенных частных решений равно порядку уравнения и общее решение есть их линейная комбинация

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x).$$

Пример 1. Решить уравнение $y''' + y'' = 0$.

Составим характеристическое уравнение $k^3 + k^2 = 0$.
Решение $k^2 \cdot (k+1) = 0 \ \Rightarrow\ k_{1,2} = 0,\ k_3 = -1$.
Выпишем частные решения

$$y_1(x) = e^{0x} = 1, \quad y_2(x) = x \cdot e^{0x} = x, \quad y_3(x) = e^{-x}.$$

Ответ: общее решение $y(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot e^{-x}$.

Пример 2. Решить уравнение $y^{IV} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$.

Составим характеристическое уравнение $k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 4k + 4 = 0$.

Первый корень найдем среди делителей свободного члена подбором. Это число $k = 2$.
Разделим уголком $\dfrac{k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 4k + 4}{k-2} = k^3 - 2k^2 + k - 2$.
Преобразуем уравнение

$$k^3 - 2k^2 + k - 2 = 0 \ \Rightarrow\ k^2(k-2) + (k-2) = 0 \ \Rightarrow\ (k^2+1)(k-2) = 0.$$

Находим корни исходного уравнения $k_{1,2} = 2$, $k_{3,4} = \pm i$.

Частные решения

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = x \cdot e^{2x} \quad y_3(x) = \cos x, \quad y_4(x) = \sin x.$$

Общее решение есть

$$y(x) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{2x} + C_3 \cdot \cos x + C_4 \cdot \sin x.$$

4.3 Линейное неоднородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_1 \cdot y^{(n-1)} + p_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} \cdot y' + p_n \cdot y = f(x).$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами $y_{\text{О.Н.}}$ можно найти как сумму общего решения однородного уравнения $y_{\text{О.О}}$ и частного решения неоднородного уравнения $y_{\text{Ч.Н.}}$, т. е. $y_{\text{О.Н.}} = y_{\text{О.О}} + y_{\text{Ч.Н.}}$.

Частное решение неоднородного уравнения может быть найдено методом неопределенных коэффициентов, либо методом вариации произвольных постоянных.

4.3.1 Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод позволяет найти частные решения неоднородного уравнения, если правая часть имеет специальный вид:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot \left(P_l(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right).$$

Здесь $P_l(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены степени l и m соответственно.

Частное решение в этом случае ищут в виде

$$y = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot \left(\tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x\right), \qquad s = \max\{l, m\},$$

r — кратность корня $k = \alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения.

Частные случаи.

I. Если $f(x) = P_l(x)$, то

$y_{\text{Ч.Н.}}(x) = \tilde{P}_l(x)$, если $k = 0$ — не корень характеристического уравнения;

$y_{\text{Ч.Н.}}(x) = x^r \cdot \tilde{P}_l(x)$, если $k = 0$ — корень кратности r.

II. Если $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_l(x)$, то

$y_{\text{Ч.Н.}} = e^{\alpha x} \cdot \tilde{P}_l(x)$, в случае, если $k = \alpha$ — не корень характеристического уравнения;

$y_{\text{Ч.Н.}} = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot \tilde{P}_l(x)$, если $k = \alpha$ — корень кратности r.

Пример 1. Решить ДУ $y'' - 2y' - 3y = x \cdot e^{3x}$.

Однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному уравнению есть $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - 2k - 3 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = 3$. Поэтому $y_{\text{О.О.}} = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x}$.

По виду правой части будем подбирать частное решение в виде $y_{\text{Ч.Н.}} = x \cdot (Ax + B) \cdot e^{3x}$, где $Ax + B$ — многочлен первого порядка с неопределенными коэффициентами.

$$y'_{\text{ч.н.}} = (2Ax + B) \cdot e^{3x} + (Ax^2 + Bx) \cdot 3 \cdot e^{3x} = e^{3x} \cdot (2Ax + B + 3Ax^2 + 3Bx)$$
$$y''_{\text{ч.н.}} = 3 \cdot e^{3x} \cdot (2Ax + B + 3Ax^2 + 3Bx) + e^{3x} \cdot (2A + 6Ax + 3B).$$

Подставляем в ДУ

$$e^{3x} \cdot (6Ax + 3B + 9Ax^2 + 9Bx + 2A + 6Ax + 3B) -$$
$$-e^{3x} \cdot (4Ax + 2B + 6Ax^2 + 6Bx) - e^{3x} \cdot (3Ax^2 + 3Bx) = x \cdot e^{3x}.$$

Делим на e^{3x} и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x, получая систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов,

$$\begin{aligned} x^2 &: \quad 0 = 0 \\ x^1 &: \quad 12A + 9B - 4A - 6B - 3B = 1 \\ x^0 &: \quad 3B + 2A + 3B - 2B = 0 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 8A = 1, \\ 4B + 2A = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{8}, \quad B = -\frac{1}{16}.$$

Частное решение $y_{\text{ч.н.}} = \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right) \cdot e^{3x}$.

Общее решение

$$y(x) = y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}} = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right) \cdot e^{3x}.$$

Пример 2. Решить уравнение $y'' + y' = x \cdot e^x + e^{-x}$.

Составляем однородное уравнение $y'' + y' = 0$.
Запишем и решим характеристическое уравнение: $k^2 + k = 0 \Rightarrow k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения $y_{\text{о.о}} = C_1 + C_2 \cdot e^{-x}$.

Правую часть неоднородного уравнения можно представить в виде суммы двух функций специального вида $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = x \cdot e^x$, а $f_2(x) = e^{-x}$.

Сначала найдем частное решение неоднородного уравнения для функции $f_1(x) = x \cdot e^x$:

$$y_{\text{ч.н.1}} = (A \cdot x + B) \cdot e^x,$$
$$y'_{\text{ч.н.1}} = A \cdot e^x + (A \cdot x + B) \cdot e^x = e^x \cdot (Ax + A + B),$$
$$y''_{\text{ч.н.1}} = e^x \cdot (Ax + A + B) + e^x \cdot A = e^x \cdot (Ax + 2A + B).$$

Тогда $\quad e^x \cdot (Ax + 2A + B) + e^x \cdot (Ax + A + B) = x \cdot e^x$
или $\quad Ax + 2A + B + Ax + A + B = x.$

$$x^1: \qquad 2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2},$$
$$x^0: \qquad 3A + 2B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{3}{4},$$
$$y_{\text{ч.н.1}} = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) \cdot e^x.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения с правой частью $f_2(x) = e^{-x}$:

$$y_{\text{ч.н.2}} = D \cdot x \cdot e^{-x},$$
$$y'_{\text{ч.н.2}} = D \cdot \left(e^{-x} - x \cdot e^{-x}\right) = D \cdot e^{-x} \cdot (1 - x),$$
$$y''_{\text{ч.н.2}} = D \cdot e^{-x} \cdot (-1) \cdot (1 - x) + D \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -D \cdot e^{-x} \cdot (2 - x).$$

Тогда

$$-D \cdot e^{-x} \cdot (2 - x) + D \cdot e^{-x} \cdot (1 - x) = e^{-x},$$
$$D \cdot (-2 + x + 1 - x) = 1 \quad \Rightarrow \quad D = -1,$$
$$y_{\text{ч.н.2}} = -x \cdot e^{-x}.$$

Общее решение $y_{\text{о.н.}} = C_1 + C_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) e^x - x \cdot e^{-x}.$

Пример 3. Найти частное решение уравнения $y'' + 4y = 5e^x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$

Составляем однородное уравнение $y'' + 4y = 0.$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 4 = 0$. Его решение $k^2 = -4 = 4i^2, \quad k = \pm 2i, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2.$

Тогда фундаментальная система решений $y_1(x) = e^{0x} \cdot \cos 2x = \cos 2x$, $y_2(x) = e^{0x} \cdot \sin 2x = \sin 2x.$
Общее решение однородного уравнения $y_{\text{о.о.}} = C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x.$

Находим частное решение по виду правой части $f(x) = 5e^x,\ k = 1$ — не корень характеристического уравнения. Получаем
$y_{\text{ч.н.}} = A \cdot e^x, \quad y'_{\text{ч.н.}} = A \cdot e^x, \quad y''_{\text{ч.н.}} = A \cdot e^x.$
Подставляя в исходное уравнение, находим

$$A \cdot e^x + 4A \cdot e^x = 5e^x \ \Rightarrow\ 5A = 5 \ \Rightarrow\ A = 1 \ \Rightarrow\ y_{\text{ч.н.}} = e^x.$$

Тогда $y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}} = C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x + e^x.$

$y(0)=0 \;\Rightarrow\; 0=C_1\cos 0+C_2\sin 0+e^0=C_1+1 \;\Rightarrow\; C_1=-1.$
$y'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x+e^x.$
$y'(0)=3 \;\Rightarrow\; 3=2C_2+1 \;\Rightarrow\; C_2=1.$
Ответ: $y=-\cos 2x+\sin 2x+e^x.$

Пример 4. Решить уравнение $y''+4y'+5y=5x^2-32x+5.$
Составляем однородное уравнение $y''+4y'+5y=0.$
Характеристическое уравнение $k^2+4k+5=0$
$D=16-20=-4=4i^2 \;\Rightarrow\; k_{1,2}=\dfrac{-4\pm 2i}{2}=-2\pm i.$
Фундаментальная система решений

$$y_1=e^{-2x}\cdot\cos x,\quad y_2=e^{-2x}\cdot\sin x$$

и $y_{\text{О.О.}}=C_1\cdot e^{-2x}\cdot\cos x+C_2\cdot e^{-2x}\cdot\sin x.$

Частное решение $y_{\text{Ч.Н.}}=Ax^2+Bx+C$, т. к. $k=0$ не является корнем характеристического уравнения. Тогда $y'_{\text{Ч.Н.}}=2Ax+B,\;\; y''_{\text{Ч.Н.}}=2A.$

Подставляем в неоднородное уравнение предполагаемое решение и его производные

$$2A+4\cdot(2Ax+B)+5\cdot\big(Ax^2+Bx+C\big)=5x^2-32x+5.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях «x» левой и правой части равенства

$$\begin{aligned}
x^2:&\qquad 5A=5 \quad\Rightarrow\quad A=1,\\
x^1:&\qquad 8A+5B=-32 \quad\Rightarrow\quad B=-8,\\
x^0:&\qquad 2A+4B+5C=5 \quad\Rightarrow\quad C=7.
\end{aligned}$$

$y_{\text{Ч.Н.}}=x^2-8x+7 \;\Rightarrow\; y_{\text{О.Н.}}=C_1\cdot e^{-2x}\cdot\cos x+C_2\cdot e^{-2x}\cdot\sin x+x^2-8x+7.$

Пример 5. Решить уравнение $y'''-y''=x\cdot e^x.$
$y'''-y''=0,\;\; k^3-k^2=0 \;\Rightarrow\; k^2\cdot(k-1)=0 \;\Rightarrow\; k_{1,2}=0,\; k_3=1,$
$y_{\text{О.О.}}=C_1+C_2\cdot x+C_3\cdot e^x.$

$f(x)=x\cdot e^x,\;\; k=1$ — корень характеристического уравнения кратности 1, поэтому $y_{\text{Ч.Н.}}=x\cdot(Ax+B)\cdot e^x=(Ax^2+Bx)\cdot e^x$ и

$$\begin{aligned}
y'_{\text{Ч.Н.}}&=(2Ax+B)\cdot e^x+(Ax^2+Bx)\cdot e^x=e^x\cdot(2Ax+B+Ax^2+Bx),\\
y''_{\text{Ч.Н.}}&=e^x,\cdot(2Ax+B+Ax^2+Bx)+e^x\cdot(2A+2Ax+B)=\\
&=e^x\cdot(4Ax+Ax^2+Bx+2A+2B),\\
y'''_{\text{Ч.Н.}}&=e^x\cdot(4Ax+Ax^2+Bx+2A+2B)+e^x\cdot(4A+2Ax+B)=\\
&=e^x\cdot(6Ax+Ax^2+Bx+6A+3B).
\end{aligned}$$

Подставляем полученные выражения в неоднородное уравнение

$$e^x \cdot (6Ax + Ax^2 + Bx + 6A + 3B) - e^x \cdot (4Ax + Ax^2 + Bx + 2A + 2B) = x \cdot e^x.$$

После деления на e^x получаем

$$6Ax + \cancel{Ax^2} + \cancel{Bx} + 6A + 3B - 4Ax - \cancel{Ax^2} - \cancel{Bx} - 2A - 2B = x,$$

$$2Ax + 4A + B = x.$$

Приравнивая коэффициенты, получаем

$$\begin{aligned} x^1 : &\qquad 2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}, \\ x^0 : &\qquad 4A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -2. \end{aligned}$$

$$y_{\text{ч.н.}} = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right) \cdot e^x \;\Rightarrow\; y_{\text{о.н.}} = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right) \cdot e^x.$$

4.3.2 Метод вариации произвольных постоянных для интегрирования линейного ДУ второго порядка

Рассмотрим уравнение $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$.

Составим однородное ДУ $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$, соответствующее исходному неоднородному уравнению.

Пусть $y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ — его общее решение.

Согласно методу вариации произвольных постоянных, решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$, где $C_1(x),\ C_2(x)$ — новые неизвестные функции от x. Эти функции определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Составляем однородное уравнение $y'' + y = 0$.

Его характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ с решениями $k_{1,2} = \pm i$. Следовательно, $y_{\text{О.О}} = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y(x) = C_1(x) \cdot \cos x + C_2(x) \cdot \sin x.$$

Функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ определяем из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\cos x + C_2'(x)\cdot\sin x = 0, \\ C_1'(x)\cdot(-\sin x) + C_2'(x)\cdot\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решаем эту систему относительно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = \ln|\cos x| + C_1,$$

$$C_2'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2(x) = x + C_2.$$

Таким образом, общее решение есть

$$y = (C_1 + \ln|\cos x|)\cdot\cos x + (x + C_2)\cdot\sin x.$$

4.4 Linear Equation with Constant Coefficients

A differential equation of the form

$$y^{(n)} + p_1\cdot y^{(n-1)} + p_2\cdot y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}\cdot y' + p_n\cdot y = f(x)$$

is called **linear equation with constant coefficients** ($p_i \in \mathrm{R}$).

For practical applications, this is one of the most important types.

Equation with right-hand member zero

$$y^{(n)} + p_1\cdot y^{(n-1)} + p_2\cdot y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}\cdot y' + p_n\cdot y = 0$$

is called **linear homogeneous equation with constant coefficients**.

Example 1. Consider the equation $y'' + y' - 6y = 0$.

Auxilary polinomial equation $k^2 + k - 6 = 0$. The roots of this equation are $k = 2$ and $k = -3$.

The functions $y_1(x) = e^{2x}$ and $y_2(x) = e^{-3x}$ are solution, $\dfrac{y_1}{y_2} \not\equiv const$. So, $y_1(x)$ and $y_2(x)$ are fundamental set of solutions and $y(x) = C_1\cdot e^{2x} + C_2\cdot e^{-3x}$.

Example 2. Determine the general solution $y'' + 4y' + 4y = 0$.

The auxiliary equation is $k^2 + 4k + 4 = 0$. It has multiple root $k = -2$,

$(k_1 = k_2 = -2)$.

Therefore, two linearly independent solutions are $y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = x \cdot e^{-2x}$.

The general solution is $y(x) = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-2x}$.

Example 3. Determine the general solution of the equation $y''+6y'+25y = 0$.

The auxiliary equation is $k^2 + 6k + 25 = 0$. Its has roots $k = -3 \pm 4i$.

Two independent real-valued solutions are $y_1(x) = e^{-3x} \cdot \cos 4x$, $y_2(x) = e^{-3x} \cdot \sin 4x$ and the generl soluion is

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-3x} \cdot \cos 4x + C_2 \cdot e^{-3x} \cdot \sin 4x.$$

If we consider the equation

$$y^{(n)} + p_1 \cdot y^{(n-1)} + p_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} \cdot y' + p_n \cdot y = f(x) (\text{nonhomogeneous})$$

then $y_{\text{О.Н.}} = y_{\text{О.О}} + y_{\text{Ч.Н.}}$, where $y_{\text{О.О}}$ is general solution to associated homogeneous equation and $y_{\text{Ч.Н.}}$ is a particular solution.

One of the methods for obtaining a particular solution to a nonhomogeneous equation is called the method of undetermined coefficients, becase we pick a trial solution with unknown coefficients.

Example. Determine the general solution to $y'' - 6y' + 9y = 10e^{3x}$.

The general solution to the associated homogeneous equation $y''-6y'+9y = 0$ is $y_{\text{О.О}} = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot x \cdot e^{3x}$.

Use the trial solution $y_{\text{Ч.Н.}} = x^2 \cdot Ae^{3x}$.

$$y'_{\text{Ч.Н.}} = A \cdot (2x \cdot e^{3x} + x^2 \cdot e^{3x} \cdot 3) = Ae^{3x} \cdot (2x + 3x^2),$$
$$y''_{\text{Ч.Н.}} = A \cdot (3e^{3x} \cdot (2x + 3x^2) + e^{3x} \cdot (2 + 6x)) = Ae^{3x} \cdot (6x + 9x^2 + 2 + 6x)$$

then

$$12Ax + 9Ax^2 + 2A - 12Ax - 18Ax^2 + 9Ax^2 = 10,$$
$$2A = 10 \quad \Rightarrow \quad A = 5 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{Ч.Н.}} = 5x^2 \cdot e^{3x}$$

and general solution is

$$y_{\text{О.Н.}} = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot x \cdot e^{3x} + 5x^2 \cdot e^{3x}.$$

5 Математические модели прикладных задач, связанные с обыкновенными дифференциальными уравнениями

5.1 Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Движение материальной точки по прямой под действием силы притяжения к неподвижному центру, пропорциональной отклонению от него, и силы сопротивления среды, пропорциональной скорости движения точки, описывается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + k^2x = 0,$$

что следует из второго закона Ньютона. С учетом возбуждающей силы $f(t)$ дифференциальное уравнение движения материальной точки принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + k^2x = f(t).$$

При отсутствии сопротивления среды $(a = 0)$ и наличии периодической возбуждающей силы $f(t) = H\sin(\omega t + \gamma)$ дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = H\sin(\omega t + \gamma).$$

Общее решение однородного уравнения $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ характеризует собственные колебания. Частное решение неоднородного уравнения $x_{\text{ч.н.}}(t) = \dfrac{H}{k^2-\omega^2}\sin(\omega t + \gamma)$ при $k \neq \omega$ характеризует вынужденные колебания материальной точки.

Общее решение неоднородного уравнения представляет собой наложение свободных и вынужденных колебаний (принцип суперпозиции сил), т. е.

$$x(t) = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cdot \sin kt + \frac{H}{k^2-\omega^2}\sin(\omega t + \gamma).$$

Если частота ω внешней силы близка к частоте k собственных колебаний, то амплитуда $\dfrac{H}{k^2-\omega^2}$ очень велика, вследствие чего может произойти разрушение всей колебательной системы. Это явление носит название **резонанса**.

В чисто резонансном случае при $\omega = k$ общее решение имеет вид

$$x(t) = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cdot \sin kt - \frac{Ht}{2k} \cos(kt + \gamma).$$

При $t \to +\infty$ амплитуда вынужденных колебаний $\dfrac{Ht}{2k}$ неограниченно возрастает. С учетом сопротивления среды при синусоидальной вынужденной силе дифференциальное уравнение движения принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + k^2x = H \sin(\omega t + \gamma).$$

Общее решение однородного уравнения $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2a\dfrac{dx}{dt} + k^2x = 0$ при $a > 0$ и $k^2 - a^2 > 0$ описывает собственные колебания и при $t \to +\infty$ стремится к 0.

Частное решение неоднородного уравнения при больших t описывает установившийся режим и соответствует вынужденным колебаниям.

Пример. Эффективность рекламы.

Предположим, что торговыми учреждениями реализуется продукция B, о которой в момент времени t из числа потенциальных покупателей N знают лишь x покупателей.

Предположим, что для ускорения сбыта продукции B были даны рекламные объявления по радио и телевидению. Последующая информация о продукции распространяется среди покупателей посредством общения друг с другом. С большой степенью достоверности можно считать, что после рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции B пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей, о нем еще не знающих.

Если условиться, что время отсчитывается после рекламных объявлений, когда о товаре узнало $\dfrac{N}{\gamma}$ человек, то приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$$

с начальными условиями $x = \dfrac{N}{\gamma}$ при $t = 0$. В полученном уравнении коэффициент k — это положительный коэффициент пропорциональности.

Интегрируя уравнение, находим, что

$$\frac{1}{N} \cdot \ln \frac{x}{N - x} = kt + C.$$

Полагая $NC = C_1$, приходим к равенству

$$\frac{x}{N-x} = Ae^{Nkt}, \quad \text{где} \quad A = e^{C_1}.$$

При разрешении последнего уравнения относительно x получим соотношение

$$x = N \cdot \frac{Ae^{Nkt}}{Ae^{Nkt}+1} = \frac{N}{1+Pe^{-Nkt}}, \quad \text{где} \quad P = \frac{1}{A}.$$

В литературе последнее уравнение обычно называют уравнением логистической кривой.

Если учесть теперь начальные условия, то последнее равенство примет вид $x = \dfrac{N}{1+(\gamma-1)e^{-Nkt}}$.

Отметим, что к рассмотренному уравнению сводится, в частности, задача о распространении технологических новшеств.

5.2 Движение частицы по прямой

Если F — равнодействующая всех сил, действующих на частицу массы m, то ее ускорение определяется уравнение $F = ma$.

Если частица движется по прямой и S — пройденное ею расстояние от фиксированной точки на прямой, то ее скорость $v = \dfrac{dS}{dt}$, а ускорение $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2S}{dt^2}$. Используя эти формулы можем найти S в любом направлении на прямой и учитывать, что направление положительно, если S увеличивается.

Пример. Если тело медленно погружается в жидкость, сопротивление приблизительно пропорционально скорости. Если частица выходит из состояния покоя, найдем ее движение.

Пусть S — расстояние, на которое тело спускается за t секунд. Если m — масса, g — ускорение силы тяжести, то сила тяжести mg, положительна.

Равнодействующая всех сила $F = mg - kv$.

Следовательно, $mg - kv = ma = m \cdot \dfrac{dv}{dt}$.

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\ln(mg - kv) = -\frac{k}{m}\,t + C.$$

Поскольку $v = 0$, когда $t = 0$ получаем $\ln(mg) = C$.

Вычитая из предыдущего уравнения и решая для $mg - kv$,

$$mg - kv = mg \cdot e^{-kt/m}.$$

Поскольку $v = \dfrac{dS}{dt}$, интегрирование дает

$$mgt - kS = -\frac{m^2 g}{k} \cdot e^{-^{-kt}/m} + C.$$

Поскольку $S = 0$, то при $t = 0$ вычисляем $C = \dfrac{m^2 g}{k}$.

Подставляем это значение и решаем для S

$$S = \frac{m^2 g}{k^2} \cdot \left(e^{-kt/m} - 1\right) + \frac{mg}{k} \cdot t.$$

5.3 A motion of Particle in Straight Line

If F is the resultant of all forces acting on a particle of mass m, its acceleration a is given b the equation $F = ma$.

If the paricle moves along a straight line ans S is its distance from a fixed point of the line, its velocity is $v = \dfrac{dS}{dt}$ and its acceleration is $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 S}{dt^2}$.

In using these formulas we can measure S in either direction along the line but must then consider as positive the direction in which S increases. The quantities F, v and a are positive or negative according as they point in the positive or negative direction thus defined.

Example. When a body sinks slowly is a liquid the resistance is approximately proportional to the velocity. If the particle starts from rest, find its motion.

Let S considered positive downward, be the distance the body sinks in t seconds. If m is its mass and g the acceleration of gravity, the force of gravity is mg, which is positive since the force is downward. The resistance acting upward and being proportional to the velocity $S - kv$.

The total force acting on the body is then $F = mg - kv$.

Hence $mg - kv = ma = m \cdot \dfrac{dv}{dt}$.

Separating the variables and integrating, we get

$$\ln(mg - kv) = -\frac{k}{m} t + C.$$

Since $v = 0$, when $t = 0 \Rightarrow \ln(mg) = C$.

Subtracting from the preceding equation and solving for $mg-kv$,

$$mg-kv=mg\cdot e^{-kt/m}.$$

Since $v=\dfrac{dS}{dt}$, integration gives

$$mgt-kS=-\frac{m^2g}{k}\cdot e^{-kt/m}+C.$$

Since $S=0$ when $t=0 \;\Rightarrow\; C=\dfrac{m^2g}{k}$.

Substituting this value and solving for S

$$S=\frac{m^2g}{k^2}\cdot\left(e^{-kt/m}-1\right)+\frac{mg}{k}\cdot t.$$

5.4 Упражнения

1. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2a\frac{dx}{dt}+k^2x=f(t),$$

1.1. в случае свободных колебаний в среде без сопротивления, найти период и частоту колебаний;

1.2. в случае вынужденных колебаний в среде без сопротивления при наличии синусоидальной вынуждающей силы с нулевой начальной фазой;

1.3. в случае вынужденных колебаний в среде с сопротивлением при наличии синусоидальной вынуждающей силы с нулевой фазой;

1.4. в случае отсутствия внешней силы; выделить случай затухающих гармонических колебаний.

2. При каком условии относительно ω общее решение уравнения $D^2x+x=\sin(\omega\, t)$ не будет иметь векового члена?

Указание. В небесной механике вековым членом называется выражение, имеющее вид произведения периодической функции и степени независимой переменной.

Ответ: $|\omega|\neq 1$.

3. При каких значениях k общее решение уравнения $D^2x+k^2x=\sin 2t$ не имеет векового члена? (См. указание к задаче 2.)

Ответ: $|k|\neq 2$.

4. При каких значениях k и ω имеет вековой член общее решение уравнения $D^2x + kx = \cos(\omega\, t)$? (См. указание к задаче 2.)

Ответ: $\omega^2 = k$.

5. При каких значениях k и ω уравнение $D^2x + k^2x = \sin(\omega\, t)$ имеет хотя бы одно периодическое решение?

Ответ: $\omega \neq k$.

6. Показать, что частное решение уравнения $D^2x + p^2x = k\cos(p\, t)$ представляет колебания с неограниченно возрастающей амплитудой.

7. Найти периодические решения уравнения $D^2x + aDx + bx = \sin(\omega\, t)$.

Ответ: При $a \neq 0$ $\quad \dfrac{a\omega\cos(\omega\, t) + (\omega^2 - b)\sin(\omega\, t)}{a^2\omega^2 + (\omega^2 - b)^2}$;

при $a = 0$, $b < 0$ и при $a = 0$, $b > 0$, $b \neq \omega^2$, $\sqrt{b}/\omega \notin Q \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{b - \omega^2}\sin(\omega\, t)$;

при $a = 0$, $b > 0$, $b \neq \omega^2$, $\sqrt{b}/\omega \in Q \;\Rightarrow\; C_1\cos(\sqrt{b}\, t) + C_2\sin(\sqrt{b}\, t) + \dfrac{1}{b - \omega^2}\sin(\omega\, t)$ при C_1, $C_2 \in R$;

при $a = 0$, $b > 0$, $b = \omega^2$ периодических решений нет;

при $a = 0$, $b = 0 \;\Rightarrow\; -\dfrac{\sin(\omega\, t)}{\omega^2}$.

8. Качка корабля описывается дифференциальным уравнением $\dfrac{d^2u}{dt^2} + 2h\dfrac{du}{dt} + k^2u = a\sin(\omega\, t) + b\cos(\omega\, t)$, где a, b, h, k, ω — постоянные, $h < k$, $u = u(t)$ — наклон корабля в момент времени t. Проинтегрировать уравнение. Исследовать наличие установившегося режима и найти в этом режиме наибольшее отклонение корабля от положения равновесия.

Ответ:
$u = e^{-h\,t}\left(C_1\sin\sqrt{k^2 - h^2}\, t + C_2\cos\sqrt{k^2 - h^2}\, t\right) + p\sin(\omega\, t) + q\cos(\omega\, t)$,
где $p = \dfrac{a(k^2 - \omega^2) + 2bh\omega}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}$, $\; q = \dfrac{b(k^2 - \omega^2) - 2ah\omega}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}$, $\; h > 0$; $\quad u = \sqrt{p^2 + q^2}$.

9. Равновесный размер популяции некоторого вида в заданной среде оценивается в 1000 особей. Численность популяции испытывает флуктуации около этого среднего значения и описывается уравнением $D^2x = 4\pi^2(1000 - x)$, где $x = x(t)$ — численность популяции спустя 6, 12 и 18 месяцев, если в начальный момент времени популяция состояла из 1500 особей. Начальная скорость изменения численности равна нулю.

Ответ: $x = 500\cos 2\pi t + 1000$; 500; 1500; 500.

10. В эксперименте с голоданием масса испытуемого за 30 дней уменьшилась с 56 до 44 кг. Ежедневная потеря массы, согласно наблюдениям, пропорциональна массе испытуемого. Найти закон изменения массы как функции времени. Определить массу испытуемого после 15 дней голодания.

Ответ: $x = 56\left(\dfrac{11}{14}\right)^{t/30}$, ≈ 49 кг.

11. При большой скорости вращения тонкого длинного вала длиной l с закрепленными концами под действием центробежной силы происходит искривление его формы. Прогиб вала y в зависимости от абсциссы x удовлетворяет уравнению $\dfrac{d^4y}{dx^4} = a^4 y$, где $a^4 = \dfrac{m\omega^2}{EI}$; m — масса единицы длины вала; ω — угловая скорость вала; E — модуль Юнга; I — момент инерции поперечного сечения вала относительно оси. Определить критическую угловую скорость вала, т.е. скорость, при которой изменяется форма вала, если на закрепленных его концах изгибающие моменты $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ и прогибы равны нулю.

Ответ: $\omega = \dfrac{k^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\dfrac{EI}{m}}$, $k \in Z$.

12. Составить уравнение движения и найти период свободных колебаний груза массой m, подвешенного к пружине, если движение происходит без сопротивления.

Ответ: $mD^2x + kx = 0$, $k > 0$, $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

13. Один конец пружины закреплен неподвижно, а к другому прикреплен груз массой m. При движении груза со скоростью v сила сопротивления среды равна hv, а сила упругости пружины пропорциональна отклонению от положения равновесия и равна kx. При $t = 0$ грузу, находившемуся в положении равновесия, сообщена скорость v_0. Составить математическую модель движения и исследовать закон движения.

Ответ: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + h\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$, $x\Big|_{t=0} = 0$, $\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = v_0$.

14. Материальная точка массой 1 г отталкивается вдоль прямой от некоторого центра с силой, пропорциональной расстоянию от нее до этого центра, коэффициент пропорциональности равен четырем. Сопротивление среды пропорционально скорости движения, коэффициент пропорциональности равен трем. В начале движения расстояние от центра до точки равно 1 см, а скорость — нулю. Найти закон движения точки.

Ответ: $x = (4e^t + e^{-4t})/5$.

15. Материальная точка массой m движется по прямой под действием силы $\vec{f}_1$, модуль которой пропорционален отклонению материальной точки от положения равновесия, и силы сопротивления среды $\vec{f}_2$, модуль которой пропорционален скорости движения материальной точки. Начальное отклонение материальной точки равно s_0, начальная скорость v_0. Составить математическую модель закона движения. Выделить случаи: движения без колебания; гармонических колебаний; затухающих гармонических колебаний.

Ответ: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + h\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$, $x\Big|_{t=0} = s_0$, $\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = v_0$.

16. Тело массой 1 кг подвергаются действию силы упругости, стремящейся вернуть его в положение устойчивого равновесия. Сила пропорциональна смещению и равна 2 Н при смещении в 1 м. Сопротивление среды пропорционально скорости. Амплитуда после трех колебаний уменьшается в 10 раз. Составить уравнение движения и найти период колебаний.

Ответ: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{2\sqrt{2}\ln 10}{\sqrt{36\pi^2 + \ln^2 10}} \cdot \dfrac{dx}{dt} + 2x = 0$, $T = \dfrac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{36\pi^2 + \ln^2 10}$.

17. Материальная точка массой m притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию. Коэффициент пропорциональности равен k. Расстояние между центрами $2b$. В начальный момент точка находится на линии соединения центров на расстоянии a от ее середины. Начальная скорость равна нулю. Найти закон движения точки.

Ответ: $x = a\cos\sqrt{2k/m}\,t$.

18. К пружине подвешен груз. Статистическое удлинение пружины равно l. Построить математическую модель и найти закон колебаний груза, если в начальный момент пружина была растянута из ненапряженного состояния до длины $3l$, а груз был отпущен без начальной скорости. Определить частоту собственных незатухающих колебаний и их период.

Ответ: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{g}{l}x = 0$, $x\Big|_{t=0} = 2l$, $\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0$; $x = 2l\cos\sqrt{g/l}\,t$; $\omega = \sqrt{g/l}$, $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

19. Сила, натягивающая пружину, пропорциональна увеличению ее длины и равна 10 Н, когда длина увеличивается на 1 см. К пружине подвешен груз массой 2 кг. Составить дифференциальное уравнение движения и найти период колебательного движения груза при условии, что он был слегка оттянут вниз и затем отпущен.

Ответ: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 500x = 0$, $T = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{25}$ с.

20. Статические удлинения пружины под действием двух грузов равны соответственно l_1 и l_2. Определить частоту свободных незатухающих колебаний и их период, если к концу пружины подвесить оба груза. Составить предварительно дифференциальное уравнение движения и найти закон движения.

Ответ: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{g}{l_1 + l_2}x = 0$, $x = C_1\cos\sqrt{\dfrac{g}{l_1+l_2}}\,t + C_2\sin\sqrt{\dfrac{g}{l_1+l_2}}\,t$, $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l_1+l_2}}$, $T = 2\pi\sqrt{(l_1+l_2)}/g$.

21. Статическое удлинение пружины под действием данного груза равно 20 см. В‘момент $t_0 = 0$ груз, находясь в положении равновесия, получил начальную скорость и стал совершать незатухающие колебания с амплитудой, равной 4 см. Определить закон движения груза и начальную скорость, принимая ускорение свободного падения g равным 1000 см/с^2.

Ответ: $x = 4\sin\sqrt{50}\,t$, $v_0 \approx 28$ см/с.

22. Груз массой 100 г подвесили к концу недеформированной пружины и отпустили без начальной скорости. Длина недеформированной пружины равна 65 см, а при равновесии груза на‘пружине ее длина равна 85 см. Составить математическую модель движения и определить закон движения груза, амплитуду и период колебаний, наибольшую силу упругости пружины, учитывая, что $g = 9,81$ м/с^2.

Ответ: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{g}{20}x = 0$, $x\Big|_{t=0} = -20$, $\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0$; $x = -20\cos 7t$, 20 см; $2\pi/7$ с, 1,96 Н.

23. На вертикально расположенной пружине подвешены два равных груза, в результате чего она удлинилась на l. После этого один из грузов оборвался. Составить математическую модель движения второго груза, найти закон его движения, пренебрегая массой пружины.

Ответ: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{2g}{l}x = 0$, $x\Big|_{t=0} = \dfrac{l}{2}$, $\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0$; $x = \dfrac{l}{2}\cos\sqrt{\dfrac{2g}{l}}\,t$.

24. Два одинаковых груза подвешены на пружине. Составить математическую модель и найти закон движения одного из этих грузов при условии, что второй груз оборвется. Удлинение пружины за счет одного груза равно a.

Ответ: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{g}{a}x = 0$, $x\Big|_{t=0} = a$, $\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0$; $x = a\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}\,t$.

25. Тело массой m подвешено на пружине с жесткостью c. При вертикальном движении тела на него действует сила сопротивления среды $\vec{R} = -2\sqrt{mc}\vec{v}$. Составить математическую модель и определить закон движения тела, если оно в начальный момент имело скорость $\vec{v}_0$, направленную вниз, удлинение пружины было равно a.

Ответ: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\sqrt{mc}\dfrac{dx}{dt} + cx = 0$, $x\Big|_{t=0} = a$, $\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = v_0$; $x = \Big(a + (v_0 + a\sqrt{c/m})\,t)\exp\Big(-\sqrt{c/m}\,t\Big)\Big)$.

26. Статистическое удлинение пружины под действием груза массой m равно l. На колеблющийся груз действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости ($\vec{R} = -b\vec{v}$). Определить наименьшее положительное b, при котором процесс движения будет апериодическим.

Ответ: $b_{\min} = 2m\sqrt{g/l}$.

27. Используя условие предыдущей задачи, определить уравнение движения груза, если в начальный момент он находился в положении равновесия и имел скорость $\vec{v}_0$, направленную вниз.

Ответ: $x = v_0\, t \exp\left(-\sqrt{g/l}\, t\right)$.

28. Материальная точка массой m совершает затухающие колебания под действием силы упругости пружины, коэффициент жесткости которой c, и силы сопротивления среды $\vec{R} = -\gamma\, \vec{v}$, где $\gamma > 0$. Путем демпфирования (изменения силы сопротивления среды) значение коэффициента γ изменено до такого значения γ_1, что частота колебаний точки уменьшилась вдвое. Найти γ_1.

Ответ: $\gamma_1 = \sqrt{3mc + \gamma^2/4}$.

29. Используя условие предыдущей задачи, найти значение γ_1, при котором частота колебаний точки увеличится вдвое, и установить условие, при котором это возможно.

Ответ: $\gamma_1 = \sqrt{4\gamma^2 - 12mc}$, $\sqrt{3mc} < \gamma < 2\sqrt{mc}$.

30. Груз массой m повешен на пружине с жесткостью c. На него действуют возмущающая сила $\vec{Q}$, направленная вдоль вертикали x, и сила сопротивления среды $\vec{R} = -b\vec{v}$. Составить дифференциальное уравнение движения груза. Определить амплитуду A вынужденных колебаний груза, если $Q_x = H \sin\sqrt{c/mt}$.

Ответ: $m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\,\dfrac{dx}{dt} + cx = H \sin\sqrt{\dfrac{c}{m}}\,t, \quad A = \dfrac{H}{b}\sqrt{\dfrac{m}{c}}$.

31. Пружина скреплена со штоком поршня, который находится в камере. В эту камеру попеременно сверху и снизу поступает свежий воздух, вследствие чего сила, действующая на поршень, изменяется по закону $F = 2,3 \sin 8\pi\, t$ (t — время, с; F — сила, Н). Составить дифференциальное уравнение и определить вынужденные колебания поршня, если его масса $m = 0,5$ кг, а жесткость пружины $c = 200$ Н/м.

Ответ: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 400x = 4,6 \sin 8\pi\, t, \quad x = -1,98 \sin 8\pi\, t$ см.

5.5 Примеры решения начальных задач для обыкновенного дифференциального уравнения

Пример 1. Найти частное решение уравнения $x'' + \omega_0^2\, x = f\,(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $x\,(t_0) = x'\,(t_0) = 0$.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $x'' + \omega_0^2\, x = 0$.

Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm\, i\, \omega_0$ и общее решение однородного уравнения $x(t) = C_1 \cos\omega_0\, t + C_2 \sin\omega_0\, t$.

Решение неоднородного уравнения находим, используя метод вариации произвольной постоянной. Решение ищем в том же виде, что и решение однородного уравнения, но C_i считаем функциями от t:

$$x(t) = C_1(t) \cdot \cos\omega_0 t + C_2(t) \cdot \sin\omega_0 t.$$

$C_1'(t)$, $C_2'(t)$ определим из системы

$$\begin{cases} C_1'(t) \cdot \cos\omega_0 t + C_2'(t) \cdot \sin\omega_0 t = 0, \\ -\omega_0 \cdot C_1'(t) \cdot \sin\omega_0 t + \omega_0 \cdot C_2'(t) \cdot \cos\omega_0 t = f(t). \end{cases}$$

Находим

$$C_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin\omega_0 t \\ f(t) & \omega_0 \cdot \cos\omega_0 t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\omega_0 t & \sin\omega_0 t \\ -\omega_0 \cdot \sin\omega_0 t & \omega_0 \cdot \cos\omega_0 t \end{vmatrix}} = \frac{-f(t) \cdot \sin\omega_0 t}{\omega_0},$$

$$C_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos\omega_0 t & 0 \\ -\omega_0 \cdot \sin\omega_0 t & f(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\omega_0 t & \sin\omega_0 t \\ -\omega_0 \cdot \sin\omega_0 t & \omega_0 \cdot \cos\omega_0 t \end{vmatrix}} = \frac{f(t) \cdot \cos\omega_0 t}{\omega_0}.$$

Тогда

$$C_1(t) = -\frac{1}{\omega_0} \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) \sin\omega_0 \tau \, d\tau + C_1$$

$$C_2(t) = \frac{1}{\omega_0} \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) \cos\omega_0 \tau \, d\tau + C_2$$

и общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$x(t) = C_1 \cdot \cos\omega_0 t + C_2 \cdot \sin\omega_0 t -$$

$$-\frac{\cos\omega_0 t}{\omega_0} \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) \sin\omega_0 \tau \, d\tau + \frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) \cos\omega_0 \tau \, d\tau =$$

$$= C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) \sin\omega_0 (t - \tau) \, d\tau.$$

Используем начальные условия для определения C_1, C_2. Найдем $x'(t)$

(воспользуемся правилом дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, в случае, когда и пределы интегрирования зависят от параметра).

$$x'(t) = -\omega_0 C_1 \cdot \sin\omega_0 t + \omega_0 C_2 \cdot \cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0}\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\cos\omega_0 (t-\tau)\cdot \omega_0\, d\tau +$$
$$+\underbrace{\frac{1}{\omega_0}\cdot 1\cdot f(t)\sin\omega_0 (t-t)}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{\omega_0}\cdot 0\cdot f(t_0)\sin\omega_0 (t-t_0)}_{=0}.$$

Используя начальные условия $x'(t_0) = x(t_0) = 0$, для определения $C_1,\ C_2$ получаем систему

$$\begin{cases} C_1\cdot(-\omega_0\sin\omega_0 t_0) + C_2\cdot\omega_0\cos\omega_0 t_0 = 0, \\ C_1\cdot\cos\omega_0 t_0 + C_2\cdot\sin\omega_0 t_0 = 0. \end{cases}$$

Система, очевидно, имеет только тривиальное решение, т. е. $C_1 = C_2 = 0$.

Окончательное решение поставленной задачи Коши таково

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0}\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\sin\omega_0 (t-\tau)\ d\tau.$$

Пример 2. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} x'' + 2hx' + \omega_0^2 x = f(t), \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0, \quad \left(h^2 - \omega_0^2 < 0\right). \end{cases}$$

Будем искать решение неоднородного линейного уравнения с использованием метода вариации произвольной постоянной.

Составим характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения $x'' + 2hx' + \omega_0^2 x = 0$. Оно таково: $\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0$.

Корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -h \pm i\sqrt{\omega_0^2 - h^2}$. Обозначим $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$. Тогда общее решение однородного уравнения

$$x(t) = C_1\cdot e^{-ht}\cdot\cos\omega t + C_2\cdot e^{-ht}\cdot\sin\omega t.$$

Решение неоднородного уравнения, согласно методу вариации произвольной постоянной, ищем в виде

$$x(t) = C_1(t) \cdot e^{-ht} \cdot \cos\omega\, t + C_2(t) \cdot e^{-ht} \cdot \sin\omega \cdot t,$$

где функции $C_1(t),\;\; C_2(t)$ определяется из системы

$$\begin{cases} C_1'(t) \cdot e^{-ht} \cdot \cos\omega\, t + C_2'(t) \cdot e^{-ht} \cdot \sin\omega\, t = 0, \\ C_1'(t) \cdot \left(-he^{-ht} \cdot \cos\omega\, t - \omega e^{-ht} \cdot \sin\omega\, t\right) + \\ \qquad\qquad + C_2'(t) \cdot \left(-he^{-ht} \cdot \sin\omega\, t + \omega e^{-ht} \cdot \cos\omega\, t\right) = f(t)\,. \end{cases}$$

Решая ее, находим

$$C_1'(t) = -\frac{f(t) \cdot e^{ht} \cdot \sin\omega\, t}{\omega},$$
$$C_2'(t) = \frac{f(t) \cdot e^{ht} \cdot \cos\omega\, t}{\omega},$$

или

$$C_1(t) = -\frac{1}{\omega}\int\limits_0^t f(\tau) \cdot e^{h\tau} \cdot \sin\omega\, \tau\, d\tau + C_1,$$
$$C_2(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t f(\tau) \cdot e^{h\tau} \cdot \cos\omega\, \tau\, d\tau + C_2.$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$x(t) = C_1 \cdot e^{-ht} \cdot \cos\omega\, t + C_2 \cdot e^{-ht} \cdot \sin\omega\, t + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t f(\tau) \cdot e^{-h(t-\tau)} \cdot \sin\omega\,(t-\tau)\; d\tau.$$

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.$$

$$x'(t) = C_1\left(-he^{-ht} \cdot \cos\omega\, t - \omega e^{-ht} \cdot \sin\omega\, t\right) + \\ + C_2\left(-he^{-ht} \cdot \sin\omega t + \omega e^{-ht} \cdot \cos\omega t\right) + \\ + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t f(\tau)\left(-he^{-h(t-\tau)} \cdot \sin(t-\tau) + \omega e^{-h(t-\tau)} \cdot \cos(t-\tau)\right) d\tau + \\ + \frac{1}{\omega}\underbrace{f(t) \cdot e^{-h(t-\tau)} \cdot \sin(t-t)}_{=0}.$$

$x'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$ и решение данной задачи Коши

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^t f(\tau) \cdot e^{-h(t-\tau)} \cdot \sin \omega (t - \tau)\ d\tau.$$

Пример 3. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x'' + 4x = \sin 2t; \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся полученной в предыдущем примере итоговой формулой

$$x(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t \sin 2\tau \cdot \sin 2(t - \tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^t \left[\frac{1}{2} \Big(\cos(2\tau - 2t + 2\tau) - \cos(2\tau + 2t - 2\tau) \Big) \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_0^t (\cos(4\tau - 2t) - \cos 2t)\, d\tau = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \sin(4\tau - 2t) \Big|_0^t - \cos 2t \cdot \tau \Big|_0^t \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{4} \sin 2t - \cos 2t \cdot t \right) = \frac{1}{8} \sin 2t - \frac{1}{4} \cos 2t \cdot t =$$

$$= \frac{1}{8} \sin 2t - \frac{1}{4} t \cdot \cos 2t.$$

Ответ: $x(t) = \dfrac{1}{8} \sin 2t - \dfrac{1}{4} t \cdot \cos 2t.$

6 Тестовые задания

1. Порядком дифференциального уравнения называется...

   a) наивысшая степень переменной x, входящей в состав дифференциального уравнения;

   b) порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение;

   c) наивысшая степень переменной y, входящей в состав дифференциального уравнения;

   d) количество производных, которое содержит дифференциальное уравнение.

2. Интегрированием дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$ называется нахождение...

   a) решения дифференциального уравнения;

   b) интеграла от правой части дифференциального уравнения;

   c) интеграла от искомой функции $y(x)$;

   d) интеграла от $y'(x)$.

3. Уравнение вида $f_1(x) \cdot g_1(y)\,dx + f_2(x) \cdot g_2(y)\,dy = 0$ называется...

   a) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными;

   b) однородным дифференциальным уравнением;

   c) линейным дифференциальным уравнением;

   d) уравнением Бернулли.

4. Определите, какое из указанных дифференциальных уравнений является уравнением второго порядка:

   a) $(y')^2 - 2xy' = 0$;

   b) $2y'' + 3y''' = x$;

   c) $xy'' - y' = 0$;

   d) $y^2 = y' + x^2 - 1$.

5. Определите, какая из указанных функций является решением дифференциального уравнения $y' + 2y = 4x$:

   a) $y = 4x + 1$;

   b) $y = 2x + 1$;

c) $y = 2x - 1$;

d) $y = 4x - 1$.

6. Определить тип дифференциального уравнения $(x^4 + 5)y' + xy^3 = 0$:

   a) с разделяющимися переменными;

   b) однородное;

   c) линейное первого порядка;

   d) линейное второго порядка.

7. Определить тип дифференциального уравнения $y' = \dfrac{x^2 - xy}{x^2 + 5xy}$:

   a) с разделяющимися переменными;

   b) однородное;

   c) линейное первого порядка;

   d) линейное второго порядка.

8. Нахождение частных решений дифференциальных уравнений называется решением задачи

   a) Бернулли;

   b) Коши;

   c) Лагранжа;

   d) Эйлера.

9. Решение уравнения $y' = xy$ равно:

   a) $y = \ln(Cx)$;

   b) $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$;

   c) $y = Cx$;

   d) $y = Ce^x$;

   e) $y = C + \ln(x)$.

10. Общий интеграл дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{y^2} = x\,dx$ имеет вид

   a) $-\dfrac{1}{y} = \dfrac{x^2}{2} + C$;

   b) $y = \dfrac{x^2}{2} + C$;

c) $\dfrac{1}{y} = \dfrac{x^2}{2} + C$;

d) $-\dfrac{1}{y} = x^2 + C$.

11. Общее решение дифференциального уравнения $(x^2 + 16) \cdot y' = 1$ имеет вид

a) $y = \dfrac{1}{4} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{4} + C$;

b) $y = \operatorname{arctg} 2x + C$;

c) $y = \ln|x| + C$;

d) $y = \ln(x^2 + 16) + C$.

12. Частное решение дифференциального уравнения $y' \operatorname{tg} x = y$ при начальных условиях $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ имеет вид

a) $\sin x + 1$;

b) $\sin x$;

c) $-\sin x$;

d) $\cos x$.

13. Решение задачи Коши $y' = \dfrac{x-y}{x+y}, \quad y(0) = 1$

a) $y^2 + xy - x^2 = 1$;

b) $y^2 + 2xy - x^2 = 1$;

c) $y^2 - xy - x^2 = 1$;

d) $y^2 - 2xy - x^2 = 1$.

14. Решение задачи Коши $y'' = xe^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

a) $y = (x + 2) \cdot e^x - 3x - 1$;

b) $y = (x + 1) \cdot e^x - 2x$;

c) $y = (x - 1) \cdot e^x + 2$;

d) $y = (x - 2) \cdot e^x + x + 3$.

15. Однородному линейному уравнению $y'' + 5y' + 6y = 0$ соответствует характеристическое уравнение

a) $1 + 5k + 6k^2 = 0$;

b) $k^2 - 5k + 6 = 0$;

c) $k^2 - 5k - 6 = 0$;

d) $k^2 + 5k + 6 = 0$.

16. Для дифференциального уравнения $y^{IV} - y''' + y'' = 0$ характеристическое уравнение имеет вид

a) $k^4 - k^3 + k^2 = 0$;

b) $k^4 - k^3 + k^2 + k = 0$;

c) $k^3 - k^2 + k + 1 = 0$;

d) $k^4 + k^3 + k^2 = 0$;

e) $k^3 + k^2 + k = 0$.

17. Для дифференциального уравнения $y^{IV} - y'' + y' + y = 0$ характеристическое уравнение имеет вид

a) $k^4 - k^2 + k + 1 = 0$;

b) $k^4 - k^3 + k^2 + k = 0$;

c) $k^3 - k^2 + k + 1 = 0$;

d) $k^4 + k^3 + k^2 = 0$;

e) $k^3 + k^2 + k = 0$.

18. Общее решение уравнения $y'' + 2y' - 8y = 0$ равно:

a) $y = C_1 \cdot e^{-4x} + C_2 \cdot e^{2x}$;

b) $y = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot e^{-2x}$;

c) $y = C_1 \cdot e^{-4x} + C_2 \cdot e^{-2x}$;

d) $y = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot e^{2x}$.

19. Каково общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 8y = 0$

a) $y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x}$;

b) $y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-2x}$;

c) $y = e^{-2x} \cdot (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$;

d) $y = e^{2x} \cdot (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

20. Решение задачи Коши $y'' + 3y' - 4y = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y(0) = 5$ имеет вид

a) $y = 4e^{-x} + e^{4x}$;

b) $y = 4e^{x} + e^{-4x}$;

c) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}$;

d) $y = e^{x} + 4e^{-4x}$.

21. Частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 35y = xe^{7x}$ следует искать в виде

    a) $y = e^{7x} \cdot Ax$;

    b) $y = e^{-7x} \cdot Ax$;

    c) $y = e^{7x} \cdot (Ax + B)x$;

    d) $y = e^{7x} \cdot (Ax + B)$.

22. Частное решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}$ следует искать в виде

    a) $y = e^{3x} \cdot Ax$;

    b) $y = e^{3x} \cdot Ax^2$;

    c) $y = e^{3x} \cdot (Ax + B)x^2$;

    d) $y = e^{3x} \cdot (Ax + B)$;

    e) $y = e^{3x} \cdot (Ax + B)x$.

23. Скорость движущегося тела возрастает пропорционально пройденному пути и в начальный момент движения тело находится в 8 м от начала отсчета пути и имело скорость 24 м/с. Тогда закон движения тела

    a) $s = 8e^{3t}$;

    b) $s = 3e^{8t}$;

    c) $s = 8e^{24t}$;

    d) $s = 24e^{8t}$.

24. Проверить является ли функция $y = \dfrac{1}{x}$ решением ДУ $x^3y'' + x^2y' = 1$.

25. Найти общее решение ДУ $\sqrt{y^2 + 1}\,dx = xy\,dy$.

26. Найти частное решение ДУ $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y(1) = 0$.

27. Найти частное решение ДУ $y' - y = e^x, \quad y(0) = 1$.

28. Найти решение задачи Коши $y''' = e^{\frac{x}{2}} + 1,\ y(0) = 8,\ y'(0) = 5,\ y''(0) = 2$.

29. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 5y' = 0$.

30. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 10y' + 25y = 0$.

31. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0$.

7 Индивидуальные задания

Вариант 1

1. $4x\,dx - 3y\,dy = 3x^2y\,dy - 2xy^2\,dx.$

2. $(y^2 - 3x^2)\,dy + 2xy\,dx = 0.$

3. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0.$

4. $y^2\,dx + (x + e^{2/y})\,dy = 0.$

5. $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 1.$

6. $3x^2e^y\,dx + (x^3e^y - 1)\,dy = 0.$

7. $y'''x\ln x = y.$

8. $4y^3y'' = y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

9. $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0.$

10. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2.$

11. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

12. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$

Вариант 2

1. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$

2. $xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$

3. $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

4. $y' + 2y = y^2\operatorname{tg} x.$

5. $xy' + y = 2y^2\ln x, \quad y(1) = \dfrac{1}{2}.$

6. $\left(3x^2 + \dfrac{2}{y}\cos\dfrac{2x}{y}\right)dx - \dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{2x}{y}\,dy = 0.$

7. $xy''' + y'' = 1.$

8. $y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8.$

9. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$

10. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x.$

11. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$

12. $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}, \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = 3(1 - \ln 2).$

Вариант 3

1. $\sqrt{4+y^2}\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy$

2. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}.$

3. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0.$

4. $y^2\,dx + (xy-1)\,dy = 0.$

5. $2(xy'+y) = xy^2, \quad y(1) = 2.$

6. $\left(3x^2+4y^2\right)\,dx + (8xy + e^y)\,dy = 0.$

7. $2xy''' = y''.$

8. $y''y^3 = -64, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2.$

9. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 4,$

10. $y''' - y' = x^2 + x.$

11. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$

12. $y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x, \quad \left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 5, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4.$

Вариант 4

1. $y' + y = -y^2.$

2. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y.$

3. $y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{2}.$

4. $2(4y^2 + 4y - x)y' = 1.$

5. $y' + 4x^3 y = 4(x^3+1)\cdot e^{-4x}y^2, \quad y(0) = 1.$

6. $\left(2x - 1 - \dfrac{y}{x^2}\right)\,dx - \left(2y - \dfrac{1}{x}\right)\,dy = 0.$

7. $xy''' + y'' = x + 1.$

8. $y'' + 2\sin y\cdot\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

9. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2.$

10. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x.$

11. $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

12. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1+e^{3x}}, \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, \quad y'(0) = 6\ln 2.$

Вариант 5

1. $6x\,dx - 6y\,dy = 2x^2y\,dy + 3y^2x\,dx.$

2. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3.$

3. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \dfrac{3}{2}.$

4. $(\cos 2y \cos^2 y - x) \cdot y' = \sin y \cdot \cos y.$

5. $xy' - y = -y^2 \cdot (\ln x + 2) \cdot \ln x, \quad y(1) = 1.$

6. $(y^2 + y \sec^2 x)\,dx + (2xy + \operatorname{tg} x)\,dy = 0.$

7. $x^2y'' + xy' = 1.$

8. $y'' = 32 \sin^3 y \cdot \cos y, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 4.$

9. $y'' + 6y = e^x \cdot (\cos 4x - 8 \sin 4x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5.$

10. $y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2.$

11. $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

12. $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

Вариант 6

1. $y' = 2xy + x.$

2. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

3. $y' - \dfrac{1}{x+1} \cdot y = e^x \cdot (x+1), \quad y(0) = 1.$

4. $(x \cos^2 y - y^2) \cdot y' = y \cos^2 y.$

5. $2(y' + xy) = (1+x) \cdot e^{-x}y^2, \quad y(0) = 2.$

6. $(3x^2y + 2y + 3)\,dx + (x^3 + 2x + 3y^2)\,dy = 0.$

7. $\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0.$

8. $y'' = 98y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 7.$

9. $y'' - 4y' + 20y = 16x \cdot e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

10. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1-x).$

11. $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = -3x + 4y. \end{cases}$

12. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}, \quad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{2}.$

Вариант 7

1. $\left(e^{2x}+5\right)\,dy + ye^{2x}\,dx = 0.$

2. $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}.$

3. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

4. $e^{y^2}\cdot(dx - 2xy\,dy) = y\,dy.$

5. $3\,(xy'+y) = y^2\ln x, \quad y(1) = 3.$

6. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0.$

7. $y'''\operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0.$

8. $y''y^3 + 49 = 0, \quad y(3) = -7, \quad y'(3) = -1.$

9. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 4.$

10. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x + 1.$

11. $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x. \end{cases}$

12. $y'' + \dfrac{1}{\pi^2}\cdot y = \dfrac{1}{\pi^2\cos\dfrac{x}{\pi}}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

Вариант 8

1. $y'y\cdot\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0.$

2. $xy' = 2\sqrt{x^2+y^2} + y.$

3. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\pi}.$

4. $(10y^2 - x)\cdot y' = 4y.$

5. $2y' + y\cdot\cos x = y^{-1}\cdot\cos x\cdot(1+\sin x), \quad y(0) = 1$

6. $(\sin 2x - 2\cos(x+y))\,dx - 2\cos(x+y)\,dy = 0.$

7. $x^3y''' + x^2y'' = 1.$

8. $4y^3y'' = 16y^4 - 1, \quad y(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

9. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x - 66, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$

10. $y^{V} - y^{IV} = 2x + 3.$

11. $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = y. \end{cases}$

12. $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}, \quad y(0) = 4\ln 4,\ y'(0) = 3(3\ln 4 - 1).$

Вариант 9

1. $6x\,dx - 6y\,dy = 3x^2y\,dy - 2xy^2\,dx.$

2. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 4.$

3. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$

4. $dx + (xy - y^3)\,dy = 0.$

5. $y' + 4x^3y = 4y^2 \cdot e^{4x} \cdot (1 - x^3), \quad y(0) = -1.$

6. $\left(xy^2 + \dfrac{x}{y^2}\right) dx + \left(x^2y - \dfrac{x^2}{y^3}\right) dy = 0.$

7. $\operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y''.$

8. $y'' + 8\sin y \cdot \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

9. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$

10. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2.$

11. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$

12. $y'' + y = 4\operatorname{ctg} x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4.$

Вариант 10

1. $x\sqrt{5 + y^2}\,dx + y\sqrt{4 + x^2}\,dy = 0.$

2. $xy' = \dfrac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$

3. $y' + \dfrac{2xy}{1 + x^2} = \dfrac{2x^2}{1 + x^2}, \quad y(0) = \dfrac{2}{3}.$

4. $(3y\cos 2y - 2y^2\sin 2y - 2x) \cdot y' = y.$

5. $3y' + 2xy = 2xy^{-2} \cdot e^{-2x^2}, \quad y(0) = -1.$

6. $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right) dx - \dfrac{2y}{x^3}\,dy = 0.$

7. $y''' \cdot \operatorname{ctg} 2x = 2y''.$

8. $y'' = 72y^3, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 6.$

9. $y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x} \cdot \sin 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6.$

10. $3y^{IV} + y''' = 6x - 1.$

11. $\begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$

12. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2x}}, \quad y(0) = 1 + 3\ln 3, \quad y'(0) = 10\ln 3.$

Вариант 11

1. $y(4+e^x)\,dy - e^x\,dx = 0.$

2. $y' = \dfrac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}.$

3. $y' - \dfrac{2x-5}{x^2}\cdot y = 5, \quad y(2) = 4,$

4. $8(4y^3+xy-y)\cdot y' = 1.$

5. $2xy' - 3y = -(5x^2+3)\cdot y^3, \quad y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

6. $\dfrac{y}{x^2}\cdot\cos\dfrac{y}{x}\,dx - \left(\dfrac{1}{x}\cdot\cos\dfrac{y}{x} + 2y\right)\,dy = 0.$

7. $x^4y'' + x^3y' = 1.$

8. $y''y^3 + 36 = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$

9. $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -2.$

10. $y''' + y'' = 5x^2 - 1.$

11. $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$

12. $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

Вариант 12

1. $\sqrt{4-x^2}\cdot y' + xy^2 + x = 0.$

2. $xy' = \sqrt{2x^2+y^2} + y.$

3. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}\cdot e^x, \quad y(1) = e.$

4. $(2\ln y - \ln^2 y)\,dy = y\,dx - x\,dy.$

5. $3xy' + 5y = (4x-5)\cdot y^4, \quad y(1) = 1.$

6. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)\,dx + \left(x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\,dy = 0.$

7. $xy''' + 2y'' = 0.$

8. $y'' = 18\sin^3 y\cdot\cos y, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 3.$

9. $y'' + 16y = 32e^{4x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

10. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2.$

11. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$

12. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{2}.$

Вариант 13

1. $2x\,dx - 2y\,dy = x^2y\,dy - 2xy^2\,dx.$

2. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6.$

3. $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

4. $2(x + y^4) \cdot y' = y.$

5. $2y' + 3y\cos x = e^{2x} \cdot (2x + 3\cos x) \cdot y^{-1}, \quad y(0) = 1.$

6. $\dfrac{1 + xy}{x^2y}\,dx - \dfrac{1 - xy}{y^2}\,dy = 0.$

7. $(1 + x^2) \cdot y'' + 2xy' = x^3.$

8. $4y^3y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

9. $y'' + 12y' = 6x^2 + 2x + 1, \quad y(0) = y'(0) = 2.$

10. $7y''' - y'' = 12x.$

11. $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$

12. $y'' + 9y = \dfrac{y}{\cos 3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Вариант 14

1. $x\sqrt{4 + y^2}\,dx + y\sqrt{1 + x^2}\,dy = 0.$

2. $xy' = \dfrac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$

3. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{8}{x^2}, \quad y(1) = 4.$

4. $y^3(y - 1)\,dx + 3xy^2(y - 1)\,dy = (y + 2)\,dy, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2.$

5. $3(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 3.$

6. $\dfrac{dx}{y} - \dfrac{x + y^2}{y^2}\,dy = 0.$

7. $xy''' - y'' + \dfrac{1}{x} = 0.$

8. $y'' = 50y^3, \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 5.$

9. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7.$

10. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x.$

11. $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x + 4y. \end{cases}$

12. $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}, \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = \ln 9 - 1.$

Вариант 15

1. $(e^x + 8)\,dy - y \cdot e^x\,dx = 0.$

2. $x\,dy + y \cdot \left(\ln \dfrac{y}{x} - 1\right)\,dx = 0.$

3. $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3, \quad y(1) = -\dfrac{5}{6}.$

4. $2y^2\,dx + \left(x - e^{\frac{1}{y}}\right)\,dy = 0.$

5. $y' - y = 2xy^2, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}.$

6. $\dfrac{y}{x^2}\,dx - \dfrac{xy+1}{x}\,dy = 0.$

7. $x^5y''' + x^4y'' = 1.$

8. $y''y^3 + 25 = 9, \quad y(2) = -5, \quad y'(2) = -1.$

9. $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

10. $y''' - y'' = 3x^2 - 2x + 1.$

11. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$

12. $y'' + 4y = 4ctg2x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2.$

Вариант 16

1. $\sqrt{5 + y^2} + yy' \cdot \sqrt{1 - x^2} = 0.$

2. $(y^2 - 2xy)\,dx - x^2\,dy = 0.$

3. $y' + \dfrac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$

4. $(xy + \sqrt{y})\,dx + y^2\,dy = 0.$

5. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12) \cdot y^3, \quad y(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

6. $\left(xe^x + \dfrac{y}{x^2}\right)\,dx - \dfrac{1}{x}\,dy = 0.$

7. $xy''' + y'' + x = 0.$

8. $y'' + 18\sin y \cdot \cos^3 x = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$

9. $y'' + 3y' = (40x + 58) \cdot e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

10. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2.$

11. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$

12. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 8\ln 2, \quad y'(0) = 14\,\ln 2.$

Вариант 17

1. $6x\,dx - y\,dy = yx^2\,dy - 3xy^2\,dx.$

2. $2x^3\,dy = y\cdot(2x^2 - y^2)\,dx.$

3. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3.$

4. $\sin 2y\,dx = (\sin^2 2y - 2\sin^2 y + 2x)\,dy.$

5. $y' + 2xy = 2x^3y^3, \quad y(0) = \sqrt{2}.$

6. $\left(10xy - \dfrac{1}{\sin y}\right)\,dx + (5x^2 + x\cos y)\,dy = 0.$

6. $\operatorname{th} x \cdot y^{IV} = y'''.$

7. $y'' = 8\sin^3 y\cdot\cos y, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 2.$

8. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x\cdot\cos 6x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$

19. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3.$

11. $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$

12. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

Вариант 18

1. $y\ln y + xy' = 0$ю

2. $x^2\,dy = y(x+y)\,dx.$

3. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}\cdot y = 1, \quad y(1) = 1.$

4. $(y^2 + 2y - x)\cdot y' = 1.$

5. $xy' + y = y^2\ln x, \quad y(1) = 1.$

6. $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2} + e^x\right)\,dx - \dfrac{x\,dy}{x^2+y^2} = 0.$

7. $xy''' + y'' = \sqrt{x}.$

8. $y'' = 32y^3, \quad y(4) = 1, \quad y'(4) = 1.$

9. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

10. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x.$

11. $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$

12. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 3, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\pi.$

Вариант 19

1. $(1+e^x)\cdot y' = y\cdot e^x.$

2. $y^2 + x^2y' = xyy'.$

3. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x}, \quad y(1) = 1.$

4. $2y\sqrt{y}\,dx - (6x\sqrt{y}+7)\,dy = 0.$

5. $2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)\cdot e^{2x}\cdot y^{-1}, \quad y(0) = 2.$

6. $e^y\,dx + (\cos y + xe^y)\,dy = 0.$

7. $\operatorname{tg} x\cdot y''' = y'' + 1.$

8. $y''y^3 + 16 = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 2.$

9. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)\cdot e^{4x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5.$

10. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2.$

11. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$

12. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$

Вариант 20

1. $\sqrt{1-x^2}\cdot y' + xy^2 + x = 0.$

2. $xy' = 3\sqrt{2x^2+y^2} + y.$

3. $y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}.$

4. $dx = (\sin y + 3\cos y + 3x)\,dy.$

5. $4y' + x^3y = (x^3 + 8)\cdot e^{-2x}\cdot y^2, \quad y(0) = 1.$

6. $(y^3 + \cos x)\,dx + (3xy^2 + e^y)\,dy = 0.$

7. $\operatorname{tg} 5x\cdot y''' = 5y''.$

8. $y'' + 32\sin y\cdot\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$

9. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

10. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2.$

11. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$

12. $y'' - 2y' = \dfrac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}}, \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = \ln 4 - 2.$

Вариант 21

1. $6x\,dx - 2y\,dy = 2yx^2\,dy - 3xy^2\,dx.$

2. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 12.$

3. $y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$

4. $2(\cos^2 y \cdot \cos 2y - x) \cdot y' = \sin 2y.$

5. $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3) \cdot y^3, \quad y(1) = \sqrt{2}.$

6. $x \cdot e^{y^2}\,dx + (x^2 y \cdot e^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y)\,dy = 0.$

7. $\operatorname{th} 7x \cdot y''' = 7y''.$

8. $y'' = 50 \sin^3 y \cdot \cos y, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 5.$

9. $y'' - 4y = 8e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -8.$

10. $y''' + y'' = 49 - 24x^2.$

11. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

12. $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4} \cdot \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2}, \quad y(\pi) = 2, \quad y'(\pi) = \dfrac{1}{2}.$

Вариант 22

1. $y \cdot (1 + \ln y) + xy' = 0.$

2. $xy' = \dfrac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}.$

3. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = e^x \cdot (x+1)^2, \quad y(0) = 1.$

4. $\operatorname{ch} y\,dx = (1 + x \operatorname{sh} y)\,dy.$

5. $2(y' + y) = xy^2, \quad y(0) = 2.$

6. $(5xy^2 - x^3)\,dx + (5x^2 y - y)\,dy = 0.$

7. $xy''' + x^2 y'' = \sqrt{x}.$

8. $y'' = 18y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3.$

9. $y'' - 2y' + y = 4e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

10. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4.$

11. $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$

12. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 3\ln 2, \quad y'(0) = 5\ln 3.$

Вариант 23

1. $dy - 2xy\,dx = x\,dx.$

2. $xy' + y\left(\ln\dfrac{y}{x} - 1\right) = 0.$

3. $y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2} \cdot \sin x, \quad y(1) = 1.$

4. $(13y^3 - x) \cdot y' = 4y.$

5. $y' + xy = (x-1) \cdot e^x \cdot y^2, \quad y(0) = 1.$

6. $(\cos(x + y^2) + \sin x)\,dx + 2y\cos(x + y^2)\,dy = 0.$

7. $(\operatorname{cth} x) \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} = 0.$

8. $y''y^3 + 9 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3.$

9. $y'' - 2y' = (4x - 4) \cdot e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

10. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1.$

11. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$

12. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

Вариант 24

1. $\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0.$

2. $(x^2 - 2xy) \cdot y' = xy - y^2.$

3. $y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$

4. $y^2(y^2 + 4)\,dx + 2xy(y^2 + 4)\,dy = 2\,dy.$

5. $2y - 3y\cos x = -e^{-2x} \cdot (2 + 3\cos x) \cdot y^{-1}, \quad y(0) = 1$

6. $(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = 0.$

7. $(x+1)y''' + y'' = x + 1.$

8. $y'' + 50\sin y \cdot \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5.$

9. $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

10. $y^{IV} + y''' = x.$

11. $\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y. \end{cases}$

12. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \pi.$

Вариант 25

1. $(xy-x)^2\,dy + y(1-x)\,dx = 0.$

2. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)\cdot y'.$

3. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(1) = \dfrac{1}{2}.$

4. $(x + \ln^2 y - \ln y)\cdot y' = \dfrac{y}{2}.$

5. $y' - y = xy^2, \quad y(0) = 1.$

6. $\left(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)\,dx + \left(x\cos y - \cos x + d\dfrac{1}{y}\right)\,dy = 0.$

7. $(1+\sin x)\cdot y''' = (\cos x)\cdot y''.$

8. $y''y^3 = 4(y^4 - 1), \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$

9. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

10. $y''' - y'' = 6x + 5.$

11. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$

12. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

Вариант 26

1. $\sqrt{5+y^2}\,dx + 4(x^2y + y)\,dy = 0.$

2. $xy' = \dfrac{3y^3 + 14x^2y}{2y^2 + 7x^2}.$

3. $y' - y\cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$

4. $(2xy + \sqrt{y})\,dy + 2y^2\,dx = 0.$

5. $2(xy' + y) = y^2\ln x, \quad y(1) = 2.$

6. $\left(1 + \dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)\,dx + \left(1 - \dfrac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)\,dy = 0.$

7. $xy'' + y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

8. $y'' = 8y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

9. $y'' - 3y' + 2y = (2x+1)\cdot e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

10. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2.$

11. $\begin{cases} x' = x + 8y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$

12. $y'' + y' = \dfrac{e^x}{2+e^x}, \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = 1 - \ln 2.$

Вариант 27

1. $(1+e^x)yy' = e^x.$

2. $y' = \dfrac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}.$

3. $y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -\dfrac{1}{2}.$

4. $y\,dx + (2x - 2\sin^2 y - y\sin 2y)\,dy = 0.$

5. $y' + y = xy^2, \quad y(0) = 1.$

6. $\dfrac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{x^2+y^2} = 0.$

7. $-xy''' + 2y'' = \dfrac{2}{x^2}.$

8. $y''y^3 + 4 = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2.$

9. $y'' + 4y' - 5y = -3x\sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

10. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^3.$

11. $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$

12. $y'' + y = 2\operatorname{ctg} x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2.$

Вариант 28

1. $(x+4)y\,dy - xy^2\,dx = 0.$

2. $xy' = 4\sqrt{x^2+y^2} + y.$

3. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

4. $2(y^3 - y + xy)\,dy = dx.$

5. $y' + 2y\operatorname{cth} x = y^2\operatorname{ch} x, \quad y(1) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} 1}.$

6. $2(3xy^2 + 2x^3)\,dx + 3(2x^2y + y^2)\,dy = 0.$

7. $\operatorname{ch} x \cdot y'' + y' = \operatorname{ch} x.$

8. $y'' = 2\sin^3 y \cdot \cos y, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 1.$

9. $y'' - 6y' + 9y = x^2 \cdot e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$

10. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39.$

11. $\begin{cases} x' = 7x + 5y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$

12. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, \quad y'(0) = 3\ln 2.$

Вариант 29

1. $2x\,dx - y\,dy = yx^2\,dy - xy^2\,dx.$

2. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 10.$

3. $y' - 3x^2y = \dfrac{x^2(1+x^3)}{3}, \quad y(0) = 0.$

4. $(2y + x\,\mathrm{tg}\,y - y^2\,\mathrm{tg}\,y)\,dy = dx.$

5. $2(y' + xy) = (x-1)\cdot e^x \cdot y^2, \quad y(0) = 2.$

6. $(3x^3 + 6x^2y + 3xy^2), dx + (2x^3 + 3x^2y)\,dy = 0.$

7. $x^4y'' + x^3y' = 4.$

8. $y''y^3 = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}.$

9. $y'' + 7y' + 10y = (3x+1)\cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

12. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3.$

12. $\begin{cases} x' = 4x, \\ y' = 3x + 2. \end{cases}$

12. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{1+e^{-x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

Вариант 30

1. $(y^2x + y^2)\,dy + x\,dx = 0.$

2. $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$

3. $y' - y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1.$

4. $4y^2\,dx + (e^{1/2y} + x)\,dy = 0.$

5. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = -\dfrac{2}{3}y^4\sin x.$

6. $xy^2\,dx + y(x^2 + y^2)\,dy = 0.$

7. $y'' + \dfrac{2x}{x^2+1}y' = 2x.$

8. $y'' = 2y^3, \quad y(-1) = 1, \quad y'(-1) = 1.$

9. $y'' - 3y' + 2y = \cos x - \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

10. $y^{IV} + y''' = 12x + 6.$

11. $\begin{cases} x' = 5x + y, \\ y' = 8x + 3y. \end{cases}$

12. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}.$

Список литературы

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. –17-е изд. – Москва : Айрис Пресс, 2020. – 602 с.

2. Шипачев, В. С. Высшая математика : учеб. и практикум для бакалавров вузов / В. С. Шипачев, Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова ; под ред. А. Н. Тихонова. –— 8-е изд., перераб. и доп. –— Москва : Юрайт, 2014. – 447 .

3. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. – 22-е изд., перераб. – Санкт-Петербург : Профессия, 2006. – 432 с.

4. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. Ч. 1 /П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова [и др.]. —– 7-е изд., испр. – Москва : ОНИКС : Мир и Образование, 2009. – 368 с.

5. Лунгу, К. Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. : учеб. пособие для вузов, обуч. по направлениям подгот. и спец. в области техники и технологии. Ч. 2 / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров.–—– Москва : Физматлит, 2007. – 381 с.

6. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие : в 4 частях / под общей редакцией А. П. Рябушко. — 6-е изд. — Минск : Вышэйшая школа, [б. г.]. — Часть 2 : Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2014. – 396 с. — ISBN 978-985-06-2466-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/65409 (дата обращения: 27.05.2025).

ОПИСАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОСТИ ИЗДАНИЯ:

Интерфейс электронного издания (в формате pdf) можно условно разделить на 2 части.

Левая навигационная часть (закладки) включает в себя содержание книги с возможностью перехода к тексту соответствующей главы по левому щелчку компьютерной мыши.

Центральная часть отображает содержание текущего раздела. В тексте могут использоваться ссылки, позволяющие более подробно раскрыть содержание некоторых понятий.

МИНИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ:

Минимальные системные требования: Celeron 1600 Mhz; 128 Мб RAM; Windows XP/7/8 и выше; 8x DVD-ROM; разрешение экрана 1024×768 или выше; программа для просмотра pdf.

СВЕДЕНИЯ О ЛИЦАХ, ОСУЩЕСТВЛЯВШИХ ТЕХНИЧЕСКУЮ ОБРАБОТКУ И ПОДГОТОВКУ МАТЕРИАЛОВ:

Оформление электронного издания : Издательский центр «Удмуртский университет».

Авторская редакция.

Подписано к использованию 06.02.2026
Объем электронного издания 1,3 Мб
Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Ломоносова, д. 4Б, каб. 021
Тел. : +7(3412)916-364 E-mail: editorial@udsu.ru