ВЕСТНИК ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОПЫТА

№4-2025

ГИПУ

ISSN: 2949-3269

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ГЛАЗОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В. Г. КОРОЛЕНКО»

Вестник педагогического опыта

выпуск 4-2025 (66)
октябрь-декабрь 2025

Научно-методический журнал

научное электронное сетевое периодическое издание

ISSN 2949-3269
DOI 10.62957/2949-3269

Выпускается с 1997 года

Адрес редакции, издателя: 427621, Удмуртская Республика, Глазов, Ул. Первомайская, 25, ФГБОУ ВО «Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В.Г. Короленко, телефон: (34141) 5-32-29. Сайт: http://vestnik.ggpi.org/ E-mail: vestnik@ggpi.org, vestnikpo@yandex.ru

---

Учредитель: Федеральное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Глазовский государственный инженерно-педагогический университет имени В. Г. Короленко»

Журнал «Вестник педагогического опыта» зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) 22 апреля 2024 года, Эл № ФС77-87293.
Издается 4 раза в год.
Распространение бесплатное.

Текущий выпуск №4-2025 (66), октябрь-декабрь 2025 года. DOI 10.62957/2949-3269-2025-66-4
Рекомендовано к изданию решением редакционного совета ФГБОУ ВО «Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В.Г. Короленко» от 17.12.2025.
Сдано в набор 18.12.2025. Подписано в печать 20.12.2025. Дата выхода в свет: 22.12.2025
Усл. печ. лист. 5,8. Формат: 60х90/8

Первая страница обложки: официальный логотип ФГБОУ ВО «ГИПУ».

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 004.925.83
DOI 10.62957/2949-3269-2025-66-4-45-51

Банникова Т.М., Баранова Н.А.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ 3D ГРАФИКИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Аннотация. *В статье рассматривается программный пакет Maple для моделирования поверхностей разных типов. Даны основные команды для графического представления поверхностей. Приведены примеры построения и визуализации некоторых поверхностей и их образующих. Рассмотрены виды поверхностей и методы их построения, позволяющие эффективно моделировать и анализировать разнообразные геометрические формы. Затронуты проблемы преподавания предметов, связанных с математическим моделированием.*
Ключевые слова: *3D графика, пакет Maple, математическое моделирование, анимация поверхностей, модель.*

Современная наука и техника развиваются стремительно, ставя перед специалистами всё более сложные задачи, решение которых требует глубоких аналитических способностей и мощных вычислительных ресурсов. Процесс внедрения информационных технологий в систему высшего образования требует дифференцированного подхода, учитывающего специфику конкретной учебной специальности. Возникает потребность в разработке педагогических технологий и методических систем обучения математике, ориентированных на формирование у обучаемых умений и навыков практического применения информационных технологий. Для получения продуктивного результата, как нам видится, необходимо преодолеть ряд некоторых трудностей. Во-первых, необходимо выбрать программный продукт для обучения студентов. Во-вторых, преподавателям необходимо освоить данный программный продукт. В-третьих, требуется оптимально распределить время на освоение данного продукта студентами при изучении тех или иных разделов курса, что необходимо учитывать в планировании работы [1].

Одной из ключевых областей, обеспечивающих прогресс в научном познании мира, является математическое моделирование. Оно позволяет создавать точные описания реальных процессов и явлений, анализировать их поведение и предсказывать развитие ситуации в будущем. Важнейшую роль в процессе моделирования играют средства компьютерной поддержки, среди которых особое место занимает программное обеспечение для символьных вычислений и графической визуализации, которым, в частности, является Пакет Maple, имеющий эффективные инструменты трехмерной графики. Благодаря высокому уровню детализации и точности построений, трехмерные графики позволяют ученым и инженерам быстро воспринимать и интерпретировать сложные данные, представляемые сложными математическими моделями. Однако эффективному использованию трехмерной графики препятствует отсутствие методологии её применения в зависимости от специфики конкретной задачи, недостаточная осведомленность пользователей о возможностях программного обеспечения и отсутствие рекомендаций по оптимальной настройке среды. Цель данной работы заключается в рассмотрении возможностей использования трехмерной графики пакета Maple для эффективного представления результатов математического моделирования в процессе обучения.

Maple предоставляет широкий набор инструментов для построения и визуализации объемных фигур различной сложности. Многие задачи математического анализа требуют построения поверхностей, заданных неявно, то есть через уравнения вида $F(x,y,z) = 0$. Подобные поверхности возникают повсеместно в геометрии, физике, экономике и других науках. Ручное построение таких поверхностей практически невозможно, особенно учитывая сложность аналитического описания и высокую размерность пространства.

В Maple реализована команда *implicitplot3d*, позволяющая визуализировать неявно заданные поверхности любой сложности. Используя эту команду, можно детально изучить структуру поверхностей, находить пересечения, проводить анализ особенностей и получать качественные иллюстрации.

Анимация служит важным инструментом в математическом моделировании, позволяя наглядно отображать изменения параметров. Мы изучим основные команды, используемые для создания анимаций в Maple, а также рассмотрим различные примеры и способы применения анимации.

Для анимации нам понадобится команда animate. Её общий синтаксис выглядит так: *animate (plotcommand, plotargs, t=a..b, параметры).*

Далее мы рассмотрим различные типы поверхностей, которые можно моделировать с помощью трехмерной графики пакета Maple. Поверхности играют ключевую роль в математическом моделировании, позволяя визуализировать сложные геометрические объекты и анализировать их свойства. Рассмотрим методы их построения с использованием инструментов Maple, что позволит глубже понять их структуру и свойства.

Поверхности распределяются по классам на основании трёх основных признаков: вид образующей, характер движения образующей и признак развёртываемости. Однако такое деление условно, так как одна и та же поверхность может одновременно относится к нескольким классам.

Линейчатая поверхность — это поверхность, которая образуется движением прямой линии (образующей) вдоль некоторой заданной линии (направляющей). При этом прямая проходит через определённую точку пространства (вершину) и движется строго вдоль направляющей линии, заполняя всё пространство поверхности.

Линейчатые поверхности разделяются на:

1. Развертывающиеся поверхности;
2. Неразвёртывающиеся, или косые поверхности.

Линейчатыми развёртывающимися поверхностями называются поверхности, образованные прямыми линиями (называемыми образующими), которые могут быть развернуты на плоскость без искажения размеров и форм (без растяжений и сжиманий) [2].

Торсовые поверхности — это линейчатые поверхности, которые образуются перемещением прямолинейной образующей по криволинейной направляющей.

Они делятся на три вида: торсы, цилиндрические и конические.

Торсом называется поверхность, образованная движением прямой линии (образующей), которая во всех своих положениях касается заданной пространственной кривой, именуемой ребром возврата [2].

Формула торса, заданного параметрически:

$$\begin{cases} x = -u\sin(v) + \cos(v) \\ y = u\cos(v) + \sin(v) \\ z = u \end{cases}$$

*> b:=animate (plot3d, [[-t*sin(v)+cos(v), t*cos(v)+sin(v), t], t = -2 .. 1, v = 0 .. s], s = 0 .. 3*Pi*(1/4), color = white):*

Добавляем линии направляющей и образующей для большей наглядности:

*> a:=spacecurve([sin(t), cos(t), 0, t = -(1/3)*Pi .. 2*Pi*(1/3)], thickness = 5, color = blue):*

> *c:=spacecurve([-t*sin(0)+cos(0), t*cos(0)+sin(0), t, t = -2 .. 1], color = green, thickness = 7):*

> *display(a, b, c);*

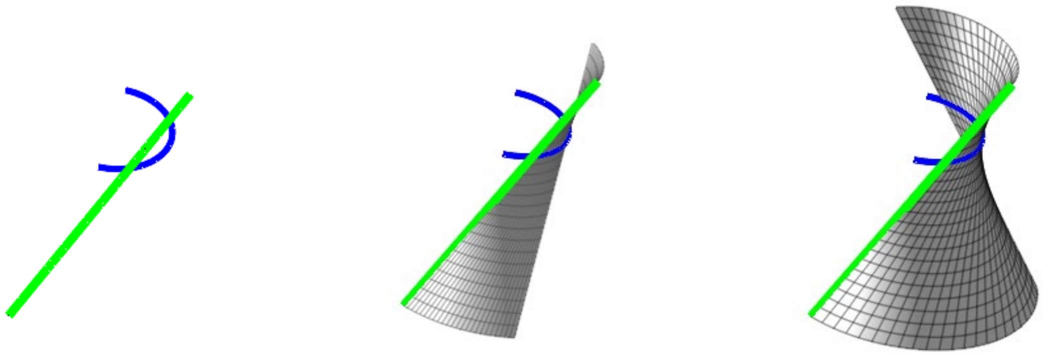

Рис. 1. Иллюстрация торсовой поверхности с выделенными линиями направляющей и образующей

Цилиндрическая поверхность образуется движением прямой линии, скользящей по некоторой неподвижной кривой (замкнутой или незамкнутой), оставаясь параллельно своему начальному положению. Вся поверхность состоит из совокупности таких прямолинейных отрезков, образующих непрерывный каркас цилиндрической поверхности.

Формула цилиндрической поверхности, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos(v) \\ y = \sin(v) \\ z = u \end{cases}$$

> *w:= spacecurve([cos(0), sin(0), x, x = -3 .. 3], color = green, thickness = 5):*

> *w1:= animate(plot3d, [[cos(v), sin(v), t], t = -3 .. 3, v = 0 .. s], s = 0 .. 3*Pi*(1/4), frames = 70, color = white):*

>*w2:=spacecurve([cos(t),sin(t),-3,t=0..(3*Pi)/(4)],color=blue, thickness=5):*

> *display(w, w1, w2);*

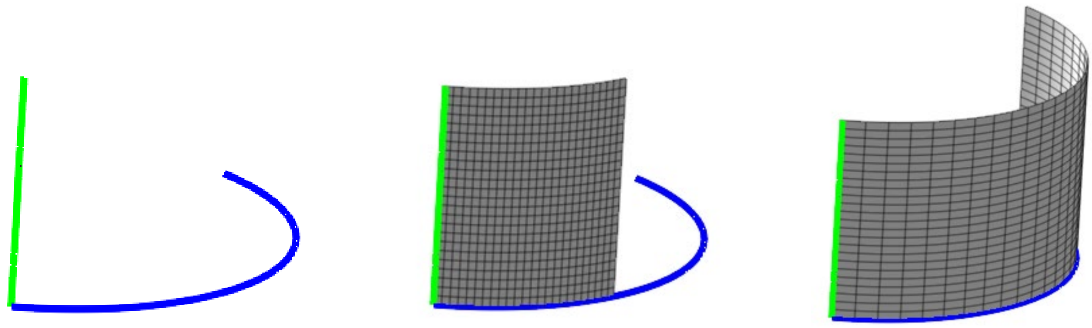

Рис. 2. Иллюстрация цилиндрической поверхности с выделенными линиями направляющей и образующей

Если ребро возврата сводится к отдельной точке (собственной), то получится частный вид торса – коническая поверхность. Коническая поверхность образуется движением прямолинейной образующей вдоль криволинейной направляющей, при этом все образующие проходят через единую неподвижную точку, называемую вершиной конической поверхности. Точка принадлежит конической поверхности, если она принадлежит образующей, находящейся на этой поверхности.

Формула конической поверхности, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = u\cos(v) \\ y = u\sin(v) \\ z = u \end{cases}$$

*>a:=animate(plot3d,[[x*cos(v),x*sin(v),x],x=-1..0.5,v=0..s],s=0..Pi, color= white):*
*>a1:=spacecurve([x*cos(0),x*sin(0),x,x=-1..0.5],color=green, thickness=5):*
*>a2:=spacecurve([sin(t),cos(t),-1,t=-(3*Pi)/(2)..-Pi/(2)],color=blue, thickness=5):*
>a3:=point([0, 0, 0], color = red, symbolsize = 35):
>display(a, a1, a2, a3);

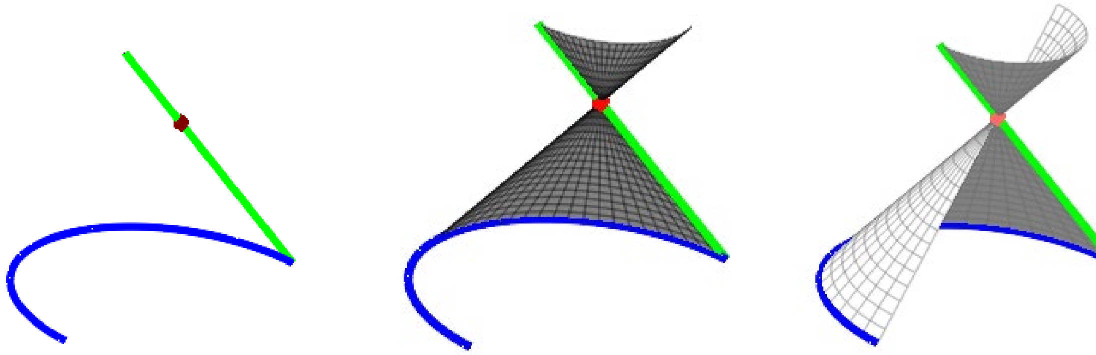

Рис. 3. Иллюстрация конической поверхности с выделенными линиями направляющей и образующей

Неразвёртывающиеся поверхности — это такие поверхности, которые невозможно наложить на плоскость без появления разрывов или складок [2].

Их отличительная особенность — соседние образующие пересекают друг друга, не будучи параллельными. Линейчатая неразвертываемая поверхность характеризуется наличием двух направляющих линий и особой плоскости параллелизма (поверхности Каталана). Плоскостью параллелизма называют плоскость, по отношению к которой образующая в любом положении остается ей параллельной.

Классификация неразвёртывающихся поверхностей:

1. Поверхности с плоскостью параллелизма: косая плоскость, цилиндроиды и коноиды
2. Винтовые поверхности: геликоиды

Косая плоскость (гиперболический параболоид) — это линейчатая неразвертываемая поверхность, образованная движением прямой линии (образующей) по двум прямым, скрещивающимся в пространстве. Все образующие остаются параллельными выбранной плоскости параллелизма. Название «гиперболический параболоид» связано с тем, что его поперечные сечения представляют собой параболы и гиперболы.

Уравнение косой плоскости:

$xy = z$

*> h:=animate(plot3d,[[u*v,u, v],u=-1..s,v=-1..1],s=-1..1,color= white):*
> h1:=spacecurve([-1 t,-1,t],t=-1..1,thickness=8,color=green):*
> h2:=spacecurve([t^(2),t,t],t=-1..1,thickness=5,color=blue):
> h3:=spacecurve([-t^(2),-t,t],t=-1..1,thickness=5,color=blue):
> display(h, h1, h2, h3);

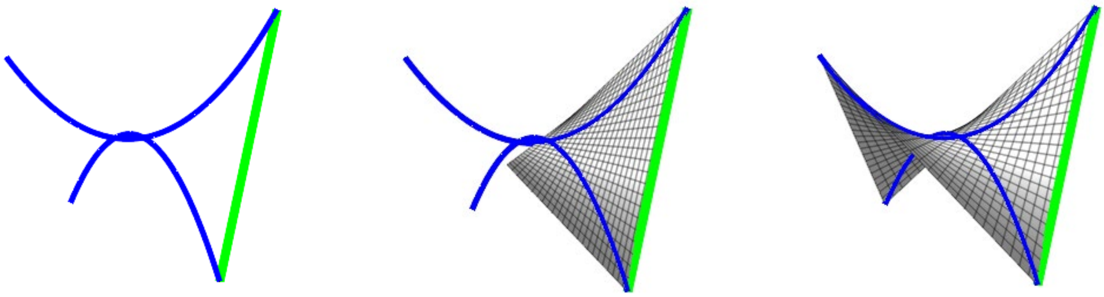

Рис. 4. Иллюстрация косой плоскости с выделенными линиями направляющей и образующей

Прямой цилиндроид формируется путем перемещения прямой линии (образующей) вдоль двух криволинейных направляющих, при этом все образующие остаются параллельными заданной плоскости, называемой плоскостью параллелизма.

Формула прямого цилиндроида, заданного параметрически:

$$\begin{cases} x = v\cos(u) \\ y = v\sin(u) \\ z = \sin(u) \end{cases}$$

*>q := animate(plot3d, [[v*cos(u), v*sin(u), sin(u)], v = -1 .. 1, u = -Pi/4 .. s], s = -Pi/4 .. Pi/4, color = grey);*

*>q1 := spacecurve([v*cos(-Pi/4), v*sin(-Pi/4), sin(-Pi/4)], v = -1 .. 1, thickness = 8, color = green);*

>q2 := spacecurve([cos(t), sin(t), sin(t)], t = -Pi/4 .. Pi/4, thickness = 5, color = blue);

>q3 := spacecurve([-cos(t), sin(t), -sin(t)], t = -Pi/4 .. Pi/4, thickness = 5, color = blue);

> display(q, q1, q2, q3, q);

Коноид — это линейчатая неразвертываемая поверхность, образованная движением прямой линии, которая скользит по двум направляющим, не лежащим в одной плоскости, и при этом всегда остается параллельной определенной плоскости, называемой плоскостью параллелизма [2]. Важно отметить, что одна из направляющих обязательно является прямой линией.

Задаётся уравнением:

$$-xy^2 = z$$

*> w:=animate(plot3d,[[-u*v^(2),u,v],u=0..1,v=-1..s],s=-1..1,color= white):*

> w1:=spacecurve([t,-t,-1],t=-1..0,thickness=5,color=green):

> w2:=spacecurve([-t^(2),1,t],t=-1..1,thickness=5,color=blue):

> w3:=spacecurve([0,0,t],t=-1..1,thickness=5,color=blue):

> display(w, w1, w2, w3);

Винтовые поверхности — это поверхности, у которых одна из направляющих является винтовой линией. Они образуются движением произвольной образующей вдоль этой направляющей. Если образующая — прямая линия, то поверхность называется геликоидом.

Геликоиды могут быть:

- Закрытыми, если образующая пересекает ось.
- Открытыми, если образующая скрещивается с осью.

Прямой геликоид образуется, когда образующая пересекает ось винтовой линии под прямым углом.

Формула прямого геликоида, заданного параметрически:

$$\begin{cases} x = u\cos(v) \\ y = u\sin(v) \\ z = v \end{cases}$$

Пример закрытого прямого геликоида:

*>g:=animate(plot3d,[[u*cos(v),u*sin(v),-v],u=0..1,v=0..s],s=0..4*Pi, color= white):*

*> g1:=spacecurve([cos(t),sin(t),-t],t=0..4*Pi,thickness=5, color=blue):*

> g2:=spacecurve([cos(t),sin(0),0],t=0..1.6,thickness=8, color=green):

> g3:=spacecurve([0,0,t],t=-12.5..0,thickness=5, color=blue):

> display(g, g1, g2, g3);

Пример открытого прямого геликоида:

*> g:=animate(plot3d, [[u*cos(v), u*sin(v), -v], u = .5 .. 1.5, v = 0 .. s], s = 0 .. 4*Pi, color = white):*

*> g1:=spacecurve([1.5*cos(t), 1.5*sin(t), -t], t = 0 .. 4*Pi, thickness = 5, color = blue):*

*> g2:=spacecurve([1.5*cos(t), sin(0), 0], t = 0 .. 1.25, thickness = 8, color = green):*

> g3:=spacecurve([0, 0, t], t = -12.5 .. 0, thickness = 5, color = blue):

> display(g, g1, g2, g3);

Наклонный (косой) геликоид — когда угол между образующей и осью не равен 0° или 90°.

Формула косого геликоида, заданного параметрически:

$$\begin{cases} x = u\cos(v) \\ y = u\sin(v) \\ z = v + au \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}, a - \text{угол наклона}$$

Пример наклонного закрытого геликоида:

> g:=animate(plot3d, [[u*cos(v), u*sin(v), -v-5*u], u = 0 .. 1, v = 0 .. s], s = 0 .. 4*Pi, color = *white*):

> g1:=spacecurve([cos(t), sin(t), -5-t], t = 0 .. 4*Pi, thickness = 5, color = blue):

> g2:=spacecurve([t, 0, -5*t], t = 0 .. 1, thickness = 8, color = green):

> g3:= spacecurve([0, 0, t], t = -12.5 .. 0, thickness = 5, color = blue):

> display(g, g1, g2, g3);

Трубчатая поверхность — это поверхность, образованная перемещением окружности (или иной замкнутой кривой) постоянного радиуса вдоль заданной пространственной кривой, называемой направляющей. Все точки, принадлежащие периметру этой окружности, формируют конечную поверхность.

В качестве примера возьмём поверхность, заданную следующим параметрическим уравнением:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos(u)\cos(t)}{\sqrt{1+cos^2(t)}} + t \\ y = -\dfrac{\cos(u)}{\sqrt{1+cos^2(t)}} + \sin(t) \\ z = \sin(u) \end{cases}$$

На Рис. 5. продемонстрировано образование трубчатой поверхности: зелёная окружность движется вдоль синей направляющей кривой, формируя поверхность. За счёт равномерного движения окружности вдоль направляющей кривой образуется сплошная трубчатая поверхность.

*>w1 := animate(plot3d, [[cos(u)*cos(t)/sqrt(1 + cos(t)^2) + t, -cos(u)/sqrt(1 + cos(t)^2) + sin(t), sin(u)], u = 0 .. 2*Pi, t = 0 .. s], s = 0 .. 2*Pi, scaling = constrained, color = grey);*

*>w2 := animate(spacecurve, [[cos(u)*cos(t)/sqrt(1 + cos(t)^2) + t, -cos(u)/sqrt(1 + cos(t)^2) + sin(t), sin(u)], u = 0 .. 2*Pi, thickness = 5], t = 0 .. 2*Pi, color = green);*

*>w3 := spacecurve([cos(1.5)*cos(t)/sqrt(1 + cos(t)^2) + t, -cos(1.5)/sqrt(1 + cos(t)^2) + sin(t), 0], t = 0 .. 2*Pi, color = blue, thickness = 5);*

>display(w1, w2, w3);

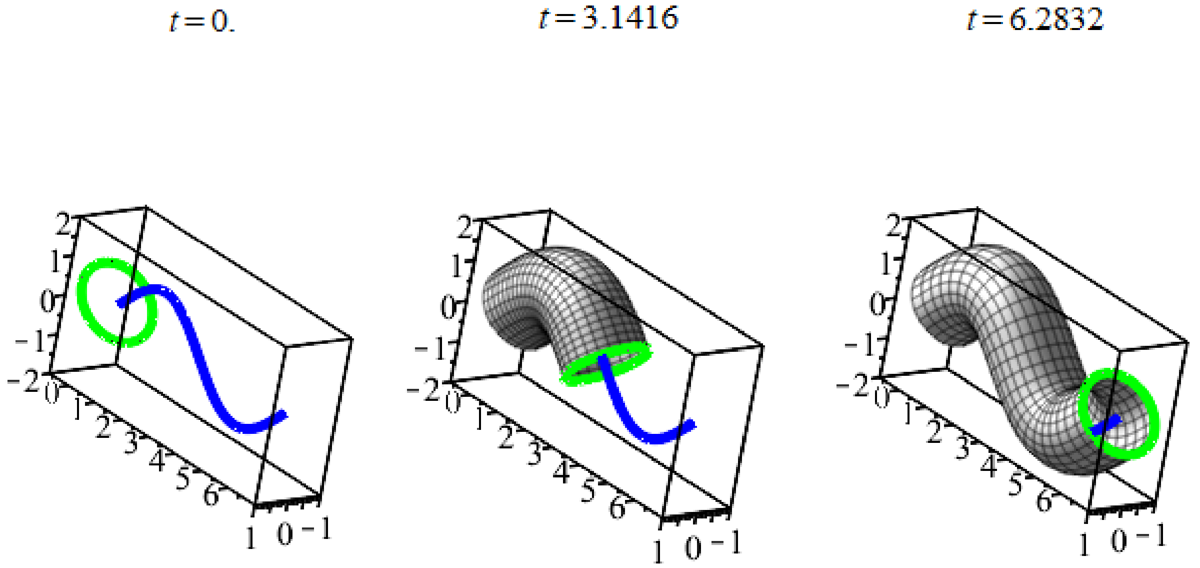

Рис. 5. Иллюстрация образования трубчатой поверхности с выделенными линиями направляющей и образующей

Рассмотренные в данной работе виды поверхностей и методы их построения позволяют эффективно моделировать и анализировать разнообразные геометрические формы. Описаны способы создания линейчатых и нелинейчатых поверхностей. Освоенное способствует лучшему пониманию структуры и свойств поверхностей, обеспечивая удобство и наглядность исследований.

Список источников:

1. Банникова Т.М., Баранова Н.А. Повышение эффективность профессиональной математической подготовки студентов бакалавриата средствами программы Maple [Электронный ресурс] / Педагогическая информатика. 2019. № 4. С. 59-63.
2. Чудинов А.В. Теоретические основы инженерной графики: учеб. пособие / А. В. Чудинов. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010. 390 с.

НАШИ АВТОРЫ

Агарёва Людмила Анатольевна,
Заместитель начальника Управления-начальник отдела общего образования, Управление образования Администрации, Домодедово, Россия

Ludmila A. Agareva,
Deputy Head of the Department - General Education Department Head, Education Department of Administration, Domodedovo, Russia

Банникова Татьяна Михайловна,
Кандидат педагогических наук, доцент, Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

Tatiana M. Bannikova,
PhD (Pedagogics), associate professor, Udmurt State University, Izhevsk, Russia

Баранова Наталья Анатольевна,
Кандидат педагогических наук, доцент, Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

Nataliya A. Baranova,
PhD (Pedagogics), associate professor, Udmurt State University, Izhevsk, Russia

Васильева Алина Александровна,
Магистрант, Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ, Россия

Alina A. Vasilieva,
Master's student, Buryat State University by Dorzhi Banzarov, Ulan-Ude, Russia

Ворончихин Константин Юрьевич,
Аспирант, Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В.Г. Короленко, Глазов, Россия

Konstantin Yu. Voronchikhin,
Aspirant, Glazov State Engineering Pedagogical University by V.G. Korolenko, Glazov, Russia

Захарищева Марина Алексеевна,
Доктор педагогических наук, профессор, Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В.Г. Короленко, Глазов, Россия

Marina A. Zakharishcheva,
PhD (Pedagogics), Professor, Glazov State Engineering Pedagogical University by V.G. Korolenko, Glazov, Russia

Исламова Алина Рафкатовна,
Кандидат филологических наук, Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В.Г. Короленко, Глазов, Россия

Alina R. Islamova,
PhD (Linguistics), Glazov State Engineering Pedagogical University by V.G. Korolenko, Glazov, Russia

Камалов Ренат Рифович,
Кандидат педагогических наук, доцент, Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В.Г. Короленко, Глазов, Россия

Renat R. Kamalov,
PhD (Pedagogics), associate professor, Glazov State Engineering Pedagogical University by V.G. Korolenko, Glazov, Russia

Курилова Екатерина Максимовна,
Студент, Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В.Г. Короленко, Глазов, Россия

Ekaterina M. Kurilova,
Student,Glazov State Engineering Pedagogical University by V.G. Korolenko, Glazov, Russia

Лизунков Владислав Геннадьевич,
Кандидат педагогических наук, доцент, Томский политехнический университет, Томск, Россия

Vladislav G. Lizunkov,
PhD (Pedagogics), associate professor, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia

Майер Роберт Валерьевич,
Доктор педагогических наук, профессор, Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В.Г. Короленко, Глазов, Россия

Robert V. Mayer,
PhD (Pedagogics), Professor, Glazov State Engineering Pedagogical University by V.G. Korolenko, Glazov, Russia

Рассказчикова Марина Ивановна,
Магистр, Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова, Абакан, Россия

Marina I. Rasskazchikova,
PhM, Khakass State University by N.F. Katanova, Abakan, Russia

Славинский Илья Юрьевич,
Студент, Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В.Г. Короленко, Глазов, Россия

Iliya Yu. Slavinskiy,
Student,Glazov State Engineering Pedagogical University by V.G. Korolenko, Glazov, Russia

Спирина Татьяна Александровна,
Кандидат педагогических наук, доцент, Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова, Абакан, Россия

Tatiana A. Spirina,
PhD (Pedagogics), associate professor, Khakass State University by N.F. Katanova, Abakan, Russia

Судариков Евгений Владимирович,
Студент, Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, Россия

Evgeniy V. Sudarikov,
Student, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia

Хватаева Наталия Петровна,
Кандидат филологических наук, Глазовский государственный инженерно-педагогический университет им. В.Г. Короленко, Глазов, Россия

Natalia P. Khvataeva,
PhD (Linguistics), Glazov State Engineering Pedagogical University by V.G. Korolenko, Glazov, Russia

Шелудько Мария Илларионовна,
Соискатель, Российский государственный педагогический университет имени А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия

Maria I. Shelud’ko,
Applicant, Russian State Pedagogical University by A.I. Herzen, Saint Petersburg, Russia

Щенина Татьяна Евгеньевна,
Кандидат юридических наук, доцент,
Глазовский государственный инженерно-педагогический университет
им. В.Г. Короленко, Глазов, Россия

Tatiana E. Shchenina,
PhD (Law), associate professor,
Glazov State Engineering Pedagogical University by V.G. Korolenko, Glazov, Russia