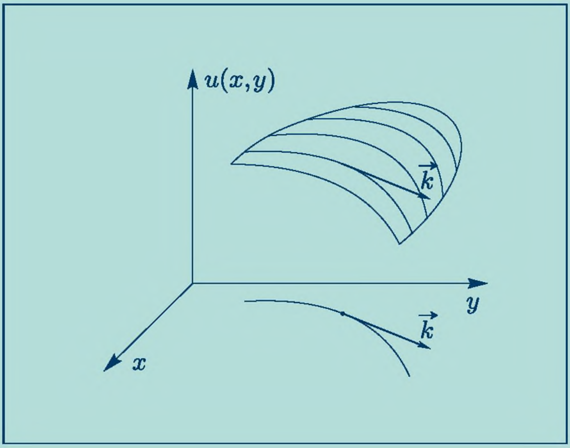
МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.
УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ: ВВЕДЕНИЕ



Ижевск
2026

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра теоретической и экспериментальной физики

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ: ВВЕДЕНИЕ

Учебное-методическое пособие

2-е издание, переработанное и дополненное

Ижевск
2026

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.62я73
М545

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотр. науч.-учеб. лаб. «Мобильные системы» ФГБОУ ВО «ИжГТУ имени М. Т. Калашникова» **И. С. Мамаев**,
д-р техн. наук, доцент, вед. науч. сотр. науч.-учеб. лаб. «Мобильные си-стемы», профессор кафедры «Мехатронные системы» ФГБОУ ВО «ИжГТУ имени М. Т. Калашникова» **Ю. Л. Караваев.**

Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В., Пивоварова Е. Н.

М545 Методы математической физики. Уравнения в частных производных: введение : учеб.-метод. пособие / В. Г. Лебедев, Т. Б. Иванова, В. В. Васькин и др. – 2-е изд., перераб. и дополн. – Ижевск : Удмуртский университет, 2026. – 82 с.

ISBN 978-5-4312-1341-0

В данном пособии рассмотрены основные методы вывода уравнений в частных производных, описывающих различные физические процессы. На физическом уровне строгости изучены общие свойства уравнений в частных производных I и II порядков, сформулирована постановка задачи Коши для уравнений I порядка, приведена классификация уравнений II порядка и показана связь между типом уравнений и постановкой краевых задач. Приведены задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов, преподавателей физико-математических направлений университетов, а также для широкого круга исследователей при первоначальном ознакомлении с предметом.

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.62я73

ISBN 978-5-4312-1341-0

Содержание

Предисловие

Методы математической физики и дифференциальные уравнения в частных производных являются базовыми при описании многих физических процессов и используются при их моделировании компьютерными методами.

В настоящем пособии будут рассмотрены основные методы вывода уравнений в частных производных, описывающих различные физические процессы. На физическом уровне строгости изучены общие свойства уравнений в частных производных I и II порядков, сформулирована постановка задачи Коши для уравнений I порядка, приведена классификация уравнений II порядка и показана связь между типом уравнений и постановкой краевых задач. Основная часть пособия посвящена изучению линейных уравнений в частных производных.

Кроме краткого изложения теоретического материала, в данном пособии представлены примеры решения типовых задач по каждому разделу, а также перечень аудиторных и контрольных задач и задач для самостоятельного решения. Для некоторых примеров приведены решения с графическими иллюстрациями, что способствует лучшему пониманию предмета.

Пособие предназначено для студентов бакалавриата, магистратуры, аспирантов, преподавателей физико-математических направлений университетов, а также для неспециалистов в областях уравнений в частных производных и математической физики для первоначального ознакомления с предметом. Отдельные главы пособия будут полезны научным сотрудникам в области математики, биологии, биохимии и т. д.

Необходимость издания данного пособия обусловлена отсутствием современных задачников по данной тематике в библиотечном фонде Удмуртского государственного университета. В основу пособия положены лекции, читаемые студентам направлений «Физика», «Химия, физика и механика материалов» и «Прикладные математика и физика» УдГУ. Кроме того, в пособие включены вопросы для дополнительного изучения, не рассматриваемые непосредственно при изучении дисциплины. Содержание данного пособия в полной мере соответствует программе, по которой изучается предмет в Институте математики, информационных технологий и физики УдГУ.

Особенностью данного издания является большое количество примеров решения задач, в том числе с использованием системы аналитических вычислений Maple.

Учебное издание является вводным для ранее выпущенных пособий:

[1] Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В., Пиворова Е. Н. «Методы математической физики. Параболические уравнения» — Ижевск: Удмуртский университет, 2022;

[2] Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В., Пиворова Е. Н. «Методы математической физики. Гиперболические уравнения» — Ижевск: Удмуртский университет, 2024.

[3] Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В. «Уравнения теплопереноса» — Ижевск: Удмуртский университет, 2018.

Методическое пособие рассчитано на средний уровень физико-математической подготовки студентов и необходимо для освоения следующих общекультурных и профессиональных компетенций:

– способность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук,

– способность использовать базовые теоретические знания для решения профессиональных задач,

– способность применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории и методов физических исследований (в соответствии с профилем подготовки).

Введение

…Книга природы написана
на языке математики …

Галилео Галилей

Развитие физики за последние десятилетия убедительно продемонстрировало мощь и эффективность различных математических методов, используемых ею. Методы дифференциальной геометрии, топологии, групп и алгебр Ли стали рабочим инструментом во многих областях физики. Однако при всем этом очень трудно найти такой раздел физики, где бы не использовались *уравнения в частных производных*, представляющие собой очень удобный, а зачастую и единственный способ описания физических явлений. Особенно важную роль уравнения в частных производных играют при изучении явлений макроскопической физики. В этом случае окружающая нас природа может быть описана как некоторая непрерывная среда, обладающая набором параметров, характеризующих распределение в пространстве и времени величин плотности, температуры, скорости и т. д. Поэтому естественным языком для описания поведения такой непрерывной среды являются именно уравнения в частных производных.

Уравнения в частных производных для функции нескольких переменных $u(\vec{x}, t)$ задаются *функциональной связью* между функцией и ее производными вида

$$F\left(t, x_i, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots\right) = 0.$$

Наивысший порядок производной определяет *порядок уравнения*. Примером уравнений в частных производных могут служить уравнения Максвелла для электрического и магнитного полей, а также уравнения для скалярного и векторного потенциалов в электродинамике, уравнение Шрёдингера в квантовой механике, уравнения линейной теории упругости, уравнения Эйнштейна в общей теории относительности, уравнения Навье – Стокса в гидродинамике и многие, многие другие.

Если неизвестная функция $u(\vec{x}, t)$ входит в уравнение линейно, то, соответственно, уравнение называется *линейным дифференциальным уравнением в частных производных*. Такие уравнения наиболее часто встречаются в различных физических приложениях, поскольку большинство физических явлений связаны с малыми отклонениями от некоторого равновесного (стационарного) состояния. При таких малых отклонениях обычно бывает достаточно ограничиться линейным приближением, а высшими поправками пренебречь. Кроме того, для линейных уравнений имеются развитые общие методы решения и анализа, доказаны теоремы существования и единственности, поэтому изучение линейных уравнений будет составлять основную часть нашего курса. Что касается нелинейных уравнений в частных производных, представляющих в настоящее время достаточно активно развивающуюся область, то знакомство с ними будет достаточно эпизодичным.

1. Вывод уравнений в частных производных

Пусть безумная идея — не решайте сгоряча,
Отвечайте нам скорее через доку главврача ...

В.Высоцкий

1.1. Вариационный подход

Уравнения в частных производных получают в основном с помощью двух возможных подходов: один из них — это переход от описания явления на основе микроскопических динамических уравнений к описанию с помощью некоторых (*усреднённых*) уравнений для непрерывной среды. Например, для описания движение большого количества частиц, каждая из которых в отдельности подчиняется уравнению Ньютона, можно получить уравнения в частных производных, если рассматривать их как некоторую сплошную среду. Стандартный алгоритм для вывода уравнений в данном случае состоит в использовании *вариационного принципа.* После того как сформулирован принцип, требование экстремальности выбранного функционала приводит к уравнениям динамики (уравнениям Лагранжа–Эйлера), которые в случае функции, зависящей от многих переменных, являются уже уравнениями в частных производных. Отметим, что такой подход возможен лишь в том случае, если рассматриваемая система не испытывает *диссипации энергии.* К уравнениям, которые можно получить таким образом, относятся уравнения Максвелла, уравнения теории упругости, уравнение колебаний и многие другие.

Пример 1. Рассмотрим вывод уравнения колебаний упругой струны из принципа наименьшего действия. Под струной мы будем понимать тонкую бесконечную нить, которая может свободно изгибаться. Допустим, что она находится под действием сильного натяжения; в состоянии равновесия, без воздействия внешних сил расположена вдоль оси Ox. Если мы выведем её из положения равновесия или подвергнем действию какой-нибудь силы, то струна начнёт колебаться. Отклонение струны от положения равновесия будем описывать функцией $u(x, t)$.

Мы ограничимся рассмотрением только поперечных колебаний, что справедливо лишь в том случае, если колебания малы (иначе говоря, $|\partial u/\partial x| \ll 1$). Кроме того, будем считать, что на каждую точку струны действует внешняя вынуждающая сила с плотностью $f(x, t)$, и в начальный момент времени отклонения и скорости точек струны задаются известными функциями $u_0(x)$ и $v_0(x)$.

Функционал действия для механической системы равен

$$S = \int\limits_0^\infty (K(t) - U(t))\, dt,$$

где $K(t)$ — кинетическая энергия струны в момент времени t, а $U(t)$ — потенциальная энергия струны в тот же момент времени.

Вычислим кинетическую энергию. Для этого разобьем всю струну на малые элементы длиной Δx_i. Каждому такому элементу с номером i соответствует кинетическая энергия, равная

$$\frac{1}{2}\rho_i \Delta x_i \dot{u}_i^2,$$

где ρ_i является линейной плотностью i-го элемента, а $\dot{u}_i$ — его скоростью ($\dot{u} = \partial u/\partial t$). Полная кинетическая энергия струны получится как сумма кинетических энергий всех элементов

$$K(t) = \frac{1}{2}\sum_i \rho_i \Delta x_i \dot{u}_i^2.$$

В пределе $\Delta x_i \to 0$ сумма перейдет в интеграл

$$K(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \rho(x) \dot{u}^2(x,t)\, dx. \qquad (1)$$

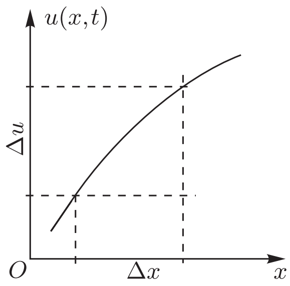


Рис. 1. Удлинение элемента струны при деформации

Упругая потенциальная энергия натянутой струны для каждого такого элемента будет являться функцией его удлинения. Если длина элемента до растяжения равна Δx_i, то после растяжения она станет примерно равна (см. рис. 1)

$$\Delta \bar{x}_i \approx \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta u_i^2}.$$

Вынося из под корня Δx_i, получим

$$\Delta \bar{x}_i \approx \Delta x_i \sqrt{1 + (u_i')^2},$$

где $u_i' = (\partial u / \partial x)_i$. Считая отклонения малыми ($|(u_i')^2| \ll 1$), можно разложить это выражения в ряд, ограничившись первым отличным от нуля членом разложения

$$\Delta \bar{x}_i \approx \Delta x_i \left(1 + \frac{1}{2} (u_i')^2 + \ldots \right).$$

Следовательно, удлинение элемента струны равно

$$\delta x_i \approx \Delta \bar{x}_i - \Delta x_i \sim \Delta x_i \left(\frac{1}{2} (u_i')^2 + \ldots \right).$$

Соответствующая потенциальная упругая энергия растянутого элемента струны может быть записана в виде

$$U(\Delta \bar{x}_i) = U(\Delta x_i) + U'(\Delta x_i)\delta x_i + \ldots = U_0 + \frac{1}{2} E_i (u_i')^2 \Delta x_i + \ldots,$$

где E_i — коэффициент пропорциональности (модуль Юнга) элемента Δx_i

$$E_i = U'(\Delta x_i).$$

Потенциальная энергия всей струны определяется суммой по всем элементам

$$U(t) = \frac{1}{2} \sum_i \Delta x_i E_i (u_i')^2.$$

В пределе $\Delta x_i \to 0$, сумма опять переходит в интеграл

$$U(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} E(x)(u'(x))^2 \, dx. \tag{2}$$

Однако, кроме упругой энергии, надо учесть еще энергию, связанную с воздействием внешней силы. Действие такой силы приводит к изменению потенциальной энергии на величину $\delta U_i = -f(x_i, t) u_i(x_i, t) \Delta x_i$, поэтому к слагаемому (2) надо добавить

$$- \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,t) u(x,t) \, dx. \tag{3}$$

Собирая вместе (1), (2), (3), приходим к действию

$$S = \int\limits_{0}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 - \frac{1}{2} E (u')^2 + f u \right). \tag{4}$$

Чтобы получить уравнение, описывающее движение струны, проварьируем (4) по $u(x,t)$

$$\delta S = \int\limits_{0}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \left(\rho \dot{u} \delta \dot{u} - E u' \delta u' + f \delta u \right).$$

После интегрирования по частям производных по времени и координате получим

$$\int\limits_0^\infty dt\rho\dot{u}\delta\dot{u} = \rho\dot{u}\delta u\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty dt\rho\ddot{u}\delta u,$$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty dxEu'\delta u' = Eu'\delta u\Big|_{-\infty}^\infty - \int\limits_{-\infty}^\infty dx(Eu')'\delta u.$$

С учётом того, что в начальный момент времени заданы условия на функцию и её производную $u(x,0) = u_0(x)$ и $\dot{u}(x,0) = v_0(x)$, их вариация в начальный момент времени равна нулю: $\delta u(x,0) = 0$ и $\delta\dot{u}(x,0) = 0$. Подстановки на всех бесконечных пределах интегрирования (по x и t) вариации функции можно также считать равными нулю (ибо с физической точки зрения любые возмущения функции $u(x,t)$ должны затухать при $t \to \infty$ и $x \to \pm\infty$). В результате имеем

$$\delta S = -\int\limits_0^\infty dt \int\limits_{-\infty}^\infty dx \left(\rho\ddot{u} - (Eu')' - f\right)\delta u.$$

В силу произвольности вариации $\delta u(x,t)$ для того, чтобы функционал имел экстремум, необходимо, чтобы выполнялось уравнение

$$\rho\ddot{u} - (Eu')' - f = 0.$$

Это и есть уравнение колебаний струны. Если среда является однородной ($E' = 0$) и её плотность не меняется со временем ($\dot{\rho} = 0$), то, вводя коэффициент $c^2 = E/\rho$, можно записать уравнение в виде

$$\frac{1}{c^2}\ddot{u} - u'' = F, \tag{5}$$

где $F(x,t) = f(x,t)/E$. Нетрудно проверить, что размерность нового коэффициента равна $[c] =$ длина/время, поэтому c определяет некоторую характерную скорость (в данном случае c — скорость распространения колебаний в струне).

1.2. Феноменологический подход

Другой способ получения (вывода) уравнений в частных производных состоит в использовании *законов сохранения*. При этом, чтобы замкнуть уравнения (связать между собой величины, входящие в уравнения), приходится прибегать к обобщению экспериментальных данных. Такие соотношения между величинами, полученные из эксперимента, называют *феноменологическими*, поэтому в целом второй подход также называется *феноменологическим*, в отличие от первого, или *динамического*, подхода. Название «динамический» подчеркивает то обстоятельство, что в его основе лежат более точные динамические уравнения, в то время как феноменологический подход является полуэмпирическим.

Найдем общий вид законов сохранения. Пусть $\rho(\vec{r},t)$ — плотность сохраняющейся величины (это может быть плотность энергии, плотность вещества, плотность импульса и т. д.). Тогда $\rho(\vec{r},t)\Delta V$ будет определять количество данной величины в малом элементе объёма ΔV в момент времени t. Соответственно, в каком-то конечном (произвольно выбранном) объёме V количество определится интегралом:

$$\int\limits_V \rho(\vec{r},t)\, dV.$$

За счет чего может произойти изменение этой величины с течением времени? Очевидный ответ состоит в том, что часть этой величины может «вытечь» или «втечь» через границу, окружающую данный объём (см. рис. 2). Таким

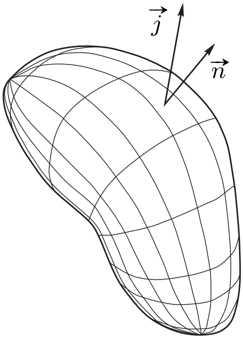


Рис. 2. Поток сохраняющейся величины через замкнутую поверхность

образом, мы приходим к понятию *потока* (точнее, *плотности потока*) величины ρ: $\vec{j}(\vec{r},t)$ — это количество величины ρ, проходящей через единицу поверхности за единицу времени. Размерность плотности потока:

$[\vec{j}]=$(размерность ρ)/(площадь·время).

Плотность потока определяет, таким образом, количество величины $\rho(\vec{r},t)$, проходящей через единичную площадь поверхности за одну секунду. Если учесть полный поток через всю поверхность, то за одну секунду через границу, охватывающую объём V пройдет величина $Q = \oint dS(\vec{n}\vec{j})$, где $\vec{n}$ — вектор нормали к поверхности. Если величина ρ «вытекает» через границу, то $(\vec{n}\vec{j}) > 0$, и общее количество в объёме V должно уменьшаться, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho(\vec{r},t)\,dV = -\oint\limits_S dS(\vec{n}\vec{j}). \tag{6}$$

Кроме этого, внутри объёма V могут быть некоторые источники величины ρ. Поэтому к правой части (6) следует добавить $\int q(\vec{r},t)\,dV$, где $q(\vec{r},t)$ — плотность источника $(q > 0)$ или $(q < 0)$ стока. Полученное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho(\vec{r},t)\,dV = -\oint\limits_S dS(\vec{n}\vec{j}) + \int\limits_V q(\vec{r},t)\,dV \tag{7}$$

выражает интегральный закон сохранения величины ρ (отметим, что интеграл по dV и производную по времени в (7) можно поменять местами, поскольку интеграл берется по объёму, не зависящему от времени). Преобразуя интеграл

$$\oint\limits_S dS(\vec{n}\vec{j}) = \int\limits_V \mathrm{div}\vec{j}\, dV$$

с помощью теоремы Гаусса и пользуясь произвольностью выбранного объёма V, из (7) можно получить дифференциальный закон сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}, t) = -\mathrm{div}\vec{j} + q(\vec{r}, t). \tag{8}$$

При выводе соотношения (8) подразумевалось, что рассматриваемое пространство является координатным. Однако аналогичный закон сохранения может быть записан в любом пространстве: конфигурационном, импульсном, фазовом и т. д. Если задано фазовое пространство, то сохраняющаяся величина ρ в общем случае будет функцией импульсов и координат: $\rho \equiv \rho(\vec{r}, \vec{p}, t)$. При этом, поскольку фазовое пространство является прямым произведением $V_x \otimes V_p$ (координатного и импульсного пространств), оператор дивергенции распадается в сумму операторов дивергенции для координатного и импульсного пространств: $\mathrm{div}(\ldots) = \mathrm{div}_p(\ldots) + \mathrm{div}_x(\ldots)$.

Соотношение (8) может быть получено как в микроскопическом (с использованием динамических уравнений), так и в феноменологическом подходе. Но если в первом случае оно является следствием динамических уравнений движения, то для феноменологического описания оно является основой. Чтобы получить из него уравнение в частных производных для функции ρ, достаточно связать между собой величины ρ и $\vec{j}$. Эта связь определяется исходя из экспериментальных данных.

Пример 2. Возьмем в качестве такой сохраняющейся величины ρ количество тепла. Удельное количество тепла в термодинамике определяется выражением

$$d\rho = \rho_0 C dT,$$

где ρ_0 — плотность вещества, C — удельная теплоемкость, T — температура. Из экспериментов нам известно, что тепло всегда переходит от более нагретого тела к менее нагретому. Поэтому поток тепла между двумя близкими точками будет пропорционален разности температур в этих точках и направлен от более нагретой точки к менее нагретой. В дифференциальном виде это утверждение записывается в виде закона Фурье:

$$\vec{j} = -\lambda \operatorname{grad}(T),$$

где λ — некоторый феноменологический коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплопроводности. Подставляя закон Фурье в закон сохранения, получим уравнение, которое называется *уравнением теплопроводности*:

$$\rho_0 C \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}(T)) + q(\vec{r}, t).$$

В случае однородной среды феноменологические коэффициенты ρ_0, λ, C являются константами. Если ввести новую величину $a = \lambda/(\rho_0 C)$, которая называется *коэффициентом температуропроводности*, то уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + Q(\vec{r}, t),$$

где Δ — оператор Лапласа; $Q(\vec{r}, t) = q(\vec{r}, t)/(\rho_0 C)$. Размерность величины a равна $[a] =$ длина$^2/$время.

1.3. Комбинированный подход

Кроме перечисленных подходов, существует и третий путь для получения уравнений в частных производных: комбинирование первого и второго подходов. Это действительно необходимо в случае, если в уравнениях, полученных из вариационных принципов, надо учесть диссипацию.

Пример 3. Для того чтобы учесть силы трения, действующие на струну (например, если она находится в некоторой вязкой среде), в правую часть соотношения (5) добавим выражение для силы трения. Это выражение можно получить из классической механики, где сила трения в первом приближении пропорциональна скорости. Поэтому для каждой точки струны можно написать: $f(x,t) = -\alpha\dot{u}(x,t)$, где α — коэффициент вязкого трения. В результате уравнение, описывающее колебания струны в вязкой среде, будет иметь вид

$$\frac{1}{v^2}\ddot{u} - u'' = F - \alpha\dot{u}.$$

1.4. Симметрии и общие соображения

Еще один способ получения уравнений в частных производных основан на анализе симметрий системы и так называемых общих соображениях.

Пример 4. Рассмотрим уравнения, описывающие деформацию упругой среды при неоднородном нагреве. Функция, которая описывает такую деформацию, является вектором смещения $\vec{u}(\vec{r})$. Поэтому уравнений должно быть достаточно для того, чтобы получать $\vec{u}(\vec{r})$ как их решения. Следовательно, уравнения тоже должны быть векторными.

Далее, учёт лишь малых деформаций приводит к тому, что можно пренебречь всеми нелинейными слагаемыми, оставив лишь линейные:

$$\vec{F}\left(\vec{u}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^i \partial x^j}, T, \nabla T\right) = 0.$$

Теперь учтем, что на величине тензора деформации не сказывается значение смещения в данной точке, поскольку тензор

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right)$$

зависит только от производных вектора смещения $\vec{u}$. Поэтому вектор $\vec{u}$ может входить в уравнения только через свои производные.

Однако наличие первых производных $\dfrac{\partial u_i}{\partial x^j}$ в уравнении приводит к тому, что при инверсии координат $x^i \mapsto -x^i$ вид уравнений будет меняться. Поскольку выбор координат не может проявляться на физических эффектах, следовательно, первые производные тоже не могут входить в уравнения теории упругости.

В общем случае, чтобы получить вектор из вторых производных, мы можем использовать следующие комбинации:

$$\Delta \vec{u}, \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\, \vec{u}, \quad \nabla(\operatorname{div}\, \vec{u}),$$

но из-за наличия тождества

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\, \vec{u} = \nabla(\operatorname{div}\, \vec{u}) - \Delta \vec{u},$$

независимы лишь две из них.

Источником деформации является неоднородный нагрев, поэтому в векторные уравнения должен входить также градиент температуры. Поэтому, записывая линейную комбинацию вторых производных вектора смещения, можно прийти к уравнению

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} + \alpha\nabla(\operatorname{div}\vec{u}) = \beta\nabla T,$$

что и даёт уравнения термоупругой деформации в общем виде. Смысл коэффициентов α и β в дальнейшем может быть уточнён с помощью эксперимента.

1.5. Уравнения релаксации

При отклонении от положения равновесия любая физическая система стремится вернуться (отрелаксировать) к некоторому положению равновесия. Поэтому динамика релаксирующей системы должна описываться специфическими уравнениями, которые называются *уравнениями релаксации.*

Предположим, что существует некоторая функция Ляпунова Φ, управляющая процессом релаксации. Для реальных физических систем в качестве такой функции Ляпунова могут выступать потенциалы Гиббса или Гельмгольца.

Для описания состояния системы в процессе релаксации удобно ввести величину, называемую *параметром порядка.* Различают *сохраняющиеся* и *несохраняющиеся* параметры порядка. Для сохраняющегося параметра порядка φ должен существовать закон сохранения вида

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{J} = 0.$$

На примерах рассмотрим, как появляются уравнения для этих двух типов параметров порядка.

1. Несохраняющийся параметр порядка. Для начала обратимся к описанию динамики распределения температуры внутри неоднородно нагретого до температуры $T_0(x)$

одномерного тонкого стержня длины L, считая, что с боковой поверхности стержня теплоотвод отсутствует. На торцах стержня поддерживается постоянная температура окружающей среды T_{sr}. Из опыта очевидно, что перераспределение температуры будет продолжаться до тех пор, пока температура не выровняется по всей длине стержня. Поэтому

- в качестве параметра порядка в данной задаче можно выбрать температуру, которая в данном случае не является сохраняющейся величиной, поскольку есть теплоотвод через торцы стержня;
- в качестве функции Ляпунова можно выбрать

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \lambda(x)(\vec{\nabla}T(x,t))^2\,dx,$$

где $\lambda(x) \geqslant 0$, поскольку в процессе выравнивания $\Phi(t)$ достигнет минимума, $\Phi_0 = 0$ только в положении равновесия.

Дифференцируя по времени $\Phi(t)$, находим

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_0^L \lambda(x)\vec{\nabla}T(x,t)\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right)dx,$$

откуда, после интегрирования по частям и учёта граничных условий получим

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\int_0^L \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\vec{\nabla}\left(\lambda(x)\vec{\nabla}T(x,t)\right)dx.$$

Требуя монотонного уменьшения функции Ляпунова в каждый момент времени, получаем, что $\dfrac{d\Phi}{dt} \leqslant 0$, если

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = M\vec{\nabla}\left(\lambda(x)\vec{\nabla}T(x,t)\right),$$

где $M > 0$. Таким образом, релаксация неоднородного распределения температуры будет описываться уравнением теплопроводности, если выбрать $M = C\rho$, а λ отождествить с теплопроводностью среды.

2. Сохраняющийся параметр порядка. Более последовательно эта же задача может быть рассмотрена с термодинамической точки зрения следующим образом:

- состояние вещества описывается известным потенциалом Гиббса $G(T)$;
- выполняется закон сохранения для внутренней энергии

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{J}.$$

В качестве функции Ляпунова выбираем энергию Гиббса и, дифференцируя её по времени, находим

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_0^L \frac{\partial G(T)}{\partial T}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}dx.$$

Выражая из закона сохранения производную от температуры

$$\frac{\partial U}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{J} \quad \text{или} \quad C\frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{J},$$

получаем

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\int_0^L \frac{\partial G(T)}{\partial T}\operatorname{div}\vec{J}dx = \int_0^L \vec{J}\vec{\nabla}\left(\frac{\partial G(T)}{\partial T}\right)dx.$$

Монотонное убывание функции Ляпунова будет возможно при выборе потока в виде

$$\vec{J} = -M\vec{\nabla}\left(\frac{\partial G(T)}{\partial T}\right) = -M\left(\frac{\partial^2 G(T)}{\partial T^2}\right)\vec{\nabla}T \equiv -\lambda(T)\vec{\nabla}T.$$

Подстановка выражения для потока в закон сохранения приводит к уравнению теплопроводности в наиболее общем виде.

Задачи

1.1. Получить уравнение синус-Гордона (sine-Gordon) исходя из функционала

$$S = \int\limits_0^\infty dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r} \left(\frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2 - u_0 \cos\varphi \right).$$

1.2. Получить уравнения электро- и магнитостатики в вакууме (в отсутствие токов и зарядов) для скалярного и векторного потенциалов, исходя из функционала

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r} \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right)$$

и калибровочного условия $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, а также считая, что $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$.

1.3. Векторная функция $\vec{u}(\vec{r})$ характеризует смещение, возникающее при деформации сплошной среды. Необходимо получить уравнения стационарной линейной теории упругости для функции $\vec{u}(\vec{r})$, воспользовавшись функционалом

$$S = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r} \left(\frac{3(1-\sigma)}{2(1+\sigma)} \operatorname{div}^2\vec{u} - \frac{3(1-2\sigma)}{4(1+\sigma)} \operatorname{rot}^2\vec{u} - \alpha \triangle T \operatorname{div}\vec{u} \right),$$

где σ — коэффициент Пуассона (для большинства различных веществ σ меняется в пределах $\left[0, \frac{1}{2}\right]$), α — коэффициент теплового расширения, а величина $\triangle T$ характеризует отклонение температуры от равновесной ($\triangle T = T - T_0$).

1.4. Получить уравнение диффузии, считая известным закон Фика, согласно которому поток концентрации вещества пропорционален его градиенту.

1.5. Получить уравнение непрерывности, описывающее закон сохранения вещества (с плотностью $\rho(\vec{r}, t)$), если поток вещества определяется плотностью импульса.

1.6. Получить уравнение Эйлера, описывающее движение идеальной (без вязкого трения) и несжимаемой ($\dot{\rho} = 0$) жидкости.

1.7. Получить кинетическое уравнение Больцмана, описывающее эволюцию функции распределения вероятности $\rho(\vec{r}, \vec{p}, t)$ ($\int \rho(\vec{r}, \vec{p}, t)\, d^3\vec{r}\, d^3\vec{p} = 1$) во времени, используя приближение времени релаксации (то есть такое приближение, когда источник, обычно называемый интегралом столкновений, определяется выражением $I = -(\rho - \rho_0)/\tau$, где ρ_0 — равновесная функция распределения, а τ — время релаксации).

1.8. Используя в качестве плотности функционала Ляпунова выражение

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2 + F(\varphi)$$

получить для несохраняющегося параметра порядка уравнение Аллена–Кана, а для сохраняющегося параметра порядка уравнение Кана–Хилларда.

2. Уравнения первого порядка

Везде проложены дороги.
Поодиночке и в толпе
Идем куда несут нас ноги,
Но повинуемся толпе.

Г. Мелвилл

2.1. Общий вид уравнений первого порядка

Вернемся к закону сохранения, который в дифференциальной форме имеет вид (8). Этот закон сохранения уже содержит производные первого порядка, поэтому в случае, если феноменологическая связь плотности сохраняющейся величины и плотности потока имеет дифференциальный вид, в результате получится уравнение более высокого порядка. Однако если такая связь $\vec{j} = \vec{j}(\rho)$ не содержит производных, то уравнение останется уравнением первого порядка по старшей производной. Например, закон сохранения вещества, находящегося в некотором заданном поле $\vec{V}(\vec{r}, t)$ скоростей, будет иметь вид (см. задачу 1.5):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = q(\vec{r}, t),$$

где $q(\vec{r}, t)$ — источник вещества, ρ — плотность вещества. Расписав через частные производные оператор дивергенции, в декартовых координатах получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = q(\vec{r}, t) - \rho \operatorname{div}(\vec{V}).$$

Пример 1. Рассмотрим конкретную задачу об очистке газа (см. рис. 3). Считая, что ось Ox направлена вдоль трубы, мы можем пренебречь производными по y и z благодаря тому обстоятельству, что диаметр сечения значительно меньше длины трубы, заполненной адсорбентом. При прохождении по трубе часть газа оседает в адсорбенте, поэтому

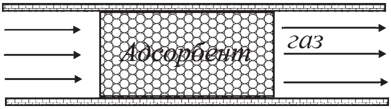


Рис. 3. Для очистки газ пропускается по трубе, заполненной адсорбентом, поглощающим ненужные примеси. В такой задаче пренебрегаем размерами сечения по сравнению с длиной трубы

для источника можно написать выражение

$$q(x,t) = -\nu(x,t)\rho(x,t),$$

поскольку осаждение, очевидно, пропорционально плотности газа, а $\nu(x,t)$ — коэффициент, характеризующий адсорбент. Тогда для плотности газа получится уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) = -\nu(x,t)\rho.$$

Рис. 4. Фильтрация жидкости через почву

Пример 2. В качестве другой конкретной задачи разберем вопрос о просачивании (*фильтрации*, см. рис. 4) жидкости в грунте. В этом случае поток определяется силой тяжести жидкости, и поэтому для $\vec{j}$ будет справедливо следующее выражение: $\vec{j} = V(\rho)\rho\vec{g}$, где ρ — плотность жидкости; $V(\rho)$ — коэффициент, связанный со скоростью просачивания, зависящий от плотности; $\vec{g}$ — ускорение свободного падения. Закон сохранения вещества запишется в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(V(\rho)\rho\vec{g}) = 0.$$

Считая, что $\vec{g} = (0,0,g)$, где $g = \mathrm{const}$, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + g\frac{\partial}{\partial z}(\rho V(\rho)) = 0.$$

Приведенные примеры появления уравнений в частных производных первого порядка, конечно, не являются единственными. Но они дают наглядное представление о том, что все процессы переноса, возникающие в физических задачах, будут сводиться к уравнениям первого порядка, если при этом пренебрегать процессами, при которых происходит рассеяние (*диссипация*) энергии. Например, такая удаленная, казалось бы, от проблем переноса вещества задача, как задача об эволюции во времени неравновесной функции распределения, тоже будет описываться уравнением первого порядка — кинетическим уравнением Больцмана (см. задачу 1.7).

Пример 3. Рассмотрим одномерную задачу о распространении пассивной примеси (например, красителя) в потоке жидкости, текущем по прямой трубе с постоянной скоростью v, и определим закон изменения концентрации $c(x,t)$ примеси в точке x в момент времени t.

При чистой конвекции масса, проходящая через поперечное сечение трубы в единицу времени, равна концентрации, умноженной на скорость, а поток вещества j вызван движением самой среды:

$$j(x,t) = v \cdot c(x,t).$$

Подставляя данное выражение в закон сохранения величины (8), получим уравнение одномерного линейного конвективного переноса:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v\frac{\partial c}{\partial x} = 0.$$

Это уравнение можно решить в общем виде (в форме бегущей волны)

$$c(x,t) = f(x - vt),$$

где $f(x) = c(x,0)$ — начальный профиль концентрации. Таким образом, начальный профиль концентрации со временем не меняет формы, а просто сдвигается (переносится) вдоль оси x со скоростью v.

Пример 4. Функция распределения ρ для частиц массы m и зарядом e, находящихся в однородном электрическом поле $\vec{E}$, в приближении времени релаксации будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{m}(\vec{p}, \nabla_x)\rho + e(\vec{E}, \nabla_p)\rho = -\frac{\rho - \rho_0}{\tau}, \tag{9}$$

где $\vec{p}$ — импульс частицы; ρ — равновесная функция распределения; ∇_x и ∇_p — операторы градиента соответственно в координатном и импульсном пространствах.

Если теперь попытаться обобщить рассмотренные примеры, то можно сделать два вывода:

1) Все уравнения первого порядка соответствуют *процессам конвективного переноса* (без учёта диссипации);

2) В координатах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (где под x_i могут пониматься время, пространственные координаты, импульсы и т. д.) уравнения первого порядка в общем виде можно записать как

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(\vec{x}, u). \tag{10}$$

Если неизвестная функция $u(\vec{x})$ не входит в коэффициенты $b(\vec{x}, u)$, $a_i(\vec{x}, u)$, то уравнение называется *линейным*, в противном случае — *квазилинейным* уравнением в частных производных первого порядка.

Уравнение называется *однородным* (*неоднородным*) уравнением в частных производных первого порядка, если правая часть (10) равна (не равна) нулю.

2.2. Общее решение

Рассмотрим однородное линейное уравнение первого порядка в самом простейшем случае, когда имеется всего две независимые переменные:

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0. \qquad (11)$$

Этому уравнению можно придать некоторый геометрический смысл, если ввести вектор $\vec{k}=(a(x,y),b(x,y))$. Тогда уравнение (11) запишется как некоторая производная по направлению

$$(\vec{k}\vec{\nabla})u\equiv\frac{\partial}{\partial\vec{k}}(u)=0.$$

Смысл этого уравнения состоит в том, что оно определяет поверхность (точнее, семейство поверхностей) $u(x,y)$ в пространстве (u,x,y), как изображено на рисунке 5. Вектор $\vec{k}$ при этом определяет то направление, в котором эта поверхность не меняется, то есть $u(x,y)=\mathrm{const}$. В качестве первого шага построим кривые, касательные к которым совпадают с вектором $\vec{k}$. Поскольку два вектора, вектор $\vec{k}=$ $=(a,b)$ и касательный вектор с компонентами (dx,dy), имеют одинаковое направление, их компоненты должны быть пропорциональны:

$$\frac{dx}{a(x,y)}=\frac{dy}{b(x,y)}.$$

Это уравнение является просто симметрической формой записи обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)}, \qquad (12)$$

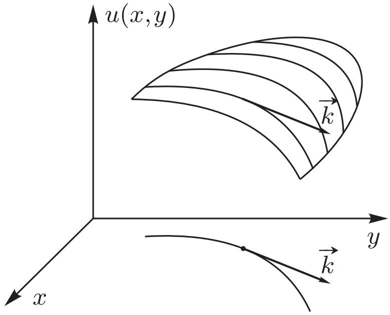


Рис. 5. Поверхность решений уравнения (11)

решение которого $y = y(x, C)$. Каждое значение константы интегрирования определяет некоторую интегральную кривую в силу теоремы существования и единственности [2, 13]. При этом каждой точке (x, y) будет соответствовать своя константа C, и в результате интегральные кривые будут плотно заполнять всю плоскость, не пересекаясь между собой. Чтобы сделать переменные x и y в соотношении (12) более равноправными, введем параметр t, приравняв его дифференциал к выражению (12):

$$\frac{dx}{a(x,y)} = \frac{dy}{b(x,y)} = dt. \tag{13}$$

Этот параметр измеряет длину траектории, и его, по аналогии с механикой, можно считать некоторым формальным временем. Система (13) переписывается в виде системы двух равноправных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(x,t), \\ \dfrac{dy}{dt} = b(x,t), \end{cases}$$

решения которой, $x(t, C)$ и $y(t, C)$, зависят от параметра t и константы интегрирования C. Поскольку система состоит из двух уравнений, то и константы интегрирования на самом деле тоже две, но одна из них в силу произвольности выбора начала отсчета всегда может быть выбрана так, что она будет входить только в виде $(t - t_0)$, поэтому в дальнейшем будем считать, что $t_0 = 0$. Обратив решения этой системы относительно величин t и C, получим соотношения

$$t = t(x, y),$$
$$C \equiv \vartheta(x, y).$$

Константа интегрирования, представленная как функция координат, не меняется вдоль траекторий и называется поэтому *интегралом движения*. Функции ϑ и t можно выбрать в качестве новых переменных,

$$(x, y) \mapsto (t, \vartheta),$$

благодаря тому, что существует взаимно-однозначное соответствие между этими наборами переменных, обусловленное тем, что интегральные кривые плотно заполняют всю плоскость в соответствии с теоремой существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом

$$u(x, y) \mapsto u(x(t, \vartheta), y(t, \vartheta)) \equiv u(t, \vartheta),$$

где мы сохранили за буквой u обозначение для решения, хотя его функциональная зависимость от (x, y) и от (t, ϑ) будет, конечно, различной.

Найдем вид уравнения в новых переменных:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

или

$$\frac{du}{dt}(t, \vartheta) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(t, \vartheta) = \mathrm{const}(\vartheta)$$

на каждой характеристике и, следовательно, функция u не зависит от t. Поэтому общее решение однородного линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка является произвольной функцией от интеграла движения

$$u \equiv u(\vartheta(x, y)).$$

Обобщая этот результат на однородные уравнения с произвольным числом независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, можно утверждать, что его общим решением будет являться функция от интегралов движения

$$u = u(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1}).$$

Найдем теперь общее решение *неоднородного* уравнения

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(\vec{x}, u), \tag{14}$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ зависят как от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, так и от функции u. Запишем уравнения характеристик, вводя параметр t вдоль траектории:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = dt. \tag{15}$$

Поскольку

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(\vec{x}, u)$$

и

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} a_i(\vec{x}, u) = b(\vec{x}, u),$$

получаем

$$\frac{du}{dt} = b(\vec{x}, u). \tag{16}$$

В соотношения (15) и (16) входит один и тот же дифференциал dt, поэтому их можно объединить, записав систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b} = dt. \tag{17}$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (14) сводится к общему решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (17). Систему (17), в свою очередь, можно интерпретировать как уравнение характеристик в пространстве с координатами $(\vec{x}, u)$ для некоторого однородного уравнения в частных производных I порядка:

$$a_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial w}{\partial x_n} + b \frac{\partial w}{\partial u} = 0,$$

общее решение которого $w = w(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)$ является произвольной функцией от интегралов движения системы (17):

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \vartheta_1(\vec{x}, u), \\ \vartheta_2 &= \vartheta_2(\vec{x}, u), \\ \ldots&\ldots\ldots\ldots \\ \vartheta_n &= \vartheta_n(\vec{x}, u). \end{aligned}$$

Чтобы из общего решения $w = w(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)$ получить решение $u(\vec{x})$ уравнения (14), наложим на w некоторые условия, например:

$$w(\vartheta_1(\vec{x}, u), \vartheta_2(\vec{x}, u), \ldots, \vartheta_n(\vec{x}, u)) = 0. \tag{18}$$

Тогда

$$dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx_i = 0.$$

Поскольку dx_i — независимые переменные, то коэффициент перед каждым дифференциалом должен тождественно обратиться в ноль:

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

Из этих условий нетрудно получить выражение для частных производных функции $u(\vec{x})$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{(\partial w/\partial x_i)}{(\partial w/\partial u)},$$

подставляя которые в уравнение (14), получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{1}{(\partial w/\partial u)} \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{1}{(\partial w/\partial u)} b(\vec{x}, u) \frac{\partial w}{\partial u} = b(\vec{x}, u).$$

Таким образом, неявно определяя функцию $u(\vec{x})$ соотношением (18), мы получим общее решение уравнения (14).

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{19}$$

I способ. Записываем уравнение характеристик

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = C.$$

Следовательно, $C = \vartheta(x, y) = x^2 + y^2$;

$$u = u(x^2 + y^2).$$

II способ. Введем параметр t вдоль траектории:

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = dt,$$

или
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$
Исключая y из первого уравнения, получим
$$\ddot{x} = \dot{y} = -x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + x = 0,$$
решения которого
$$\begin{aligned} x &= A\sin(t - t_0), \\ y &= A\cos(t - t_0) \end{aligned}$$
являются решением уравнения (19) в параметрическом виде. Исключая аргумент $(t - t_0)$, получим интеграл движения в виде $A^2 = x^2 + y^2$, откуда следует
$$u = u(x^2 + y^2).$$

Решение при помощи Maple. Приведём далее решение рассмотренного уравнения при помощи системы аналитических вычислений Maple[1]. Данная система обладает богатым функционалом для работы с дифференциальными уравнениями в частных производных.

Для начала нового вычисления без выхода из системы начинаем с команды

```
> restart;
```

[1]Здесь и далее команды Maple, вводимые пользователем, начинаются знаком `>` и набраны шрифтом, имитирующим печатную машинку. Формула, следующая непосредственно за командой и набранная курсивом, является результатом выполнения команды. Весь остальной текст и формулы являются комментариями.

Запишем исходное уравнение

```
> pde := y*diff(u(x,y), x) - x*diff(u(x, y), y);
```

$$pde := y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - x\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Для решения уравнений в частных производных в программном комплексе Maple есть команда `pdsolve`. Эта функция, предназначенная для аналитического решения дифференциальных уравнений в частных производных, возвращает явное, неявное или параметрическое решение в аналитической форме.

Используя данную функцию

```
> pdsolve(pde);
```

получаем искомый интеграл[2] уравнения (19)

$$u(x, y) = \_F1(x^2 + y^2)$$

Задачи

В следующих задачах найти общее решение:

2.1. $(x + 2y)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

2.2. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

2.3. $(x - z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y - z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

2.4. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - y.$

2.5. $e^x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = ye^x.$

[2]Функция $\_F1(\cdot)$ в решении уравнения означает произвольную функцию от указанной комбинации аргументов.

2.6. $2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y-x)\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2.$

2.7. $xy\dfrac{\partial u}{\partial x} - x^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = yu.$

2.8. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} = yx^2 + u.$

2.9. $(x^2+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial u}{\partial y} + u^2 = 0.$

2.10. $2y^4\dfrac{\partial u}{\partial x} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = x\sqrt{1+u^2}.$

2.11. $x^2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2u\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + y.$

2.12. $yu\dfrac{\partial u}{\partial x} - xu\dfrac{\partial u}{\partial y} = e^u.$

2.13. $(u-y)^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + xu\dfrac{\partial u}{\partial y} = xy.$

2.14. $xy\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x-2u)\dfrac{\partial u}{\partial y} = yu.$

2.15. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{x}.$

2.16. $u\dfrac{\partial u}{\partial x} + xu\dfrac{\partial u}{\partial y} = y.$

2.17. $\sin^2(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{tg}(u)\dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos^2(u).$

2.18. $(x+u)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y+u)\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + y.$

2.19. $(xu+y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x+yu)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 - u^2.$

2.20. $(y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (z+x)\dfrac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = u.$

2.21. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + (z+u)\dfrac{\partial u}{\partial z} = xy.$

2.22. $(u-x)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (u-y)\dfrac{\partial u}{\partial y} - z\dfrac{\partial u}{\partial z} = x+y.$

2.3. Задача Коши

Общее решение уравнения (11), найденное в предыдущем разделе, определяется некоторой произвольной функцией

$$F(\vartheta) = 0.$$

Для того чтобы задать единственное решение, нужно определить вид этой произвольной функции. Это можно сделать, задавая значение функции в какой-либо точке траектории. В силу того, что это значение сохраняется вдоль всей траектории: $\dot{u}(t, \vartheta) = 0$, мы зададим значение функции вдоль всей характеристики. Можно рассматривать решение уравнения (11) как некоторый поток в трехмерном пространстве (x, y, u) (см. рис. 6). Задавая значение функции u на некоторой параметризованной кривой γ: $(x(s), y(s))$, через которую проходят характеристики, мы получим поверхность решения $u(x, y)$, соответствующую определенному выбору функции $F(\vartheta)$. В результате вопрос о единственности сводится к вопросу о выборе такой кривой γ: $(x(s), y(s))$, чтобы эта кривая пересекала каждую характеристику $y(x, C)$ равно один раз. Другими словами, кривая начальных условий и кривая ха-

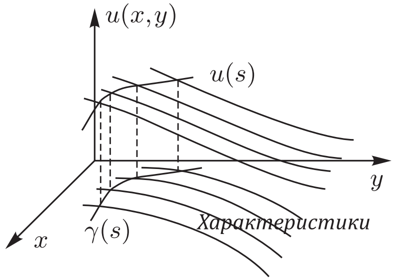


Рис. 6. Задавая значение $u(s)$ в одной точке характеристики, мы задаем значение $u(x, y)$ в каждой точке данной характеристики

рактеристики должны взаимно пересекаться, а не касаться друг друга (*трансверсальное пересечение*).

Пример 6. Пусть в области Ω задано поле характеристик (см. рис. 7). На рисунке 7(a) жирной линией отмечена поверхность начальных условий, которая приводит к однозначному решению задачи Коши. Жирные линии на рисунке 7(b) соответствуют некорректной постановке начальных условий, поскольку приводят к неоднозначному решению задачи Коши.

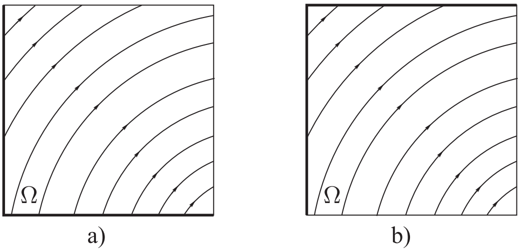


Рис. 7. Выбор однозначных (a) и неоднозначных (b) граничных условий

Будем считать, что на кривой начальных условий, параметризованной переменной s, γ: $(x(s), y(s))$, задана функция $u = u_0(s)$. Выбирая параметр t вдоль характеристики таким образом, чтобы при $t = 0$ характеристика проходила через кривую начальных условий γ, мы получим

$$x(0, C) = x(s), \quad y(0, C) = y(s).$$

Разрешая эту систему, если возможно, относительно параметра s, можно представить значения функции на кривой как

$$u = u_0(s) = u_0(s(C)).$$

Учитывая, что $C = \vartheta(x, y)$, решение задачи Коши в произвольной точке (x, y) будет задаваться выражением

$$u = u_0(s(\vartheta(x, y))).$$

Практически, все эти вычисления сводятся к тому, что нужно вычислить значение интеграла движения на кривой начальных условий

$$\vartheta(x, y)\Big|_{\gamma} = \vartheta(s),$$

а затем, выразив из него s, подставить его в $u(s)$, что и дает решение задачи в явном виде. Если же разрешить (15) относительно s невозможно, то зависимость

$$(x(t, s), y(t, s), u(s))$$

будет определять решение в параметрическом виде.

Обобщим этот результат на случай квазилинейного уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(\vec{x}, u). \quad (20)$$

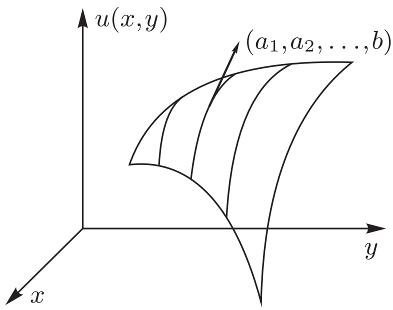


Рис. 8. Поверхность решения $u = f(\vec{x})$ образована характеристиками уравнения с касательными векторами $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$

Общее решение такого уравнения, определяемое неявно соотношением

$$w(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n) = 0,$$

задаёт некоторую поверхность в $(n + 1)$-мерном пространстве, образуемую потоком вдоль характеристик. Действительно, пусть условие $w(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n) = 0$ определяет решение $u = f(\vec{x})$ (см. рис. 8). Построим характеристики, соответствующие данному решению:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(\vec{x}, f(\vec{x})),$$

и выясним, как будет меняться $u(\vec{x})$ вдоль характеристик $x_i(t)$. Поскольку

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i(\vec{x}, u) = b(\vec{x}, f(\vec{x})),$$

то это означает, что касательный вектор к поверхности $u = f(\vec{x})$ задан компонентами $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$. Следовательно, поверхность решения $u = f(\vec{x})$ образована характеристиками уравнения (20), заданными в $(n+1)$-мерном пространстве $(\vec{x}, u)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = a_i(\vec{x}, u(\vec{x})), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{du}{dt} = b(\vec{x}, u(\vec{x})). \end{cases}$$

В силу того, что поверхность $u = f(\vec{x})$ устроена из характеристик, чтобы задать её однозначным образом, достаточно определить начальные условия (значение функции) в одной точке характеристики. Для однозначности начальных условий, в свою очередь, необходимо выделить сечение $(n+1)$-мерного пространства $(\vec{x}, u)$ некоторой гиперповерхностью, имеющей размерность, равную $(n-1)$ (то есть зависящей от $(n-1)$ параметра):

$$\begin{aligned} &x_i = \varphi_i(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ &u = \psi(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}). \end{aligned} \tag{21}$$

Если эта гиперповерхность пересекает каждую кривую ровно в одной точке, то решение задачи Коши будет единственно. Это решение будет параметрически определяться зависимостью (21), получающейся при вычислении значения интегралов движения $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ на гиперповерхности начальных условий (21), причём после этого u и $\vec{x}$ следует выразить как функции параметров $t, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$. После исключения параметров решение задачи Коши будет получено в явном виде: $u = f(\vec{x})$.

Пример 7. Найти интегральную поверхность уравнения

$$ux\frac{\partial u}{\partial x} + uy\frac{\partial u}{\partial y} = -xy,$$

проходящую через кривую $y = x^2, \quad u = x^3$.

Решение. Составляем систему уравнений

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = -\frac{du}{xy}.$$

Первые интегралы: $C_1 = x/y$, $C_2 = u^2 + xy$. Параметризуем кривую переменной s: $x = s$, $y = s^2$, $u = s^3$. Подставляя в интегралы движения, получим следующую систему алгебраических уравнений относительно x, y и $u(x, y)$:

$$\begin{cases} x/y = C_1 = 1/s, \\ u^2 + xy = C_2 = s^6 + s^3. \end{cases}$$

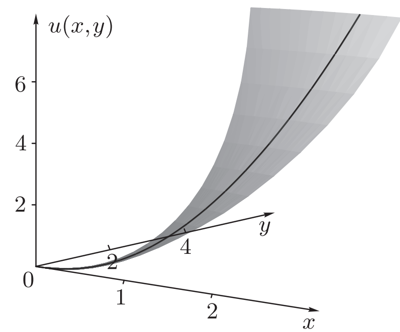


Рис. 9. Поверхность $u(x, y)$, задаваемая неявно соотношением (22). Сплошной линией показана кривая начальных условий

Эта система определяет параметрическую зависимость $u(x, y)$, которую можно получить в явном виде, исключив параметр s (см. рис. 9):

$$u^2 + xy = (y/x)^6 + (y/x)^3. \qquad (22)$$

Решение при помощи Maple. Для начала нового вычисления без выхода из системы начинаем с команды

```
> restart;
```

Запишем исходное уравнение и зададим кривую, через которую должна проходить интегральная поверхность

```
> pde := x*u(x,y)*diff(u(x,y),x)
         +y*u(x,y)*diff(u(x,y),y) = -x*y;
  ics:=y=x^2, U=x^3;
```

$$pde := xu(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + yu(x,y)\frac{\partial}{\partial y} = -xy$$

$$ics := y = x^2, U = x^3$$

Найдём первый интеграл при помощи решения уравнения

```
> eq1 := diff(y(x),x)=y(x)/x;
  seq1 := dsolve(eq1);
```

$$eq1 := \frac{d}{dx}y(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$seq1 := y(x) = \_C1x$$

Выразим из решения интеграл $\_C1$

```
  C1 := subs(_y=y,solve(_y=eval(y(x),seq1),_C1));
```

$$C1 := \frac{y}{x}$$

Аналогичным образом найдём решение второго уравнения

```
> eq2 := diff(u(x),x)
          = subs(y = eval(y(x), seq1), -y/u(x));
```

```
seq2 := subs(_C1 = C1, {dsolve(eq2)});
```

$$eq2 := \frac{d}{dx}u(x) = -\frac{\_C1x}{u(x)}$$

$$seq2 := \{u(x) = \sqrt{-yx + \_C2}, u(x) = -\sqrt{-yx + \_C2}\}$$

и выразим из него второй интеграл

```
> C2 := solve(eval(u(x), seq2[1])=U, _C2);
```

$$C2 := U^2 + yx$$

Параметризуем исходную кривую параметром s

```
> sub := {x=s} union subs(x=s, ics);
```

$$sub := U = s^3, x = s, y = s^2$$

Выразим этот параметр из первого интеграла и подставим во второй. В результате получаем уравнение (22)

```
> s_ := solve(C1=subs(sub, C1), s);
  subs(s=s_, C2=subs(sub, C2));
```

$$s\_ := \frac{y}{x}$$

$$U^2 + xy = \frac{y^6}{x^6} + \frac{y^3}{x^3}$$

Пример 8. Рассмотрим решение одномерного уравнения Больцмана (9) для случая газа из заряженных частиц массы m в однородном электрическом поле $E = E(t)$. Равновесная функция распределения:

$$\rho_0(v) = A \exp\left\{-mv^2/2kT\right\},$$

где A — нормировочная константа. Задача состоит в том, чтобы вычислить функцию распределения $\rho(x, v, t)$ после включения электрического поля. Уравнение Больцмана в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{eE(t)}{m}\frac{\partial \rho}{\partial v} = -\frac{\rho - \rho_0}{\tau}.$$

При $t = 0$ начальные условия для ρ: $\rho(x, v, 0) = \rho_0(v)$. Поскольку число независимых переменных равно трём, то начальные условия должны быть заданы на двумерной поверхности:

$$\begin{cases} t = t(s_1, s_2), \\ x = x(s_1, s_2), \\ v = v(s_1, s_2). \end{cases}$$

Уравнения характеристик

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{v} = -\frac{mdv}{eE} = \frac{\tau\rho}{\rho - \rho_0}$$

приводят к уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = v; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{eE}{m}; \quad \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho - \rho_0}{\tau}.$$

Поверхность начальных условий выберем при $t = 0$, а в качестве параметров — начальные координату и скорость: $x(0) = s_1$ и $v(0) = s_2$. Начальные условия для функции распределения:

$$\rho(x, v, 0) = \rho_0(v) = \rho_0(s_2).$$

Пусть $E(t) = E_0\cos(\omega t)$, тогда

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m}E_0\cos(\omega t),$$

откуда нетрудно получить

$$v(t) = \frac{eE_0}{m\omega}\sin(\omega t) + s_2,$$

поскольку при $t = 0$ имеем $v(0) = s_2$. Тогда уравнение для $x(t)$ будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = \frac{eE_0}{m\omega}\sin(\omega t) + s_2.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$x(t) = -\frac{eE_0}{m\omega^2}\cos(\omega t) + s_2 t + \mathrm{const}.$$

Учитывая, что

$$x(0) = s_1 = -\frac{eE_0}{m\omega^2} + \mathrm{const},$$

приходим к выражению

$$x(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2}(1 - \cos(\omega t)) + s_2 t + s_1.$$

Решим оставшееся уравнение методом вариации постоянной. Для уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho - \rho_0}{\tau},$$

общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\rho(t) = C\exp(-t/\tau).$$

Варьируя постоянную C, получим

$$\rho(t) = C_0\exp(-t/\tau) +$$
$$+ \frac{A}{\tau}\exp(-t/\tau)\int\limits_0^t \exp\left\{\frac{\lambda}{\tau} - \frac{m}{2kT}\left[\frac{eE_0}{m\omega}\sin(\omega\lambda) + s_2\right]^2\right\} d\lambda.$$

Поскольку при $t=0$ функция $\rho(x,v,0)=\rho_0(s_2)$, то

$$\rho(t)=\rho_0(s_2)\exp(-t/\tau)+$$
$$+\frac{A}{\tau}\exp(-t/\tau)\int\limits_0^t \exp\left\{\frac{\lambda}{\tau}-\frac{m}{2kT}\left[\frac{eE_0}{m\omega}\sin(\omega\lambda)+s_2\right]^2\right\}d\lambda.$$

Функция $\rho(t)$ не зависит от s_1, поэтому удобно положить параметр $s_1=0$, а $s_2=s$. Тогда

$$v(t)=\frac{eE_0}{m\omega}\sin(\omega t)+s$$

и, выражая параметр s через скорость, получим

$$s=v(t)-\frac{eE_0}{m\omega}\sin(\omega t)\quad \text{и}\quad \rho_0(s)=A\exp\left\{-\frac{ms^2}{2kT}\right\}.$$

Отсюда следует

$$\rho_0(t)=A\exp\left\{-\frac{m}{2kT}\left[v-\frac{eE_0}{m\omega}\sin(\omega t)\right]^2\right\}.$$

Окончательно получаем:

$$\rho(t)=A\exp(-t/\tau)\exp\left\{-\frac{m}{2kT}\left[v-\frac{eE_0}{m\omega}\sin(\omega t)\right]^2\right\}+$$
$$+\frac{A}{\tau}\exp(-t/\tau)\times$$
$$\times\int\limits_0^t \exp\left\{\frac{\lambda}{\tau}-\frac{m}{2kT}\left[v-\frac{eE_0}{m\omega}(\sin(\omega t)-\sin(\omega\lambda))\right]^2\right\}d\lambda.$$

Задачи

Найти решение задачи Коши:

2.23. $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = 2x, \quad y = 1.$

2.24. $\frac{\partial u}{\partial x} + (2e^x - y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = y, \quad x = 0.$

2.25. $2\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = y^2, \quad x = 1.$

2.26. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = yz, \quad x = 1.$

2.27. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = x^2 + y^2, \quad z = 0.$

2.28. $y^2\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad u = y^2, \quad x = 0.$

2.29. $x\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2, \quad u = x^2, \quad y = 1.$

2.30. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u - xy, \quad u = 1 + y^2, \quad x = 2.$

2.31. $\mathrm{tg}(x)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u, \quad u = x^3, \quad y = x.$

2.32. $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = u^2(x - 3y), \quad yu + 1 = 0, \quad x = 1.$

2.33. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2, \quad u = x(1 - x), \quad y = -2.$

2.34. $yu\frac{\partial u}{\partial x} + xu\frac{\partial u}{\partial y} = xy, \quad u^2 + y^2 = a^2, \quad x = a.$

2.35. $u\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} = 2xu, \quad uy = 1, \quad x + y = 2.$

2.36. $u\frac{\partial u}{\partial x} + (u^2 - x^2)\frac{\partial u}{\partial y} + x = 0, \quad u = 2x, \quad y = x^2.$

2.37. $(y-u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(u-x)\dfrac{\partial u}{\partial y}=x-y, \quad u=-x=y.$

2.38. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+(xu+y)\dfrac{\partial u}{\partial y}=u, \quad ux=1, \quad x+y=2u.$

2.39. $y^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+uy\dfrac{\partial u}{\partial y}+u^2=0, \quad x-uy=1, \quad x-y=0.$

2.40. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=y, \quad y=2u, \quad x+2y=u.$

2.41. $(y+2u^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}-2ux^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2, \quad x=u, \quad y=x^2.$

2.42. $(x-u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y-u)\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u, \quad x-y=2, \quad u+2x=1.$

2.43. $xy^3\dfrac{\partial u}{\partial x}+x^2u^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=y^3u, \quad x=-u^3, \quad y=u^2.$

2.44. $xy\dfrac{\partial u}{\partial x}+xu\dfrac{\partial u}{\partial y}=yu, \quad x=1, \quad u=1+y^2.$

2.45. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+(u-x^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}=2x, \quad u=x^2+x, \quad y=2x^2.$

2.46. $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+xu\dfrac{\partial u}{\partial y}=yu, \quad u=-y^2, \quad x=0.$

2.47. $xu\dfrac{\partial u}{\partial x}+yu\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^3+y, \quad u=4y^3, \quad x=3y^2.$

2.48. $y^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^3y, \quad u=e^{y^2/2}, \quad x=2y.$

2.49. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=u+2x^2, \quad u=x, \quad y=\dfrac{1}{4}-x^2.$

2.50. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+y+u, \quad u=x+y, \quad y=x+1.$

3. Уравнения второго порядка

И по своему долгу, и по своим склонностям, и по мере сил я всегда буду исполнять желания Его Величества, но я не в состоянии ни изменить законов природы, ни изменить действие их сил.

Джон Прингль,
лейб-медик короля Великобритании

Мы не знаем, почему Природа устроена именно так, что многие физические процессы описываются *уравнениями в частных производных второго порядка.* Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка, с которыми приходится наиболее часто встречаться в физических приложениях, относятся к одному из следующих видов:

1) уравнение *теплопроводности*, описывающее распределение температуры с течением времени в непрерывной (*сплошной*) среде,

$$\rho_0 C \frac{\partial \psi}{\partial t} = \operatorname{div}(k \vec{\nabla} \psi),$$

где k — коэффициент теплопроводности, ρ_0 — плотность,
C — удельная теплоемкость, ψ — температура;

2) уравнение колеблющейся упругой струны (*одномерное волновое* уравнение)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0,$$

где c — скорость распространения волн, ψ — отклонение струны от положения равновесия;

3) уравнение *диффузии*

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = D\Delta\psi,$$

где D — коэффициент диффузии, ψ — концентрация;

4) уравнение *Шрёдингера*

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, m — масса частицы, $V(x)$ — потенциал, ψ — волновая функция;

5) трёхмерное *волновое уравнение*

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi = 0;$$

6) уравнение для скалярного потенциала в вакууме (уравнение *Лапласа*)

$$\Delta\psi = 0.$$

Все написанные уравнения *однородны*. Это означает, что если какая-то функция является решением, то будет решением и функция, умноженная на любое число.

Многие задачи сводятся к *неоднородному* уравнению с правой частью, соответствующей приложенным «силам» или «источникам». Если $F(x,t)$ — плотность силы, приложенной на единицу длины струны, то уравнение будет иметь вид (5). Задача может быть неоднородной как вследствие краевых (*граничных и начальных*) условий, так и вследствие неоднородности самого уравнения.

Примером неоднородной задачи (с неоднородными граничными условиями) могут служить колебания упругой струны, один конец которой движется по заданному закону $\psi(0,t) = g(t)$.

3.1. Общие свойства уравнений второго порядка

Прежде чем перейти к методам решения упомянутых выше уравнений, кратко рассмотрим их общие свойства. Сделаем, однако, одно ограничение, рассматривая лишь две независимые переменные. Это делается для того, чтобы упростить рассмотрение, поскольку бо́льшая часть результатов непосредственно обобщается на уравнения с любым числом независимых переменных. Сформулируем задачу следующим образом: требуется найти функцию $\psi(x, y)$, удовлетворяющую некоторому уравнению второго порядка в области G плоскости (x, y), ограниченной кривой γ.

Дифференциальное уравнение в частных производных необходимо дополнить краевыми условиями определенного вида. Предположим, что они задают значения ψ и (или) её производных на кривой γ.

Обычно встречаются три типа краевых условий:

1) Условия Дирихле: ψ задано в каждой точке границы γ;

2) Условия Неймана: в каждой точке границы γ задано значение нормальной производной $\partial\psi/\partial n$;

3) Условия Коши: в каждой точке границы γ заданы функция ψ и её нормальная производная $\partial\psi/\partial n$.

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка можно было бы ожидать, что условия Коши — наиболее естественный вид краевых условий. Однако это не совсем так.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка задание значения функции $\psi(x_0)$ и её производной $\psi'(x_0)$ в точке x_0, в которой все коэффициенты уравнения являются гладкими функциями, является достаточным для того, чтобы определить все высшие производные функции $\psi(x)$ в точке x_0, гарантируя тем самым существование решения вблизи x_0 в виде ряда Тейлора.

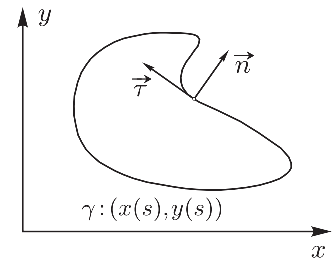


Рис. 10. Кривая $\gamma(s)$, задающая границу области, вектор нормали $\vec{n}$ и касательный вектор $\vec{\tau}$

Рассмотрим теперь этот вопрос для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Более конкретно: будет ли достаточно задания значений функции ψ и её производной $\partial\psi/\partial\vec{n}$ вдоль границы γ области G вместе с самим дифференциальным уравнением для определения второй и более высоких производных от ψ на граничной кривой и, как следствие, будет ли существовать решение в виде ряда Тейлора вблизи кривой γ?

Будем считать, что краевая кривая γ параметризована как $x(s)$ и $y(s)$, где s — длина кривой вдоль границы. Предположим, что вдоль границы заданы $\psi(s)$ и нормальная производная

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}(s) = N(s).$$

Касательный вектор к границе кривой имеет компоненты $\vec{\tau} = (dx/ds, dy/ds)$, а вектор нормали $\vec{n} = (-$ $-dy/ds, dx/ds)$. Следовательно,

$$N(s) = \frac{\partial\psi}{\partial n}(s) = \vec{n}\vec{\nabla}\psi = -\frac{dy}{ds}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{dx}{ds}\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Это уравнение, вместе с соотношением

$$\frac{d\psi}{ds}(s) = \frac{dx}{ds}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{dy}{ds}\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

можно разрешить относительно первых производных функции ψ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -N(s)\frac{dy}{ds} + \Big(\frac{d}{ds}\psi(s)\Big)\frac{dx}{ds},$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = N(s)\frac{dx}{ds} + \Big(\frac{d}{ds}\psi(s)\Big)\frac{dy}{ds}.$$

Следующий шаг — найти вторые производные. Два уравнения можно найти дифференцированием известных первых производных вдоль границы:

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}.$$

Третье уравнение получается из исходного дифференциального уравнения, которое запишем в виде:

$$A\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = f\left(x, y, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right).$$

Систему из трёх уравнений нельзя разрешить относительно вторых частных производных от функции ψ только в том случае, если она вырождена:

$$\det\begin{bmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ A & 2B & C \end{bmatrix} = 0, \qquad (23)$$

или

$$A\Big(\frac{dy}{ds}\Big)^2 - 2B\Big(\frac{dx}{ds}\Big)\Big(\frac{dy}{ds}\Big) + C\Big(\frac{dx}{ds}\Big)^2 = 0.$$

Последнее сводится к квадратному уравнению для производной $\dfrac{dy}{dx}$:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0,$$

которое в каждой точке плоскости имеет два независимых решения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \tag{24}$$

каждое из которых определяет некоторое характеристическое направление в данной точке (x, y). Кривые в плоскости (x, y), касательная к которым в каждой точке совпадает с некоторым характеристическим направлением, называются *характеристиками дифференциального уравнения в частных производных второго порядка.*

Таким образом, вторые производные определяются всюду, кроме точек, где краевая кривая является касательной к характеристикам. Дальнейшее дифференцирование приводит к аналогичной системе совместных уравнений для третьих (и высших) производных. Условие их разрешимости содержит тот же детерминант (23). Следовательно, краевые условия Коши определяют решения, если краевая кривая нигде не касается характеристик.

3.2. Классификация уравнений и граничные условия

Из (24) следует, что если характеристики являются вещественными кривыми, то $B^2 > AC$. Дифференциальные уравнения, удовлетворяющие такому условию, называются *гиперболическими.* Если $B^2 = AC$, то уравнение называется *параболическим,* в случае $B^2 < AC$ — *эллиптическим.*

Обсудим выбор краевых условий, соответствующий трём типам уравнений. Начнем с гиперболического уравнения.

Полезное представление роли характеристик и краевых условий получается, если считать характеристики кривыми, вдоль которых распространяется информация о решении. Рассмотрим в качестве примера уравнение струны:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0,$$

для которого коэффициенты равны

$$A = \frac{1}{c^2}, \quad B = 0, \quad C = -1.$$

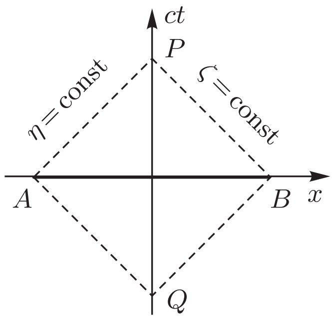


Рис. 11. Характеристики одномерного волнового уравнения

Тогда уравнения характеристик будут иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = \pm c.$$

Их решения — прямые линии

$$x - ct = \zeta = \text{const}$$

и

$$x + ct = \eta = \text{const},$$

семейства которых представлены на рисунке 11 и которые образуют «естественную систему» координат на плоскости.

Задавая значения функции $\psi(x)$ и нормальной производной

$$N(x) = \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

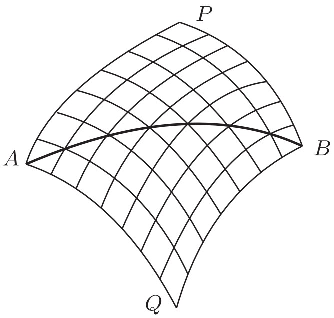


Рис. 12. Условия Коши вдоль дуги AB определяют решение внутри области $APBQ$

вдоль отрезка AB (см. рис. 11), можно найти значение $\psi(x, y)$ в любой точке, где пересекаются характеристики ζ и η, то есть в прямоугольнике $APBQ$.

Этот результат легко обобщить на произвольное гиперболическое уравнение. Пусть система выглядит, как на рисунке 12. Условия Коши вдоль дуги AB определяют решение внутри «четырехугольной» области $APBQ$, ограниченной характеристиками, проходящими через A и B.

Теперь можно исследовать и более сложную ситуацию. Рассмотрим систему характеристик и границу, показанные на рисунке 13. Условия Коши, заданные в каждой точке дуги AB, определяют поведение вдоль всех вертикальных характеристик, которые пересекаются с границей ABC, и вдоль всех характеристик, пересекающих дугу AB. Чем определяется тогда поведение вдоль горизонтальных характеристик, начинающихся между B и C? Поскольку на вертикальных характеристиках уже задано решение, то условие Коши, задаваемое на интервале BC, будет переопределять задачу. Поэтому на кривой BC достаточно задать условия Дирихле или Неймана.

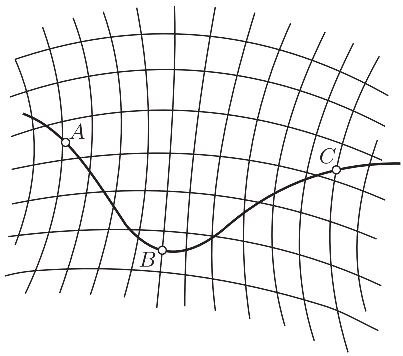


Рис. 13. Система характеристик с краевой кривой ABC, касающейся характеристики в точке B

Перейдем теперь к эллиптическим уравнениям. В отличие от гиперболических уравнений условия Коши на открытой границе в этом случае совершенно неудовлетворительны. Рассмотрим, например, двумерное уравнение Лапласа. Если известны величина ψ и $\partial\psi/\partial\vec{n}$ на конечном интервале вещественной оси, то ничего нельзя сказать о значении ψ в других точках. Для эллиптического уравнения информация не распространяется вдоль характеристик (поскольку нет вещественных характеристик); она, можно сказать, «диффундирует» внутрь области с границ. Чтобы определить значение ψ в заданной области, граница должна охватывать эту область, поэтому на границе в каждой точке должно быть задано только одно условие. Условия Коши в этом случае переопределяют задачу, поэтому необходимо использовать либо условия Дирихле, либо условия Неймана (либо их линейную комбинацию).

Можно было бы исследовать, удобен ли такой тип условий для гиперболических уравнений. Ответ в общем отрицателен. Основная причина состоит в том, что можно найти ненулевые решения гиперболического уравнения, которые (или их нормальные производные) обращаются в нуль на определенных замкнутых границах. Существование таких типов «нормальных колебаний» вызывает трудности, если пытаться наложить условия Дирихле или Неймана на замкнутой границе.

Рассмотрим, наконец, параболические уравнения. Они всегда описывают процессы «диффузионного» типа и характеризуются необратимостью. Действительно, в переменных, связанных с уравнениями характеристик, параболические уравнения приводятся к виду, когда по одной независимой переменной старшая производная имеет первый порядок. Примером таких уравнений являются уравнения диф-

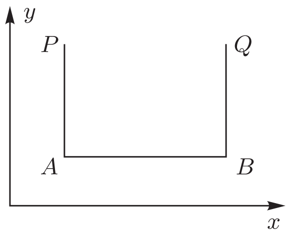


Рис. 14. Удобная граница для решения задач диффузии и теплопроводности

фузии (или теплопроводности) первого порядка по времени. Поэтому физически разумно задавать условия Дирихле вдоль границы, на которой время постоянно (см. рис. 14). В любом случае решение находится для будущих моментов времени, а решение для прошедших моментов времени найти нельзя. Точнее говоря, решение в обратном направлении неустойчиво. Если время движется вперед, процесс диффузии (или теплопроводности) сглаживает особенности; если назад, то особенности возникают и решение продолжить невозможно.

В таблице 1 представлены типы граничных условий, соответствующие различным типам уравнений.

Таблица 1. Различные типы граничных условий

Уравнение	Условие	Граница
Гиперболическое	Коши	открытая
Эллиптическое	Дирихле или Неймана	закрытая
Параболическое	Дирихле или Неймана	открытая

3.3. Приведение уравнений к каноническому виду

Рассмотрим уравнение

$$AU_{xx} + 2BU_{xy} + CU_{yy} = F(x, y, U, U_x, U_y), \tag{25}$$

где через U_x, U_y и U_{xx}, U_{xy}, U_{yy} обозначены частные производные первого и второго порядка соответственно по указанным переменным; коэффициенты A, B и C также могут зависеть от переменных x, y.

Для приведения уравнения (25) к каноническому виду необходимо проинтегрировать уравнения характеристик (24)

$$\begin{aligned} Ady - (B + \sqrt{B^2 - AC})dx = 0, \\ Ady - (B - \sqrt{B^2 - AC})dx = 0 \end{aligned} \tag{26}$$

и найти интегралы $f_1(x, y) = c_1,\ f_2(x, y) = c_2$.

Далее необходимо выполнить замену переменных

$$\xi = f_1(x, y), \quad \eta = f_2(x, y), \quad U(\xi, \eta) = U(x, y)$$

в исходном уравнении. Получим уравнение

$$\tilde{A}U_{\xi\xi} + 2\tilde{B}U_{\xi\eta} + \tilde{C}U_{\eta\eta} = \tilde{F}(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta), \quad U = U(\xi, \eta).$$

Как было отмечено выше, знак подкоренного выражения в (26) определяет тип уравнения.

1) Если $B^2 - AC > 0$, то есть $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ вещественны и функционально независимы, то $\tilde{A} = \tilde{C} = 0$. Уравнение примет вид

$$2\tilde{B}U_{\xi\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) = 0.$$

Это каноническая форма уравнения *гиперболического* типа.

При построении решений на практике часто используется каноническая форма другого вида. Положив $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, придём к уравнению

$$U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} + \Phi(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta) = 0.$$

2) Если $B^2 - AC = 0$, имеется лишь один интеграл. Положим в этом случае

$$\xi = f_1(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad U(\xi, \eta) = U(x, y),$$

где $\eta(x, y)$ — любая функция, независимая от $\xi = f_1(x, y)$. При этом коэффициенты $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ при старших производных обратятся в нуль. Получим канонический вид уравнений *параболического* типа:

$$\tilde{C} U_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) = 0,$$

к которому, в частности, принадлежит уравнение теплопроводности

$$U_t = a^2 U_{xx}.$$

3) Если $B^2 - AC < 0$, то интегралы уравнений характеристик будут комплексно-сопряженными. В этом случае замена переменных

$$\xi = \frac{1}{2}(f_1(x, y) + f_2(x, y)) = \mathrm{Re} f_1(x, y),$$

$$\eta = \frac{1}{2}(f_1(x, y) - f_2(x, y)) = \mathrm{Im} f_1(x, y)$$

приведет к канонической форме уравнений *эллиптического* вида.

Пример 1. Привести к каноническому виду и найти общее решение уравнения

$$U_{xx} + 2U_{xy} - 3U_{yy} + 2U_x + 6U_y = 0.$$

Решение. В данном случае $A = 1$, $B = 1$, $C = -3$. Интегралы уравнений характеристик имеют вид

$$x + y = c_1, \quad 3x - y = c_2.$$

Делая замену $\xi = x + y$, $\eta = 3x - y$, вычисляя производные $U_x = U_\xi + 3U_\eta$, $U_y = U_\xi - U_\eta$, $U_{xx} = U_{\xi\xi} + 6U_{\xi\eta} + 9U_{\eta\eta}$, $U_{xy} = U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}$, $U_{xy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} - 3U_{\eta\eta}$ и подставляя их в исходное уравнение, получим:

$$U_{\xi\eta} + \frac{1}{2}U_\xi = 0.$$

Это уравнение можно проинтегрировать следующим образом. Запишем его в виде $\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[U_\eta + \dfrac{1}{2}U\right] = 0$. Это означает, что выражение, стоящее в квадратных скобках, не зависит от переменной ξ и может зависеть лишь от η: $U_\eta + \dfrac{1}{2}U = f(\eta)$, где f — произвольная функция указанного аргумента. Полученное уравнение является линейным, его решение можно записать как сумму общего решения однородного уравнения, равного $U_0 = \varphi(\xi)e^{-\eta/2}$, где $\varphi(\xi)$ — произвольная функция, и частного решения неоднородного уравнения, которое при произвольной правой части, зависящей от η, есть просто некоторая (произвольная) функция от η. Таким образом, общее решение уравнения содержит две произвольные функции и имеет вид

$$U(\xi,\eta) = \varphi(\xi)e^{-\eta/2} + \phi(\eta)$$

или, в переменных (x, y)

$$U(x, y) = \varphi(x + y)e^{-(3x-y)/2} + \phi(3x - y).$$

Решение при помощи Maple. Для замены переменных в уравнениях в частных производных необходимо подключить пакет `PDEtools`, который дает дополнительный функционал при работе с уравнениями в частных производных.

```
> restart;
  with(PDEtools):
```

Запишем исходное уравнение

```
> pde := diff(U(x,y),x,x) + 2*diff(U(x,y),x,y)
       - 3*diff(U(x,y),y,y) + 2*diff(U(x,y),x)
       + 6*diff(U(x,y),y);
```

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x, y) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}U(x, y) - 3\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(x, y) + 2\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) + 6\frac{\partial}{\partial y}U(x, y)$$

Найдём коэффициенты A, B и C

```
> A := coeff(pde, diff(U(x,y),x,x));
  B := coeff(pde, diff(U(x,y),x,y)) / 2;
  C := coeff(pde, diff(U(x,y),y,y));
```

$$A := 1$$
$$B := 1$$
$$C := -3$$

Проинтегрируем уравнения характеристик

```
> y1 := dsolve(diff(y(x),x)=(B+sqrt(B^2-A*C))/A);
  y2 := dsolve(diff(y(x),x)=(B-sqrt(B^2-A*C))/A);
```

$$y1 := y(x) = 3x + \_C1$$
$$y2 := y(x) = -x + \_C1$$

В полученных решениях константы $\_C1$ являются искомыми интегралами. Обозначим найденные интегралы за новые переменные[3]

```
> xi_ := -solve(y - eval(y(x), y2), _C1);
  eta_ := solve(y - eval(y(x), y1), _C1);
```

$$xi\_ := y + x$$
$$eta\_ := 3x - y$$

Разрешим полученные выражения относительно x и y

```
> tr := solve({xi = xi_, eta = eta_}, {x, y});
```

$$tr := \left\{x = \frac{\xi}{4} + \frac{\eta}{4},\ y = -\frac{\xi}{4} + \frac{3\eta}{4}\right\}$$

Сделаем замену переменных в исходном уравнении при помощи команды `dchange`

```
> pde2 := dchange(tr, pde)/16;
```

$$pde2 := \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}U(\xi,\eta) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}U(\xi,\eta)$$

Решая это уравнение, получаем

```
> pdsolve(pde2);
```

$$U(\xi,\eta) = \_F1(\eta) + \mathrm{e}^{-\frac{\eta}{2}}\_F2(\xi)$$

где $\_F1(\eta)$, $\_F2(\xi)$ — произвольные функции указанных аргументов.

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение

$$U_{xx} + 4U_{xy} + 5U_{yy} + U_x + 2U_y = 0.$$

[3]В выражении для `eta_` мы поставили знак «−» для соответствия новых переменных рассмотренным в примере выше. Очевидно, что полученные интегралы уравнения характеристик остаются таковыми с точностью до умножения на произвольную постоянную.

Решение. В данном случае $A = 1$, $B = 2$, $C = 5$. Интегралы уравнений характеристик комплексны и имеют вид

$$(2x - y) \pm ix = c_{1,2}.$$

Делая замену $\xi = 2x - y$, $\eta = x$, вычисляя производные $U_x = 2U_\xi + U_\eta$, $U_y = -U_\xi$, $U_{xx} = 4U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}$, $U_{yy} = U_{\xi\xi}$, $U_{xy} = -2U_{\xi\xi} - U_{\xi\eta} - 3U_{\eta\eta}$ и подставляя их в исходное уравнение, получим уравнение эллиптического типа:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_\eta = 0.$$

Решение при помощи Maple. Первые несколько шагов аналогичны предыдущему примеру.

```
> restart;
 with(PDEtools):
> pde := diff(U(x,y),x,x) + 4*diff(U(x,y),x,y)
       + 5*diff(U(x,y),y,y) + diff(U(x,y),x)
       + 2*diff(U(x,y),y);
```

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,y) + 4\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}U(x,y) + 5\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}U(x,y) + 2\frac{\partial}{\partial y}U(x,y)$$

```
> A := coeff(pde, diff(U(x,y),x,x));
  B := coeff(pde, diff(U(x,y),x,y)) / 2;
  C := coeff(pde, diff(U(x,y),y,y));
```

$$A := 1$$
$$B := 2$$
$$C := 5$$

```
> y1 := dsolve(diff(y(x),x)=(B+sqrt(B^2-A*C))/A);
```

```
y2 := dsolve(diff(y(x),x)=(B-sqrt(B^2-A*C))/A);
```

$$y1 := y(x) = (2 + I)x + \_C1$$
$$y2 := y(x) = (2 - I)x + \_C1$$

В данном случае мы получили комплексно-сопряженные корни (в Maple символ I обозначает мнимую единицу). Для определения действительных и мнимых частей полученных выражений сделаем предположение, что x и y являются действительными числами

```
> assume(x, real): assume(y, real):
```

В качестве новых переменных выберем действительную и мнимую часть полученных интегралов

```
> xi_ := -Re(solve(y - eval(y(x), y1), _C1));
  eta_ := -Im(solve(y - eval(y(x), y2), _C1));
```

$$xi\_ := 2x\sim - y\sim$$
$$eta\_ := x\sim$$

Символ «~» около x и y возникает после применения к ним команды `assume` и лишь показывает, что на эти переменные наложено некоторое ограничение.

Разрешая полученные выражения относительно x и y

```
> tr := solve({xi = xi_, eta = eta_}, {x, y});
```

$$tr := x\sim = \eta,\ y\sim = -\xi + 2\eta$$

и делая замену, получаем уравнение в новых переменных

```
> simplify(dchange(tr, pde));
```

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}U(\xi,\eta) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}U(\xi,\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta}U(\xi,\eta)$$

Задачи

Определить тип уравнений.

3.1. $2u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} = 0$.

3.2. $2u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$.

3.3. $3u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

3.4. $4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} = 0$.

3.5. $3u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} = 0$.

3.6. $5u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

3.7. $4u_{xx} - 10u_{xy} + u_{yy} = 0$.

3.8. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$.

3.9. Найти области гиперболичности, параболичности, эллиптичности уравнения $xu_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$.

Привести к каноническому виду следующие уравнения.

3.10. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$.

3.11. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$.

3.12. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0$.

3.13. $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$.

3.14. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + yu_y = 0$.

3.15. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0$.

3.16. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} = 0$.

3.17. $u_{xx} + u_{tt} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{tx} + u_{xz} + u_{ty} - 2u_{yz} = 0$.

3.18. $u_{xy} + u_{xz} - u_{tx} - u_{yz} + u_{ty} + u_{tz} = 0$.

Привести уравнения к каноническому виду и найти общее решение.

3.19. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$.

3.20. $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$.

3.21. $xu_{xx} - yu_{xy} + (u_x - u_y)/2 = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$.

Приложение. Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений I порядка

Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка обычно сводится к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Поэтому остановимся на наиболее распространённых методах и приёмах решения таких задач.

1. Элементарные методы интегрирования систем ОДУ. Во многих случаях удобно решать систему уравнений, отыскивая интегрируемые комбинации.

Пример. Найти общее решение системы

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}.$$

Решение. Первые две дроби образуют интегрируемую комбинацию. Умножая равенство

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}$$

на z и интегрируя, получим первый интеграл

$$\frac{x}{y} = c_1.$$

Чтобы найти вторую интегрируемую комбинацию, воспользуемся следующим свойством равных дробей: если

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = t,$$

то при любых $k_1 = k_2 = \ldots = k_n$ имеем

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_n b_n} = t.$$

Пользуясь этим свойством, получим

$$\frac{ydx + xdy}{xyz + xyz} = \frac{dz}{-xy},$$

или

$$d(xy) = -2zdz.$$

Следовательно: $xy + z^2 = c_2$. Очевидно, первый и второй интегралы системы независимы. Система решена.

Вместо того чтобы искать вторую интегрируемую комбинацию, можно, воспользовавшись знанием первого интеграла, исключить из системы одно из неизвестных, например x. Из выражения для первого интеграла имеем $x = c_1 y$. Подставляя в соотношение

$$\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy},$$

получим

$$\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-c_1 y^2}.$$

Отсюда $-c_1 ydy = zdz$, или $z^2 = -c_1 y^2 + c_2$. Подставляя выражение для c_1, найдем еще один первый интеграл $xy + z^2 = c_2$.

Задачи

Найти интегралы данных систем уравнений:

4.1. $y' = x/z, \quad z' = -x/y;$

4.2. $y' = \dfrac{y^2}{z - x}, \quad z' = 1 + y;$

4.3. $y' = z/x, \quad z' = \dfrac{z(y + 2z - 1)}{x(y - 1)};$

4.4. $y' = y^2 z, \quad z' = z/x + yz^2;$

4.5. $2zy' = y^2 - z^2 + 1, \quad z' = z + y;$

4.6. $\dfrac{dx}{2x - z} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z};$

4.7. $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{z};$

4.8. $\dfrac{dx}{y + z} = \dfrac{dy}{x + z} = \dfrac{dz}{x + y};$

4.9. $\dfrac{dx}{y - x} = \dfrac{dy}{x + y + z} = \dfrac{dz}{x - y};$

4.10. $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{u} = \dfrac{dz}{x} = \dfrac{du}{y};$

4.11. $\dfrac{dx}{y - u} = \dfrac{dy}{z - x} = \dfrac{dz}{u - y} = \dfrac{du}{x - z};$

4.12. $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{y};$

4.13. $\dfrac{dx}{z^2 - x^2} = \dfrac{dy}{z} = -\dfrac{dz}{y};$

4.14. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{xy + z};$

4.15. $\dfrac{dx}{zx} = \dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{xy\sqrt{1 + z^2}};$

4.16. $\dfrac{dx}{x + y^2 + z^2} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z};$

4.17. $\dfrac{dx}{x(y + z)} = \dfrac{dy}{z(z - y)} = \dfrac{dz}{y(y - z)};$

4.18. $-\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{yx - 2z^2} = \dfrac{dz}{xz};$

4.19. $\dfrac{dx}{x(z - y)} = \dfrac{dy}{y(y - x)} = \dfrac{dz}{y^2 - xz};$

4.20. $\dfrac{dx}{x(y^2 - z^2)} = -\dfrac{dy}{y(z^2 + x^2)} = \dfrac{dz}{z(x^2 + y^2)}.$

Ответы и решения

Вывод уравнений в частных производных

1.1. $\ddot{\varphi} - \Delta\varphi = u_0 \sin(\varphi)$

1.2. $\delta S = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r}(\vec{E}\delta\vec{E} - \vec{B}\delta\vec{B}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r}(-\vec{E}\,\delta\nabla\varphi -$
$- \vec{B}\,\delta\,\mathrm{rot}\,\vec{A}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{r}(-\,\mathrm{div}\,\nabla\varphi\,\delta\varphi + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}\,\delta\vec{A}).$

Для экстремальности функционала необходимо, чтобы

$$\mathrm{div}\,\nabla\varphi = \Delta\varphi = 0, \quad \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = 0.$$

Поскольку на $\vec{A}$ для однозначности накладывается дополнительное калибровочное условие, например $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$, уравнение для векторного потенциала принимает вид

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A} = -\Delta\vec{A} = 0.$$

1.3. $\dfrac{3(1-\sigma)}{(1+\sigma)}\nabla\,\mathrm{div}\;\vec{u} - \dfrac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\;\vec{u} + \alpha\nabla T = 0.$

1.4. С учётом закона Фика можно написать выражение для потока

$$\vec{j} = -D\nabla(C),$$

при этом знак «$-$» учитывает то обстоятельство, что диффузия идет в направлении, противоположном градиенту концентрации. Подставляя в уравнение (8), получим

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \mathrm{div}(D\nabla(C)) + q(\vec{r}, t),$$

где D — коэффициент диффузии, C — концентрация, $q(\vec{r}, t)$ — источник данного вещества.

1.5. Плотность потока вещества определяется плотностью импульса, поэтому для $\vec{j}$ можно написать $\vec{j} = \rho\vec{V}$, где $\vec{V}$ является полем скоростей и предполагается заданным. Подставляя в (8), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{V}) = q(\vec{r}, t),$$

где $q(\vec{r}, t)$ — источник вещества. Если он отсутствует и вещество можно считать несжимаемым ($\dot{\rho} = 0$), то уравнение непрерывности будет иметь вид $\operatorname{div}(\vec{V}) = 0$.

1.6. Запишем закон сохранения импульса. Поскольку плотность импульса является векторной величиной (с компонентами ρV_i), то плотность потока импульса получится умножением плотности импульса ещё на компоненту скорости V_i. Получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\vec{V}V_i) = q(\vec{r}, t).$$

Выясним вопрос об источниках изменения импульса. Выделим единичный элемент объёма жидкости. В соответствии с законом Ньютона изменение импульса этого элемента должны вызывать приложенные силы. К таким силам (в отсутствие трения) можно отнести только силу тяжести, равную $\rho\vec{g}$, и давление со стороны окружающих элементов. Сила давления определяется как интеграл

$$\vec{F} = -\oint p\, dS$$

по границе элемента, или, с учётом теоремы Гаусса,

$$\vec{F} = -\int \nabla(p)\, dV.$$

Поэтому для отдельного элемента жидкости полная сила, действующая на него, равна

$$\vec{F} = -\nabla(p) + \rho\vec{g}.$$

Подставляя в (8), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\vec{V}V_i) = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}(p),$$

С учётом несжимаемости жидкости ($\rho = \mathrm{const}$), если учесть уравнение непрерывности $\mathrm{div}(\vec{V}) = 0$ (см. задачу 1.5), будем иметь в векторном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{V} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p).$$

1.7. Рассмотрим некоторый газ, находящийся в объёме V, при давлении P и температуре T. Число частиц, находящихся в элементе объёма $\triangle V$, с импульсами в интервале $[p, p + \triangle p]$ будет пропорционально величине объёма $\Delta N \sim \Delta V \Delta p$. Коэффициент пропорциональности является функций от импульсов и координат $\rho = \rho(\vec{r}, \vec{p}, t)$ и называется функцией распределения

$$\Delta N = \rho(\vec{r}, \vec{p}, t)\Delta V \Delta p.$$

Примером известных функций распределения являются следующие распределения:

1) распределение Максвелла (по скоростям)

$$\rho(\vec{v}) \sim \exp\left\{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT\right\},$$

где k — постоянная Больцмана, m — масса частицы, T — абсолютная температура;

2) распределение Больцмана (по координатам)

$$\rho(\vec{r}) \sim \exp\{-U(\vec{r})/2kT\},$$

где $U(\vec{r})$ — потенциальная энергия;

3) объединив оба эти распределения, можно получить совместное распределение

$$\rho(\vec{r}, \vec{v}) \sim \exp\{-E/2kT\},$$

где $E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r})$.

Однако приведённые функции распределения справедливы лишь для равновесных состояний (то есть когда прошли релаксационные процессы). Если систему вывести из состояния равновесия, то число частиц в единице объёма изменится, $\Delta N \to \Delta N'$, а сам элемент объёма перейдёт в $\Delta V \Delta p \to \Delta V' \Delta p'$. Рассмотрим сначала, как изменится функция распределения для идеального газа, для которого потенциальная энергия взаимодействия между частицами значительно меньше кинетической энергии частиц. В этом случае можно считать, что столкновения между частицами отсутствуют, следовательно, $\Delta N \sim \Delta N'$. С другой стороны, для консервативных систем, согласно теореме Лиувилля, сохраняется фазовый объём $\Delta V \Delta p = \Delta V' \Delta p'$. Поэтому, при отсутствии столкновений, функция распределения является сохраняющейся величиной и для неё должен быть справедлив закон сохранения, аналогичный (8)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}_x \left(\rho \frac{d\vec{r}}{dt} \right) + \mathrm{div}_p \left(\rho \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = 0,$$

где $d\vec{r}/dt$ и $d\vec{p}/dt$ — скорости переноса в координатном и импульсном пространствах. Используя уравнения движения

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

получим
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}_x\left(\rho\frac{\vec{p}}{m}\right)+\mathrm{div}_p\left(\rho\vec{F}\right)=0.$$
Поскольку фазовый объём сохраняется, движение фазового потока эквивалентно движению несжимаемой жидкости, и, как следствие, должны выполняться условия $\mathrm{div}_x(\vec{p})=0$ и $\mathrm{div}_p(\vec{F})=0$. Поэтому справедливо уравнение
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\vec{\nabla}_x(\rho)+\vec{F}\vec{\nabla}_p(\rho)=0.$$
Теперь можно перейти к неидеальному газу и учесть столкновения между частицами. Эти столкновения будут выступать в роли некоторого источника (который обычно называют интегралом столкновений I), стремящегося перевести неравновесную функцию распределения в равновесную. Будем считать, что за время τ (время релаксации) функция распределения ρ становится равновесной функцией распределения ρ_0. В линейном приближении можно написать $\rho_0\approx\rho+I\tau$. Отсюда
$$I=-\frac{\rho-\rho_0}{\tau}.$$
В итоге кинетическое уравнение, в приближении времени релаксации, будет иметь вид
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\vec{\nabla}_x(\rho)+\vec{F}\vec{\nabla}_p(\rho)=-\frac{\rho-\rho_0}{\tau}.$$

Общее решение для уравнений первого порядка

2.1. $u = F(xy + y^2)$.

2.2. $u = F(y/x, z/x)$.

2.3. $u = F((x-y)^2/z, (x+y+2z)^2/z)$.

2.4. $u = F(x^2 - y^2, x - y + u)$.

2.5. $F\left(e^{-x} - y^{-1}, u + \dfrac{x - \ln|y|}{e^{-x} - y^{-1}}\right) = 0$.

2.6. $F\left(x^2 - 4u, \dfrac{(x+y)^2}{x}\right) = 0$.

2.7. $F\left(x^2 + y^2, u/x\right) = 0$.

2.8. $F\left(x^2/y, xy - 3u/x\right) = 0$.

2.9. $F\left(\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{u}, \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{u}\right) = 0$.

2.10. $F\left(x^2 + y^4, y(u + \sqrt{1+u^2})\right) = 0$.

2.11. $F\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}, \ln|xy| - \dfrac{u^2}{2}\right) = 0$.

2.12. $F\left(x^2 + y^2, \operatorname{arctg}(x/y) + (1+u)e^{-u}\right) = 0$.

2.13. $F\left(u^2 - y^2, x^2 + (y-u)^2\right) = 0$.

2.14. $F\left(u/x, 2x - 4u - y^2\right) = 0$.

2.15. $F\left(u - \ln|x|, 2x(u-1) - y^2\right) = 0$.

2.16. $F\left(u^2 - 2xy + \dfrac{2x^3}{3}, x^2 - 2y\right) = 0$.

2.17. $F\left(\operatorname{tg}(u) + \operatorname{ctg}(x), 2y - \operatorname{tg}^2(u)\right) = 0$.

2.18. $F\left(\dfrac{x+y+u}{(x-y)^2}, (x-y)(x+y-2u)\right) = 0$.

2.19. $F\left((x-y)(u+1), (x+y)(u-1)\right) = 0$.

2.20. $F\left(u(x-y), u(y-z), (x+y+z)/u^2\right) = 0$.

2.21. $F\left(x/y, xy - 2u, (z + u - xy)/x\right) = 0$.

2.22. $F\left(\dfrac{x-y}{z}, (2u + x + y)z, \dfrac{u - x - y}{z^2}\right) = 0$.

Решение задачи Коши для уравнений первого порядка

2.23. $u = 2xy$.

2.24. $u = ye^x - e^{2x} + 1$.

2.25. $u = y^2 \exp(2\sqrt{x} - 2)$.

2.26. $u = (1 - x + y)(2 - 2x + z)$.

2.27. $u = (xy - 2z)(x/y + y/x)$.

2.28. $u = \ln|y| - x^2 + y^2 - \ln\sqrt{y^2 - x^2}$.

2.29. $y^2 + 4u - 1 = 2x^2(y + 1)$.

2.30. $(x + 2y)^2 = 2x(u + yx)$.

2.31. $\sqrt{u/y^3}\sin x = \sin(\sqrt{u/y})$.

2.32. $2xy + 1 = x + 3y + 1/u$.

2.33. $x - 2y = x^2 + y^2 + u$.

2.34. $2x^2 - y^2 - u^2 = a^2$.

2.35. $((y^2u - 2)^2 - x^2 + u)y^2u = 1$.

2.36. $x^2 + u^2 = 5(xu - y)$.

2.37. $3(x + y + u)^2 = x^2 + y^2 + u^2$.

2.38. $xu = (xu - y - x + 2u)^2$.

2.39. $(1 + yu)^3 = 3yu(1 + yu - x) + y$.

2.40. $x + y + z = 0$.

2.41. $2(x^3 - 4u^3 - 3yu)^2 = 9(y + u^2)^3$.

2.42. $(x - y)(3x + y + 4u) = 4u$.

2.43. $xu + y^2 = 0$.

2.44. $xu - y^2 = 1$.

2.45. $(u-x^2)^2+x(u-x^2)=y$.

2.46. $u(e^{-x}+2x-2)=y^2$.

2.47. $\left(\dfrac{x}{3y}\right)^6-\dfrac{x}{3y}-\dfrac{x^3}{3}-y+\dfrac{u^2}{2}=0$.

2.48. $(x^2-y^2)\ln\dfrac{x^2-y^2}{3}=y^2+2(x^2-y^2)\ln|u|-2\ln|u|$.

2.49. $(2x+1)u=x(2x+1)^2/2+2xy$.

2.50. $u=(\ln|x-y|+1)(x+y)$.

Классификация уравнений второго порядка

3.1. Дискриминант $D=3^2-2\cdot 1>0$, следовательно, уравнение гиперболического типа.

3.2. Дискриминант $D=2^2-2\cdot 3<0$, следовательно, уравнение эллиптического типа.

3.3. Дискриминант $D=1^2-3\cdot 1<0$, следовательно, уравнение эллиптического типа.

3.4. Дискриминант $D=2^2-4\cdot 1=0$, следовательно, уравнение параболического типа.

3.5. Дискриминант $D=1^2-(-1)\cdot 3>0$, следовательно, уравнение гиперболического типа.

3.6. Дискриминант $D=1^2-5\cdot 1<0$, следовательно, уравнение эллиптического типа.

3.7. Дискриминант $D=5^2-4\cdot 3>0$, следовательно, уравнение гиперболического типа.

3.8. Дискриминант $D=1^2-1\cdot(-3)>0$, следовательно, уравнение гиперболического типа.

3.9. Коэффициенты перед старшими производными

$$A=x,\quad B=xy,\quad C=y^2.$$

Дискриминант $D = B^2 - AC = x^2y^2 - xy^2 = xy^2(x-1)$, следовательно,

1) область гиперболичности ($D > 0$): $0 > x > 1$;
2) область параболичности ($D = 0$): $x = 0$, $y = 0$, или $x = 1$;
3) область эллиптичности $D < 0$: $0 < x < 1$.

3.10. $u_{\xi\eta} + u_\xi/2 = 0, \quad \xi = x + y, \quad \eta = 3x - y.$

3.11. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_\eta = 0, \quad \xi = 2x - y, \quad \eta = x.$

3.12. $u_{\eta\eta} + (\alpha + \beta)u_\xi + \beta u_\eta + \gamma u = 0, \quad \xi = x + y, \quad \eta = y.$

3.13. $u_{\xi\eta} + (\eta - \xi)(u_\xi - u_\eta)/32 = 0, \quad \xi = 2x + \sin x + y, \quad \eta = 2x - \sin x - y.$

3.14. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_\xi/(\xi - \eta) + u_\eta/(2\eta) = 0, \quad \xi = x^2 - y^2, \quad \eta = x^2.$

3.15. В данной и следующих задачах приведение к каноническому виду эквивалентно вопросу о диагонализации квадратичной формы

$$u_{\xi_1\xi_1} + u_{\xi_2\xi_2} + u_{\xi_3\xi_3} = 0,$$

где

$$\xi_1 = x, \quad \xi_2 = -x + y, \quad \xi_3 = 2x - 2y + z.$$

3.16. $u_{\xi_1\xi_1} = u_{\xi_2\xi_2} + u_{\xi_3\xi_3}$, где

$$\xi_1 = x + y/2 - z, \quad \xi_2 = -y/2, \quad \xi_3 = z.$$

3.17. $u_{t't'} = u_{x'x'} + u_{y'y'} + u_{z'z'}$, где

$$\begin{aligned} x' &= (x + y + z + t)/2, \\ y' &= (x + y - z - t)/(2\sqrt{3}), \\ z' &= (x - y + z - t)/(2\sqrt{5}), \\ t' &= (x - y - z + t)/2. \end{aligned}$$

3.18. $u_{t't'} = u_{x'x'} + u_{y'y'} + u_{z'z'}$, где

$$\begin{aligned} x' &= (x+y)/\sqrt{2}, \\ y' &= (z+t)/\sqrt{2}, \\ z' &= (x-y-z-t)/2, \\ t' &= (x-y-z+t)/(2\sqrt{3}). \end{aligned}$$

3.19. $u(x,y) = \varphi(x+y-\cos x) + \psi(x+\cos x - y)$.

3.20. $u(x,y) = \varphi(xy)\ln y + \psi(xy)$.

3.21. $u(x,y) = \varphi(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \psi(\sqrt{x}-\sqrt{y})$.

Приложение. Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений I порядка

4.1. $y = c_2\exp(c_1x^2), \quad z = (2c_1c_2)^{-1}\exp(-c_1x^2)$.

4.2. $y = c_2\exp(c_1x), \quad z = x + \dfrac{c_2}{c_1}\exp(c_1x); \quad y = 0, \quad z = x + c$.

4.3. $y = \dfrac{x+c_1}{x+c_2}, \quad z = \dfrac{(c_2-c_1)x}{(x+c_2)^2}$.

4.4. $y = c_2\exp(c_1x^2), \quad z = \dfrac{2c_1x}{c_2}\exp(-c_1x^2); \quad y = 0, \quad z = cx$.

4.5. $y = -\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{c_1}{2}(c_2+x)-\dfrac{c_1}{4}(x+c_2)^2, \quad z = \dfrac{1}{c_1}+\dfrac{c_1}{4}(x+c_2)^2$.

4.6. $y = c_1z, \quad x = 2y - z + c_2$.

4.7. $x^2 - y^2 = c_1, \quad x + y = c_2z$.

4.8. $x - y = c_1(y-z), \quad (x+y+z)(x-y)^2 = c_2$.

4.9. $x + z = c_1, \quad (x+y+z)(y-3x-z) = c_2$.

4.10. $x^2 - z^2 = c_1, \quad y^2 - u^2 = c_2, \quad x + z = c_3(u+y)$.

4.11. $x + z = c_1, \quad y + u = c_2, \quad (x-z)^2 + (y-u)^2 = c_3$.

4.12. $x^2 - 2y = c_1, \quad 6xy - 2x^3 - 3z^2 = c_2$.

4.13. $y^2 + z^2 = c_1, \quad x - yz = c_2.$

4.14. $x = c_1 y, \quad xy - z = c_2 x.$

4.15. $x = c_1 y, \quad xy - 2\sqrt{z^2 - 1} = c_2.$

4.16. $y = c_1 z, \quad x - y^2 - z^2 = c_2 z.$

4.17. $y^2 + z^2 = c_1, \quad x(y - z) = c_2.$

4.18. $xz = c_1, \quad xy + z^2 = c_2.$

4.19. $x + y + z = c_1, \quad \ln|x| + z/y = c_2.$

4.20. $x^2 + y^2 + z^2 = c_1, \quad yz = c_2 x.$

Список литературы

1. Арфкен Г. *Математические методы в физике.* — Москва : Атомиздат, 1972. — 712 с.
2. Бибиков Ю. Н. *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.* — Москва : Высшия школа, 1991. — 302 с.
3. Будак Б. М., Самарский А. А. Тихонов А. Н. *Сборник задач по математической физике.* — Москва : Наука, 1979. — 685 с.
4. Годунов С. К. *Уравнения математической физики.* — Москва : Наука, 1979. — 392 с.
5. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Уравнения в частных производных математической физики.* — Москва : Высшая школа, 1970. — 712 с.
6. Краснов М. Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* — Москва : Высшая школа, 1983. — 128 с.
7. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. *Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* — Москва : Едиториал УРСС, 2002. — 256 с.
8. Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики. Т. 1.* — Москва : ГИФМЛ, 1951. — 525 с.
9. Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В. *Уравнения теплопереноса* — Ижевск : Удмуртский университет, 2018. — 104 с.
10. Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В., Пивоварова Е. Н. *Методы математической физики. Параболические уравнения* — Ижевск : Удмуртский университет, 2022. — 124 с.
11. Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В., Пивоварова Е. Н. *Методы математической физики. Гиперболи-*

ческие уравнения — Ижевск : Удмуртский университет, 2024. — 944 с.

12. Мэтьюз Дж., Уокер Р. *Математические методы физики.* — Москва : Атомиздат, 1972. — 392 с.
13. Петровский И. Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* — Москва : Изд-во МГУ, 1984. — 296 с.
14. Смирнов М. М. *Задачи по уравнениям математической физики.* — Москва : Наука, 1975. — 125 с.
15. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* — Москва : Изд-во МГУ, 2004. — 798 с.
16. Филиппов А.Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* — Москва–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. — 176 с.

Учебное издание

Лебедев Владимир Геннадьевич
Иванова Татьяна Борисовна
Васькин Владимир Васильевич
Пивоварова Елена Николаевна

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ: ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие
2-е издание, переработанное и дополненное

Пособие подготовлено в Уральском математическом центре
(соглашение № 075-02-2025-1609).

Авторская редакция

Подписано в печать 16.02.2026. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 4,89. Уч.-изд. л. 3,8.
Тираж 300 экз. Заказ № 231.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Ломоносова, 4Б, каб. 021.
Тел./факс: +7(3412)916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра
«Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18, 91-73-05