Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра дифференциальных уравнений

А. С. Банников, Н. Н. Петров

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Учебное пособие

Ижевск
2026

УДК 519.81
ББК 22.185.1
Б 232

Работа выполнена в рамках мероприятий, проводимых в Уральском математическом центре.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания, проект FEWS-2024-0009.

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензенты: д. ф.-м. н., заведующий лабораторией «Математическая теория управления» УдГУ **В. А. Зайцев,** д. ф.-м. н, профессор кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых **Л. И. Родина.**

Банников А. С., Петров Н. Н.

Б 232 Принятие решений при неопределенности : учеб. пособие. – Ижевск : Удмуртский университет, 2026. – 88 с.

ISBN 978-5-4312-1374-8

Пособие посвящено основным понятиям теории принятия решений при неопределенности и предназначено для студентов программы «Математическая кибернетика» направления «Математика и компьютерные науки».

УДК 519.81
ББК 22.185.1

ISBN 978-5-4312-1374-8

© Банников А. С., Петров Н. Н., 2026
© ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», 2026

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие посвящено задачам принятия решений в условиях неопределенности.

В современном мире человек, лицо, принимающее решение (ЛПР), должен принимать решения как в быту, так и в профессиональной деятельности. При этом хотелось бы, чтобы выбор был наилучшим, принес максимальную пользу и уменьшил отрицательные последствия. Однако часто эти решения приходится принимать в условиях отсутствия полной информации, при недостатке данных, необходимых для описания ситуации, при трудностях с получением соответствующей информации. Примером таких ситуаций, например, являются выбор карьерного пути в динамично меняющимся мире, инвестирование в нестабильные активы, запуск стартапа на новом рынке. С другой стороны, принятие решений в условиях неопределенности является неизбежной частью жизни. При этом во многих случаях принимаемое решение в той или иной степени оказывает влияние не только на того, кто принимает решение, но и на тех, кто его окружает. Это требует разработки специальных подходов для поиска наилучшего варианта и обоснования принятого решения.

Для таких случаев в математике разработано ряд теорий, позволяющих с математических позиций анализировать ситуации и принимать решения в условиях неполной информации.

Одним из математических подходов к постановке задачи о принятии решения в условиях неопределенности является следующий. Лицу, принимающему решение, известны свои возможности (множество X), представление о неопределенности (множество Y) и цель — функция $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}^1$. Целью ЛПР является выбор такого элемента x из множества X, при котором значение функции $f(x, y)$ будет «наибольшим». При этом ЛПР не знает о том, какая неопределенность $y \in Y$ будет реализована в данной ситуации. Будем обозначать данную задачу через (X, Y, f).

Учебное пособие как раз и направлено на знакомство студентов с методами решения новых задач при неопределенности. Приводятся различные подходы к решению данного класса задач, рассмотрены различные содержательные примеры, приведены задания для самостоятельной работы студентов.

§ 1. Вспомогательные сведения

Лемма 1.1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $f\colon X \to \mathbb{R}^1$, $f \in C(X)$. Тогда*

$$\min_{x\in X} f(x) = -\max_{x\in X}\bigl(-f(x)\bigr). \tag{1.1}$$

Доказательство. Отметим, что минимум и максимум в (1.1) существует в силу теоремы Вейерштрасса. Пусть точка $x_1 \in X$ такая, что $\min\limits_{x\in X} f(x) = f(x_1)$. Тогда $-f(x_1) \geqslant -f(x)$ для всех $x \in X$, и поэтому

$$f(x_1) \geqslant \max_{x\in X}\bigl(-f(x)\bigr).$$

Следовательно,

$$\min_{x\in X} f(x) = f(x_1) \leqslant -\max_{x\in X}\bigl(-f(x)\bigr). \tag{1.2}$$

Пусть точка $x_2 \in X$ такая, что $\max\limits_{x\in X}\bigl(-f(x)\bigr) = -f(x_2)$. Тогда $-f(x_2) \geqslant -f(x)$ для всех $x \in X$. Поэтому

$$f(x_2) = -\min_{x\in X}\bigl(-f(x)\bigr) \leqslant f(x_1) = \min_{x\in X} f(x). \tag{1.3}$$

Из (1.2), (1.3) следует требуемое равенство. Лемма доказана. □

Лемма 1.2. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $F_1, F_2 : X \to \mathbb{R}^1$, F_1, F_2 непрерывны на X. Тогда справедливы следующие неравенства*

$$\Bigl|\max_{x\in X} F_1(x) - \max_{x\in X} F_2(x)\Bigr| \leqslant \max_{x\in X}\bigl|F_1(x) - F_2(x)\bigr|, \tag{1.4}$$

$$\Bigl|\min_{x\in X} F_1(x) - \min_{x\in X} F_2(x)\Bigr| \leqslant \max_{x\in X}\bigl|F_1(x) - F_2(x)\bigr|. \tag{1.5}$$

Доказательство. Так как для любых $a, b \in \mathbb{R}^1$ справедливо неравенство $a \leqslant b + |a - b|$, то справедливы неравенства

$$\max_{x \in X} F_1(x) \leqslant \max_{x \in X} F_2(x) + \max_{x \in X} |F_1(x) - F_2(x)|, \tag{1.6}$$

$$\max_{x \in X} F_2(x) \leqslant \max_{x \in X} F_1(x) + \max_{x \in X} |F_1(x) - F_2(x)|. \tag{1.7}$$

Неравенство (1.4) сразу следует из неравенств (1.6), (1.7).

Из леммы 1.1 и неравенства (1.4) получаем

$$|\min_{x \in X} F_1(x) - \min_{x \in X} F_2(x)| = |-\max_{x \in X}\big(-F_1(x)\big) - \Big(-\max_{x \in X}\big(-F_2(x)\big)\Big)| =$$
$$= |\max_{x \in X}\big(-F_2(x)\big) - \max_{x \in X}\big(-F_1(x)\big)| \leqslant \max_{x \in X} |F_1(x) - F_2(x)|.$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.3. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ — компактные множества, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}^1$, $f \in C(X \times Y)$. Тогда функция $g\colon X \to \mathbb{R}^1$ вида*

$$g(x) = \min_{y \in Y} f(x, y)$$

непрерывна на X.

Доказательство. Пусть $x_0, x \in X$. Из леммы 1.2 следует справедливость неравенства

$$|g(x) - g(x_0)| = |\min_{y \in Y} f(x, y) - \min_{y \in Y} f(x_0, y)| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{y \in Y} |f(x, y) - f(x_0, y)|.$$

Так как $f \in C(X \times Y)$, то f равномерно непрерывна на $X \times Y$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых (u_1, v_1), $(u_2, v_2) \in X \times Y$, $\|u_1 - u_2\| < \delta$, $\|v_1 - v_2\| < \delta$ справедливо неравенство

$$|f(u_1, v_1) - f(u_2, v_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть x_0, $x \in X$ такие, что $\|x_0 - x\| < \delta$. Тогда для любого $y \in Y$ справедливо неравенство

$$|f(x_0, y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\max_{y \in Y} |f(x_0, y) - f(x, y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Покажем, что условия леммы 1.3 являются существенными. Рассмотрим примеры.

Пример 1.1. *Пусть* $X = Y = [0, +\infty)$, $f(x, y) = \max\{0, 1 - xy\}$. *Тогда*

$$g(x) = \min_{y \in Y} f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Видим, что функция g не является непрерывной. Отметим, что для данного примера не выполнены условия леммы 1.3, так как множества X, Y не являются компактами.

Пример 1.2. *Пусть* $X = Y = [-1, 1]$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$g(x) = \min_{y \in Y} f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ -1/2, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Видим, что функция g не является непрерывной. Отметим, что для данного примера не выполнены условия леммы 1.3, так как функция f не является непрерывной на $X \times Y$.

Упражнения

1. Доказать, что для произвольных функций f_i, g_i, $i = 1, \ldots, n$, справедливо неравенство

$$|\inf_{x\in X}\max_{1\leqslant i\leqslant n} f_i(x) - \inf_{x\in X}\max_{1\leqslant i\leqslant n} g_i(x)| \leqslant \sup_{x\in X}\max_{1\leqslant i\leqslant n} |f_i(x) - g_i(x)|.$$

2. Доказать, что если $X = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, то

$$\sup_{x\in X} f(x) = \sup_{\alpha\in\Lambda}\sup_{x\in X_\alpha} f(x), \quad \inf_{x\in X} f(x) = \inf_{\alpha\in\Lambda}\inf_{x\in X_\alpha} f(x).$$

3. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $f_1, f_2 \colon X \to \mathbb{R}^1$, $f_1, f_2 \in C(X)$, $Y = \bigl\{x \in X \mid f_1(x) = \max\limits_{z\in X} f_1(x)\bigr\}$. Доказать неравенство

$$\max_{x\in X}\bigl(f_1(x) + f_2(x)\bigr) \geqslant \max_{x\in X} f_1(x) + \max_{x\in Y} f_2(x).$$

4. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $f_1, f_2 \colon X \to \mathbb{R}^1$, $f_1, f_2 \in C(X)$, $Y = \bigl\{x \in X \mid f_1(x) = \min\limits_{z\in X} f_1(z)\bigr\}$. Доказать неравенство

$$\min_{x\in X}\bigl(f_1(x) + f_2(x)\bigr) \leqslant \min_{x\in X} f_1(x) + \min_{x\in Y} f_2(x).$$

§ 2. Гарантированное по исходам решение (Решение по Вальду)

Рассматривается задача (X, Y, f).

Определение 2.1. *Гарантированным по исходам решением называется точка $x^* \in X$ такая, что*

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} f(x^*, y). \tag{2.8}$$

Смысл данного определения следующий. Пусть лицо, принимающее решение, выбирает $x \in X$. Тогда в наиболее неблагоприятной для него ситуации ЛПР получит $\min\limits_{y \in Y} f(x, y)$. Гарантированное по исходам решение x^* — такая точка, в которой функция $g(x) = \min\limits_{y \in Y} f(x, y)$ принимает наибольшее значение. Таким образом, выбор $x^* \in X$ лицом, принимающим решение, гарантирует ему при любой реализации неопределенности получить величину не меньше, чем $\max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} f(x, y)$.

Если в (2.8) минимум или максимум не достигаются, то можно дать следующее определение.

Определение 2.2. *ε-гарантированным по исходам решением называется точка $x^* \in X$ такая, что*

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y) \leqslant \inf_{y \in Y} f(x^*, y) + \varepsilon. \tag{2.9}$$

Теорема 2.1. *Пусть множества $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ компакты, функция $f \in C(X \times Y)$. Тогда гарантированное по исходам решение существует.*

Доказательство. Из леммы 1.3 следует, что функция $g(x) = \min\limits_{y \in Y} f(x, y)$ является непрерывной на множестве X. Поэтому

по теореме Вейерштрасса функция g принимает на X наибольшее значение. Теорема доказана. □

Замечание 2.1. *Если X, Y — конечные множества, то гарантированное по исходам решение всегда существует. Пусть $X = \{x_1, \ldots, \ldots, x_k\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_l\}$, $f_{ij} = f(x_i, y_j)$, F — матрица с элементами f_{ij}. Тогда для нахождения гарантированного по исходам решения необходимо:*

1) *в каждой строке матрицы F найти минимальный элемент, $\left(\min\limits_j f_{ij}\right)$.*
2) *из всех найденным минимальных элементов найти максимальный.*

Пусть $\max\limits_i \min\limits_j f_{ij} = f_{i^*j^*}$. Тогда x_{i^*} — гарантированное по исходам решение.

Пример 2.1 (Задача о диверсификации рубля). *Вкладчик, имея A рублей, делит их на две части — xA и $(1-x)A$, где $x \in [0,1]$. Сумму в xA рублей вкладчик помещает в банк на рублевый счет по $r\,100\%$ годовых, а сумму в $(1-x)A$ рублей — на валютный счет под $d\,100\%$ годовых. Цель вкладчика — получить в конце года хранения максимальную сумму в рублях. Пусть далее K_0 — курс валюты в начале срока хранения, K_1 — курс валюты в конце срока хранения. Тогда через год на рублевом счете будет сумма $(1+r)xA$ рублей. $(1-x)A$ рублей в начале срока хранения составляют $\frac{(1-x)A}{K_0}$ денежных единиц в валюте. Поэтому в конце срока хранения на валютном счете будет $\frac{(1-x)(1+d)A}{K_0}$ денежных единиц в валюте, или $\frac{(1-x)(1+d)AK_1}{K_0}$ рублей. Следовательно, в конце года хранения вкладчик получит сумму в рублях, равную*

$$(1+r)xA + \frac{(1-x)(1+d)AK_1}{K_0} = (1+r)A\left(x + \frac{(1-x)(1+d)K_1}{(1+r)K_0}\right).$$

Обозначим $y = \frac{(1+d)K_1}{(1+r)K_0}$. *Так как вкладчик в начале срока хранения не может знать курса валюты в конце срока хранения, то значение* y *вкладчику неизвестно. Поэтому* y *является неопределенностью. Будем предполагать, что* $y \in [a, b]$, *где* $0 \leqslant a \leqslant b$ *известны вкладчику.*

Получаем задачу (X, Y, f), *где* $X = [0, 1]$, $Y = [a, b]$, $f(x, y) = x + (1 - x)y$. *Найдем решение данной задачи по Вальду. Имеем*

$$g(x) = \min_{y \in Y} f(x, y) = x + (1 - x)a = a + x(1 - a).$$

Тогда свое максимальное значение на $[0, 1]$ *функция* g *принимает в точке* x^* *вида*

$$x^* = \begin{cases} 1, & \text{если } a < 1, \\ 0, & \text{если } a > 1, \\ [0, 1], & \text{если } a = 1. \end{cases}$$

Получили, что если $a < 1$, *то вкладчику рекомендуется вложить все свои средства на рублевый счет. Если* $a > 1$, *то вкладчику рекомендуется все свои средства вложить на валютный счет. Если* $a = 1$, *то вкладчик может распределить свои средства между рублевым и валютным счетами произвольным образом.*

Пример 2.2 (Задача о кредите в банке). *Предприниматель берет в банке кредит в сумме* $x \in [0, +\infty)$ *единиц и приобретает товар на сумму* $y \in [a, b]$, *где* $0 \leqslant a < b$ *— заданные числа. Приобретенный товар предприниматель реализует по более высокой цене. Если предприниматель возьмет в банке сумму* $x > y$, *то он вынужден будет платить банку проценты за неиспользованные средства.*

Если предприниматель возьмет в банке сумму меньше, чем ту, на которую он смог бы приобрести товар, то предприниматель понесет потери в бизнесе в связи с неиспользованными возможностя-

ми. Будем рассматривать функцию потерь $f_1(x,y)$ *вида*

$$f_1(x,y)=\begin{cases}c_1(x-y), & \text{если } x\geqslant y,\\ c_2(y-x), & \text{если } y\geqslant x,\end{cases}$$

где c_1, c_2 *— заданные положительные числа. Целью предпринимателя является взятие такой суммы кредита, при которой функция потерь* $f_1(x,y)$ *принимает наименьшее значение. Тогда* y *можно рассматривать как неопределенность. Так как целью предпринимателя является минимизация функции* f_1*, то рассмотрим функцию*

$$f(x,y)=-f_1(x,y)=\begin{cases}c_1(y-x), & \text{если } x\geqslant y,\\ c_2(x-y), & \text{если } y\geqslant x.\end{cases}$$

Получаем задачу (X,Y,f)*, где* $X=[0,+\infty)$*,* $Y=[a,b]$*. Найдем решение данной задачи по Вальду. Имеем*

$$g(x)=\min_{y\in Y}f(x,y)=\begin{cases}c_2(x-b), & \text{если } x\leqslant a,\\ \min\{c_1(a-x),c_2(x-b)\}, & \text{если } a\leqslant x\leqslant b,\\ c_1(a-x), & \text{если } x\geqslant b.\end{cases}$$

Так как функция $c_2(x-b)$ *возрастает на* $[0,a]$*, а функция* $c_1(a-x)$ *убывает на* $[b,+\infty)$*, то свое наибольшее значение на множестве* X *функция* g *принимает на отрезке* $[a,b]$*. Из вида функции* g *следует, что максимальное значение функция* g *принимает в точке* x^**, для которой справедливо равенство*

$$c_1(a-x^*)=c_2(x^*-b).$$

Отсюда $x^*=\frac{ac_1+bc_2}{c_1+c_2}$*. Отметим, что* $x^*\in[a,b]$*. Следовательно,* x^* *— решение по Вальду.*

Пример 2.3 (Задача о переправе). *Подразделение должно форсировать реку в одной из точек прямолинейного участка длиной 1.*

На участке расположена одна огневая точка противника, причем вероятность выполнения подразделением поставленной задачи прямо пропорциональна расстоянию от точки форсирования до огневой точки противника. Необходимо выбрать место форсирования реки, если местоположение огневой точки неизвестно.

Примем отрезок $[0,1]$ *вещественной прямой за прямолинейный участок. Пусть* x *— координата точки, в которой планируется провести форсирование реки,* y *— координата огневой позиции противника. Из условия задачи следует, что в качестве цели подразделения можно рассматривать выбор такой точки* x*, для которой функция* $|x-y|$ *принимает наибольшее значение.*

Получаем задачу (X,Y,f)*, где* $X=Y=[0,1]$*,* $f(x,y)=|x-y|$*. Найдем решение данной задачи по Вальду. Имеем*

$$g(x)=\min_{y\in Y} f(x,y)=0.$$

Тогда функция g *принимает свое максимальное значение в каждой точке отрезка* $[0,1]$*. Следовательно, все точки отрезка* $[0,1]$ *являются решением по Вальду.*

Пример 2.4 (Модель дуэли). *В дуэли принимают участие два дуэлянта. В начальный момент времени расстояние между ними равно* $L>0$*. По команде они начинают сближаться. Каждый дуэлянт имеет право сделать один выстрел с любого расстояния (при условии, что он жив), при этом, может подойти к сопернику вплотную. Пусть* $p_1(l)$*,* $p_2(l)$ *— функции меткости дуэлянтов, равные вероятности поразить соперника с расстояния* l*. Считаем, что* p_1*,* $p_2\in C[0,L]$*, убывают на* $[0,L]$*,* $p_1(0)=p_2(0)=1$*,* $p_1(L)=p_2(L)=0$*. Пусть* $x\in X=[0,L]$ *— расстояние, с которого первый дуэлянт (будем считать его ЛПР) намерен сделать свой выстрел,* $y\in Y=[0,L]$ *— расстояние, с которого планирует произвести выстрел второй дуэлянт. Определим целевую функцию* $f(x,y)$ *первого дуэлянта.*

$$f(x,y)=\begin{cases} p_1(x), & \text{если } 0\leqslant y\leqslant x\leqslant L,\\ 1-p_2(y), & \text{если } 0\leqslant x<y\leqslant L.\end{cases}$$

Найдем решение по Вальду.

Пусть L^* — корень уравнения $p_1(l)+p_2(l)=1$. Покажем, что L^* — решение по Вальду. Действительно, так как функции p_1, p_2 убывают, то

$$\max_x \min_y f(x,y)=\max_x \min\bigl\{p_1(x),1-p_2(x)\bigr\}=p_1(L^*).$$

Упражнения

1. Найти решения по Вальду в задачах (X,Y,f), где

1.1. $X=Y=[0,1]$, $f(x,y)=(x-y)^2$.

1.2. $X=[-1/2,1/2]$, $Y=[-1,1]$, $f(x,y)=(x-y)^2-0{,}5x^2$.

1.3. $X=[-1/2,1/2]$, $Y=[-1,1]$, $f(x,y)=(x-y)^2-0{,}5y^2$.

1.4. $X=[-1/2,1/2]$, $Y=[-1,1]$, $f(x,y)=(x-y)^2-0{,}5x$.

1.5. $X=[-1/2,1/2]$, $Y=[-1,1]$, $f(x,y)=(x-y)^2-0{,}5y$.

1.6. $X=Y=[-1,1]$, $f(x,y)=-\bigl(x-y(1-x^2)\bigr)^2$.

1.7. $X=Y=[0,2]$, $f(x,y)=\bigl(a-b(x+y)\bigr)x-cx$, $a,b,c>0$.

1.8. $X=Y=[0,2]$, $f(x,y)=\bigl(a-b(x+y)\bigr)x-cy$, $a,b,c>0$.

1.9. $X=Y=[0,2]$, $f(x,y)=\bigl(a-b(x+y)\bigr)y+cx$, $a,b,c>0$.

2. Найти решение по Вальду в задачах (X,Y,f), где

$$X=\bigl\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \|x\|\leqslant\alpha\bigr\},\quad Y=\bigl\{y\in\mathbb{R}^2 \mid \|y\|\leqslant\beta\bigr\},$$

$$f(x,y)=\|x+y-a\|,\ a-\text{заданный вектор.}$$

№ вар.	α	β	a	№ вар.	α	β	a
1	2	3	$(0,1)$	2	3	2	$(1,0)$
3	2	3	$(3,0)$	4	3	2	$(0,3)$
5	2	3	$(4,0)$	6	3	2	$(0,4)$
7	2	3	$(6,0)$	8	3	2	$(0,6)$
9	3	4	$(3,0)$	10	4	3	$(5,0)$
11	4	5	$(9,0)$	12	5	4	$(0,9)$

3. Фирма производит и поставляет на рынок некоторый продукт. Объем поставляемого продукта обозначим через x. Считаем, что $x \in [0,a]$. После принятия решения о количестве производимой продукции появляется компания-импортер, причем о действиях импортера известно только, что он может поставлять объем продукции $y \in [0,b]$ (само значение y неизвестно). Цена на рынке на данный продукт определяется следующим образом

$$p(x,y) = \alpha - \beta(x+y),$$

где α, β — положительные числа. Считаем, что издержки фирмы равны kx, $k > 0$. Тогда прибыль фирмы равна

$$f(x,y) = x\big(\alpha - \beta(x+y)\big) - kx.$$

Получаем задачу (X,Y,f), где $X = [0,a]$, $Y = [0,b]$. Найти решение по Вальду.

4.[20, с. 139] Город, имеющий форму круга, разделен по диаметру на две части рекой малой ширины. Требуется выбрать место для строительства моста так, чтобы минимизировать длину пути из одной части города в другую. Найти решение по Вальду.

5. Пусть в задаче (X,Y,f), $X = \big\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-a\| \leqslant R_1\big\}$, $Y = \big\{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y-b\| \leqslant R_2\big\}$, $f(x,y) = \|x-y\|$. Найти решение по Вальду.

6. Имеется фирма-монополист, производящая однородную продукцию с функцией затрат вида

$$C = \gamma Q^2 + \alpha Q + \beta,$$

где γ, α, β — положительные константы, Q — объем выпуска продукции. Считаем, что объем выпуска равен объему спроса. Будем предполагать, что спрос зависит не только от цены x, но и возможных скачков цен y, и имеет вид

$$Q = a - bx + cy,$$

где a, b — положительные константы, $c \neq 0$. Тогда прибыль фирмы равна

$$f(x, y) = xQ - C =$$
$$= x(a - bx + cy) - \gamma(a - bx + cy)^2 - \alpha(a - bx + cy) - \beta.$$

Цель фирмы — получить максимальную прибыль. Считая скачки цен неопределенным фактором, получаем задачу (X, Y, f), где $X = [0, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}^1$. Найти решение по Вальду.

7. Имеется фирма-монополист, производящая однородную продукцию с функцией затрат вида

$$C = \gamma Q^2 + (\alpha + y)Q + \beta,$$

где γ, α, β — положительные константы, Q — объем выпуска продукции, y — величина налогов на единицу производства. Считаем, что объем выпуска равен объему спроса. Считаем, что цена $P(Q) = a - bQ$, где a, b — положительные константы. Будем предполагать, что фирма в момент определения объема производства не имеет информации о величине налоговой нагрузки. Цель фирмы — получить максимальную прибыль. Найти решение по Вальду, если известно, что $y \in [y_1, y_2]$, $Q \in [Q_1, Q_2]$.

8. Спрос Q_1 на некоторый продукт и издержки Q_2 при его производстве имеют следующий вид

$$Q_1(p) = a_1 - b_1 p + x, \quad Q_2(p) = a_2 - b_2 p + y,$$

где p — цена на единицу продукции, x — планируемый объем производства, y — неопределенность, связанная с возможными флуктуациями на рынке, a_1, a_2, b_1, b_2 — положительные константы. Считаем, что цена на рынке описывается уравнением вида [29]

$$\dot{p} = Q_1(p) - Q_2(p), \quad p(0) = p_0.$$

Целью производителя является получение максимальной выручки за некоторый отрезок времени $[0, T]$, равной

$$f(x, y) = x \int_0^T p(t)\, dt.$$

Найти решение по Вальду, считая что $x \in [\alpha_1, \beta_1]$, $y \in [\alpha_2, \beta_2]$.

9. Наступающая сторона имеет n средств нападения, обороняющая сторона имеет m средств защиты, известны k мест возможного прохода через линию защиты обороняющейся стороны. Предполагается, что при расположении одного средства защиты на i-ом месте оно в состоянии уничтожить p_i единиц средств нападения, проходящих через это место. Пусть x_i — количество единиц средств нападения, нацеленных на проход через i-ый пункт, y_i — количество единиц средств защиты, расположенных в i-ом пункте. Критерием эффективности операции наступления будем считать

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \max\{x_i - p_i y_i, 0\},$$

причем

$$X = \big\{(x_1, \ldots, x_k) \mid x_i \geqslant 0,\ x_1 + \ldots + x_k = n\big\},$$
$$Y = \big\{(y_1, \ldots, y_k) \mid y_i \geqslant 0,\ y_1 + \ldots + y_k = m\big\}.$$

Будем считать, что наступающая сторона не знает как распределяются средства защиты. Тем самым, y неопределенный параметр. Считая, что $p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n$, доказать что решением по Вальду будет $x^* = (0, 0, \ldots, 0, n)$.

10. Пусть $X = Y = [0, 1]$, $a, b > 0$,

$$f(x, y) = \begin{cases} x - bx - y + ay^2 - axy + by, & \text{если } x \leqslant y, \\ -y + by + x - ax^2 + axy - bx, & \text{если } x \geqslant y. \end{cases}$$

Найти решение по Вальду.

11. Пусть $L > 0$, $p_1, p_2 \in C[0, L]$, p_1, p_2 убывают на $[0, L]$, $p_1(0) = p_2(0) = 1$, $p_1(L) = p_2(L) = 0$, $X = Y = [0, L]$,

$$f(x, y) = \begin{cases} p_1(x), & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant L, \\ p_1(x)\big(1 - p_2(y)\big), & \text{если } 0 \leqslant x < y \leqslant L. \end{cases}$$

Найти решение по Вальду в задаче (X, Y, f).

12. Рассматривает ситуация, в которой участвуют ЛПР и посредник. Лицо, принимающее решение, является производителем некоторого вида продукции, посредник занят реализацией этой продукции. Оговаривается доля λ и $1 - \lambda$ в соответствии с которыми доход делится между производителем и посредником. Пусть производитель производит некоторый объем продукта $x \geqslant 0$, передает ее посреднику. Посредник реализует по цене y (которая неизвестна производителю) и передает производителю оговоренную сумму λxy, а оставшуюся сумму $(1 - \lambda)xy$ берет себе. Затраты производителя описываются функцией $c \in C^2[0, +\infty)$ такой, что $c(0) = 0$, $c'(x) > 0$, $c''(x) < 0$ для всех $x > 0$. Тогда прибыль производителя равна

$$f(x, y) = \lambda xy - c(x).$$

Цель производителя — получение максимальной прибыли. Считая, что $x \in X = [a, b]$, $y \in Y = [\alpha, \beta]$, где $a \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$, $b > 0$, $\beta > 0$ найти решение по Вальду.

13. Имеется фирма, производящая однородный товар и предлагающая его на рынке. Себестоимость производства равна a, максимальный объем производства A. Рынок ограничен объемом средств у покупателей, равным C. После принятия решения о количестве x производимой продукции и цене p единицы продукции появляется фирма импортер, причем о действиях импортера известно только, что он может поставить на рынок объем продукции $y \in [0, B]$ (само y неизвестно) по неизвестной цене q. Считаем, что $p, q \in [0, b]$. Цель фирмы состоит в получении максимальной прибыли. Будем считать заведомо неоптимальными x, y, p, q такие, что $p < a$, $px > C$, $qy > C$. Пусть

$$f(x, y, p, q) = \begin{cases} (p - a)x, & \text{если } \ p < q, \\ \min\{C - qy, px\} - ax, & \text{если } \ p \geqslant q. \end{cases}$$

Смысл данного выражения такой: товар покупается сначала у того, кто назначит более низкую цену. Далее, если у покупателей останутся средства, то товар закупается у другого поставщика.

Найти решение по Вальду. Если решения по Вальду не существует, найти ε-решение по Вальду.

14. Некоторый процесс на отрезке времени $[0, 1]$ описывается уравнением

$$\dot{x} = u + v, \quad x(0) = 0, \quad u, v \in [0, 1],$$

где функцию $u(\cdot)$ выбирает лицо принимающее решение, а функция $v(\cdot)$ является помехой. Целью ЛПР является максимизация функционала

$$f(u, v) = x^2(1).$$

Пусть

$$X = \big\{u(\cdot) \mid u - \text{измеримая функция},\ u(t) \in [0,1],\ t \in [0,1]\big\},$$
$$Y = \big\{v(\cdot) \mid v - \text{измеримая функция},\ v(t) \in [0,1],\ t \in [0,1]\big\}.$$

Получаем задачу (X, Y, f). Найти решение по Вальду.

15. Некоторый процесс на отрезке времени $[0,1]$ описывается уравнением

$$\dot{x} = u + v, \quad x(0) = 0, \quad u, v \in [0,1],$$

где функцию $u(\cdot)$ выбирает лицо, принимающее решение, а функция $v(\cdot)$ является помехой. Целью ЛПР является максимизация функционала

$$f(u,v) = x(1) - \int_0^1 u^2(s)\,ds.$$

Пусть

$$X = \big\{u(\cdot) \mid u - \text{измеримая функция},\ u(t) \in [0,1],\ t \in [0,1]\big\},$$
$$Y = \big\{v(\cdot) \mid v - \text{измеримая функция},\ v(t) \in [0,1],\ t \in [0,1]\big\}.$$

Получаем задачу (X, Y, f). Найти решение по Вальду.

16. Вкладчик, имея сумму в A рублей, делит ее на две части — xA и $(1-x)A$, где $x \in [0,1]$. Сумму в xA рублей вкладчик помещает в банк на один валютный счет под $r_1\,100\%$ годовых, а сумму в $(1-x)A$ рублей — на другой валютный счет под $r_2\,100\%$ годовых. Цель вкладчика — получить в конце года хранения максимальную сумму в рублях. Пусть далее K_1, K_2 — курсы валют в начале срока хранения, M_1, M_2 — курсы валют в конце срока хранения. Тогда через год на первом валютном счете будет сумма $\frac{(1+r_1)xAM_1}{K_1}$ рублей. На втором валютном счете в конце срока хранения будет

$\frac{(1-x)(1+r_2)AM_2}{K_2}$ рублей. Следовательно, в конце года хранения вкладчик получит сумму в рублях, равную

$$\frac{(1+r_1)xAM_1}{K_1} + \frac{(1-x)(1+r_2)AM_2}{K_2} =$$
$$= A(1+r_1)\left(x\frac{M_1}{K_1} + \frac{1+r_2}{1+r_1}(1-x)\frac{M_2}{K_2}\right).$$

Обозначим $y_i = \frac{M_i}{K_i}$, $r = \frac{1+r_2}{1+r_1}$. Так как вкладчик в начале срока хранения не может знать курса валют в конце срока хранения, то значения y_1, y_2 вкладчику неизвестны. Поэтому y_1, y_2 являются неопределенностью. Будем предполагать, что $y_i \in [a_i, b_i]$, где $0 \leqslant a_i < b_i$ известны вкладчику.

Получаем задачу (X, Y, f), где $X = [0,1]$, $Y = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $f(x,y) = xy_1 + r(1-x)y_2$. Найти решение данной задачи по Вальду.

17. Рассматривается город Хотеллинга $D = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$ с метрикой

$$\rho(X,Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad X = (x_1, x_2), \ Y = (y_1, y_2),$$

в каждой точке которого с равной плотностью расположены покупатели. В городе в точке $(0, 1/2)$ расположен магазин, который продает товар по цене c_1. Предприниматель хочет открыть свой магазин. Место для магазина власти города планируют выделить в точке $(1, y)$, $y \in [0,1]$, при этом точка y будет указана предпринимателю после того, как он назначит цену c_2 за единицу продукта. Считается, что каждый из покупателей, находящийся в точке $(x_1, x_2) \in D$, сравнивает свои затраты $L_i(x_1, x_2)$ на посещение каждого из магазинов и посещает тот магазин, для которого затраты меньше. Затраты на посещение магазина равны сумме цены товара и расстояния до магазина. При этом вся территория города разобьется на два множества D_1, D_2 — тех, кто выбрал магазин $(0, 1/2)$ и $(1, y)$ соответственно. Прибыль предпринимателя равна $f(c_2, y) = c_2 S_2$, где S_2 — площадь мно-

жества D_2. Получаем задачу (X, Y, f), где $X = [0, +\infty)$, $Y = [0, 1]$. Найти решение по Вальду.

18. ЛПР имеет сумму S условных единиц для инвестиций в акции и облигации. Известно, что доход по акциям заранее неизвестен, но известно, что он может быть в пределах от $q\%$ до $p\%$. Облигации имеют постоянную доходность $r\%$. Целевая функция ЛПР имеет вид $f(w) = w^2$. Целью ЛПР является получение максимального дохода. Пусть y — процентная ставка дохода по акциям, x — доля инвестиций в акции, $1-x$ — доля инвестиций в облигации. Тогда целью ЛПР является максимизация функции

$$f(x, y) = \left(Sx\left(1 + \frac{y}{100}\right)\right)^2 + \left(S(1-x)\left(1 + \frac{r}{100}\right)\right)^2.$$

Найти решение по Вальду, если

18.1. $p = 10\%$, $q = 2\%$, $r = 5\%$.

18.2. $p = 12\%$, $q = 4\%$, $r = 6\%$.

18.3. $p = 15\%$, $q = 2\%$, $r = 5\%$.

18.4. $p = 15\%$, $q = 4\%$, $r = 8\%$.

18.5. $p = 20\%$, $q = 2\%$, $r = 8\%$.

18.6. $p = 20\%$, $q = 4\%$, $r = 5\%$.

18.7. $p = 20\%$, $q = 8\%$, $r = 5\%$.

19. ЛПР имеет сумму S условных единиц для инвестиций в акции и облигации. Известно, что доход по акциям заранее неизвестен, но известно, что он может быть в пределах от $q\%$ до $p\%$. Облигации имеют постоянную доходность $r\%$. Целевая функция ЛПР имеет вид $f(w) = \sqrt{w}$. Целью ЛПР является получение максимального дохода. Пусть y — процентная ставка дохода по акциям, x — доля инвестиций в акции, $1-x$ — доля инвестиций в облигации. Тогда целью ЛПР

является максимизация функции

$$f(x,y)=\sqrt{Sx\left(1+\frac{y}{100}\right)}+\sqrt{S(1-x)\left(1+\frac{r}{100}\right)}.$$

Найти решение по Вальду, если

19.1. $p=10\%$, $q=2\%$, $r=5\%$.

19.2. $p=12\%$, $q=4\%$, $r=6\%$.

19.3. $p=15\%$, $q=2\%$, $r=5\%$.

19.4. $p=15\%$, $q=4\%$, $r=8\%$.

19.5. $p=20\%$, $q=2\%$, $r=8\%$.

19.6. $p=20\%$, $q=4\%$, $r=5\%$.

19.7. $p=20\%$, $q=8\%$, $r=5\%$.

20. [30, задача 1.9, с. 13] Город представляет собой круг радиуса R с центром в начале координат. Предполагается, что из любой точки города в любую другую можно попасть по прямой, двигаясь с постоянной скоростью v. Нужно разместить в городе n пожарных частей так, чтобы время добраться до любой точки пожара было минимально. Получаем задачу (X,Y,f), где $X=D_R(0)\times D_R(0)\times\ldots\times D_R(0)$, $Y=D_R(0)$,

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)=\min_i\|x_i-y\|.$$

Здесь $D_R(0)=\{z\in\mathbb{R}^2\mid\|z\|\leqslant R\}$, $x_i\in D_R(0)$ — место предполагаемого расположения i-ой пожарной части, y — возможная точка пожара. Найти решение по Вальду.

21. [30, задача 4.36, с. 59] Оперирующая сторона производит стрельбу по мишени, представляющей собой точку, расположенную на отрезке $[0,1]$. Если x — координата точки прицеливания, y — координата мишени, то вероятность поражения равна $p(x,y)$. В распоряжении оперирующей стороны имеется n выстрелов, причем при очередном

выстреле результаты предыдущих выстрелов неизвестны оперирующей стороне. Мишень неподвижна, оперирующая сторона не знает местоположение цели. Оперирующая сторона стремится к тому, что математическое ожидание числа попаданий было максимальным. Найти решение по Вальду, если

21.1. $p(x,y) = e^{\lambda(x-y)^2}$, $\lambda > 0$, $n = 2$;

21.2. $p(x,y) = e^{\lambda(x-y)^2}$, $\lambda > 0$, $n = 3$;

21.3. $n = 2$, $p(x,y) = \begin{cases} p, & \text{если } |x-y| \leqslant 1/2, \\ 0, & \text{если } |x-y| > 1/2; \end{cases}$

21.4. n — произвольно, $p(x,y) = \begin{cases} p, & \text{если } |x-y| \leqslant 1/2, \\ 0, & \text{если } |x-y| > 1/2. \end{cases}$

§ 3. Принцип крайнего оптимизма

Рассмотрим задачу (X, Y, f).

Определение 3.1. *Решением задачи называется точка $x^* \in X$, для которой справедливо равенство*

$$\max_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = \max_{y \in Y} f(x^*, y).$$

Смысл данного определения следующий. Пусть лицо, принимающее решение, выбирает $x \in X$. Предполагается, что для выбранного x реализуется наиболее хорошая для ЛПР неопределенность $y \in Y$. В качестве решения выбирается такое значение x^*, при котором функция $g(x) = \max_{y \in Y} f(x, y)$ принимает наибольшее значение. Другими словами, лицо, принимающее решение, исходит из того, что внешние обстоятельства всегда «благосклонны» к нему.

Теорема 3.1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ — компакты, $f \in C(X \times Y)$. Тогда решение задачи существует.*

Пример 3.1. *Найдем решение задачи о диверсификации рубля, постановка которой приведена в примере 2.1. В данной задаче $X = [0, 1]$, $Y = [a, b]$, $f(x, y) = x + (1 - x)y$. Тогда*

$$g(x) = \max_{y \in Y} f(x, y) = x + (1 - x)b = x(1 - b) + b.$$

Следовательно, точкой максимума функции g будет точка x^* вида

$$x^* = \begin{cases} 1, & \text{если } b < 1, \\ 0, & \text{если } b > 1, \\ [0, 1], & \text{если } b = 1. \end{cases}$$

Отметим, что и в данном случае вкладчику рекомендуется все свои средства вкладывать на один счет.

Пример 3.2. *Найдем решение задачи о кредите, постановка которой приведена в примере 2.2.* (X, Y, f)*, где* $X = [0, +\infty)$*,* $Y = [a, b]$*, где*

$$f(x,y) = \begin{cases} c_1(y-x), & \text{если } x \geqslant y, \\ c_2(x-y), & \text{если } y \geqslant x. \end{cases}$$

Тогда

$$g(x) = \max_{y \in Y} f(x,y) = 0$$

при любом $x \in X$*. Поэтому решением задачи в соответствии с принципом крайнего оптимизма будут все значения* $x^* \in [0, +\infty)$*. Можно сказать, что реализуется принцип «все что ни делается, делается к лучшему».*

Пример 3.3. *Найдем решение задачи о переправе, постановка которой приведена в примере 2.3. В данной задаче* (X, Y, f) *имеем* $X = Y = [0, 1]$*,* $f(x, y) = |x - y|$*. Тогда*

$$g(x) = \max_{y \in Y} f(x,y) = \max_{y \in Y} |x-y| = \max\{x, 1-x\}.$$

Поэтому

$$\max_{x \in X} g(x) = g(0) = g(1).$$

Следовательно, решением задачи в соответствии с принципом крайнего оптимизма будет точка $x^* = 0$ *и* $x^* = 1$*.*

Упражнения

1. Фирма производит и поставляет на рынок некоторый продукт. Объем поставляемого продукта обозначим через x. Считаем, что $x \in [0, a]$. После принятия решения о количестве производимой продукции появляется компания-импортер, причем о действиях импортера известно только, что он может поставлять объем продукции

$y \in [0, b]$ (само значение y неизвестно). Цена на рынке на данный продукт определяется следующим образом

$$p(x, y) = \alpha - \beta(x + y),$$

где α, β — положительные числа. Считаем, что издержки фирмы равны kx, $k > 0$. Тогда прибыль фирмы равна

$$f(x, y) = x\big(\alpha - \beta(x + y)\big) - kx.$$

Получаем задачу (X, Y, f), где $X = [0, a]$, $Y = [0, b]$. Найти решение по принципу крайнего оптимизма.

2. Пусть в задаче (X, Y, f), $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|x - a\| \leqslant R_1\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|y - b\| \leqslant R_2\}$, $f(x, y) = \|x - y\|$. Найти решение по принципу крайнего оптимизма.

3. Имеется фирма-монополист, производящая однородную продукцию с функцией затрат вида

$$C = \gamma Q^2 + \alpha Q + \beta,$$

где $\alpha, \beta > 0$, Q — объем выпуска продукции. Считаем, что объем выпуска равен объему спроса. Будем предполагать, что спрос зависит не только от цены x, но и возможных скачков цен y и имеет вид

$$Q = a - bx + cy,$$

где a, b — положительные константы, $c \neq 0$. Тогда прибыль фирмы равна

$$f(x, y) = xQ - C =$$
$$= x(a - bx + cy) - \gamma(a - bx + cy)^2 - \alpha(a - bx + cy) - \beta.$$

Цель фирмы — получить максимальную прибыль. Считая скачки цен неопределенным фактором, получаем задачу (X, Y, f), где $X = [0, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}^1$.

Найти решение по принципу крайнего оптимизма.

4. Компания монополист является провайдером облачных сервисов. Пусть x — объем средств, планируемых выделить на обеспечение функционарирования поддерживаемых компанией информационных сервисов, y — непредвиденные расходы компании, связанные с ее деятельностью. Прибыль компании определяется следующим образом

$$f(x,y) = \frac{Ae^{\alpha(x-y-\beta)}}{1+e^{\alpha(x-\beta)}},$$

где A, α, β — изветные положительные числа. Целью компании является получение максимальной прибыли. Считая, что $x \in [a_1, b_1]$, $y \in [a_2, b_2]$ найти решение по принципу крайнего оптимизма.

5. Пусть $X = Y = [0,1]$, $\lambda > 0$,

$$f(x,y) = \begin{cases} y - x - \lambda(x-y)^2, & \text{если } y \geqslant x, \\ x - y - \lambda(x-y)^2, & \text{если } y \leqslant x. \end{cases}$$

Найти решение по принципу крайнего оптимизма.

6. Пусть $X = Y = [0,1]$, $a, b > 0$,

$$f(x,y) = \begin{cases} x - bx - y + ay^2 - axy + by, & \text{если } x \leqslant y, \\ -y + by + x - ax^2 + axy - bx, & \text{если } x \geqslant y. \end{cases}$$

Найти решение по принципу крайнего оптимизма.

7. Найти решение по принципу крайнего оптимизма в модели дуэли, постановка которой приведена в примере 2.4.

8. Пусть $L > 0$, p_1, $p_2 \in C[0,L]$, p_1, p_2 убывают на $[0,L]$, $p_1(0) = p_2(0) = 1$, $p_1(L) = p_2(L) = 0$, $X = Y = [0,L]$,

$$f(x,y) = \begin{cases} p_1(x), & \text{если } \ 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant L, \\ p_1(x)\big(1 - p_2(y)\big), & \text{если } \ 0 \leqslant x < y \leqslant L. \end{cases}$$

Найти решение по принципу крайнего оптимизма в задаче (X, Y, f).

9. Имеется фирма-монополист, производящая однородную продукцию с функцией затрат вида

$$C = \gamma Q^2 + (\alpha + y)Q + \beta,$$

где γ, α, β — положительные константы, Q-объем выпуска продукции, y — величина налогов на единицу производства. Считаем, что объем выпуска равен объему спроса. Считаем, что цена $P(Q) = a - bQ$, где a, b — положительные константы. Будем предполагать, что фирма в момент определения объема производства не имеет информации о величине налоговой нагруэки. Цель фирмы — получить максимальную прибыль.

Найти решение по принципу крайнего оптимизма, если известно, что $y \in [y_1, y_2]$, $Q \in [Q_1, Q_2]$.

10. Некоторый процесс на отрезке времени $[0, 1]$ описывается уравнением

$$\dot{x} = u + v, \quad x(0) = 0, \quad u, v \in [0, 1],$$

где функцию $u(\cdot)$ выбирает лицо принимающее решение, а функция $v(\cdot)$ является помехой. Целью ЛПР является максимизация функционала

$$f(u, v) = x^2(1).$$

Пусть

$$X = \{u(\cdot) \mid u - \text{измеримая функция}, \ u(t) \in [0, 1], t \in [0, 1]\},$$
$$Y = \{v(\cdot) \mid v - \text{измеримая функция}, \ v(t) \in [0, 1], t \in [0, 1]\}.$$

Получаем задачу (X, Y, f).

Найти решение по принципу крайнего оптимизма.

11. Некоторый процесс на отрезке времени $[0,1]$ описывается уравнением

$$\dot{x} = u + v, \quad x(0) = 0, \quad u, v \in [0,1],$$

где функцию $u(\cdot)$ выбирает лицо принимающее решение, а функция $v(\cdot)$ является помехой. Целью ЛПР является максимизация функционала

$$f(u,v) = x(1) - \int_0^1 u^2(s)\,ds.$$

Пусть

$$X = \{u(\cdot) \mid u - \text{измеримая функция}, \ u(t) \in [0,1], t \in [0,1]\},$$
$$Y = \{v(\cdot) \mid v - \text{измеримая функция}, \ v(t) \in [0,1], t \in [0,1]\}.$$

Получаем задачу (X, Y, f). Найти решение по принципу крайнего оптимизма.

12. Вкладчик, имея A рублей, делит их на две части — xA и $(1-x)A$, где $x \in [0,1]$. Сумму в xA рублей вкладчик помещает в банк на один валютный счет под $r_1 100\%$ годовых, а сумму в $(1-x)A$ рублей на другой валютный счет под $r_2 100\%$ годовых. Цель вкладчика — получить в конце года хранения максимальную сумму в рублях. Пусть далее K_1, K_2 — курсы валют в начале срока хранения, M_1, M_2 — курсы валют в конце срока хранения. Тогда через год на первом валютном счете будет сумма $\frac{(1+r_1)xAM_1}{K_1}$ рублей. На втором валютном счете в конце срока храниния будет $\frac{(1-x)(1+r_2)AM_2}{K_2}$ рублей. Следовательно, в конце года хранения вкладчик получит сумму в рублях, равную

$$\frac{(1+r_1)xAM_1}{K_1} + \frac{(1-x)(1+r_2)AM_2}{K_2} =$$
$$= A(1+r_1)\Big(x\frac{M_1}{K_1} + \frac{1+r_2}{1+r_1}(1-x)\frac{M_2}{K_2}\Big).$$

Обозначим $y_i = \frac{M_i}{K_i}$, $r = \frac{1+r_2}{1+r_1}$. Так как вкладчик в начале срока хранения не может знать курса валют в конце срока хранения, то значения y_1, y_2 вкладчику неизвестны. Поэтому y_1, y_2 являются неопределенностью. Будем предполагать, что $y_i \in [a_i, b_i]$, где $0 \leqslant a_i < b_i$ известны вкладчику.

Получаем задачу (X, Y, f), где $X = [0, 1]$, $Y = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $f(x, y) = xy_1 + r(1 - x)y_2$. Найти решение данной задачи по принципу крайнего оптимизма.

13. Рассматривается город Хотеллинга $D = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in [0, 1]\}$ с метрикой

$$\rho(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad X = (x_1, x_2),\ Y = (y_1, y_2)$$

в каждой точке которого с равной плотностью расположены покупатели. В городе в точке $(0, \frac{1}{2})$ расположен магазин, который продает товар по цене c_1. Предприниматель хочет открыть свой магазин. Место для магазина власти города планируют выделить в точке $(1, y)$, $y \in [0, 1]$, при этом точка y будет указана предпринимателю после того, как он назначит цену c_2 за единицу продукта. Считается, что каждый из покупателей, находящийся в точке $(x_1, x_2) \in D$ сравнивает свои затраты $L_i(x_1, x_2)$ на посещение каждого из магазинов и посещает тот магазин, для которого затраты меньше. Затраты на посещение магазина равны сумме цены товара и расстояния до магазина. При этом вся территория города разобьется на два множества D_1, D_2 — тех, кто выбрал магазин $(0, \frac{1}{2})$ и $(1, y)$ соответственно. Прибыль предпринимателя равна $f(c_2, y) = c_2 S_2$, где S_2 — площадь множества D_2. Получаем задачу (X, Y, f), где $X = [0, +\infty)$, $Y = [0, 1]$. Найти решение по принципу крайнего оптимизма.

14. В районе имеется 2 промышленных предприятий, каждое из которых имеет источник, выбрасывающий в атмосферу вредную примесь. Пусть x — величина выброса первого предприятия, y — величина выбросов второго предприятия, которая неизвестна первому

предприятию. Концентрация вредных веществ может быть рассчитана по формуле $q = c_1x + c_2y$, где c_1, c_2 — некоторые константы. Пусть Q — значение предельно допустимой концентрации вредной примеси. Первое предприятие может снижать эксплуатационные расходы и тем самым увеличивать прибыль, посредством увеличения выброса x, однако если уровень загрязнения в районе превышает Q, то на предприятие накладывается штраф s. Пусть первое предприятие имеет возможность выбирать x из множества $X = [0, a]$, второе $y \in Y = [0, b]$. Целевая функция первого предприятия имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & \text{если } q \leqslant Q, \\ g(x,y) - s, & \text{если } q > Q, \end{cases}$$

где $g(x, y)$ — непрерывная и возрастающие по x функция. Считаем, что $Q < c_1a + c_2b$. Получаем задачу (X, Y, f), где $X = [0, a]$, $Y = [0, b]$. Найти решение по принципу крайнего оптимизма.

15. [30, задача 4.36, с. 59]. Оперирующая сторона производит стрельбу по мишени, представляющей собой точку, расположенную на отрезке $[0, 1]$. Если x — координата точки прицеливания, y — координата мишени, то вероятность поражения равна $p(x, y)$. В распоряжении оперирующей стороны имеется n выстрелов, причем при очередном выстреле результаты предыдущих выстрелов неизвестны оперирующей стороне. Мишень неподвижна, оперирующая сторона не значает местоположение цели. Оперирующая сторона стремится к тому, что математическое ожидание числа попаданий было максимальным. Найти решение по принципу крайнего оптимизма, если

15.1. $p(x,y) = e^{\lambda(x-y)^2}$, $\lambda > 0$, $n = 2$;

15.2. $p(x,y) = e^{\lambda(x-y)^2}$, $\lambda > 0$, $n = 3$;

15.3. $n = 2$, $p(x,y) = \begin{cases} p, & \text{если } |x-y| \leqslant 1/2, \\ 0, & \text{если } |x-y| > 1/2; \end{cases}$

15.4. n произвольно, $p(x,y) = \begin{cases} p, & \text{если } |x-y| \leqslant 1/2, \\ 0, & \text{если } |x-y| > 1/2. \end{cases}$

§ 4. Принцип минимаксного сожаления (Решение по Сэвиджу)

Рассмотрим задачу (X, Y, f). Определим функцию

$$F(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y).$$

Функцию F будем называть функцией риска.

Определение 4.1. *Решением по Сэвиджу будем называть значение $x^* \in X$, для которой справедливо равенство*

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} F(x, y) = \max_{y \in Y} F(x^*, y).$$

Содержательный смысл решения по Сэвиджу следующий. Пусть лицо, принимающее решение, выбрал $x \in X$, и реализовалась неопределенность $y \in Y$. Тогда лицо, принимающее решение, получит $f(x, y)$, а мог бы получить (при реализации неопределенности y) $\max\limits_{z \in X} f(z, y)$. Следовательно, $F(x, y)$ это в каком-то смысле упущенные возможности для лица принимающего решение. Решение по Сэвиджу как раз направлено на возможную минимизацию своих упущенных возможностей.

Теорема 4.1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ — компакты, $f \in C(X \times Y)$. Тогда решение задачи по Сэвиджу существует.*

Отметим некоторые свойства функции риска.

1. $F(x, y) \geqslant 0$ для всех $x \in X$, $y \in Y$.
2. Если X, Y компакты, а $f \in C(X \times Y)$, то $F \in C(X \times Y)$.
3. $F(x^*, y) = 0$ для всех $y \in Y$ тогда и только тогда, когда $\max\limits_{z \in X} f(z, y) = f(x^*, y)$ для всех $y \in Y$.

Теорема 4.2. *Если существует число f^* такое, что $\max\limits_{x\in X} f(x,y) = f^*$ для всех $y \in Y$, то каждое решение x^* по Сэвиджу является решением по Вальду.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что

$$F(x,y) = f^* - f(x,y).$$

Поэтому

$$G(x) = \max_{y\in Y} F(x,y) = f^* + \max_{y\in Y}\bigl(-f(x,y)\bigr) = \\ = f^* - \min_{y\in Y} f(x,y) = f^* - g(x).$$

Пусть x^* — решение по Сэвиджу. Это означает, что для всех $x \in X$ имеет место неравенство $G(x^*) \leqslant G(x)$. Следовательно,

$$f^* - g(x^*) \leqslant f^* - g(x)$$

для всех $x \in X$. Значит, $g(x^*) \geqslant g(x)$ для всех $x \in X$. Это и означает, что x^* — решение по Вальду. Теорема доказана. □

Замечание 4.1. *Пусть X, Y — компакты, $f \in C(X\times Y)$, ЛПР знает реализацию неопределенности y^*. Тогда существует $x^* \in X$ для которого $F(x^*,y^*) = 0$. Действительно, пусть $x^* \in X$ такой, что $\max\limits_{z\in X} f(z,y^*) = f(x^*,y^*)$. Тогда*

$$F(x^*,y^*) = \max_{z\in X} f(z,y^*) - f(x^*,y^*) = 0.$$

Пример 4.1. *Найдем решение по Сэвиджу задачи о диверсификации рубля, постановка которой приведена в примере 2.1. В данной задаче $X = [0,1]$, $Y = [a,b]$, $f(x,y) = x + (1-x)y$. Тогда*

$$\max_{z\in X} f(z,y) = \max_{z\in X}\bigl(z + (1-z)y\bigr) = \max_{z\in X}\bigl((1-y)z + y\bigr) = \\ = \begin{cases} y, & \text{если } \ y \geqslant 1, \\ 1, & \text{если } \ y \leqslant 1. \end{cases}$$

Поэтому

$$F(x,y)=\max_{z\in X} f(z,y)-f(x,y)=\begin{cases}x(y-1), & \text{если } y\geqslant 1,\\ (1-x)(1-y), & \text{если } y\leqslant 1.\end{cases}$$

1. *Пусть* $a\geqslant 1$. *Тогда* $F(x,y)=x(y-1)$. *Поэтому*

$$g(x)=\max_{y\in Y} F(x,y)=x(b-1),$$

а точкой минимума функции g *будет точка* $x^*=0$. *Получили, что в данном случае решение по Сэвиджу совпадает с решением по Вальду.*

2. *Пусть* $b\leqslant 1$. *Тогда* $F(x,y)=(1-x)(1-y)$. *Поэтому*

$$g(x)=\max_{y\in Y} F(x,y)=(1-x)(1-a),$$

а точкой минимума функции g *будет точка* $x^*=1$. *Получили, что в данном случае решение по Сэвиджу совпадает с решением по Вальду.*

3. $a<1<b$. *Тогда*

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-x)(1-y), & \text{если } y\in[a,1],\\ x(y-1), & \text{если } y\in[1,b].\end{cases}$$

Так как функция $x(y-1)$ *возрастает по* y *на* $[1,b]$, *а функция* $(1-x)\cdot(1-y)$ *убывает по* y *на* $[a,1]$, *то*

$$g(x)=\max_{y\in Y} F(x,y)=\max\bigl\{x(b-1),(1-x)(1-a)\bigr\}.$$

Функция $x(b-1)$ *возрастает на* $[0,1]$, *функция* $(1-x)(1-a)$ *убывает на* $[0,1]$. *Поэтому точкой минимума функции* g *будет точка* x^*, *для которой*

$$x^*(b-1)=(1-x^*)(1-a).$$

Отсюда $x^* = \frac{1-a}{b-a}$. *Получили, что в данном случае сумму в* A *рублей следует распределить между рублевым и валютным счетами. На рублевый счет следует положить* x^*A *рублей, а на валютный —* $(1-x^*)A$ *рублей.*

Пример 4.2. *Найдем решение по Сэвиджу задачи о кредите, постановка которой приведена в примере 2.2. Тогда в данной задаче* (X, Y, f) *имеем* $X = [0, +\infty)$, $Y = [a, b]$,

$$f(x,y) = \begin{cases} c_1(y-x), & \text{если } x \geqslant y, \\ c_2(x-y), & \text{если } y \geqslant x. \end{cases}$$

Тогда $\max\limits_{z \in X} f(z,y) = 0$ *для всех* $y \in Y$. *Поэтому*

$$F(x,y) = \begin{cases} c_1(x-y), & \text{если } x \geqslant y, \\ c_2(y-x), & \text{если } y \geqslant x. \end{cases}$$

Поэтому

$$g(x) = \max_{y \in Y} F(x,y) = \begin{cases} c_2(b-x), & \text{если } x \in [0,a], \\ \max\{c_1(x-a), c_2(b-x)\}, & \text{если } x \in [a,b], \\ c_1(x-a), & \text{если } x \in [b,+\infty). \end{cases}$$

Так как функция $c_2(b-x)$ *убывает, функция* $c_1(x-a)$ *возрастает, то свое наименьшее значение функция* g *принимает в точке* x^*, *для которой справедливо равенство*

$$c_2(b-x^*) = c_1(x^*-a).$$

Отсюда $x^* = \frac{c_1 a + c_2 b}{c_1 + c_2}$. *Получили, что в данном примере решение по Сэвиджу совпадает с решением по Вальду.*

Пример 4.3. *Найдем решение по Сэвиджу задачи о переправе, постановка которой приведена в примере 2.3. В данной задаче* (X, Y, f) *имеем* $X = Y = [0, 1]$, $f(x, y) = |x - y|$. *Тогда*

$$\max_{z \in X} f(z, y) = \max_{z \in [0,1]} |z - y| = \begin{cases} 1 - y, & \text{если } y \leqslant 1/2, \\ y, & \text{если } y \geqslant 1/2. \end{cases}$$

Поэтому

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - y - |x - y|, & \text{если } y \leqslant 1/2, \\ y - |x - y|, & \text{если } y \geqslant 1/2. \end{cases}$$

Если $x \leqslant 1/2$, *то*

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } y \in [0, x], \\ 1 - 2y + x, & \text{если } y \in [x, 1/2], \\ x, & \text{если } y \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Если $x \geqslant 1/2$ *будем иметь*

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } y \in [0, 1/2], \\ 2y - x, & \text{если } y \in [1/2, x], \\ x, & \text{если } y \in [x, 1]. \end{cases}$$

Следовательно, $g(x) = \max\limits_{y \in Y} F(x, y) = \begin{cases} 1 - x, & x \leqslant 1/2 \\ x, & x \geqslant 1/2. \end{cases}$ *Значит решением по Сэвиджу будет* $x^* = 1/2$.

Упражнения

1. Фирма производит и поставляет на рынок некоторый продукт. Объем поставляемого продукта обозначим через x. Считаем, что

$x \in [0, a]$. После принятия решения о количестве производимой продукции появляется компания-импортер, причем о действиях импортера известно только, что он может поставлять объем продукции $y \in [0, b]$ (само значение y неизвестно). Цена на рынке на данный продукт определяется следующим образом

$$p(x, y) = \alpha - \beta(x + y),$$

где α, β — положительные числа. Считаем, что издержки фирмы равны kx, $k > 0$. Тогда прибыль фирмы равна

$$f(x, y) = x\big(\alpha - \beta(x + y)\big) - kx.$$

Получаем задачу (X, Y, f), где $X = [0, a]$, $Y = [0, b]$. Найти решение по Сэвиджу.

2. После нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование может находиться в одном из следующих состояний:

1) требуется незначительный ремонт;
2) необходимо заменить отдельные детали;
3) требуется капитальный ремонт.

В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия может принять такие решения:

1) произвести ремонт своими силами, что потребует затрат в размере 2, 6 или 10 д. е. в зависимости от состояния оборудования;
2) произвести ремонт при помощи бригады специалистов, что вызовет затраты 10, 4 или 8 д. е.;
3) заменить оборудование новым, на что будет израсходовано 14, 12 или 6 д. е.

Найти решение по Сэвиджу.

3. Пусть в задаче (X, Y, f) $X = \big\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| \leqslant R_1\big\}$, $Y = \big\{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y - b\| \leqslant R_2\big\}$, $f(x, y) = \|x - y\|$. Найти решение по Сэвиджу.

4. Имеется фирма-монополист, производящая однородную продукцию с функцией затрат вида

$$C = \gamma Q^2 + \alpha Q + \beta,$$

где α, $\beta > 0$, Q — объем выпуска продукции. Считаем, что объем выпуска равен объему спроса. Будем предполагать, что спрос зависит не только от цены x, но и возможных скачков цен y и имеет вид

$$Q = a - bx + cy,$$

где a, b — положительные константы, $c \neq 0$. Тогда прибыль фирмы равна

$$f(x,y) = xQ - C =$$
$$= x(a - bx + cy) - \gamma(a - bx + cy)^2 - \alpha(a - bx + cy) - \beta.$$

Цель фирмы — получить максимальную прибыль. Считая скачки цен неопределенным фактором, получаем задачу (X, Y, f), где множества $X = [0, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}^1$. Найти решение по Сэвиджу.

5. Спрос Q_1 на некоторый продукт и издержки Q_2 при его производстве имеют следующий вид

$$Q_1(p) = a_1 - b_1 p + x, \quad Q_2(p) = a_2 - b_2 p + y,$$

где p — цена на единицу продукции, x — планируемый объем производства, y — неопределенность, связанная с возможными флуктуациями на рынке, a_1, a_2, b_1, b_2 —- положительные константы. Считаем, что цена на рынке описывается уравнением вида [29]

$$\dot{p} = Q_1(p) - Q_2(p), \quad p(0) = p_0.$$

Целью производителя является получение максимальной выручки за некоторый отрезок времени $[0, T]$, равной

$$f(x,y) = x \int_0^T p(t)\, dt.$$

Найти решение по Сэвиджу, считая что $x \in [\alpha_1, \beta_1]$, $y \in [\alpha_2, \beta_2]$.

6. На прямолинейном участке местности обороняющая сторона устраивает засаду для нейтрализации разведгруппы наступающей стороны. Если разведгруппа будет пытаться пройти участок вблизи засады, то она будет нейтрализована. В противном случае, она выполнит поставленную задачу. Считаем, что отрезок местности представляет собой отрезок $[0, A]$ прямой. Пусть обороняющая сторона выбирает точку $x \in [0, A]$, разведгруппа выбирает точку $y \in [0, A]$. Определим функцию f вида

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x-y| \leqslant \delta, \\ -1, & \text{если } |x-y| > \delta, \end{cases}$$

где $0 < \delta < A/2$ — задано. Тогда целью обороняющей стороны является максимизация функции f. Считая y неопределенным параметром, найти решение по Сэвиджу.

7. Пусть $X = Y = [0, 1]$, $\lambda > 0$,

$$f(x,y) = \begin{cases} y - x - \lambda(x-y)^2, & \text{если } y \geqslant x, \\ x - y - \lambda(x-y)^2, & \text{если } y \leqslant x. \end{cases}$$

Найти решение по Сэвиджу.

8. Найти решение по Сэвиджу в модели дуэли, постановка которой приведена в примере 2.4.

9. Имеется фирма-монополист, производящая однородную продукцию с функцией затрат вида

$$C = \gamma Q^2 + (\alpha + y)Q + \beta,$$

где γ, α, β — положительные константы, Q — объем выпуска продукции, y — величина налогов на единицу производства. Считаем, что объем выпуска равен объему спроса. Считаем, что цена $P(Q) = a - bQ$, где a, b — положительные константы. Будем предполагать,

что фирма в момент определения объема производства не имеет информации о величине налоговой нагрузки. Цель фирмы — получить максимальную прибыль. Найти решение по Сэвиджу, если известно, что $y \in [y_1, y_2]$, $Q \in [Q_1, Q_2]$.

10. Вкладчик, имея A рублей, делит их на две части — xA и $(1-x)A$, где $x \in [0,1]$. Сумму в xA рублей вкладчик помещает в банк на один валютный счет под $r_1\,100\%$ годовых, а сумму в $(1-x)A$ рублей на другой валютный счет под $r_2\,100\%$ годовых. Цель вкладчика — получить в конце года хранения максимальную сумму в рублях. Пусть далее K_1, K_2 — курсы валют в начале срока хранения, M_1, M_2 — курсы валют в конце срока хранения. Тогда через год на первом валютном счете будет сумма $\frac{(1+r_1)xAM_1}{K_1}$ рублей. На втором валютном счете в конце срока хранения будет $\frac{(1-x)(1+r_2)AM_2}{K_2}$ рублей. Следовательно, в конце года хранения вкладчик получит сумму в рублях, равную

$$\frac{(1+r_1)xAM_1}{K_1} + \frac{(1-x)(1+r_2)AM_2}{K_2} =$$
$$= A(1+r_1)\left(x\frac{M_1}{K_1} + \frac{1+r_2}{1+r_1}(1-x)\frac{M_2}{K_2}\right).$$

Обозначим $y_i = \frac{M_i}{K_i}$, $r = \frac{1+r_2}{1+r_1}$. Так как вкладчик в начале срока хранения не может знать курса валют в конце срока хранения, то значения y_1, y_2 вкладчику неизвестны. Поэтому y_1, y_2 являются неопределенностью. Будем предполагать, что $y_i \in [a_i, b_i]$, где $0 \leqslant a_i < b_i$ известны вкладчику.

Получаем задачу (X, Y, f), где $X = [0,1]$, $Y = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $f(x,y) = xy_1 + r(1-x)y_2$. Найти решение данной задачи по Сэвиджу.

11. Рассматривается город Хотеллинга $D = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in [0,1]\}$ с метрикой

$$\rho(X,Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad X = (x_1, x_2),\ Y = (y_1, y_2)$$

в каждой точке которого с равной плотностью расположены покупатели. В городе в точке $(0, 1/2)$ расположен магазин, который продает товар по цене c_1. Предприниматель хочет открыть свой магазин. Место для магазина власти города планируют выделить в точке $(1, y)$, $y \in [0, 1]$, при этом точка y будет указана предпринимателю после того, как он назначит цену c_2 за единицу продукта. Считается, что каждый из покупателей, находящийся в точке $(x_1, x_2) \in D$, сравнивает свои затраты $L_i(x_1, x_2)$ на посещение каждого из магазинов и посещает тот магазин, для которого затраты меньше. Затраты на посещение магазина равны сумме цены товара и расстояния до магазина. При этом вся территория города разобьется на два множества D_1, D_2 — тех, кто выбрал магазин $(0, 1/2)$ и $(1, y)$ соответственно. Прибыль предпринимателя равна $f(c_2, y) = c_2 S_2$, где S_2 — площадь множества D_2. Получаем задачу (X, Y, f), где $X = [0, +\infty)$, $Y = [0, 1]$. Найти решение по Сэвиджу.

12. ЛПР имеет сумму S условных единиц для инвестиций в акции и облигации. Известно, что доход по акциям заранее неизвестен, но известно, что он может быть в пределах от $q\%$ до $p\%$. Облигации имеют постоянную доходность $r\%$. Целевая функция ЛПР имеет вид $f(w) = w^2$. Целью ЛПР является получение максимального дохода. Пусть y — процентная ставка дохода по акциям, x — доля инвестиций в акции, $1 - x$ — доля инвестиций в облигации. Тогда целью ЛПР является максимизация функции

$$f(x, y) = \left(Sx\left(1 + \frac{y}{100}\right)\right)^2 + \left(S(1 - x)\left(1 + \frac{r}{100}\right)\right)^2.$$

Найти решение по Сэвиджу, если

12.1. $p = 10\%$, $q = 2\%$, $r = 5\%$.

12.2. $p = 12\%$, $q = 4\%$, $r = 6\%$.

12.3. $p = 15\%$, $q = 2\%$, $r = 5\%$.

12.4. $p = 15\%$, $q = 4\%$, $r = 8\%$.

12.5. $p = 20\%$, $q = 2\%$, $r = 8\%$.

12.6. $p = 20\%$, $q = 4\%$, $r = 5\%$.

12.7. $p = 20\%$, $q = 8\%$, $r = 5\%$.

13. ЛПР имеет сумму S условных единиц для инвестиций в акции и облигации. Известно, что доход по акциям заранее неизвестен, но известно, что он может быть в пределах от $q\%$ до $p\%$. Облигации имеют постоянную доходность $r\%$. Целевая функция ЛПР имеет вид $f(w) = \sqrt{w}$. Целью ЛПР является получение максимального дохода. Пусть y — процентная ставка дохода по акциям, x — доля инвестиций в акции, $1 - x$ — доля инвестиций в облигации. Тогда целью ЛПР является максимизация функции

$$f(x, y) = \sqrt{Sx\left(1 + \frac{y}{100}\right)} + \sqrt{(S(1 - x)\left(1 + \frac{r}{100}\right)}.$$

Найти решение по Вальду, если

13.1. $p = 10\%$, $q = 2\%$, $r = 5\%$.

13.2. $p = 12\%$, $q = 4\%$, $r = 6\%$.

13.3. $p = 15\%$, $q = 2\%$, $r = 5\%$.

13.4. $p = 15\%$, $q = 4\%$, $r = 8\%$.

13.5. $p = 20\%$, $q = 2\%$, $r = 8\%$.

13.6. $p = 20\%$, $q = 4\%$, $r = 5\%$.

13.7. $p = 20\%$, $q = 8\%$, $r = 5\%$.

14. Предприятие получает электроэнергию от энергосистемы ограниченной мощности, максимальные суточные потребности которого в электроэнергии — c_1 единиц. В некоторый момент времени к энергосистеме было подключено второе предприятие, максимальные су-

точные потребности которого в электроэнергии — c_2 единиц. Недостаток электроэнергии приводит к убыткам первого предприятия, которые вычисляются следующим образом: $c_1 - x + y$, где x — объем электроэнергии, потребляемый первым предприятием, y — вторым. Если общий объем потребляемой энергии превышает возможности энергосистемы в c единиц, то в энергосистеме происходит авария, которая обходится первому предприятию в b_1 единиц. Целью первого предприятия является уменьшение убытков, которые определяются следующим образом. Получаем игру двух лиц с функциями выигрыша игроков

$$f(x,y) = \begin{cases} x - c_1 - y, & \text{если } x + y \leqslant c, \\ x - c_1 - y - b_1, & \text{если } x + y > c, \end{cases}$$

причем $x \in [0, c_1]$, $y \in [0, c_2]$. Найти решение по Сэвиджу.

§ 5. Решение по Лапласу

Рассмотрим задачу (X, Y, f) и предположим, что множество неопределенностей имеет вероятностную природу, то есть реализация неопределенности $y \in Y$ происходит случайным образом. Здесь возможны следующие подходы к принятию решений.

1. Распределение вероятностей на множестве Y заранее не известно. Поэтому будем предполагать, что распределение вероятностей является равномерным. Определим функцию

$$F_L(x) = \int\limits_Y f(x, y)p(y)\,dy,$$

где p — плотность равномерного распределения на множестве Y (если она существует). Если множество Y конечно, $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$, то полагаем

$$F_L(x) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(x, y_i).$$

2. Распределение вероятностей на множестве Y известно. Определим функцию

$$F_L(x) = \int\limits_Y f(x, y)p(y)\,dy,$$

где p — плотность распределения на множестве Y (если она существует), или

$$F_L(x) = \sum_{i=1}^{k} f(x, y_i)p_i,$$

если множество Y конечно, $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$ с известным распределением вероятностей p_i.

Определение 5.1. *Решение по Лапласу называется точка* $x^* \in X$ *такая, что*

$$F_L(x^*) = \max_{x \in X} F_L(x).$$

Пример 5.1. *Найдем решение по Лапласу задачи о диверсификации рубля, постановка которой приведена в примере 2.1. В данной задаче* $X = [0,1]$, $f(x,y) = x + (1-x)y$. *Будем считать, что неопределенность* y *равномерно распределена на* $[a,b]$. *Тогда*

$$F_L(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \big(x + (1-x)y\big)\,dy = x + \frac{1}{2}(1-x)(a+b) =$$

$$= \frac{1}{2}(a+b) + x\left(1 - \frac{a+b}{2}\right).$$

Следовательно, решением по Лапласу будет точка x^* *вида*

$$x^* = \begin{cases} 1, & \text{если } (a+b)/2 < 1, \\ 0, & \text{если } (a+b)/2 > 1, \\ [0,1], & \text{если } (a+b)/2 = 1. \end{cases}$$

Пример 5.2. *Найдем решение по Лапласу задачи о кредите, постановка которой приведена в примере 2.2. В данной задаче* (X, Y, f) *имеем* $X = [0, +\infty)$, $Y = [a,b]$,

$$f(x,y) = \begin{cases} c_1(y-x), & \text{если } x \geqslant y, \\ c_2(x-y), & \text{если } y \geqslant x. \end{cases}$$

Будем предполагать, что помеха y *равномерно распределена на* $[a,b]$. *Тогда плотность распределения определяется следующим образом:*

$$p(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } y \in [a,b], \\ 0, & \text{если } y \notin [a,b]. \end{cases}$$

Поэтому функция F_L будет иметь вид

$$F_L(x) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x,y)\,dy.$$

Если $x \in [0,a]$, то

$$F_L(x) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b c_2(x-y)\,dy = \frac{1}{2}(2x-a-b).$$

Для $x \in [a,b]$ будем иметь

$$F_L(x) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^x c_1(y-x)\,dy + \frac{1}{b-a}\int\limits_x^b c_2(x-y)\,dy = \\ = -\frac{c_1(x-a)^2}{2(b-a)} - \frac{c_2(b-x)^2}{2(b-a)}.$$

Для $x \in [a,b]$ будем иметь

$$F_L(x) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b c_1(y-x)\,dx = \frac{1}{2}(a+b-2x).$$

Так как функция $(2x-a-b)$ возрастает, а функция $(a+b-2x)$ убывает, то свое наибольшее значение функция F_L принимает на $[a,b]$.

Если $x \in [a,b]$, то

$$F_L(x) = -\frac{1}{2(b-a)}\big((c_1+c_2)x^2 - 2x(ac_1+bc_2) + a^2c_1 + b^2c_2\big).$$

Следовательно, точкой глобального максимума функции F_L будет точка

$$x^* = \frac{ac_1+bc_2}{c_1+c_2},$$

которая и является решением задачи по Лапласу.

Пример 5.3. *Найдем решение по Лапласу задачи о переправе, постановка которой приведена в примере 2.3. В данной задаче* (X, Y, f) *имеем* $X = Y = [0, 1]$, $f(x, y) = |x - y|$. *Будем предполагать, что неопределенность* y *равномерно распределена на* $[0, 1]$. *Тогда*

$$F_L(x) = \int_0^1 |x - y|\, dy = \int_0^x (y - x)\, dy + \int_x^1 (x - y)\, dy = x^2 - x + \frac{1}{2}.$$

Функция F_L *на* $[0, 1]$ *принимает наибольшее значение в точках* $x^* = 0$ *и* $x^* = 1$. *Следовательно, данные точки являются решением по Лапласу.*

Пример 5.4. *Компания выводит на рынок новый товар. Необходимо выбрать один из трех вариантов цены: 15, 20 или 25 у. е. Потенциальный спрос при каждой цене может быть высоким, средним или низким. При различных комбинациях цен и уровней спроса прибыль компании составит:*

спрос/цена	15	20	25
высокий	500 000	600 000	700 000
средний	200 000	300 000	200 000
низкий	−100 000	150 000	120 000

Необходимо выбрать ровно один вариант цены.

Применим метод Лапласа. При цене в 15 у. е. прибыль составит

$$\frac{1}{3}\big(500\,000 + 200\,000 + (-100\,000)\big) = 200\,000.$$

При цене в 20 у. е. прибыль составит

$$\frac{1}{3}\big(600\,000 + 300\,000 + 150\,000)\big) = 350\,000.$$

При цене в 25 у. е. прибыль составит

$$\frac{1}{3}\big(700\,000 + 200\,000 + 120\,000)\big) = 340\,000.$$

В соответствии с подходом Лапласа следует выбрать цену в 20 у. е.

Пример 5.5 (Модель закупки). *Продавец планирует заказать партию товаров, которую затем собирается реализовать в течение, например, летнего периода. За покупку x единиц товара он платит сумму $k(x)$. В летний период он продает единицу товара по цене b, а по его окончании по цене c, причем $c < b$. Спрос y товар является случайным. Продавец хочет получить максимальную прибыль. Найти объем оптимального заказа.*

Обозначим через $f(x, y)$ прибыль продавца при покупке x единиц товара и спросе в y единиц товара. Тогда

$$f(x,y) = \begin{cases} -k(x) + bx, & \text{если } \ y \geqslant x, \\ -k(x) + by + c(x-y), & \text{если } \ y > x. \end{cases}$$

Получаем задачу (X, Y, f), где $X = Y = [0, +\infty)$, или $X = [\alpha_1, \beta_1]$, $Y = [\alpha_2, \beta_2]$, где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — заданные положительные числа. Будем рассматривать случай $X = Y = [0, +\infty)$. Пусть p — плотность распределения величины y. Тогда

$$F_L(x) = -k(x) + bx \int\limits_x^{+\infty} p(s)\,ds + b \int\limits_0^x sp(s)\,ds + c \int\limits_0^x (x-s)p(s)\,ds.$$

Считаем, что $k \in C^1[0, +\infty)$ и 0 не является точкой глобального максимума. Имеем

$$F_L'(x) = k'(x) + b \int\limits_x^{+\infty} p(s)\,ds + c \int\limits_0^x p(s)\,ds.$$

Получаем уравнение

$$\int\limits_0^x p(s)\,ds = \frac{b - k'(x)}{b - c}. \tag{5.10}$$

Считаем, что $b > c$, $k(0) = 0$ *и* $0 < k'(x) + b < b - c$ *для всех* x. *Тогда уравнение* (5.10) *имеет хотя бы один корень* $x^* > 0$. *В предположении, что функция* F_L *имеет глобальный максимум получаем, что точкой глобального максимума будет один из корней уравнения* (5.10).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. *Пусть* $k(x) = ax$, $c < a < b$. *Получаем уравнение*

$$\int_0^x p(s)\,ds = \frac{b-a}{b-c},$$

которое имеет единственный корень x^*, *причем в данном случае* x^* *будет точкой глобального максимума функции* F_L *и, следовательно,* x^* *— решение по Лапласу.*

2. *Пусть* $k(x) = a\ln(1+x)$, *плотность распределения* p *имеет вид*

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ e^{-x}, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение (5.10) *имеет вид*

$$\frac{a}{x+1} = c + (b-c)e^{-x}.$$

Если $c < a < b$, *то уравнение имеет единственный корень* x^*, *который и будет решением по Лапласу.*

Упражнения

Найти решения по Лапласу следующих задач.

1. Для изготовления партии изделий следует выбрать ровно один станок из n имеющихся. Размер партии может принимать любое значение N такое, что $N_1 \leqslant N \leqslant N_2$, где N_1, N_2 — заданные натуральные

числа. Производственные затраты на выпуск партии из k изделий на i-ом станке равны $c_i(k) = a_i + b_i k$, где a_i, b_i — заданные положительные числа. Какой станок следует выбрать, чтобы выполнить работу с минимальными затратами.

2. После нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование может находиться в одном из следующих состояний:

1) требуется незначительный ремонт;
2) необходимо заменить отдельные детали;
3) требуется капитальный ремонт.

В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия может принять такие решения:

1) произвести ремонт своими силами, что потребует затрат в размере 2, 6 или 10 д. е. в зависимости от состояния оборудования;
2) произвести ремонт при помощи бригады специалистов, что вызовет затраты 10, 4 или 8 д. е.;
3) заменить оборудование новым, на что будет израсходовано 14, 12 или 6 д. е.

Найти решение по Лапласу.

3. Спрос Q_1 на некоторый продукт и издержки Q_2 при его производстве имеют следующий вид

$$Q_1(p) = a_1 - b_1 p + x, \quad Q_2(p) = a_2 - b_2 p + y,$$

где p — цена на единицу продукции, x — планируемый объем производства, y — неопределенность, связанная с возможными флуктуациями на рынке, a_1, a_2, b_1, b_2 —- положительные константы. Считаем, что цена на рынке описывается уравнением вида [29]

$$\dot{p} = Q_1(p) - Q_2(p), \quad p(0) = p_0.$$

Целью производителя является получение максимальной выручки за некоторый отрезок времени $[0, T]$, равной

$$f(x, y) = x \int_0^T p(t)\, dt.$$

Найти решение по Лапласу, считая что $x \in [\alpha_1, \beta_1]$, $y \in [\alpha_2, \beta_2]$ и y равномерно распределена на $[\alpha_2, \beta_2]$.

4. На прямолинейном участке местности обороняющая сторона устраивает засаду для нейтрализации разведгруппы наступающей стороны. Если разведгруппа будет пытаться пройти участок вблизи засады, то она будет нейтрализована. В противном случае, она выполнит поставленную задачу. Считаем, что отрезок местности представляет собой отрезок $[0, A]$ прямой. Пусть обороняющая сторона выбирает точку $x \in [0, A]$, разведгруппа выбирает точку $y \in [0, A]$. Определим функцию f вида

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x - y| \leqslant \delta, \\ -1, & \text{если } |x - y| > \delta, \end{cases}$$

где $0 < \delta < A/2$ — задано. Тогда целью обороняющей стороны является максимизация функции f. Считая y неопределенным параметром, равномерно распределенным на $[0, A]$, найти решение по Лапласу.

5. Найти решение по Лапласу в модели о закупке (X, Y, f), если $X = [\alpha_1, \beta_1]$, $Y = [\alpha_2, \beta_2]$, y равномерно распределена на Y, $k(x) = ax$, $a > 0$.

6. ЛПР имеет сумму S условных единиц для инвестиций в акции и облигации. Известно, что доход по акциям является равномерно распределенной случайной величиной ξ со средним значением $p\%$ и среднеквадратичным отклонением $q\%$. Облигации имеют постоянную доходность $r\%$. Целевая функция ЛПР имеет вид $f(w) = \sqrt{w}$.

Целью ЛПР является получение максимального дохода. Пусть y — процентная ставка дохода по акциям, x — доля инвестиций в акции, $1-x$ — доля инвестиций в облигации. Тогда целью ЛПР является максимизация функции

$$f(x,y)=\sqrt{Sx\left(1+\frac{y}{100}\right)}+\sqrt{S(1-x)\left(1+\frac{r}{100}\right)}.$$

Найти решение по Лапласу, если

6.1. $p=10\%$, $q=2\%$, $r=5\%$.

6.2. $p=12\%$, $q=4\%$, $r=6\%$.

6.3. $p=15\%$, $q=2\%$, $r=5\%$.

6.4. $p=15\%$, $q=4\%$, $r=8\%$.

6.5. $p=20\%$, $q=2\%$, $r=8\%$.

6.6. $p=20\%$, $q=4\%$, $r=5\%$.

6.7. $p=20\%$, $q=8\%$, $r=5\%$.

7. ЛПР имеет сумму S условных единиц для инвестиций в акции и облигации. Известно, что доход по акциям является равномерно распределенной случайной величиной ξ со средним значением $p\%$ и среднеквадратичным отклонением $q\%$. Облигации имеют постоянную доходность $r\%$. Целевая функция ЛПР имеет вид $f(w)=w^2$. Целью ЛПР является получение максимального дохода. Пусть y — процентная ставка дохода по акциям, x — доля инвестиций в акции, $1-x$ — доля инвестиций в облигации. Тогда целью ЛПР является максимизация функции

$$f(x,y)=\left(Sx\left(1+\frac{y}{100}\right)\right)^2+\left(S(1-x)\left(1+\frac{r}{100}\right)\right)^2.$$

Найти решение по Лапласу, если

7.1. $p = 10\%$, $q = 2\%$, $r = 5\%$.

7.2. $p = 12\%$, $q = 4\%$, $r = 6\%$.

7.3. $p = 15\%$, $q = 2\%$, $r = 5\%$.

7.4. $p = 15\%$, $q = 4\%$, $r = 8\%$.

7.5. $p = 20\%$, $q = 2\%$, $r = 8\%$.

7.6. $p = 20\%$, $q = 4\%$, $r = 5\%$.

7.7. $p = 20\%$, $q = 8\%$, $r = 5\%$.

8. [30, задача 1.16, с. 16] Лесное хозяйство занимается посадкой и вырубкой леса на некотором участке земли. Если лес вырубить в начале k-го года после посадки, то прибыль от продажи леса будет равна $\alpha_{k-1}(a - b^k)$, $a > b$, $b \in (0, 1)$. Цель хозяйства — получить как можно большую прибыль. Предполагается, что α_k — случайная величина, равномерно распределенная на (α, β), где $0 < \alpha < \beta < 1$. Найти решение по Лапласу.

§ 6. Критерий Гурвица

Рассмотрим задачу (X, Y, f). Зафиксируем число $\lambda \in [0,1]$ и определим функцию

$$F_G(x) = \lambda \max_{y \in Y} f(x,y) + (1-\lambda) \min_{y \in Y} f(x,y).$$

Определение 6.1. *Решением по Гурвицу называется точка $x^* \in X$ такая, что*

$$F_G(x^*) = \max_{x \in X} F_G(x).$$

Параметр λ называется *показателем оптимизма*. При $\lambda = 1$ получаем критерий крайнего оптимизма, а при $\lambda = 0$ получаем критерий Вальда.

Пример 6.1. *Найдем решение по Гурвицу задачи о диверсификации рубля, постановка которой приведена в примере 2.1. В данной задаче $X = [0,1]$, $Y = [a,b]$, $f(x,y) = x + (1-x)y$. Тогда*

$$\begin{aligned} F_G(x) &= \lambda \max_{y \in Y} \big(x + (1-x)y\big) + (1-\lambda) \min_{y \in Y} \big(x + (1-x)y\big) = \\ &= \lambda\big(x + (1-x)b\big) + (1-\lambda)\big(x + (1-x)a\big) = \\ &= x\big(1 - \lambda - \lambda(b-a)\big) + \lambda b + (1-\lambda)a. \end{aligned}$$

Следовательно, точкой максимума функции $F_G(x)$ будет точка x^* вида

$$x^* = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda \in \Big[0, \dfrac{1}{1+b-a}\Big), \\ 0, & \text{если } \lambda \in \Big(\dfrac{1}{1+b-a}, 1\Big], \\ [0,1], & \text{если } \lambda = \dfrac{1}{1+b-a}. \end{cases}$$

Пример 6.2. *Найдем решение по Гурвицу задачи о переправе, постановка которой приведена в примере 2.3. В данной задаче* (X, Y, f) *имеем* $X = Y = [0, 1]$, $f(x, y) = |x - y|$. *Тогда*

$$F_G(x) = \lambda \max_{y \in Y} |x - y| + (1 - \lambda) \min_{y \in Y} |x - y| =$$
$$= \lambda \max_{y \in Y} |x - y| = \lambda \max\{x, 1 - x\}.$$

Следовательно, решением по Гурвицу при $\lambda = 0$ *будет любая точка отрезка* $[0, 1]$, *а при* $\lambda \neq 0$ *решением будут точки* $x^* = 0$ *и* $x^* = 1$.

Замечание 6.1. *Пусть* $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. *Тогда решение по Гурвицу всегда совпадает либо с решением по Вальду, либо с решением по принципу крайнего оптимизма.*

Упражнения

1. Некоторая энергетическая компания должна принять решение о строительстве и дальнейшей эксплуатации электростанции одного из следующих типов: A_1 — тепловые, A_2 — геотермальные, A_3 — гидравлические, A_4 — приливные, A_5 — солнечные, A_6 — ветровые, A_7 — дизельные. Последствия, связанные с принятым решением, зависят от ряда неопределенных факторов. Будем считать, что можно выделить 4 фактора F_1, F_2, F_3, F_4. Пусть эффективность электростанции определяется следующей матрицей

A/F	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
F_1	12	13	7	9	14	11	15
F_2	11	12	15	14	13	12	17
F_3	21	23	9	16	8	9	10
F_4	7	8	16	8	11	15	6

1.1. Найти решение по Гурвицу.

1.2. Существует ли такой показатель оптимизма λ, при котором решение по Гурвицу не является решением по Вальду, по принципу крайнего оптимизма, по Сэвиджу?

2. Вкладчик, имея A рублей, делит их на две части — xA и $(1-x)A$, где $x \in [0,1]$. Сумму в xA рублей вкладчик помещает в банк на один валютный счет под $r_1\,100\%$ годовых, а сумму в $(1-x)A$ рублей на другой валютный счет под $r_2\,100\%$ годовых. Цель вкладчика — получить в конце года хранения максимальную сумму в рублях. Пусть далее K_1, K_2 — курсы валют в начале срока хранения, M_1, M_2 — курсы валют в конце срока хранения. Тогда через год на первом валютном счете будет сумма $\frac{(1+r_1)xAM_1}{K_1}$ рублей. На втором валютном счете в конце срока хранения будет $\frac{(1-x)(1+r_2)AM_2}{K_2}$ рублей. Следовательно, в конце года хранения вкладчик получит сумму в рублях, равную

$$\frac{(1+r_1)xAM_1}{K_1} + \frac{(1-x)(1+r_2)AM_2}{K_2} =$$
$$= A(1+r_1)\left(x\frac{M_1}{K_1} + \frac{1+r_2}{1+r_1}(1-x)\frac{M_2}{K_2}\right).$$

Обозначим $y_i = \frac{M_i}{K_i}$, $r = \frac{1+r_2}{1+r_1}$. Так как вкладчик в начале срока хранения не может знать курса валют в конце срока хранения, то значения y_1, y_2 вкладчику неизвестны. Поэтому y_1, y_2 являются неопределенностью. Будем предполагать, что $y_i \in [a_i, b_i]$, где $0 \leqslant a_i < b_i$ известны вкладчику.

Получаем задачу (X, Y, f), где $X = [0,1]$, $Y = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $f(x,y) = xy_1 + r(1-x)y_2$. Найти решение данной задачи по Гурвицу.

§ 7. Критерий Ходжа–Лемана

Рассмотрим задачу (X, Y, f). Зафиксируем число $\lambda \in [0, 1]$ и определим функцию

$$F_{XL}(x) = \lambda F_L(x) + (1 - \lambda) \min_{y \in Y} f(x, y).$$

Определение 7.1. *Решением по Ходжу–Леману называется точка $x^* \in X$ такая, что*

$$F_{XL}(x^*) = \max_{x \in X} F_{XL}(x).$$

Отметим, что при $\lambda = 1$ получаем решение по Лапласу, а при $\lambda = 0$ — решение по Вальду.

Критерий Ходжа–Лемана может быть использован в тех задачах принятия решения с неопределенностью, в которых

- неопределенность может иметь вероятностную природу;
- принятое решение теоретически допускает бесконечно большое количество реализаций.

Пример 7.1. *Найдем решение по Ходжа–Леману задачи о диверсификации рубля, постановка которой приведена в примере 2.1. В данной задаче $X = [0, 1]$, $f(x, y) = x + (1 - x)y$. Будем считать, что y равномерно распределена на $[a, b]$. Тогда из примеров 2.1, 5.1 следует, что*

$$F_{XL}(x) = \lambda\left(\frac{1}{2}(a + b) + x\left(1 - \frac{a + b}{2}\right)\right) + (1 - \lambda)\big(x + (1 - x)a\big) =$$
$$= \left(\frac{\lambda}{2}(a + b) + (1 - \lambda)a\right) + x\left(1 - a - \frac{\lambda(b - a)}{2}\right).$$

Поэтому решением по Ходжа–Леману будет точка x^* вида

$$x^* = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 - a - \lambda(b-a)/2 > 0, \\ 0, & \text{если } 1 - a - \lambda(b-a)/2 < 0, \\ [0,1], & \text{если } 1 - a - \lambda(b-a)/2 = 0. \end{cases}$$

В частности, получаем, что если $b < 1$, то $x^* = 1$ при любом значении $\lambda \in [0,1]$. Если $a > 1$, то $x^* = 0$ при любом $\lambda \in [0,1]$.

Упражнения

1. Спрос Q_1 на некоторый продукт и издержки Q_2 при его производстве имеют следующий вид

$$Q_1(p) = a_1 - b_1 p + x, \quad Q_2(p) = a_2 - b_2 p + y,$$

где p — цена на единицу продукции, x — планируемый объем производства, y — неопределенность, связанная с возможными флуктуациями на рынке, a_1, a_2, b_1, b_2 — положительные константы. Считаем, что цена на рынке описывается уравнением вида [29]

$$\dot{p} = Q_1(p) - Q_2(p), \quad p(0) = p_0.$$

Целью производителя является получение максимальной выручки за некоторый отрезок времени $[0, T]$, равной

$$f(x,y) = x \int_0^T p(t)\, dt.$$

Найти решение по Ходжа–Леману, считая что $x \in [\alpha_1, \beta_1]$, $y \in [\alpha_2, \beta_2]$ и y равномерно распределена на $[\alpha_2, \beta_2]$.

§ 8. Игровой подход

Рассмотрим задачу (X, Y, f).

Определение 8.1. *$x^* \in X$ называется игровым решением по Нэшу, если существует $y^* \in Y$ такой, что для всех $x \in X$, $y \in Y$ справедливы неравенства*

$$f(x, y^*) \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant f(x^*, y).$$

Замечание 8.1. *Если мы будем рассматривать антагонистическую игру (X, Y, f), в которой одним из игроков является ЛПР, а другим — «природа», и f — функция выигрыша ЛПР, то $x^* \in X$ является игровым решением по Нэшу, если существует $y^* \in Y$ такой, что пара (x^*, y^*) образует ситуацию равновесия по Нэшу в игре (X, Y, f).*

В данном случае предполагается, что неопределенность $y \in Y$ активно противодействует лицу принимающему решение.

Теорема 8.1. *В антагонистической игре (X, Y, f) существует ситуация равновесия тогда и только тогда, когда существуют*

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y), \quad \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y)$$

и

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y). \tag{8.11}$$

$x^* \in X$, на котором достигается внешний максимум в (8.11) *и будет игровым решением по Нэшу.*

Пример 8.1. *Найдем решение задачи о диверсификации рубля, постановка которой приведена в примере 2.1. В данной задаче $X = [0, 1]$, $Y = [a, b]$, $f(x, y) = x + (1 - x)y$. Тогда*

$$\min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \big(x + (1 - x)y\big) = x + (1 - x)a = x(1 - a) + a.$$

Поэтому

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y)=\max_{x\in X}\bigl(x(1-a)+a\bigr)=\begin{cases}1, & \textit{если}\ \ a\leqslant 1,\\ a, & \textit{если}\ \ a\geqslant 1.\end{cases}$$

Отметим, что внешний максимум достигается в точке x^* вида

$$x^*=\begin{cases}1, & \textit{если}\ \ a<1,\\ 0, & \textit{если}\ \ a>1,\\ [0,1], & \textit{если}\ \ a=1.\end{cases}$$

Пусть $a\geqslant 1$. Тогда

$$\max_{x\in X} f(x,y)=\max_{x\in X}\bigl(x(1-y)+y\bigr)=y.$$

Следовательно,

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)=\min_{y\in Y} y=a.$$

По теореме 8.1 игровое решение x^* существует и

$$x^*=\begin{cases}0, & \textit{если}\ \ a>1,\\ [0,1], & \textit{если}\ \ a=1.\end{cases}$$

Пусть $b\leqslant 1$. Тогда

$$\max_{x\in X} f(x,y)=\max_{x\in X}\bigl(x(1-y)+y\bigr)=1.$$

Следовательно,

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y)=1.$$

По теореме 8.1 игровое решение x^* существует и

$$x^*=\begin{cases}1, & \textit{если}\ \ b<1,\\ [0,1], & \textit{если}\ \ b=1.\end{cases}$$

Пусть $a < 1 < b$. Тогда

$$\max_{x\in X} f(x,y) = \max_{x\in X}\big(x(1-y)+y\big) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ y \leqslant 1, \\ y, & \text{если } \ y \geqslant 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) = 1.$$

Так как

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y),$$

то по теореме 8.1 игровое решение существует и равно $x^* = 1$.

Пример 8.2. *Найдем игровое решение задачи о кредите, постановка которой приведена в примере 2.2. Тогда в данной задаче (X, Y, f) имеем $X = [0, +\infty)$, $Y = [a, b]$,*

$$f(x,y) = \begin{cases} c_1(y-x), & \text{если } \ x \geqslant y, \\ c_2(x-y), & \text{если } \ y \geqslant x. \end{cases}$$

Имеем $\min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X} f(x,y) = 0$.

$$\min_{y\in Y} f(x,y) = \begin{cases} c_1(a-x), & \text{если } \ c_1(a-x) \leqslant c_2(x-b), \\ c_2(x-b), & \text{если } \ c_1(a-x) \geqslant c_2(x-b). \end{cases}$$

Отсюда

$$\min_{y\in Y} f(x,y) = \begin{cases} c_2(x-b), & \text{если } \ x \in \Big[0, \dfrac{c_1a + c_2b}{c_1+c_2}\Big], \\ c_1(a-x), & \text{если } \ x \in \Big[\dfrac{c_1a + c_2b}{c_1+c_2}, +\infty\Big). \end{cases}$$

Поэтому $\max\limits_{x\in X}\min\limits_{y\in Y} f(x,y) = \frac{c_1c_2(a-b)}{c_1+c_2} < 0$. Так как

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) \neq \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y),$$

то игрового решения по Нэшу не существует.

Пример 8.3. *Найдем игровое решение по Нэшу задачи о переправе, постановка которой приведена в примере 2.3. В данной задаче* (X, Y, f) *имеем* $X = Y = [0, 1]$, $f(x, y) = |x - y|$. *Имеем*

$$\min_{y \in Y} |x - y| = 0, \quad \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = 0,$$
$$\max_{x \in X} |x - y| = \max\{y, 1 - y\}, \quad \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = 1/2.$$

Так как

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \neq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y),$$

то игрового решения по Нэшу не существует.

Теорема 8.2. *Пусть* X, Y *— выпуклые компакты,* $f \in C(X \times Y)$, *функция* $f(x, y)$ *вогнута по* x *при каждом* y *и выпукла по* y *при каждом* x. *Тогда в задаче* (X, Y, f) *существует игровое равновесие по Нэшу.*

Пример 8.4. *Некоторый процесс на отрезке времени* $[0, 1]$ *описывается уравнением*

$$\dot{x} = u + v, \quad x(0) = 0, \quad u, v \in [0, 1],$$

где функцию $u(\cdot)$ *выбирает лицо, принимающее решение, а функция* $v(\cdot)$ *является помехой. Целью ЛПР является максимизация функционала*

$$f(u, v) = x(1) - \int_0^1 u^2(s)\, ds.$$

Пусть

$$X = \{u(\cdot) \mid u - \textit{измеримая функция},\ u(t) \in [0, 1], t \in [0, 1]\},$$
$$Y = \{v(\cdot) \mid v - \textit{измеримая функция},\ v(t) \in [0, 1], t \in [0, 1]\}.$$

Получаем задачу (X, Y, f). *Покажем, что функция* $u^*(t) = 1/2$ *для всех* $t \in [0,1]$ *является игровым решением по Нэшу. Пусть* $v^*(t) = 0$ *для всех* $t \in [0,1]$. *Докажем, что для всех* $u \in X$, $v \in Y$ *справедливо неравенство*

$$f(u, v^*) \leqslant f(u^*, v^*) \leqslant f(u^*, v). \tag{8.12}$$

Имеем $f(u^*, v^*) = 1/4$.

$$f(u, v^*) = x(1) - \int_0^1 u^2(s)\, ds = \int_0^2 \big(u(s) - u^2(s)\big)\, ds.$$

Так как $z - z^2 \leqslant 1/4$ *для всех* $z \in [0,1]$, *то* $f(u, v^*) \leqslant 1/4$. *Кроме того,*

$$f(u^*, v) = x(1) - \frac{1}{4} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + v^2(s)\right) ds - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \int_0^1 v(s)\, ds \geqslant \frac{1}{4},$$

так как $v(s) \geqslant 0$ *для всех* $s \in [0,1]$. *Тем самым, неравенство* (8.12) *доказано. Это и означает, что* u^* *является игровым равновесием по Нэшу.*

Упражнения

1. Спрос Q_1 на некоторый продукт и издержки Q_2 при его производстве имеют следующий вид

$$Q_1(p) = a_1 - b_1 p + x, \quad Q_2(p) = a_2 - b_2 p + y,$$

где p — цена на единицу продукции, x — планируемый объем производства, y — неопределенность, связанная с возможными флуктуациями на рынке, a_1, a_2, b_1, b_2 — положительные константы. Считаем, что цена на рынке описывается уравнением вида [29]

$$\dot{p} = Q_1(p) - Q_2(p), \quad p(0) = p_0.$$

Целью производителя является получение максимальной выручки за некоторый отрезок времени $[0, T]$, равной

$$f(x, y) = x \int_0^T p(t)\, dt.$$

Найти игровое решение по Нэшу, считая что $x \in [\alpha_1, \beta_1]$, $y \in [\alpha_2, \beta_2]$.

2. Наступающая сторона имеет n средств нападения, обороняющая сторона имеет m средств защиты, известны k мест возможного прохода через линию защиты обороняющейся стороны. Предполагается, что при расположении одного средства защиты на i-ом месте оно в состоянии уничтожить p_i единиц средств нападения, проходящих через это место. Пусть x_i — количество единиц средств нападения, нацеленных на проход через i-ый пункт, y_i — количество единиц средств защиты, расположенных в i-ом пункте. Критерием эффективности операции наступления будем считать

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \max\{x_i - p_i y_i, 0\},$$

причем

$$X = \big\{(x_1, \ldots, x_k) \mid x_i \geqslant 0, x_1 + \ldots + x_k = n\big\},$$
$$Y = \big\{(y_1, \ldots, y_k) \mid y_i \geqslant 0, y_1 + \ldots + y_k = m\big\}.$$

Найти игровое решение по Нэшу в данной задаче (X, Y, f).

3. Найти игровое решение по Нэшу в модели дуэли, постановка которой приведена в примере 2.4.

4. Некоторый процесс на отрезке времени $[0, 1]$ описывается уравнением

$$\dot{x} = u + v, \quad x(0) = 0, \quad u, v \in [0, 1],$$

где функцию $u(\cdot)$ выбирает лицо принимающее решение, а функция $v(\cdot)$ является помехой. Целью ЛПР является максимизация функционала

$$f(u,v) = x^2(1).$$

Пусть

$$X = \big\{u(\cdot) \mid u - \text{измеримая функция},\ u(t) \in [0,1],\ t \in [0,1]\big\},$$
$$Y = \big\{v(\cdot) \mid v - \text{измеримая функция},\ v(t) \in [0,1],\ t \in [0,1]\big\}.$$

Получаем задачу (X, Y, f). Найти игровое решение по Нэшу.

5. Вкладчик, имея A рублей, делит их на две части — xA и $(1-x)A$, где $x \in [0,1]$. Сумму в xA рублей вкладчик помещает в банк на один валютный счет под $r_1\,100\%$ годовых, а сумму в $(1-x)A$ рублей на другой валютный счет под $r_2\,100\%$ годовых. Цель вкладчика — получить в конце года хранения максимальную сумму в рублях. Пусть далее K_1, K_2 — курсы валют в начале срока хранения, M_1, M_2 — курсы валют в конце срока хранения. Тогда через год на первом валютном счете будет сумма $\frac{(1+r_1)xAM_1}{K_1}$ рублей. На втором валютном счете в конце срока хранения будет $\frac{(1-x)(1+r_2)AM_2}{K_2}$ рублей. Следовательно, в конце года хранения вкладчик получит сумму в рублях, равную

$$\frac{(1+r_1)xAM_1}{K_1} + \frac{(1-x)(1+r_2)AM_2}{K_2} =$$
$$= A(1+r_1)\left(x\frac{M_1}{K_1} + \frac{1+r_2}{1+r_1}(1-x)\frac{M_2}{K_2}\right).$$

Обозначим $y_i = \frac{M_i}{K_i}$, $r = \frac{1+r_2}{1+r_1}$. Так как вкладчик в начале срока хранения не может знать курса валют в конце срока хранения, то значения y_1, y_2 вкладчику неизвестны. Поэтому y_1, y_2 являются неопределенностью. Будем предполагать, что $y_i \in [a_i, b_i]$, где $0 \leqslant a_i < b_i$ известны вкладчику.

Получаем задачу (X, Y, f), где $X = [0, 1]$, $Y = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $f(x, y) = xy_1 + r(1 - x)y_2$. Найти игровое по Нэшу решение данной задачи.

6. Рассматривается город Хотеллинга $D = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in [0, 1]\}$ с метрикой

$$\rho(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad X = (x_1, x_2),\ Y = (y_1, y_2),$$

в каждой точке которого с равной плотностью расположены покупатели. В городе в точке $(0, 1/2)$ расположен магазин, который продает товар по цене c_1. Предприниматель хочет открыть свой магазин. Место для магазина власти города планируют выделить в точке $(1, y)$, $y \in [0, 1]$, при этом точка y будет указана предпринимателю после того, как он назначит цену c_2 за единицу продукта. Считается, что каждый из покупателей, находящийся в точке $(x_1, x_2) \in D$ сравнивает свои затраты $L_i(x_1, x_2)$ на посещение каждого из магазинов и посещает тот магазин, для которого затраты меньше. Затраты на посещение магазина равны сумме цены товара и расстояния до магазина. При этом вся территория города разобьется на два множества D_1, D_2 — тех, кто выбрал магазин $(0, 1/2)$ и $(1, y)$ соответственно. Прибыль предпринимателя равна $f(c_2, y) = c_2 S_2$, где S_2 — площадь множества D_2. Получаем задачу (X, Y, f), где $X = [0, +\infty)$, $Y = [0, 1]$. Найти решение решение по Нэшу.

7. В районе имеется 2 промышленных предприятий, каждое из которых имеет источник, выбрасывающий в атмосферу вредную примесь. Пусть x — величина выброса первого предприятия, y — величина выбросов второго предприятия, которая неизвестна первому предприятию. Концентрация вредных веществ может быть рассчитана по формуле $q = c_1 x + c_2 y$, где c_1, c_2 — некоторые константы. Пусть Q — значение предельно допустимой концентрации вредной примеси. Первое предприятие может снижать эксплуатационные расходы и тем самым увеличивать прибыль, посредством увеличения выброса x, однако если уровень загрязнения в районе превышает Q,

то на предприятие накладывается штраф s. Пусть первое предприятие имеет возможность выбирать x из множества $X = [0, a]$, второе $y \in Y = [0, b]$. Целевая функция первого предприятия имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & \text{если } q \leqslant Q, \\ g(x,y) - s, & \text{если } q > Q, \end{cases}$$

где $g(x, y)$ — непрерывная и возрастающие по x функция. Считаем, что $Q < c_1 a + c_2 b$. Получаем задачу (X, Y, f), где $X = [0, a]$, $Y = [0, b]$. Найти игровое решение по Нэшу.

8. Рассматривается задача (X, Y, f), в которой $X = Y = (0, \infty)$,

$$f(x,y) = \beta\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_0 x}{x+y}\right) - \alpha_1 x,$$

где $\alpha_1, \beta, \lambda_0, \lambda_1$ — положительные константы. Найти игровое решение по Нэшу.

В [24] отмечено, что задача описывает взаимодействие предприятия пассажирского транспорта со своим конкурентом, в распоряжении каждого из которых находится по одному транспортному маршруту.

9. Предприятие получает электроэнергию от энергосистемы ограниченной мощности, максимальные суточные потребности которого в электроэнергии — c_1 единиц. В некоторый момент времени к энергосистеме было подключено второе предприятие, максимальные суточные потребности которого в электроэнергии — c_2 единиц. Недостаток электроэнергии приводит к убыткам первого предприятия, которые вычисляются следующим образом: $c_1 - x + y$, где x — объем электроэнергии, потребляемый первым предприятием, y — вторым. Если общий объем потребляемой энергии превышает возможности энергосистемы в c единиц, то в энергосистеме происходит авария, которая обходится первому предприятию в b_1 единиц. Целью первого предприятия является уменьшение убытков, которые определяются следующим образом. Получаем игру двух лиц с функциями выигрыша игроков

$$f(x,y)=\begin{cases} x-c_1-y, & \text{если } x+y\leqslant c,\\ x-c_1-y-b_1, & \text{если } x+y>c. \end{cases}$$

причем $x\in[0,c_1]$, $y\in[0,c_2]$. Найти игровое решение по Нэшу.

§ 9. Принятие решений в нечеткой постановке

Считаем, что задано множество Z в обычном смысле, которое будем называть универсальным.

Определение 9.1. *Нечетким множеством A универсального множества Z называется совокупность пар вида $(x, \mu_A(x))$, где $x \in Z$, $\mu_A\colon Z \to [0,1]$. Функция μ_A называется функцией принадлежности множества нечеткого A.*

Число $\mu_A(x)$ характеризует степень принадлежности точки x множеству A. Стандартное множество $A \subset Z$ можно представить в виде нечеткого множества, взяв в качестве функции принадлежности функцию

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ x \in A, \\ 0, & \text{если } \ x \notin A. \end{cases}$$

Определение 9.2. *Множеством уровня $A(\alpha)$ при $\alpha \in (0,1]$ нечеткого множества A универсального множества Z называется множество*

$$A(\alpha) = \big\{x \in Z \mid \mu_A(x) \geqslant \alpha\big\}.$$

Рассмотрим стандартную функцию $f\colon Z \to \mathbb{R}^1$ и поставим задачу о нахождении глобального максимума функции f на нечетком множестве A универсального множества Z.

Для каждого $\alpha \in (0,1]$ рассмотрим задачу

$$f(x) \to \max, \quad x \in A(\alpha), \tag{9.13}$$

где $A(\alpha)$ — множество уровня нечеткого множества A. Совокупность всех решений задачи (9.13) обозначим $X(\alpha)$. Пусть $X^* = \bigcup\limits_{\alpha\in(0,1]} X(\alpha)$. Тогда решением задачи со стандартной функцией f

на нечетком множестве A называется нечеткое множество A^* с функцией принадлежности μ_{A^*} вида

$$\mu_{A^*}(x) = \begin{cases} \sup\{\alpha \mid z \in X(\alpha)\}, & \text{если } x \in X^*, \\ 0, & \text{если } x \notin X^*. \end{cases}$$

Более подробную информацию о нечетких множествах можно найти в [40].

Рассмотрим теперь задачу (X, Y, f). Будем предполагать, что множество Y является нечетким множеством с функцией принадлежности μ_Y. Рассмотрим следующий подход к решению данной задачи. Для каждого $\alpha \in (0, 1]$ определим множество уровня $Y(\alpha)$ нечеткого множества Y и будем решать задачу $\big(X, Y(\alpha), f\big)$ одним из ранее рассмотренных способов. Пусть $X^*(\alpha)$ — решение данной задачи. В качестве решения задачи (X, Y, f) будем рассматривать нечеткое множество X^* с функцией принадлежности μ_{X^*} вида

$$\mu_{X^*}(x) = \begin{cases} \sup\{\alpha \mid z \in X(\alpha)\}, & \text{если } x \in X^*, \\ 0, & \text{если } x \notin X^*, \end{cases}$$

где $X^* = \bigcup\limits_{\alpha \in (0,1]} X(\alpha)$.

Пример 9.1. *Найдем решение по Вальду задачи о диверсификации рубля, постановка которой приведена в примере 2.1. В данной задаче* $X = [0, 1]$, $f(x, y) = x + (1 - x)y$. *Считаем, что множество* Y *является нечетким множеством с функцией принадлежности* μ_Y, *график которой представлен на рис. 1.*

Пусть $\alpha \in (0, 1]$. *Множествами уровня множества* Y *являются отрезки* $[a(\alpha), b(\alpha)]$, *где* $a(\alpha) = a + \alpha(a_1 - a)$, $b(\alpha) = b - \alpha(b - b_1)$. *Рассмотрим задачу* $\big(X, [a(\alpha), b(\alpha)], f\big)$. *Из примера 2.1 следует, что*

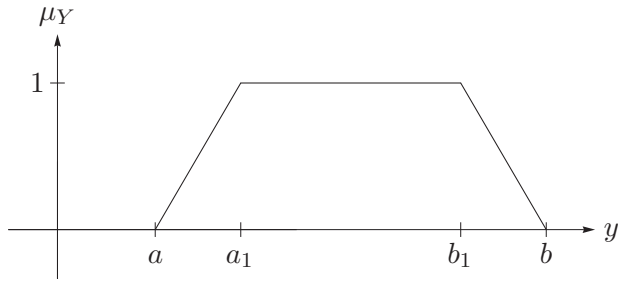


Рис. 1. Функция принадлежности множества Y

решением по Вальду данной задачи будет

$$x(\alpha) = \begin{cases} 1, & \textit{если } a(\alpha) < 1, \\ 0, & \textit{если } a(\alpha) > 1, \\ [0,1], & \textit{если } \ a(\alpha) = 1. \end{cases} \tag{9.14}$$

1. *Рассмотрим случай* $a < 1 < a_1$. *Тогда из* (9.14) *следует, что*

$$x(\alpha) = \begin{cases} 1, & \textit{если } \ \alpha \in \Big[0, \dfrac{1-a}{a_1-a}\Big), \\ 0, & \textit{если } \ \alpha \in \Big(\dfrac{1-a}{a_1-a}, 1\Big], \\ [0,1], & \textit{если } \ \alpha = \dfrac{1-a}{a_1-a}. \end{cases}$$

Следовательно, решением задачи по Вальду будет нечеткое множество X^* *с функцией принадлежности*

$$\mu_{X^*}(x) = \begin{cases} \dfrac{1-a}{a_1-a}, & \textit{если } \ x = 1, \\ 1, & \textit{если } \ x = 0, \\ 0, & \textit{если } \ x \in (0,1). \end{cases}$$

2. *Пусть* $a_1 < 1 < b_1$. *Из примера 2.1 следует, что решением задачи* $\big(X, [a(\alpha), b(\alpha)], f\big)$ *по Вальду будет*

$$x(\alpha) = 1 \ \ \textit{для всех} \ \ \alpha \in [0,1].$$

Поэтому решением исходной задачи по Вальду будет нечеткое множество X^* *с функцией принадлежности*

$$\mu_{X^*}(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \ \ x = 1, \\ 0, & \textit{если} \ \ x \neq 1. \end{cases}$$

Пример 9.2. *Найдем решение по Сэвиджу задачи о диверсификации рубля, постановка которой приведена в примере 2.1. В данной задаче* $X = [0,1]$, $f(x,y) = x + (1-x)y$. *Считаем множество* Y *нечетким множеством с функцией принадлежности* μ_Y, *график которой представлен на рис. 1.*

Пусть $\alpha \in (0,1]$. *Множествами уровня множества* Y *являются отрезки* $[a(\alpha), b(\alpha)]$, *где* $a(\alpha) = a + \alpha(a_1 - a)$, $b(\alpha) = b - \alpha(b - b_1)$. *Рассмотрим задачу* $\big(X, [a(\alpha), b(\alpha)], f\big)$.

Пусть $a_1 < 1 < b_1$. *Из примера 4.1 следует, что решением по Сэвиджу задачи* $\big(X, [a(\alpha), b(\alpha)], f\big)$ *будет точка*

$$x^*(\alpha) = \frac{1 - a(\alpha)}{b(\alpha) - a(\alpha)} = \frac{1 - a - \alpha(a_1 - a)}{b - a - \alpha(b - b_1 + a_1 - a)}. \qquad (9.15)$$

Из (9.15) *следует, что если* $\frac{1-a}{b-a} = \frac{1-a_1}{b_1-a_1}$, *то решением по Сэвиджу будет нечеткое множество* X^* *с функцией принадлежности*

$$\mu_{X^*}(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \ \ x = \dfrac{1-a}{b-a}, \\ 0, & \textit{если} \ \ x \neq \dfrac{1-a}{b-a}. \end{cases}$$

Пусть теперь $\frac{1-a}{b-a} < \frac{1-a_1}{b_1-a_1}$. *Тогда решением по Сэвиджу будет нечеткое множество* X^* *с функцией принадлежности*

$$\mu_{X^*}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \left[\frac{1-a}{b-a}, \frac{1-a_1}{b_1-a_1}\right], \\ \frac{x(b-a)+a-1}{x(b-b_1+a_1-a)-(a_1-a)}, & \text{если } x \in \left[\frac{1-a}{b-a}, \frac{1-a_1}{b_1-a_1}\right]. \end{cases}$$

Аналогично рассматривается случай $\frac{1-a}{b-a} > \frac{1-a_1}{b_1-a_1}$.

Пример 9.3. *Найдем решение по Вальду задачи о переправе, постановка которой приведена в примере 2.3, считая что неопределенность* y *принадлежит нечеткому множеству* Y *с функцией принадлежности, график которой представлен на рис. 2*

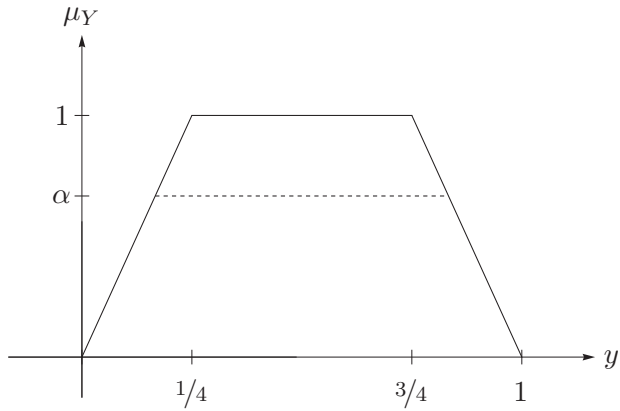


Рис. 2. Функция принадлежности множества Y

Пусть $\alpha \in (0, 1]$. *Множествами уровня множества* Y *являются отрезки* $[a(\alpha), b(\alpha)]$, *где* $a(\alpha) = \alpha/4$, $b(\alpha) = 1 - \alpha/4$. *Тогда*

$$\min_y |x - y| = \begin{cases} |x - \alpha/4|, & \text{если } x \in [0, \alpha/4], \\ 0, & \text{если } x \in [\alpha/4, 1 - \alpha/4], \\ |1 - \alpha/4 - x|, & \text{если } x \in [1 - \alpha/4, 1]. \end{cases}$$

Поэтому

$$\max_x\Big(\min_y |x-y|\Big) = \alpha/4 \;\; \textit{и} \;\; X^*(\alpha) = \{0,1\}.$$

Поэтому решением по Вальду будет нечеткое множество X^* с функцией принадлежности

$$\mu_{X^*}(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \;\; x \in \{0,1\}, \\ 0, & \textit{если} \;\; x \notin \{0,1\}. \end{cases}$$

Упражнения

1. Найти решение по принципу крайнего оптимизма задачи о диверсификации рубля, постановка которой приведена в примере 2.1. Считая, что множество Y является нечетким множеством с функцией принадлежности μ_Y, график которой представлен на рис. 3

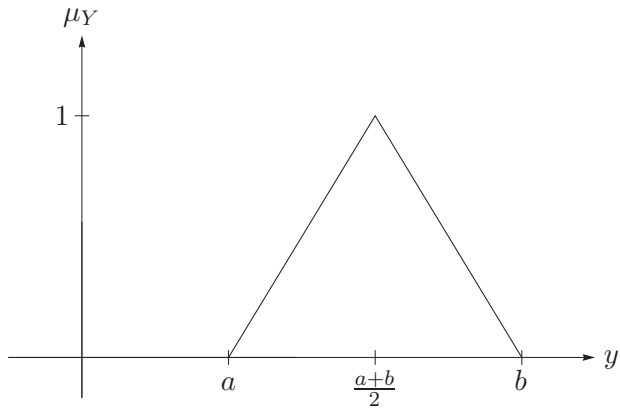


Рис. 3. Функция принадлежности множества Y

2. Найти решение по Сэвиджу задачи о переправе, постановка которой приведена в примере 2.3, считая что неопределенность y при-

надлежит нечеткому множеству с функцией принадлежности, график которой представлен на рис. 4.

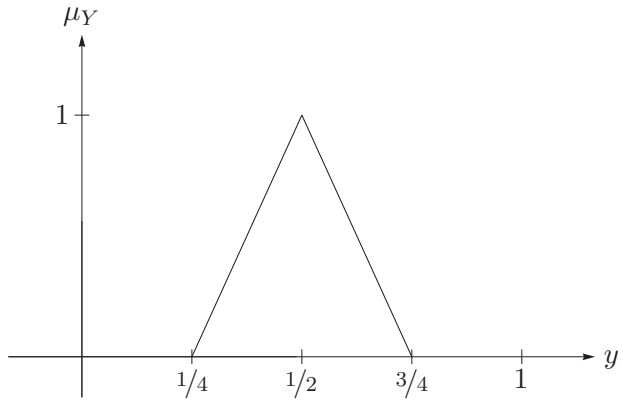


Рис. 4. Функция принадлежности множества Y

3. ЛПР имеет сумму S условных единиц для инвестиций в акции и облигации. Доходность по акциям является элементом нечеткого множества Y с функцией принадлежности μ_Y. Облигации имеют постоянную доходность $r\%$. Целевая функция ЛПР имеет вид $f(w) = \sqrt{w}$. Целью ЛПР является получение максимального дохода. Пусть y — процентная ставка дохода по акциям, x — доля инвестиций в акции, $1-x$ — доля инвестиций в облигации. Тогда целью ЛПР является максимизация функции

$$f(x,y) = \sqrt{Sx\left(1+\frac{y}{100}\right)} + \sqrt{S(1-x)\left(1+\frac{r}{100}\right)}.$$

Найти решение по Вальду, если функция μ_Y имеет следующий вид

3.1 $r = 5\%$, $\mu_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin [2,10], \\ (y-2)/4, & \text{если } y \in [2,6], \\ (10-y)/4, & \text{если } y \notin [6,10]. \end{cases}$

3.2 $r = 5\%$, $\mu_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin [4,12], \\ (y-4)/4, & \text{если } y \in [4,8], \\ (12-y)/4, & \text{если } y \notin [8,12]. \end{cases}$

3.3 $r = 6\%$, $\mu_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin [4,10], \\ (y-4)/3, & \text{если } y \in [4,7], \\ (10-y)/3, & \text{если } y \notin [7,10]. \end{cases}$

3.4 $r = 6\%$, $\mu_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin [2,14], \\ (y-2)/6, & \text{если } y \in [2,8], \\ (10-y)/8, & \text{если } y \notin [8,14]. \end{cases}$

3.5 $r = 8\%$, $\mu_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin [2,16], \\ (y-2)/7, & \text{если } y \in [2,9], \\ (16-y)/7, & \text{если } y \notin [9,16]. \end{cases}$

3.6 $r = 4\%$, $\mu_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin [2,14], \\ (y-2)/6, & \text{если } y \in [2,8], \\ (16-y)/6, & \text{если } y \notin [4,14]. \end{cases}$

4. ЛПР имеет сумму S условных единиц для инвестиций в акции и облигации. Доходность по акциям является элементом нечеткого множества Y с функцией принадлежности μ_Y. Облигации имеют постоянную доходность $r\%$. Целевая функция ЛПР имеет вид $f(w) = w^2$. Целью ЛПР является получение максимального дохода. Пусть y — процентная ставка дохода по акциям, x — доля инвестиций в акции, $1-x$ — доля инвестиций в облигации. Тогда целью ЛПР является максимизация функции

$$f(x,y) = \left(Sx\left(1+\frac{y}{100}\right)\right)^2 + \left(S(1-x)\left(1+\frac{r}{100}\right)\right)^2.$$

Найти решение по Вальду, если функция μ_Y имеет следующий вид

4.1. $r = 5\%$, $\mu_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin [2,10], \\ (y-2)/4, & \text{если } y \in [2,6], \\ (10-y)/4, & \text{если } y \notin [6,10]. \end{cases}$

4.2. $r = 5\%$, $\mu_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin [4,12], \\ (y-4)/4, & \text{если } y \in [4,8], \\ (12-y)/4, & \text{если } y \notin [8,12]. \end{cases}$

4.3. $r = 6\%$, $\mu_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin [4,10], \\ (y-4)/3, & \text{если } y \in [4,7], \\ (10-y)/3, & \text{если } y \notin [7,10]. \end{cases}$

4.4. $r = 6\%$, $\mu_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin [2,14], \\ (y-2)/6, & \text{если } y \in [2,8], \\ (10-y)/8, & \text{если } y \notin [8,14]. \end{cases}$

4.5. $r = 8\%$, $\mu_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin [2,16], \\ (y-2)/7, & \text{если } y \in [2,9], \\ (16-y)/7, & \text{если } y \notin [9,16]. \end{cases}$

4.6. $r = 4\%$, $\mu_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin [2,14], \\ (y-2)/6, & \text{если } y \in [2,8], \\ (16-y)/6, & \text{если } y \notin [4,14]. \end{cases}$

5. Фирма производит n видов продукции, себестоимость производства одной единицы продукции с номером $i \in I = \{1, \ldots, n\}$ равна c_i, цена продажи единицы продукции равна p_i. Тогда прибыль фирмы равна

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \in I} (p_i - c_i) x_i.$$

Целью фирмы является такой план производства, при котором прибыль максимальна. Ограничения имеют следующий вид.

По ресурсам:

$$\sum_{i \in I} a_{ji} x_i \leqslant b_j,$$

где a_{ji} — расход ресурса j на производство единицы продукта i, b_j — запас ресурса j, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$.

По производственной мощности:

$$0 \leqslant x_i \leqslant x_i^{\max}, \quad i \in I.$$

Будем предполагать, что спрос d_i, $i \in I$, на продукты является нечетким с функциями принадлежности $\mu_i(d_i)$.

Получаем ограничение по спросу

$$x_i \leqslant d_i, \quad i \in I.$$

Найти решение задачи, если $x_i^{\max} = +\infty$.

5.1. $n = 2$, $p_1 = 10$, $p_2 = 15$, $c_1 = 6$, $c_2 = 9$, $a_{11} = 2$, $a_{21} = a_{12} = 1$, $a_{22} = 3$, $b_1 = 100$, $b_2 = 80$,

$$\mu_1(d_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } d_1 \notin [30, 50], \\ (d_1 - 30)/10, & \text{если } d_1 \in [30, 40], \\ (50 - d_1)/10, & \text{если } d_1 \in [40, 50], \end{cases}$$

$$\mu_2(d_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } d_1 \notin [20, 30], \\ (d_2 - 25)/5, & \text{если } d_2 \in [20, 25], \\ (30 - d_2)/5, & \text{если } d_2 \in [25, 30]. \end{cases}$$

5.2. $n = 2$, $p_1 = 20$, $p_2 = 15$, $c_1 = 10$, $c_2 = 9$, $a_{11} = 3$, $a_{21} = a_{12} = 2$,

$a_{22} = 4$, $b_1 = 100$, $b_2 = 100$,

$$\mu_1(d_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } d_1 \notin [30, 50], \\ (d_1 - 30)/10, & \text{если } d_1 \in [30, 40], \\ (50 - d_1)/10, & \text{если } d_1 \in [40, 50], \end{cases}$$

$$\mu_2(d_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } d_1 \notin [20, 30], \\ (d_2 - 25)/5, & \text{если } d_2 \in [20, 25], \\ (30 - d_2)/5, & \text{если } d_2 \in [25, 30]. \end{cases}$$

6. Фирма производит n видов продукции, себестоимость производства одной единицы продукции с номером $i \in I = \{1, \ldots, n\}$ равна c_i, цена продажи единицы продукции равна p_i. Будем считать, что цены p_i принадлежат нечетким множествам с функциями принадлежности μ_i.

Тогда прибыль фирмы равна

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \in I} (p_i - c_i) x_i.$$

Целью фирмы является такой план производства, при котором прибыль максимальна. Ограничения имеют следующий вид.

По ресурсам:

$$\sum_{i \in I} a_{ji} x_i \leqslant b_j,$$

где a_{ji} — расход ресурса j на производство единицы продукта i, b_j — запас ресурса j, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$.

По производственной мощности:

$$0 \leqslant x_i \leqslant x_i^{\max}, \quad i \in I.$$

По спросу:

$$x_i \leqslant d_i, \quad i \in I.$$

Найти решение по Вальду, если

6.1. $n = 2$, $c_1 = 6$, $c_2 = 9$, $a_{11} = 2$, $a_{21} = a_{12} = 1$, $a_{22} = 3$, $b_1 = 100$, $b_2 = 80$, $x_i^{\max} = +\infty$, $d_1 = 30$, $d_2 = 26$,

$$\mu_1(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \notin [10, 20], \\ (p-10)/5, & \text{если } p \in [10, 15], \\ (20-p)/5, & \text{если } p \in [15, 20], \end{cases}$$

$$\mu_2(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \notin [12, 20], \\ (p-12)/4, & \text{если } p \in [12, 16], \\ (16-p)/4, & \text{если } p \in [16, 20], \end{cases}$$

6.2. $n = 2$, $c_1 = 8$, $c_2 = 10$, $a_{11} = 3$, $a_{21} = a_{12} = 2$, $a_{22} = 4$, $b_1 = 100$, $b_2 = 100$, $x_i^{\max} = +\infty$, $d_1 = 40$, $d_2 = 20$,

$$\mu_1(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \notin [14, 20], \\ (p-14)/3, & \text{если } p \in [14, 17], \\ (20-p)/3, & \text{если } p \in [17, 20], \end{cases}$$

$$\mu_2(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \notin [12, 20], \\ (p-12)/4, & \text{если } p \in [12, 16], \\ (16-p)/4, & \text{если } p \in [16, 20]. \end{cases}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т.* Выбор вариантов: основы теории / М. А. Айзерман, Ф. Т. Алескеров — Москва: URSS, 2024. — 240 с.

[2] *Акоф Р., Сасиени М.* Основы исследования операций / Р. Акоф, М. Сасиени. — Москва: Мир, 1971. — 534 с.

[3] *Ашманов С. А., Тимохов А. В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях / С. А. Ашманов, А. В. Тимохов. — Москва: Наука, 1991. — 448 с.

[4] *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус. — Москва: Наука, 1965. — 458 с.

[5] *Буре В. М.* Оптимальные решения в условиях стохастического спроса // Управление социально-экономическими системами. — Санкт-Петербург: Изд-во Санкт-Петербург. ун-та, 2002. — Вып. 20. — С. 14–18.

[6] *Васин А. А., Морозов В. В.* Теория игр и модели математической экономики / А. А. Васин, В. В. Морозов. — Москва: МАКС Пресс, 2005. — 272 с.

[7] *Васин А. А., Краснощеков П. С., Морозов В. В.* Исследование операций / А. А. Васин, П. С. Краснощеков, В. В. Морозов — Москва: Издательский центр «Академия», 2008. — 463 с.

[8] *Венцель Е. С.* Исследование операций / Е. С. Венцель — Москва: Советское радио, 1972. — 552 с.

[9] *Воробьев Н. Н.* Лекции по теории игр для экономистов-кибернетиков / Н. Н. Воробьев. — Москва: Наука, 1985. — 271 с.

[10] *Воронцовский А. В.* Управление рисками / А. В. Воронцовский. — Москва: URSS, 2023. — 485 с.

[11] *Геймейер Ю. Б.* Введение в теорию исследования операций / Ю. Б. Геймейер. — Москва: Наука, 1971. — 384 с.

[12] *Геймейер Ю. Б., Морозов В. В., Сухарев А. Г., Федоров В. В.* Задачи по исследованию операций / Ю. Б. Геймейер, В. В. Морозов, А. Г. Сухарев, В. В. Федоров — Москва: Изд-во МГУ, 1979. — 167 с.

[13] *Горелик В. А., Кононенко А. Ф.* Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах / В. А. Горелик, А. Ф. Кононенко — Москва: Радио и связь, 1982. — 144 с.

[14] *Горелик В. А., Горелов М. А., Кононенко А. Ф.* Анализ конфликтных ситуаций в системах управления / В. А. Горелик, М. А. Горелов, А. Ф. Кононенко — Москва: Радио и связь, 1991. — 288 с.

[15] *Данскин Дж. М.* Теория максимина / Дж. М. Данскин — Москва: Советское радио, 1970. — 200 с.

[16] *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс / В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов — Москва: Наука, 1972. — 368 с.

[17] *Дубров А. М., Лагоша Б. А., Хрусталев Е. Ю.* Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев — Москва: Финансы и статистика, 1999. — 176 с.

[18] *Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г.* Введение в прикладную теорию игр / Г. Н. Дюбин, В. Г. Суздаль. — Москва: Наука, 1981. — 336 с.

[19] *Жуковский В. И., Жуковская Л. В.* Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности / В. И. Жуковский, Л. В. Жуковская —- Москва: Едиториал УРСС, 2024. — 272 с.

[20] *Жуковский В. И.,Кудрявцев К. Н.* Уравновешивание конфликтов и приложения / В. И. Жуковский, К. Н. Кудрявцев — Москва: ЛЕНАНД, 2012. — 304 с.

[21] *Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н., Смирнова Л. В.* Гарантированные решения конфликтов и их приложения / В. И. Жуковский, К. Н. Кудрявцев, Л. В. Смирнова — Москва: КРАСАНАД, 2013. — 368 с.

[22] *Колокольцев В. Н., Малафеев О. А.* Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации / В. Н. Колокольцев, О. А. Малафеев. — Санкт-Петербург: Лань, 2012. — 624 с.

[23] *Кононенко А. Ф., Халезов А. Д., Чумаков В. В.* Принятие решений в условиях неопределенности / А. Ф. Кононенко, А. Д. Халезов, В. В. Чумаков — Москва: ВЦ АН СССР, 1991. — 196 с.

[24] *Корягин М. Е.* Конкуренция транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 3. — С. 143–151.

[25] *Крушевский А. В.* Теория игр / А. В. Крушевский. — Киев: Вища школа, 1977. — 216 с.

[26] *Кукушкин Н. С., Меньшикова О. Р., Меньшиков И. С.* Конфликты и компромиссы / Н. С. Кукушкин, О. Р. Меньшикова, И. С. Меньшиков. — Москва: Знание, 1986. — 32 с.

[27] *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А. Б. Куржанский. — Москва: Наука, 1971. — 392 с.

[28] *Лабскер Л. Г.* Теория критериев оптимальности и экономические решения / Л. Г. Лабскер. — Москва: КНОРУС, 2017. — 744 с.

[29] *Лебедев В. В., Лебедев К. В.* Математическое и компьютерное моделирование экономики / В. В. Лебедев, К. В. Лебедев — Москва: НВТ-Дизайн, 2002. — 256 с.

[30] *Морозов В. В., Сухарев А. Г., Федоров В. В.* Исследование операций в задачах и упражнениях / В. В. Морозов, А. Г. Сухарев, В. В. Федоров — Москва: Высш. школа, 1986. — 287 с.

[31] *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики / Э. Мулен. — Москва: Мир, 1985. — 200 с.

[32] *Мушик Э., Мюллер П.* Методы принятия технических решений / Э. Мушик, П. Мюллер — Москва: Мир, 1990. — 208 с.

[33] *Ногин В. Д.* Принятие решений в многокритериальной среде / В. Д. Ногин — Москва: Физматгиз, 2004. — 176 с.

[34] *Оуэн Г.* Теория игр / Г. Оуэн. — Москва: Мир, 1971. — 270 с.

[35] *Петросян Л. А., Захаров В. В.* Математические модели в экологии / Л. А. Петросян, В. В. Захаров — Санкт-Петербург: Изд-во Санкт-Петербург. ун-та, 1997. — 253 с.

[36] *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин — Москва: Физматлит, 2007. — 256 с.

[37] *Розен В. В.* Математические модели принятия решений в экономике / В. В. Розен — Москва: Высшая школа, 2002. — 288 с.

[38] *Саати Т. Л.* Принятие решений при зависимых и обратных связях. Аналитические сети / Т. Л. Саати — Москва: URSS, 2011. — 360 с.

[39] *Силкина Г. Ю.* Теория принятия решений и управления рисками / Г. Ю. Силкина — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГПУ, 2003. — 72 с.

[40] *Ухоботов В. И.* Избранные главы теории нечетких множеств / В. И. Ухоботов — Челябинск: Изд-во Челябинск. ун-та., 2011. — 245 с.

[41] *Ухоботов В. И.* Введение в теорию принятия решений при неопределённостях: учеб. пособие / В. И. Ухоботов — Челябинск: Изд-во Челяб. гос.ун-та, 2015. — 138 с.

[42] *Шелобаев С. И.* Математические методы и модели. Экономика. Финансы. Бизнес / С. И. Шелобаев — Москва: ЮНИТИ, 2000. — 356 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3
Вспомогательные сведения 5
Гарантированное по исходам решение (Решение по Вальду) 9
Принцип крайнего оптимизма 25
Принцип минимаксного сожаления (Решение по Сэвиджу) 34
Решение по Лапласу 46
Критерий Гурвица 56
Критерий Ходжа–Лемана 59
Игровой подход 61
Принятие решений в нечеткой постановке 71
Список рекомендуемой литературы 83

Учебное издание

Банников Александр Сергеевич
Петров Николай Никандрович

**ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ
ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

Учебное пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 01.10.2026. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 5,17. Уч.-изд. л. 4,34.
Тираж 50 экз. Заказ № 1420.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, Ломоносова, 4Б, каб. 021
тел./факс: +7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18