Удмуртский государственный университет

На правах рукописи

Сивков Дмитрий Анатольевич

УДК 517.984

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВОЗМУЩЕНИЯМИ МИНИМАЛЬНОГО РАНГА

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Г. Г. Исламов

Ижевск — 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Классической задачей управления динамическим объектом является задача о нахождении для системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R},$$

где A и B — постоянные вещественные матрицы соответственно размерностей $n \times n$ и $n \times m$, такого управления $u = Ux, \quad U \in \mathbb{R}^{m\times n}$, для которого спектр матрицы $A + BU$ совпадает с заданным множеством. Эта задача назначения спектра называется задачей модального управления.

Здесь управление $u = Ux$ строится на основе информации о текущем состоянии объекта и называется обратной связью.

Разрешимость задачи о назначении спектра исследовалась многими авторами. Обзор результатов, относящихся к этой области, дан, например, в [1].

В 1987–89 гг. Г. Г. Исламовым [2–5] была впервые поставлена и решена задача о минимальном ранге линейной обратной связи

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax - Kx, \\ \operatorname{rank} K \to \min, \\ \sigma(A - K) \cap \Omega = \emptyset, \end{gathered} \tag{1}$$

где Ω — заданное множество, $\sigma(A-K)$ — спектр матрицы $A - K$.

В работе [3] доказана следующая теорема, определяющая минимальный ранг матрицы K, задающей линейную обратную связь в задаче (1).

Теорема 0.1. *Минимальный ранг допустимого возмущения равен мак-*

симальной геометрической кратности чисел $\lambda \in \Omega$

$$\max_{\lambda\in\Omega} \dim\ker(\lambda E - A) = \min \operatorname{rank} K,$$

где минимум берется по всем допустимым возмущениям K*.*

Впоследствии в работе [4] данный результат был обобщен на случай замкнутого оператора A, действующего в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$.

Теорема 0.2. *Пусть множество* $\Omega \cap \sigma(A)$ *пусто или конечно и состоит лишь из изолированных собственных значений оператора* A *конечной алгебраической кратности. Тогда*

$$\min \operatorname{rank} K = \max_{\lambda\in\Omega} \dim\ker(A - \lambda I),$$

где минимум берется по всем конечномерным K *таким, что выполнено*

$$\sigma(A - K) \cap \Omega = \emptyset,$$

I *— тождественный оператор в* $\mathfrak{H}$*.*

Г. Г. Исламовым построены конструкции минимальных по рангу возмущений и изучены их свойства [2]. Отметим результат статьи [5], где в случае нормального компактного оператора A с простым спектром, действующего в гильбертовом пространстве, дано описание всех одноранговых возмущений с требуемым свойством.

Теорема 0.3. *Пусть* $Ax = \sum\limits_{k\geqslant 1} \mu_k(x, \varphi_k)\varphi_k$ *и* $\Omega = \{\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \ldots, \mu_{k_n}\}$*, где* $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$*, оператор* A *имеет полную систему ортонормированных собственных функций* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$*. Пусть, далее,* $K_n x = u(x, v)$*, причем для* $K = K_n$ *выполнено соотношение*

$$\sigma_p(A - K) = \{0\} \cup \sigma_p(A) \setminus \Omega. \tag{2}$$

Тогда найдутся такие две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел $\{\alpha_i\}$ *и* $\{\beta_i\}$*, что:*

а) $u = \sum\limits_{j\geqslant 1} \alpha_j \varphi_j$, $v = \sum\limits_{j\geqslant 1} \overline{\beta}_j \varphi_j$ *(*$\overline{\beta}_j$ *— комплексно-сопряженное с* β_j *число);*

б) $\alpha_j \beta_j = 0$ *для индексов* j*, не принадлежащих множеству* $\Lambda = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$*;*

в) $\alpha_{k_i}\beta_{k_i} = P(\mu_{k_i}) / \prod\limits_{j=1, j\neq i}^{n} (\mu_{k_i} - \mu_{k_j})$, $i = \overline{1, n}$*, где* $P(\lambda)$ *— некоторый многочлен степени* n *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого образуют подмножество* $\sigma_p(A) \setminus \Omega$*, дополненное нулем.*

Обратно, если u *и* v *заданы в виде рядов а), сходящихся в* $\mathfrak{H}$*, и выполнены условия б) и в), то для оператора* $K_n x = u(x, v)$ *выполнено соотношение (2), где* $K = K_n$*.*

Позднее, в 2004 г., М. А. Клочков [6] рассмотрел вопрос о виде обратной связи в задаче о назначении спектра для неограниченного самосопряженного оператора A

$$\operatorname{rank} K \to \min,$$

$$\sigma(A - K) \cap \Omega = \emptyset,$$

$$\Theta \subset \sigma(A - K),$$

где Θ — заданное множество, не пересекающееся с Ω.

В [6] получен вид минимальной по рангу обратной связи для задачи о назначении спектра. Приведен вид минимальной по рангу линейной обратной связи и для случая кратного спектра.

Теорема 0.4. *Для того чтобы можно было перевести заданное подмножество* $\Omega = \{\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m}\}$ *изолированных собственных значений оператора* $Au = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{m_l} \lambda_l (u, \varphi_{l,i}) \varphi_{l,i}$*, где* $\{\varphi_{l,i}\}$ *— полная система ортонормированных собственных функций оператора* A *в* $\mathfrak{H}$*, в произвольно заданное подмножество* $\Theta = \{\kappa_{l_1}, \ldots, \kappa_{l_m}\}$ $(\Theta \cap \Omega = \emptyset)$ *с помощью многорангового* *возмущения вида*

$$Ku = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} a_{si}(u, b_{si}), \quad m_{l_0} = 0, \quad a_{si} \in \mathfrak{H}, \quad b_{si} \in \mathfrak{H},$$

$$a_{si} = \sum_{j=s}^{\infty} \nu_{sij}\varphi_{j,i+m_{s-1}}, \quad b_{si} = \sum_{j=s}^{\infty} \overline{\beta}_{sij}\varphi_{j,i+m_{s-1}}$$

$$m_{l_1} \leqslant m_{l_2} \leqslant \ldots \leqslant m_{l_m},$$

где $\{\nu_{sij}\}$, $\{\beta_{sij}\}$, $s = \overline{1,m}$, $i = \overline{1, m_{l_s} - m_{l_{s-1}}}$, $j = \overline{s,\infty}$ *— квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

а) $\nu_{sij}\beta_{sij} = 0$ *для всех индексов* j*, не принадлежащих множеству* $\Lambda = \{l_1, \ldots, l_m\}$*;*

б) $\displaystyle\sum_{s=1}^{j} \sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} \nu_{sil_j}\beta_{sil_j} = \frac{P(\lambda_{l_j})}{\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m} (\lambda_{l_j} - \lambda_{l_k})}$, $j = \overline{1,m}$, *где* $P(\lambda)$ *— некоторый многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из* Θ.

В работе [7] Д. А. Сивков уточняет и дополняет этот результат.

При обобщении приведенных выше результатов на нестационарные управляемые системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \tag{3}$$

возникают вопросы об управлении асимптотическими характеристиками этих систем. В работах П. Бруновского, Е. Л. Тонкова, С. Н. Поповой и других авторов рассмотрены условия полной управляемости асимптотических характеристик данных систем. Подробный обзор полученных в этой области результатов сделан в диссертации С. Н. Поповой [8].

В том случае, когда оператор $A(t)$ — ω-периодический по времени t, система (3) с помощью представления Флоке может быть приведена к стационарной системе. В 1999 г. Г. Г. Исламов [9] поставил и решил задачу об «удалении» собственных значений матрицы монодромии из заданного множества Ω для нестационарной динамической системы (3) с ω-периодической по времени t функциональной матрицей $A(t)$ методом минимальной обратной связи.

Пусть для линейной управляемой системы

$$\dot{x} = A(t)x + u(t), \tag{4}$$

где $A(t)$ есть ω-периодическая матрица с комплекснозначными локально суммируемыми элементами, управление $u(t)$ формируется по методу обратной связи

$$u(t) = -B(t)F(t)^{-1}x(t),$$

где $F(t) = X(t)\exp(-tK)$, $K = \frac{1}{\omega}\ln X(\omega)$, $X(t)$ — матрицант невозмущенной системы

$$\dot{x} = A(t)x,$$

а $B(t)$ есть ω-периодическая матрица с комплекснозначными локально суммируемыми элементами.

Тогда справедлива следующая

Теорема 0.5. *Пусть Ω — произвольное собственное подмножество $\mathbb{C}$. Тогда*

$$\min \operatorname{rank} B = \max_{\rho\in\Omega} \dim \ker(X(\omega) - \rho E),$$

где минимум берется по всем ω-периодическим $n \times n$-матрицам $B(t)$ с комплекснозначными локально суммируемыми компонентами, для кото-

рых система (4) не имеет мультипликаторов из Ω.

В 2002 г. Д. А. Сивков [10] обобщил результаты работы [9] на случай ω-периодического по времени t оператора $A(t)$, компактного при каждом t, действующего в бесконечномерном банаховом пространстве $\mathfrak{B}$.

В 2005 г. [7, 11] был найден вид линейной обратной связи минимального ранга для задачи (3) в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, изменяющей точечный спектр оператора монодромии заданным образом.

В том же году полученные результаты были обобщены на случай уравнений в частных производных (операторов с компактной резольвентой) вида

$$P_t u(t) + a(t) D u(t) = 0,$$

где $u(t)$ — для каждого $t \in \mathbb{R}$ является элементом $\mathfrak{H}$,
$P_t = \alpha \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial \cdot}{\partial t}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,
$a(t)$ — ω-периодическая непрерывная функция,
D — линейный оператор из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$, имеющий компактную резольвенту $R(\lambda) = (D - \lambda I)^{-1}$.

* * *

Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы и приложения.

0. Во *введении* отмечено место данной диссертационной работы в современных исследованиях, кратко изложены результаты, полученные диссертантом и другими исследователями в этой области.

1. Глава 1 носит обзорный характер.

   В первом параграфе главы 1 подробно рассмотрены результаты Е. Л. Тонкова и С. Н. Поповой, относящиеся к вопросам управляемости линейных систем.

Параграф 2 главы 1 посвящен управлению энергетическим спектром квантовомеханической системы (оператор Гамильтона) с помощью возмущения потенциала. Рассмотрены работы Абрагама, Мозеса [12], Захарьева, Сузько [13], Захарьева, Чабанова [14]. Построен численный пример возмущения потенциала, меняющего дискретный спектр заданным образом.

2. Глава 2 посвящена рассмотрению управления спектром автономных систем.

   В первом параграфе главы 2 рассматривается видоизменение теоремы 1 работы Г. Г. Исламова [3] на случай целенаправленного перевода точек спектра из множества Ω в заданное множество Θ. Построен простой пример, иллюстрирующий модифицированную теорему.

   В параграфе 2 главы 2 для радиотехнических схем, состоящих из нескольких связанных электрических колебательных контуров, получен математический вид обратной связи минимального ранга, меняющей спектр собственных колебаний заданным образом, и рассчитаны конструктивные элементы схемы, соответствующие математическому виду возмущений. Рассмотрены случаи простого и кратного спектра.

   В параграфе 3 главы 2 рассматривается видоизмененная теорема 1 работы Г. Г. Исламова [4] на случай целенаправленного перевода точек спектра из множества Ω в заданное множество Θ для замкнутого оператора A, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве.

   Дана оценка изменения спектра оператора V при его приближенном построении.

   В параграфе 4 главы 2 для самосопряженного оператора A, не зависящего от времени t, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, построен вид возмущения минимального ранга, переводящего простой спектр из заданного множества Ω в заданное множество Θ. Результаты основаны на работе М. А. Клочкова [6] и устраняют содержащиеся в этой работе погрешности и неточности, обобщают результаты [6] дополнительно на конечномерный случай и случай, когда оператор A не имеет полной системы собственных функций.

Дана оценка погрешности перевода собственных значений из Ω в заданное множество Θ.

В параграфе 5 главы 2 приведен вид возмущения минимального ранга, переводящего собственные значения λ_{l_k} конечной кратности из заданного множества Ω в заданное множество Θ. Для нормы возмущения дана неулучшаемая оценка снизу.

В параграфе 6 главы 2 для стационарного оператора Гамильтона с потенциалом вида

$$U(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ +\infty, & x < 0 \end{cases}$$

построены простые возмущения минимального ранга, изменяющие спектр оператора заданным образом.

3. Глава 3 посвящена управлению спектром оператора монодромии периодических систем. Она содержит бо́льшую часть основных результатов диссертационной работы.

   Параграф 1 главы 3 посвящен построению вида возмущения, переводящего асимптотические показатели решений из заданного множества Ω в заданное Θ для произвольной приводимой неавтономной системы в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Этот параграф содержит обоснование подхода, развитого в главе 3.

Параграф 2 главы 3 содержит результаты работы Г. Г. Исламова [9]. В этом параграфе вводится понятие ранга функциональной матрицы, иллюстрируются основные методы доказательств, используемые в главе 3.

Параграф 3 главы 3 содержит обобщение теоремы 1 работы [9] на случай ω-периодического по времени t оператора $A(t)$, при каждом t действующем в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Новые результаты, изложенные в этом параграфе, впервые получены в работе [10].

В параграфе 4 главы 3 для неавтономной системы с ω-периодическим по времени оператором $A(t)$, действующем в сепарабельном гильбертовом пространстве и компактном при каждом t, приведен вид возмущения минимального ранга, переводящего дискретные собственные значения оператора монодромии данной системы из заданного множества Ω в заданное множество Θ. Рассмотрены случаи как простого, так и кратного спектра. Получены оценки снизу нормы возмущения.

В параграфе 5 главы 3 рассмотрен случай, когда ω-периодический оператор $A(t)$ некомпактен. Для уравнения в частных производных вида

$$\left(\alpha\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial}{\partial t}\right)u(t)+a(t)Du(t)=0,$$

где $a(t+\omega)=a(t)$ для все t, D — линейный оператор из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$, имеющий компактную резольвенту $R(\lambda)=(D-\lambda I)^{-1}$, найден вид возмущения, переводящего заданное подмножество Ω спектра оператора монодромии в заданное множество Θ.

В параграфе 6 главы 3 для задачи распространения тепла в тонком стержне с периодическим по времени коэффициентом температуропроводности найден вид возмущения, переводящего заданное подмножество Ω спектра оператора монодромии в заданное множество Θ. Приведен аналитический пример.

4. Список литературы состоит из 39 наименований.

   Основные результаты диссертации опубликованы в 3 статьях.

5. В приложении приведена программа для пакета Wolfram Mathematica 5.1, использованная при расчете возмущения потенциала для уравнения Шредингера, описанного в параграфе 2 главы 1.

ГЛАВА 1

«СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ»

1.1. Задачи управления показателями Ляпунова

Важным вопросом исследования является вопрос об управляемости системы, иными словами, вопрос о существовании допустимого управления, при котором достигаются заданные параметры. Исследованиям вопросов управляемости (в смысле управления показателями Ляпунова) посвящены работы [15–20].

В данных работах рассмотрены семейства линейных управляемых систем

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u, \quad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

$$y = C^T(f^t\sigma)x, \quad y \in \mathbb{R}^r,$$

заданных динамической системой (Σ, f^t), где Σ — полное метрическое пространство, f^t — однопараметрическая группа движений на Σ, непрерывная по $(t,\sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$, и функцией $\varphi = (A, B, C)$. В частном случае, зафиксировав $\sigma = \sigma_0$, можно рассматривать отдельную управляемую систему с наблюдением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

$$y = C^T(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^r. \tag{1.2}$$

Пусть $X(t,s)$ — матрица Коши однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1.3}$$

тогда

Определение 1.1.1. *Система $\varphi(t)$ называется:*

а) согласованной на $[0,\vartheta]$, если существует $l > 0$ такое, что для всякой $P \in M_{n,n}$ найдется кусочно-непрерывное управление $U_P : [0,\vartheta] \to M_{m,r}$, удовлетворяющее неравенству $|U_P(t)| \leqslant l|P|$, $0 \leqslant$

$t \leqslant \vartheta$, такое, что краевая задача

$$\dot{Z} = A(t)Z + B(t)UC^T(t)X(t,0), \tag{1.4}$$

$$Z(0) = 0,\ Z(\vartheta) = P, \tag{1.5}$$

при $U = U_P(t)$ разрешима относительно $Z(\cdot)$.

б) согласованной, если найдется $\vartheta > 0$ такое, что $\varphi(t)$ согласованна на $[0,\vartheta]$.

в) равномерно согласованной, если существуют $\vartheta > 0$, $l > 0$ такие, что для любого $t_0 \geqslant 0$ система $\varphi(t - t_0)$ согласованна на $[0,\vartheta]$ (система $\varphi(t)$ согласованна на $[t_0, \vartheta + t_0]$).

Теорема 1.1. (см. [19, 20]) *Система $\varphi(t)$ согласованна (равномерно согласованна) в том и только в том случае, если система*

$$\dot{y} = F(t)y + G(t)w \tag{1.6}$$

вполне управляема (равномерно вполне управляема), где $F(t) \in M_{n^2,n^2}$, $F(t) = \big(A(t) \otimes I_n\big) - \big(I_n \otimes A^T(t)\big)$, $G(t) \in M_{n^2,mr}$, $G(t) = B(t) \otimes C(t)$.

Символ $\otimes$ означает прямое (кронекерово) произведение матриц [21, с. 235].

Определение 1.1.2. *Система (1.6) называется вполне управляемой [22, с. 138], если существует $\vartheta > 0$ такое, что для любой точки $y_0 \in \mathbb{R}^{n^2}$ найдётся управление $w(\cdot, y_0) : [0,\vartheta] \to \mathbb{R}^{mr}$, переводящее $y(0) = y_0$ в нуль ($y(\vartheta) = 0$), и равномерно вполне управляемой [23], если существуют $\vartheta > 0$ и $l > 0$ такие, что для любого $t_0 \geqslant 0$ система (1.6) вполне управляема на $[t_0, \vartheta + t_0]$, и для соответствующего управления выполнено неравенство $|w(t, y_0)| \leqslant l|y_0|$.*

В системе (1.1)–(1.2) значение y является наблюдаемым параметром, на основе которого мы строим управление $u(t) = Uy(t) = UC^T(t)x(t)$, где $U : [0,\vartheta] \to M_{m,r}$ — ограниченная измеримая функция. Таким образом, с точки зрения изменения состояния x, систему (1.1, 1.2) можно представить в виде

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)UC^T(t))x. \tag{1.7}$$

1.1.1. Управляемость показателями Ляпунова Рассмотрим $\lambda_1(U) \geqslant \lambda_2(U) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(U)$ — полный спектр показателей Ляпунова системы (1.7), отвечающий управлению U; полный спектр однородной системы (1.3), отвечающей $U(t) \equiv 0$, обозначим $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$.

Определение 1.1.3. *Система $\varphi(t)$ обладает свойством локальной управляемости показателями Ляпунова, если для всех $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что любому $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in B^n_\delta(0)$ отвечает измеримое управление U_μ, $\sup\limits_t |U(t)| < \varepsilon$, и для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ найдется единственное $j \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $\lambda_k(U_\mu) = \lambda_j + \mu_j$.*

Определение 1.1.4. *Система (1.3) называется диагонализуемой, если существует преобразование Ляпунова*

$$x = L(t)z$$

такое, что система

$$\dot{Z} = P(t)Z,$$

где $P(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t)$, диагональная.

Теорема 1.2. (см. [16, 19, 20]) *Если (1.3) диагонализуема, и φ равномерно согласованна, то φ обладает свойством локальной управляемости показателями Ляпунова.*

Определение 1.1.5. *Показатели Ляпунова $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ однородной системы (1.3) называются устойчивыми, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что показатели Ляпунова $\tilde{\lambda}_1 \geqslant \tilde{\lambda}_2 \geqslant \ldots \geqslant \tilde{\lambda}_n$ всякой системы $\dot{x} = (A(t) + Q(t))x$, $\sup\limits_t |Q(t)| < \delta$, удовлетворяют неравенствам $|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$.*

Теорема 1.3. (см. [20]) *Пусть система φ равномерно согласованная и показатели Ляпунова системы (1.3) устойчивы. Тогда система φ обладает свойством равномерной локальной управляемости показателей Ляпунова.*

Для систем, где $r = n$ и $C(t) \equiv I_n$, известно [15], что из равномерной согласованности φ следует равномерная вполне управляемость φ. При некоторых дополнительных условиях на систему φ возможно получить критерий равномерной локальной управляемости показателей Ляпунова.

Определение 1.1.6. *Система (1.3) называется системой с интегральной разделенностью, если она имеет фундаментальный базис решений $x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot)$, обладающий свойством: существуют $c > 0$ и $d > 0$ такие, что для всех $0 \leqslant s \leqslant t$ и $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$*

$$|x_{j+1}(t)|/|x_{j+1}(s)| \geqslant d \cdot \exp(c(t-s)) \cdot |x_j(t)|/|x_j(s)|.$$

Замечание. Известно [24], что (1.3) — система с интегральной разделенностью в том и только в том случае, когда существует ляпуновское преобразование $x = L(t)y$, приводящее (1.3) к диагональному виду $\dot{y} = P(t)y$, $P(t) = \operatorname{diag}(p_1(t), \ldots, p_n(t))$, причем функции $p_i(\cdot)$, $p_{i+1}(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, интегрально отделены, т. е. существуют $\alpha > 0$ и β такие, что при всех $0 \leqslant s \leqslant t : \int_s^t (p_{i+1}(\tau) - p_i(\tau))\, d\tau \geqslant \alpha(t-s) + \beta$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4. (см. [20]) *Если (1.3) — система с интегральной разделённостью, то система φ обладает свойством равномерной локальной управляемости показателей Ляпунова в том и только в том случае, когда φ равномерно вполне управляема.*

Важными величинами, характеризующими общее поведение системы, являются центральные показатели.

Определение 1.1.7.

$$\Omega(A) = \inf_{T>0} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{kT} \sum_{j=1}^{k} \ln |X(jT, (j-1)T)| -$$

верхний центральный показатель,

$$\omega(A) = \sup_{T>0} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{kT} \sum_{j=1}^{k} \ln |X((j-1)T, jT)|^{-1} -$$

нижний центральный показатель.

Определение 1.1.8. *Система φ обладает свойством локальной управляемости верхним центральным показателем, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| < \delta$ найдется $U : \sup\limits_{t} |U(t)| < \varepsilon$, при котором $\Omega(A + BUC^T) = \Omega(A) + \mu$.*

Аналогично определяется свойство локальной управляемости нижним центральным показателем.

Теорема 1.5. *Если система φ равномерно согласованна, то она обладает свойством локальной управляемости центральными показателями.*

Определение 1.1.9. *Система φ обладает свойством достижимости центральных показателей, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся U_1 и U_2, $\sup\limits_{t} |U_j(t)| < \varepsilon$, $j = 1, 2$ такие, что у*

$$\dot{Z} = (A(t) + B(t)U_1(t)C^*(t))Z$$

существует решение с характеристическим показателем большим $\Omega(A) - \varepsilon$, у

$$\dot{Z} = (A(t) + B(t)U_2(t)C^*(t))Z$$

существует нетривиальное решение с характеристическим показателем меньше $\omega(A) + \varepsilon$.

Теорема 1.6. *Если φ равномерно согласованна, то она обладает свойством достижимости центральных показателей.*

Вопросам глобальной управляемости ляпуновских инвариантов вполне управляемых систем посвящена работа [25]. Рассматривается линейная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

с ограниченными и кусочно-непрерывными на $\mathbb{R}$ матричными коэффициентами $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Управление $u(\cdot)$ строится по принципу линейной обратной связи $u = Ux$, где $m \times n$-матрица $U(\cdot)$ ограничена и кусочно-непрерывна

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

причем пространство ограниченных кусочно-непрерывных управлений $U : I \to M_{mn}$, определенных на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, с равномерной нормой $\|U\|_{C(I)} = \sup\{\|U(t)\| : t \in I\}$ будем обозначать $KC_{mn}(I)$.

Определение 1.1.10. *Система (1.8) обладает свойством глобальной скаляризуемости, если для любой произвольной наперед заданной кусочно-непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$ скалярной функции $p(\cdot)$ найдется управление $U(\cdot)$, что система (1.9) с этим управлением асимптотически эквивалентна системе*

$$\dot{z} = p(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{1.10}$$

Теорема 1.7. (см. [25]) *Если система (1.8) равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то для любой ограниченной кусочно-непрерывной функции $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ существует управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ такое, что система (1.9) при $U = U(\cdot)$ асимптотически эквивалентна системе (1.10).*

Таким образом, характеристические показатели равномерно вполне управляемой системы (1.8) выбором соответствующего управления $U(\cdot)$

могут быть собраны в одну точку.

Справедливо следующее

Следствие 1.7.1. *Если система (1.8) равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то центральные показатели $\omega(A+BU)$ и $\Omega(A+BU)$ системы (1.9) одновременно глобально управляемы, то есть для любых чисел $\alpha \leqslant \beta$ найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ такое, что $\omega(A+BU) = \alpha$, $\Omega(A+BU) = \beta$.*

Теорема 1.8. (см. [25]) *Если система (1.8) равномерно вполне управляема, то существуют $\beta > 0$ и $l > 0$, что для произвольной матрицы $Q(\cdot) \in KC_{nn}(\mathbb{R})$, $\|Q\|_C \leqslant \beta$ найдется управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$, $\|U\|_C \leqslant l\|Q\|_C$, гарантирующее асимптотическую эквивалентность системы*

$$\dot{y} = \big(A(t) + Q(t)\big)y$$

и системы (1.9) при $U = U(\cdot)$.

Теорема 1.9. (см. [25]) *Если система (1.8) равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то для любых чисел $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ существует управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ такое, что система (1.9) при $U = U(\cdot)$ правильна и имеет своим полным спектром показателей Ляпунова набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.*

Случай периодических систем и управляемость ляпуновских инвариантов рассмотрен в работе [26].

В работе рассматриваются линейные управляемые системы вида (1.8), для которых, как и в [25], ограниченное кусочно-непрерывное управление $u(\cdot)$ строится по принципу линейной обратной связи $u = Ux$, $U(t) \in M_{mn}$. Тогда для (1.9) определены инварианты преобразований Ляпунова. Для инвариантов системы определены свойства локальной управляемости (см. определение 1.1.3(стр. 16)) и глобальной управляемости.

Определение 1.1.11. *Полная совокупность ляпуновских инвариантов системы (1.9) называется глобально управляемой, если для любой системы*

$$\dot{z} = C(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.11}$$

с ограниченной кусочно-непрерывной матрицей коэффициентов $C(\cdot)$ существует такое кусочно-непрерывное ограниченное управление $U(\cdot)$, что система (1.9) с этим управлением асимптотически эквивалентна системе (1.11), то есть существует преобразование Ляпунова [27, с. 95], связывающее (1.11) и (1.9).

В работе [28] было доказано, что для полной управляемости ω-периодической системы (1.8) с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами необходима и достаточна глобальная управляемость мультипликаторов системы (1.9), то есть существование для произвольной наперед заданной вещественной $n \times n$-матрицы Λ с положительным определителем такого ω-периодического управления $U(\cdot)$, что система (1.9) с этим управлением имеет своими мультипликаторами собственные значения матрицы Λ.

В работе [26] для периодических систем доказана теорема, устанавливающая соответствие между управляемостью системы (1.8) и управляемостью ляпуновских инвариантов системы (1.9).

Теорема 1.10. (см. [26]) *Пусть (1.8) — система с кусочно-непрерывными ω-периодическими коэффициентами. Для того чтобы (1.8) была вполне управляема, необходимо и достаточно, чтобы полная совокупность ляпуновских инвариантов соответствующей системы (1.9) была глобально управляема.*

Замечание. Из этой теоремы вытекает, что если ω-периодическая система (1.8) вполне управляема, то мультипликаторы соответствующей замкнутой системы (1.9) глобально управляемы в следующем смысле: для любой матрицы $\Lambda \in M_n$ с положительным определителем найдутся управление $U(\cdot) \in KC_{mn}(\mathbb{R})$ и ляпуновское преобразование $z = L(t)x$ такие, что система (1.9) с управлением $U(\cdot)$ приводится этим преобразованием к ω-периодической системе (1.11), имеющей своими мультипликаторами собственные значения матрицы Λ. При этом матрицы $U(\cdot)$ и $L(\cdot)$ могут быть непериодическими.

1.2. Построение возмущений потенциала в уравнении Шредингера

Важным примером линейного дифференциального оператора в бесконечномерном банаховом пространстве является оператор Гамильтона. Например, для одной частицы, находящейся во внешнем силовом поле, он имеет вид (см. [29])

$$H = -\frac{\hbar}{2m}\Delta + U(r),$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, m — масса частицы, $U(r)$ — потенциал силового поля в точке r.

Оператор Гамильтона в квантовой механике является оператором энергии. Он входит в волновое уравнение Шредингера, описывающее эволюцию физического состояния квантовомеханической системы

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\Delta\Psi + U(r)\Psi.$$

С точки зрения физики собственные значения оператора Гамильтона — это разрешенные уровни энергии квантовой системы и они представляют очень большой интерес.

Как правило, в квантовой механике решаются задачи двух типов: прямая и обратная. Прямая задача заключается в том, чтобы по известному потенциалу, описывающему внутреннее строение системы, определить набор ее возможных состояний S (в частном случае спектр энергий), которые могут быть доступны для внешнего наблюдателя. В обратной задаче требуется по известному набору возможных состояний системы S определить ее внутреннее строение, например по энергетическому спектру системы определить ее силовой потенциал $U(r)$.

Задача управления спектром оператора Гамильтона является частным случаем обратной квантовомеханической задачи. Типичным случаем задачи управления спектром оператора Гамильтона является задача удаления из спектра отдельных энергетических уровней.

На физическом уровне управлять спектром системы возможно, изменяя ее внутреннее строение. Математически это означает изменение функции $U(r)$ оператора Гамильтона H. Первыми, кто привел формулы для возмущений потенциала, удаляющих из спектра отдельные энергетические уровни, были Абрагам и Мозес [12]. В дальнейшем были разработаны особые методы решения обратных задач, их обзор сделан в работе [13].

Рассмотрим конкретный пример удаления уровня из энергетического спектра системы, представляющей собой одномерный гармонический осциллятор. Рассмотрим вариант осциллятора, потенциал которого $U(x)$ конечен на полуоси $[0, +\infty)$:

$$U(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ +\infty, & x < 0 \end{cases} .$$

Оператор Гамильтона с потенциалом такого рода имеет чисто дискретный эквидистантный спектр, состоящий из собственных значений $\{E_i\}$, а система собственных функций $\{\psi_i\}$ полная и ортогональная. В квантовой механике принято нормировать собственные функции на единицу, то есть $\|\psi_i\| = 1$ для всех i, где под нормой понимается $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i^2(x)\, dx$.

Уничтожение одного уровня в спектре, согласно работе Захарьева и Чабанова [14] можно произвести, возмущая исходный потенциал $\mathring{U}$, применив подход Гельфанда–Левитана. В результате возмущенный потенциал имеет вид

$$U(x) = \mathring{U} + 2\frac{d}{dx}\left[\frac{\mathring{\psi}_\mu^2(x)}{1 - \int_0^x \mathring{\psi}_\mu^2(y)\, dy}\right].$$

В последнем выражении $\mathring{\psi}_\mu$ — собственная функция невозмущенного оператора Гамильтона, соответствующая удаляемому собственному значению E_μ.

При таком построении потенциала «удаление» собственного значения E_μ означает следующее: физическое состояние, соответствовавшее этому значению, модифицируется таким образом, что его новая энергия оказывается равной энергии следующего по номеру состояния, соответствовавшего невозмущенному потенциалу. Вообще говоря, собственные значения E_k возмущенного оператора Гамильтона при $k \geqslant \mu$ переходят в собственные значения $\overset{\circ}{E}_{k+1}$ невозмущенного оператора Гамильтона. Физические состояния идентифицируются и упорядочиваются в соответствии с числом нулей их волновых функций. Таким образом, собственное значение невозмущенного оператора Гамильтона $\overset{\circ}{E}_k$, $k > \mu$, соответствующее собственной функции $\overset{\circ}{\psi}_k$ с числом нулей, равным k, становится равным собственному значению E_{k-1} возмущенного оператора Гамильтона, соответствующему собственной функции ψ_{k-1} с числом нулей, равным $k-1$.

1.2.1. Пример Рассмотрим «удаление» из спектра оператора Гамильтона с потенциалом

$$\overset{\circ}{U}(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ +\infty, & x < 0 \end{cases}$$

заданного собственного значения. Структура спектра данного оператора хорошо просматривается на рис. 1.1. Собственным значениям соответствуют абсциссы скачков функции.

Будем возмущать потенциал $\overset{\circ}{U}(x)$ таким образом, чтобы в спектре возмущенного оператора Гамильтона $\{E_1, E_2, \ldots\}$ отсутствовало собственное значение $\overset{\circ}{E}_2 = 7.0$.

Для поиска собственных значений и собственных функций, соответствующих невозмущенному и возмущенному операторам Гамильтона, уравнение Шредингера интегрировалось численно с применением пакета Wolfram

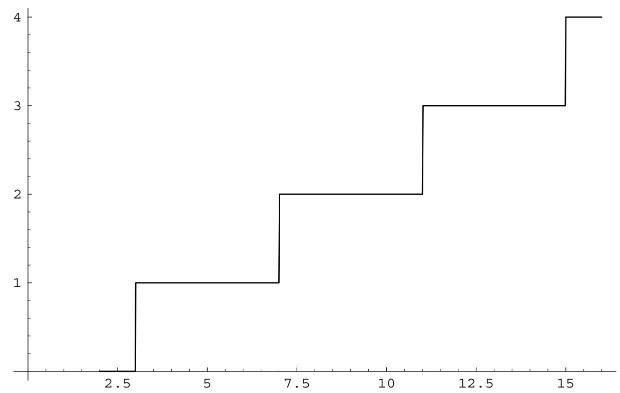


Рис. 1.1. Зависимость числа нулей решения невозмущенного уравнения Шредингера от энергии

Research Mathematica 5.1. Программа приведена в прил. А.

Вид собственной функции, соответствующей «удаляемому» собственному значению, показан на рис. 1.2.

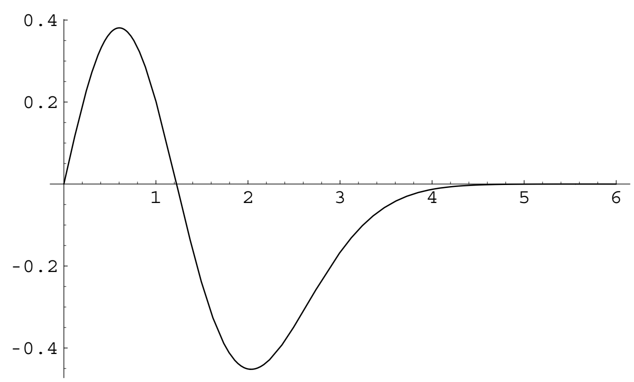


Рис. 1.2. Вид собственной функции $\overset{\circ}{\psi}_2$

Возмущение потенциала, «удаляющее» заданное собственное значение, показано на рис. 1.3.

Структура модифицированного спектра показана на рис. 1.4.

Картина изменения спектра хорошо видна на рис. 1.5, где собственные значения наложены на вид потенциала.

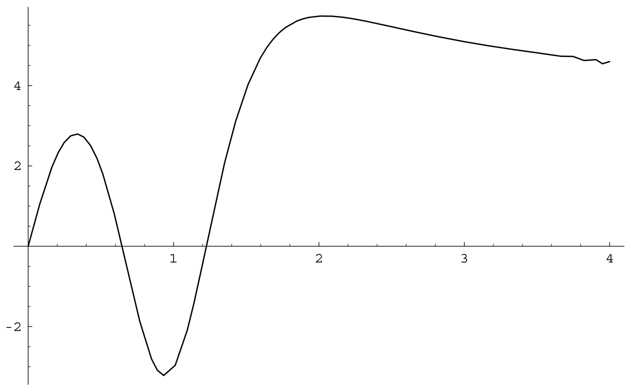


Рис. 1.3. Возмущение потенциала

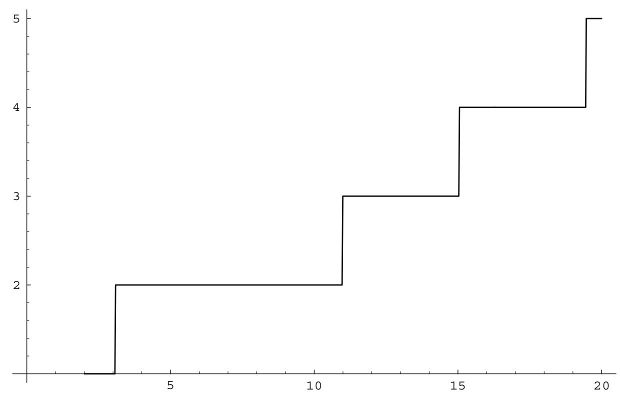


Рис. 1.4. Зависимость числа нулей решений возмущенного уравнения Шредингера от энергии

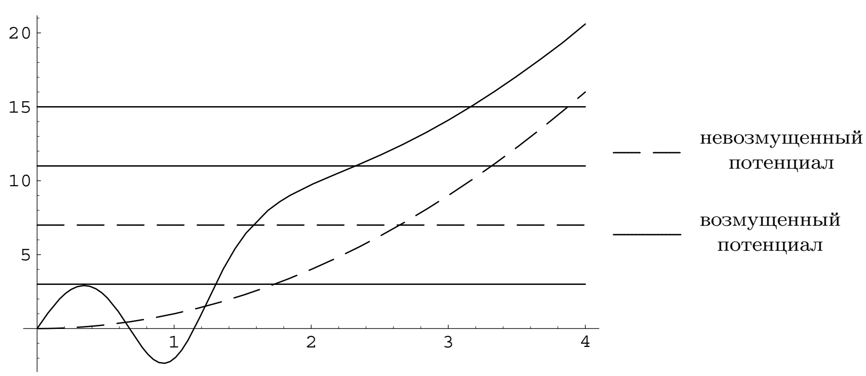


Рис. 1.5. Вид потенциалов: возмущенного и невозмущенного; энергетические уровни

ГЛАВА 2
«УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ ПОСТОЯННОГО ОПЕРАТОРА»

2.1. Конечномерная система

При рассмотрении изложенной во введении задачи об управлении спектром динамической системы наиболее простым является случай линейной системы дифференциальных уравнений с постоянной матрицей. В этом разделе мы пользуемся методами работы Г. Г. Исламова [3].

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое числовое поле. Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему

$$\dot{x} = Ax + U(t), \tag{2.1}$$

где $x(t)$ — элемент множества n-мерных векторов $\mathcal{F}^n$ для каждого $t \in \mathbb{R}$, A — элемент множества $n \times n$ матриц $\mathcal{F}^{n\times n}$, $U(t)$ — управление.

Управление $U(t)$ будем формировать в виде обратной связи

$$U(t) = -Kx(t),$$

где K — $n \times n$-матрица обратной связи. Потребуем, чтобы управление $U(t)$ изменяло спектр однородной системы

$$\dot{x} = Ax \tag{2.2}$$

таким образом, чтобы

$$\Omega \subset P(A-K), \quad \Theta \subset \sigma(A-K),$$

где $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_l\}$ — некоторое подмножество спектра $\sigma(A)$,
$\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_l\}$ — некоторое заданное множество такое, что $\Omega \cap \Theta = \emptyset$,
$P(A-K)$ — резольвентное множество матрицы $A-K$,
$\sigma(A-K)$ — спектр матрицы $A-K$.

Иными словами, требуется заданную матрицу $A \in \mathcal{F}^{n\times n}$, все собственные значения которой лежат в $\mathcal{F}$, представить в виде суммы двух матриц $V, K \in \mathcal{F}^{n\times n}$, первая из которых не имеет собственных значений в фиксированном подмножестве Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и заданное подмножество Θ входит в ее спектр, а вторая имеет минимально возможный ранг.

Таким образом, данная задача носит экстремальный характер и может быть записана в виде

$$\operatorname{rank} K \to \min,$$
$$\Omega \subset P(A-K), \Theta \subset \sigma(A-K).$$

Матрицу $K \in \mathcal{F}^{n\times n}$ назовем допустимым возмущением, если $\Omega \subset P(A-K)$, $\Theta \subset \sigma(A-K)$. Допустимое возмущение минимального ранга назовем экстремальным возмущением матрицы A.

Через E обозначим единичную матрицу соответствующей размерности.

Лемма 2.1.1. *Ранг допустимого возмущения не может быть меньше максимальной геометрической кратности чисел $\lambda \in \Omega$*

$$\operatorname{rank} K \geqslant \max_{\lambda\in\Omega} \dim\ker(\lambda E - A).$$

Справедлива теорема двойственности для описанной экстремальной задачи.

Теорема 2.1. *Минимальный ранг допустимого возмущения равен максимальной геометрической кратности чисел $\lambda \in \Omega$*

$$\max_{\lambda\in\Omega} \dim\ker(\lambda E - A) = \min \operatorname{rank} K, \tag{2.3}$$

где минимум берется по всем допустимым возмущениям K.

Доказательство. Обозначим через $M(\lambda; A) = \dim\ker(\lambda E - A)$ геометрическую кратность числа λ. Равенство (2.3) не изменится, если A

заменить подобной матрицей $\widetilde{A} \in \mathcal{F}^{n\times n}$, так как в силу подобия найдется такая невырожденная матрица $U \in \mathcal{F}^{n\times n}$, что $\widetilde{A} = U^{-1}AU$, причем $M(\lambda; \widetilde{A}) = M(\lambda; A)$ и $P(\widetilde{A} - \widetilde{K}) = P(A - K)$, если в качестве $\widetilde{K}$ взять возмущение, подобное $K : \widetilde{K} = U^{-1}KU$.

По условию все собственные значения матрицы A лежат в поле $\mathcal{F}$. Из этого следует [30, с. 385] приводимость матрицы A к жордановой нормальной форме в поле $\mathcal{F}$.

Тогда

$$\widetilde{A} = \operatorname{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_s}(\lambda_s)),$$

где блоки $J_k(\lambda)$ являются жордановыми клетками размера k. При этом геометрическая кратность $M(\lambda; A)$ числа λ равна числу жордановых клеток, отвечающих λ.

Будем полагать, что собственные значения матрицы A занумерованы так, что в ряду $\lambda_1, \dots \lambda_s$ первые p элементов принадлежат множеству Ω, а остальные $s - p$ собственных значений этому множеству не принадлежат. В случае $p = 0$ равенство (2.3) очевидно. Поэтому предполагаем $p \geqslant 1$. При этом условии матрица $\widetilde{A}$ оказывается прямой суммой двух матриц A_1 и A_2, так что

$$\widetilde{A} = \operatorname{diag}(A_1, A_2),$$

где

$$A_1 = \operatorname{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_p}(\lambda_p)),$$
$$A_2 = \operatorname{diag}(J_{k_{p+1}}(\lambda_{p+1}), \dots, J_{k_s}(\lambda_s)).$$

У этих матриц имеются следующие особенности. В множестве Ω нет собственных значений матрицы A_2, тогда как все собственные значения матрицы A_1 лежат в Ω. Матрица A_1 может быть разложена в сумму матрицы $A_3 \in \mathcal{F}^{m\times m}$ такой, что её спектр совпадает с Θ, и матрицы $A_4 \in \mathcal{F}^{m\times m}$ ранга $\max\limits_{\lambda\in\mathbb{C}} M(\lambda; A_1)$. Поэтому жорданова форма $\widetilde{A}$ может быть представлена в виде $\widetilde{A} = \widetilde{V} + \widetilde{K}$, где $\widetilde{V} = \operatorname{diag}(A_3, A_2)$, $\widetilde{K} = \operatorname{diag}(A_4, \mathbf{0})$. Множество собственных значений матрицы $\widetilde{V}$ состоит из собственных значений матриц A_3 и A_2. Собственные значения матрицы A_1 состоят из тех собственных значений исходной матрицы A, которые лежат в Ω. Поэтому

$$\operatorname{rank} A_4 = \max_{\lambda \in \mathbb{C}} M(\lambda; A_1) = \max_{\lambda \in \Omega} M(\lambda; A).$$

Равенство (2.3) следует теперь из того, что $\operatorname{rank} \widetilde{K} = \operatorname{rank} A_4$, то есть матрица $\widetilde{K}$ — экстремальное возмущение для жордановой формы $\widetilde{A}$.

Покажем, что всякая матрица $B \in \mathcal{F}^{m\times m}$ представима в виде суммы матрицы $B_1 \in \mathcal{F}^{m\times m}$ с характеристическим многочленом $\delta(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{p}(\lambda-\theta_i)^{k_i}$ и матрицы $B_2 \in \mathcal{F}^{m\times m}$ ранга $\max\limits_{\lambda\in\mathbb{C}} M(\lambda; B)$, если θ_i не являются собственными значениями B.

Для доказательства рассмотрим первую нормальную форму матрицы B. Обозначим через $d_j(\lambda)$ наибольший общий делитель всех миноров λ-матрицы $\lambda E - B$ порядка j ($j = \overline{1, m}$). Согласно [30, с. 138], коэффициенты многочленов $d_j(\lambda)$ принадлежат полю $\mathcal{F}$. Любой минор порядка $j \geqslant 2$ может быть выражен в виде линейной комбинации миноров порядка $j-1$, так что $d_{j-1}(\lambda)$ является делителем $d_j(\lambda)$. Если определить $d_0(\lambda) = 1$, то в последовательности $d_0(\lambda), d_1(\lambda), \ldots, d_m(\lambda)$ многочлен $d_j(\lambda)$ делится на $d_{j-1}(\lambda), j = \overline{1, m}$. Соответствующие частные

$$i_1(\lambda) = \frac{d_1(\lambda)}{d_0(\lambda)},\ i_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)},\ \ldots,\ i_m(\lambda) = \frac{d_m(\lambda)}{d_{m-1}(\lambda)}$$

называются инвариантными многочленами λ-матрицы $\lambda E - B$. Эта λ-матрица эквивалентна диагональной матрице

$$C(\lambda) = \operatorname{diag}\,(i_1(\lambda), i_2(\lambda), \ldots, i_m(\lambda)).$$

При фиксированном λ верно равенство

$$M(\lambda; B) = \dim\ker(\lambda E - B) = m - \operatorname{rank}(\lambda E - B).$$

Поэтому $M(\lambda; B) = m - \operatorname{rank} C(\lambda)$. Отсюда следует, что геометрическая кратность $M(\lambda; B)$ собственного значения λ равна количеству нулей в числовой последовательности $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \ldots, i_m(\lambda)$. Известно [21, с. 147], что $i_j(\lambda)$ делится на $i_{j-1}(\lambda)$, $j = \overline{2, m}$, причем старшие коэффициенты инвариантных многочленов $i_j(\lambda)$ равны единице, а нули этих многочленов суть собственные значения матрицы B. Поэтому

$$M(\lambda; B) = m - \max\{k : i_k(\lambda) \neq 0\}. \tag{2.4}$$

Нас будут интересовать инвариантные многочлены ненулевой степени. Пусть они $i_{t+1}(\lambda), \ldots, i_m(\lambda)$. Тогда $i_1(\lambda) = \ldots = i_t(\lambda) \equiv 1$. Из (2.4) следует, что число инвариантных многочленов ненулевой степени λ-матрицы $\lambda E - B$ равно максимальной геометрической кратности собственных значений матрицы B, то есть

$$m - t = \max_{\lambda \in \mathbb{C}} M(\lambda; B). \tag{2.5}$$

Для всякого скалярного многочлена $f(\lambda) = \lambda^k + \alpha_1 \lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_k$ с коэффициентами из поля $\mathcal{F}$ существует сопровождающая матрица, имеющая в качестве характеристического многочлена $f(\lambda)$ и которая в случае $f(\theta_j) \neq 0$, $j = \overline{1, p}$ разлагается в сумму сопровождающей матрицы $L_1(f)$ для многочлена $\prod\limits_{j=1}^{p} (\lambda - \theta_j)^{l_j}$, $\sum\limits_{j=1}^{p} l_j = k$ и матрицы ранга единицы

$$L_2(f) = \operatorname{colon}(\beta_k - \alpha_k, \ldots, \beta_1 - \alpha_1) \cdot (0, 0, \ldots, 0, 1),$$

где β_i — коэффициенты разложения многочлена $\prod\limits_{j=1}^{p}(\lambda-\theta_j)^{l_j}$ по степеням λ.

Согласно теореме 4.11.1 книги [21], матрица B подобна квазидиагональной матрице $L=\mathrm{diag}(L(i_{t+1}),\ldots,L(i_m))$. Матрица L носит название первой естественной нормальной формы матрицы B, причем в равенстве $B=T^{-1}LT$ преобразующая матрица T , так же как и сама L, состоит из элементов поля $\mathcal{F}$. По предположению θ_j, $j=\overline{1,p}$ не есть собственное значение матрицы B. Таким образом, $i_k(\theta_j)\neq 0,\ k=\overline{t+1,m}$. В силу отмеченного выше свойства сопровождающих матриц L разлагается в сумму $L=L_1+L_2$, где $L_1=\mathrm{diag}(L_1(i_{t+1}),\ldots,L_1(i_m))$, $L_2=\mathrm{diag}(L_2(i_{t+1}),\ldots,L_2(i_m))$. Причем спектр матрицы L_1 совпадает с Θ, а матрица L_2 — прямая сумма $m-t$ одноранговых матриц, и, следовательно, ее ранг равен $m-t$. В силу (2.5) $\mathrm{rank}\,L_2=\max\limits_{\lambda\in\mathbb{C}}M(\lambda;B)$. Полагая $B_1=T^{-1}L_1T,\ B_2=T^{-1}L_2T$, получим требуемое разложение произвольной матрицы B с элементами из поля $\mathcal{F}:\ \ B=B_1+B_2$, где B_1 — матрица с характеристическим многочленом $\prod\limits_{i=1}^{p}(\lambda-\theta_i)^{k_i}$, $i=\overline{1,p}$, а B_2 — матрица ранга $\max\limits_{\lambda\in\mathbb{C}}M(\lambda;B)$, причем B_1 и B_2 состоят из элементов поля $\mathcal{F}$. Теорема доказана. $\square$

2.1.1. Пример Рассмотрим систему, заданную уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{2.6}$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x(t) \in \mathbb{R}^2$.

Матрица A имеет собственное число $\overset{\circ}{\lambda} = 1$ алгебраической кратности 2. Геометрическая кратность $\overset{\circ}{\lambda}$ также равна 2, так как $\ker(A - \overset{\circ}{\lambda}E) = \ker(\mathbf{0})$ совпадает с $\mathbb{R}^2$.

Построим одноранговое возмущение K, переводящее собственное число $\overset{\circ}{\lambda} = 1$ в собственное число $\lambda = 0$ в спектре $\sigma(A - K)$. Для этого представим K в следующем виде:

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \mu\alpha & \mu\beta \end{pmatrix}.$$

Такой вид возмущения K описывает все одноранговые матрицы размерности 2×2.

Матрица $A - K$ примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha & -\beta \\ -\mu\alpha & 1 - \mu\beta \end{pmatrix},$$

спектр которой имеет вид $\sigma(A - K) = \{1, 1 - \alpha - \mu\beta\}$.

Таким образом нам не удалось избавиться от собственного числа $\lambda = 1$ в спектре $\sigma(A - K)$ одноранговым возмущением K.

Рассмотрим теперь уравнение (2.6) с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Данная матрица имеет собственные числа $\overset{\circ}{\lambda}_1 = 1$, $\overset{\circ}{\lambda}_2 = 2$ алгебраической и геометрической кратности 1. Таким образом, согласно теореме 2.1 одноранговым возмущением K возможно перевести $\overset{\circ}{\lambda}_1$ и $\overset{\circ}{\lambda}_2$ в любые точки $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Матрица $A - K$ в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ -\mu\alpha & 2-\mu\beta \end{pmatrix},$$

а её собственные числа равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{(3-\alpha-\mu\beta) \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha(1+\mu\beta) + (\mu\beta-1)^2}}{2}.$$

Потребуем, чтобы спектр $\sigma(A - K)$ состоял только из нулевого элемента, то есть $\lambda_{1,2} = 0$. Для этого достаточно выбрать

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2, \quad \mu = 2.$$

При таком выборе параметров матрица $A - K$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

и её спектр состоит только из нулевого собственного числа.

2.2. Связанные электрические колебательные контуры

Простой спектр Для иллюстрации теоремы 2.1(стр. 30) в случае простого спектра рассмотрим три связанных электрических колебательных контура.

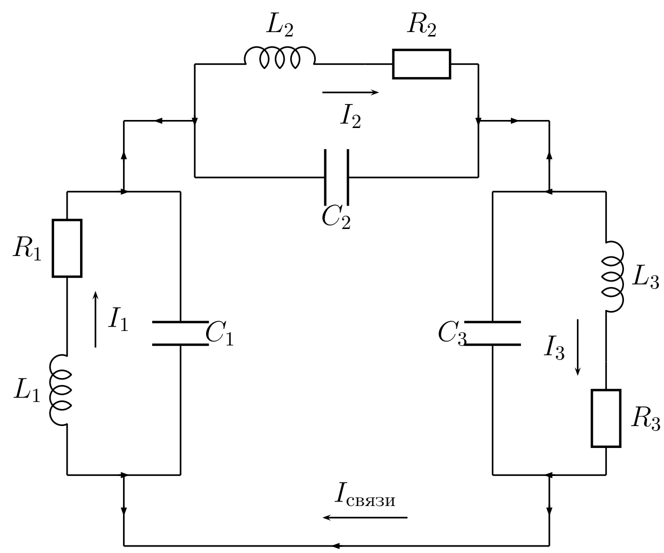


Рис. 2.1. Принципиальная схема трех связанных колебательных контуров

Подобная система связанных колебательных контуров является упрощенной моделью колебательной системы магнетрона — электронного устройства, которое широко применяется в технике сверхвысоких частот.

Математически поведение данной электрической схемы описывается системой дифференциальных уравнений, основой для вывода которых являются закон Ома, закон электромагнитной индукции, 1-е и 2-е правила

Кирхгофа,

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = -\dfrac{R_1}{L_1} I_1; \\ \dot{I}_2 = -\dfrac{R_2}{L_2} I_2 - \dfrac{1}{C_2 L_2} q_1; \\ \dot{I}_3 = -\dfrac{R_3}{L_3} I_3 + \dfrac{1}{C_3 L_3} q_2 + \dfrac{1}{C_3 L_3} q_2; \\ \dot{q}_1 = \left(1 - \dfrac{1}{BC_1}\right) I_1 - \dfrac{1}{BC_2} I_2 - \dfrac{1}{BC_3} I_3; \\ \dot{q}_2 = \dfrac{1}{BC_1} I_1 - \left(1 - \dfrac{1}{BC_2}\right) I_2 - \dfrac{1}{BC_3} I_3, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$B = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3},$$

где I_1, I_2, I_3 — сила тока в 1-м, 2-м и 3-м колебательных контурах, C_1, C_2, C_3 — емкости конденсаторов, L_1, L_2, L_3 — индуктивности контуров, R_1, R_2, R_3 — активные сопротивления соответствующих резонаторов (колебательных контуров), q_1, q_2 — заряды на конденсаторах C_1 и C_2 соответственно.

Большой интерес представляет поведение этой системы при значениях R_1, R_2, R_3 близких к критическим — значениях, при которых в системе становятся невозможными собственные колебания. Например, $C_1 = C_2 = C_3 = 50$ пФ, $L_1 = L_2 = L_3 = 0{,}5$ мкГн, $R_1 = R_2 = R_3 = 110$ Ом.

При таком выборе параметров матрица системы выглядит следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} -220 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -220 \cdot 10^6 & 0 & 0 & -4 \cdot 10^{16} \\ 0 & 0 & -220 \cdot 10^6 & 4 \cdot 10^{16} & 4 \cdot 10^{16} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Спектр такой матрицы состоит из собственных чисел

$$\sigma(A) = \Big\{ -220 \cdot 10^6, 10^7 - 11 \pm i3\sqrt{31}), \frac{10^7}{3}(-33 \pm i\sqrt{111}) \Big\}.$$

С физической точки зрения это означает, что в колебательной системе возможны затухающее собственные колебания с частотами 167 МГц и 351 МГц. Поставим задачу подавить колебания с частотой 167 МГц. Для этого введением возмущения K необходимо собственные значения $\frac{10^7}{3}(-33+i\sqrt{111})$ и $\frac{10^7}{3}(-33-i\sqrt{111})$ «перевести» на вещественную ось.

Выбрав одноранговое возмущение

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{21} & -\frac{4}{21} & -\frac{4}{21} & 0 & 0 \\ \frac{8}{21} & -\frac{4}{21} & -\frac{4}{21} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

преобразуем исходную матрицу к виду

$$V = \begin{pmatrix} -220\cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -220\cdot 10^6 & 0 & 0 & -4\cdot 10^{16} \\ 0 & 0 & -220\cdot 10^6 & 4\cdot 10^{16} & 4\cdot 10^{16} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

спектр которой имеет вид

$$\sigma(V) = \Big\{ -220\cdot 10^6, 10^7(-11 \pm i3\sqrt{31}), \frac{10^7}{7}(-77 \pm \sqrt{3129}) \Big\}.$$

Таким образом, в спектре частот колебаний возмущенной системы отсутствует частота 167 МГц.

Физически возмущение, задаваемое оператором K, соответствует уменьшению емкости C_1 в 5 раз.

Кратный спектр Для случая кратного спектра рассмотрим два независимых электрических колебательных контура.

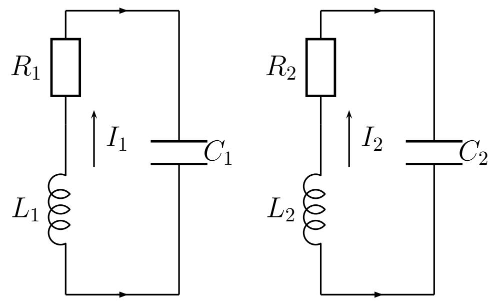


Рис. 2.2. Два независимых колебательных контура

Как и в предыдущем случае, запишем математическую модель в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = -\dfrac{R_1}{L_1} I_1 + \dfrac{1}{L_1 C_1} q_1; \\ \dot{I}_2 = -\dfrac{R_2}{L_2} I_2 + \dfrac{1}{C_2 L_2} q_2; \\ \dot{q}_1 = -I_1; \\ \dot{q}_2 = -I_2, \end{cases} \tag{2.8}$$

где I_1, I_2 — сила тока в первом и втором контурах, C_1, C_2 — емкости конденсаторов в контурах, L_1, L_2 — индуктивности контуров, R_1, R_2 — сопротивления соответствующих резонаторов (колебательных контуров), q_1, q_2 — заряды на емкостях C_1 и C_2 соответственно.

Выберем $C_1 = C_2 = 50$ Пф, $L_1 = L_2 = 0{,}5$ мкГн, $R_1 = R_2 = 110$ Ом.

При таком выборе параметров спектр матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 4 \cdot 10^{16} & 0 & -2{,}2 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & 4 \cdot 10^{16} & 0 & -2{,}2 \cdot 10^8 \end{pmatrix}$$

состоит из двух собственных чисел λ_1, λ_2 и имеет следующий вид:

$$\sigma(A) = \big\{10^7(-100 \pm i3\sqrt{31})\big\},$$

где каждое собственное число $\lambda \in \sigma(A)$ имеет кратность 2.

Таким образом, собственная частота колебаний данных резонаторов равна 167 МГц. Однако, как было описано выше, резонаторы работают в пограничном режиме, когда при небольшом изменении параметров контура собственные колебания становятся невозможными. Пусть требуется введением обратной связи стабилизировать резонаторы и уменьшить вдвое одну из собственных колебательных частот. Пользуясь теоремой 2.1(стр. 30), получаем, что для соответствующего изменения спектра $\sigma(A)$ матрицы A необходимо возмущение с рангом не меньшим 2.

Рассмотрим матрицу возмущения K вида

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0{,}0194 & 0{,}0097 \\ 0 & 0 & 0{,}0194 & -0{,}0097 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}0 \cdot 10^{16} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При таком выборе обратной связи K возмущенная матрица V имеет вид

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0{,}9806 & -0{,}0097 \\ 0 & 0 & -0{,}0194 & -0{,}9903 \\ 4 \cdot 10^{16} & 0 & -2{,}2 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & 2{,}0 \cdot 10^{16} & 0 & -2{,}2 \cdot 10^8 \end{pmatrix}.$$

Спектр такой возмущенной матрицы имеет вид

$$\sigma(V) = \big\{ -1{,}1 \cdot 10^8 \pm i1{,}6471 \cdot 10^8, -1{,}1 \cdot 10^8 \pm i8{,}7738 \cdot 10^7 \big\}.$$

Возмущенная система с найденным возмущением K эквивалентна соединению контуров с помощью конденсатора $C_{\text{связи}} = 1$ пФ и удвоению ёмкости C_2, как показано на рис. 2.3.

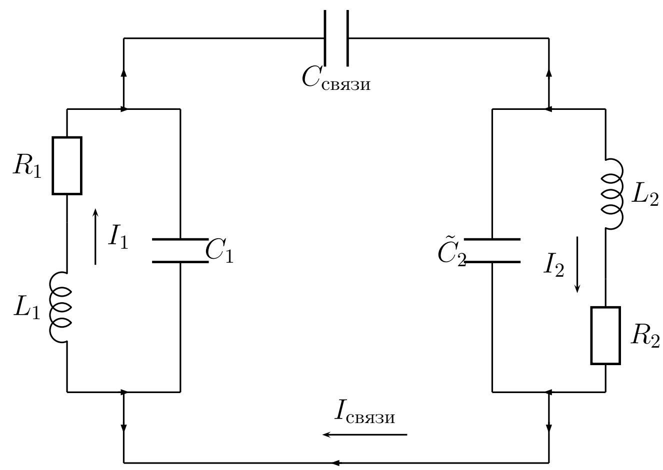


Рис. 2.3. Связанные колебательные контуры

2.3. Система с постоянным оператором

В предыдущих разделах рассматривались системы вида

$$\dot{x} = A(t)x$$

для случая, когда $x(t)$ принадлежит конечномерному векторному пространству, а $A(t)$ задается матрицей конечной размерности $n \times n$. Этот подход применим для описания значительного класса задач. А именно, тех задач, в которых физический объект описывается конечным набором параметров, задающих его состояние. Но для описания состояния некоторых физических объектов недостаточно конечного набора параметров. В данном разделе рассматривается более общий, чем в предыдущих разделах, случай, когда $x(t)$ для каждого t принадлежит некоторому банахову пространству. Излагаемые здесь результаты дополняют работу [4].

Определение 2.3.1. *Ограниченный оператор K, действующий в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, называется конечномерным, если он представим в виде*

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i \rangle a_i, \quad a_i \in \mathfrak{B}, b_i \in \mathfrak{B}^*, i = \overline{1, n},$$

где

$\mathfrak{B}^*$ *– сопряженное пространство,*

$\langle x, b_i \rangle$ *– значение функционала b_i на элементе x.*

Пусть замкнутый оператор $A : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ с областью определения $D(A)$ имеет собственные значения в некоторой «запрещенной» области Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}(\Omega \neq \mathbb{C})$. Выберем множество Θ с мощностью, не превосходящей числа точек спектра $\sigma(A)$, лежащих в Ω. Требуется указать такой конечномерный оператор $K : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, при котором оператор $V = A - K$ не будет иметь точек спектра $\sigma(V)$ в области Ω, и множество

Θ лежит в спектре $\sigma(V)$, то есть $\Omega \subset P(V)$, $P(V) \cap \Theta = \emptyset$, где $P(V)$ — резольвентное множество оператора V.

Переход от спектра $\sigma(A)$ к спектру $\sigma(A-K)$ образно можно представить как «удаление» собственных значений оператора A из области Ω, «перевод» их в заданное множество Θ и преобразование части спектра $\sigma(A)$, лежащей вне Ω. Конечномерными возмущениями можно «удалить» только изолированные точки спектра $\sigma(A)$. Более того, при определенных условиях такими точками могут быть лишь изолированные собственные значения конечной алгебраической кратности.

Среди всех конечномерных операторов K, «исправляющих» спектр оператора A описанным выше способом, выделим те, которые имеют минимальный ранг. Такие возмущения мы назовем экстремальными: они являются решениями экстремальной задачи

$$\operatorname{rank} K \to \min,\ \Omega \subset P(A-K),\ P(A-K) \cap \Theta = \emptyset. \tag{2.9}$$

Величина минимального ранга в задаче (2.9) указывает на то, что оператором меньшего ранга уже нельзя исправить спектр требуемым образом.

Возмущение $K : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ назовем допустимым в задаче (2.9), если $\Omega \subset P(A-K)$, $P(A-K) \cap \Theta = \emptyset$ и $\operatorname{rank} K < \infty$. Пусть K — произвольное допустимое возмущение, $\lambda \in \Omega$. Тогда уравнения

$$Ax = \lambda x$$

и

$$x = -(V - \lambda I)^{-1} K x$$

($V = A - K$, I – тождественный оператор) эквивалентны. Отсюда rank $\geqslant M(\lambda; A)$ для любого $\lambda \in \Omega$ и произвольного допустимого возмущения K. Здесь $M(\lambda; A)$ — геометрическая кратность числа λ. Это означает, что целевая функция экстремальной задачи

$$M(\lambda; A) \to \max,\ \ \lambda \in \Omega, \tag{2.10}$$

мажорируется сверху целевой функцией задачи (2.9). Здесь максимум по пустому множеству полагается равным нулю. По аналогии с математическим программированием утверждение о совпадении экстремальных значений целевых функций задач (2.9) и (2.10) будем называть теоремой двойственности, а задачу (2.10) — двойственной к задаче (2.9).

По схеме работы [4] с учётом замечания к теореме 2.1 на с. 30 может быть доказана следующая теорема двойственности.

Теорема 2.2. *Пусть множество $\Omega \cap \sigma(A)$ пусто или конечно и состоит лишь из изолированных собственных значений оператора A конечной алгебраической кратности. Тогда экстремальные значения целевых функций задач (2.9) и (2.10) совпадают.*

Замечание. Данная теорема представляет собой важное дополнение к теореме 1 [4]. Здесь осуществляется целенаправленный «перевод» точек спектра $\sigma(A)$ из области Ω в заданное множество Θ, в то время как в [4] точки спектра $\sigma(A) \cap \Omega$ переводятся в одну произвольную точку $\xi \notin \Omega$.

Теорема 2.3. *Для любого ограниченного $\tilde{K}$ справедливо $\sigma(V + \tilde{K}) \subset U_\delta(\sigma(V))$, где δ такое, что*

$$\|\tilde{K}\| < \min_{\xi \in \partial U_\delta(\sigma(V))} \|R(\xi; V)\|^{-1}. \tag{2.11}$$

$\partial U_\delta(\sigma(V))$ — граница δ-окрестности множества $\sigma(V)$

Данная теорема является применением замечаний 3.2. и 3.3. [31, с. 264] к задаче (2.9).

Замечание. Для нахождения δ такого, что δ-окрестность $\sigma(V)$ содержит спектр возмущенного оператора $\sigma(V + \tilde{K})$ достаточно выбрать минимальное δ такое, что выполняется (2.11).

2.4. Вид возмущения в случае простого спектра

Большой интерес представляет случай, когда некоторый произвольный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, имеет чисто точечный спектр, причем множество Ω содержит только простые удаляемые собственные значения. Такая ситуация имеет место в случае, например, если возмущаемый самосопряженный оператор A действует в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ по закону

$$Au = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle u, \psi_k \rangle \psi_k, \quad u \in \mathfrak{H}, \tag{2.12}$$

где $\{\psi_k\}_{k=1}^{n}$ — ортонормированная система элементов из $\mathfrak{H}$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ — однократные собственные значения, образующие точечный спектр $\sigma_p(A)$ оператора A, n — ранг оператора A, $n \leqslant \infty$.

Согласно теореме 2.2(стр. 45) минимальный ранг возмущения, переводящего все изолированные собственные значения оператора A из заданного множества Ω в точку 0, оставляющего без изменения остальные точки дискретного спектра $\sigma_d(A)$, лежащие вне Ω, равен единице.

В работе [5] дано описание класса всех одноранговых возмущений, которые переводят собственные значения нормального компактного оператора A из Ω в точку существенного спектра — 0, что естественно для рассматриваемого класса операторов. По схеме работы [5] М. А. Клочков распространил эти результаты на случай неограниченных самосопряженных операторов с простым чисто точечным спектром, причем показано, что «нежелательные» собственные значения можно перевести в заданные точки.

Рассмотрим одноранговое возмущение $K : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ в виде

$$Ku = \langle u, b \rangle a, \quad u \in \mathfrak{H}, \tag{2.13}$$

где

$$a = \sum_{j=1}^{n} \nu_j \psi_j, \quad b = \sum_{j=1}^{n} \overline{\beta}_j \psi_j, \tag{2.14}$$

$\{\nu_j\}_{j \geqslant 1}$, $\{\beta_j\}_{j \geqslant 1}$ — квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел. Возмущения (2.13) должны переводить собственные значения оператора A из Ω в некоторое заданное множество Θ так, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma_p(A - K) = \Theta \cup (\sigma_p(A) \setminus \Omega). \tag{2.15}$$

Для возмущений вида (2.13) справедлива теорема.

Теорема 2.4. *Для того чтобы можно было перевести заданное подмножество* $\Omega = \{\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m}\}$ *изолированных собственных значений оператора (2.12) в произвольно заданное подмножество* $\Theta = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\}$ $(\Theta \cap \Omega = \emptyset)$ *с помощью одноранговго возмущения вида (2.13) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) $\nu_j \beta_j = 0$ *для индексов* j*, не принадлежащих множеству* $\Lambda = \{k_1, \ldots, k_m\}$*;*

б) $\nu_{k_i} \beta_{k_i} = \frac{P(\lambda_{k_i})}{\prod\limits_{j=1, j \neq i}^{m} (\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j})}$, $i = \overline{1, m}$, *где* $P(\lambda)$ *— многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого образуют подмножество множества* $\Theta \cup (\sigma_p(A) \setminus \Omega)$*, причем множество* $\Theta \setminus \sigma_p(A)$ *целиком лежит в множестве корней* $P(\lambda)$*.*

Замечание. Данная теорема обобщает теорему 1.1 [6, с. 22] на конечномерный случай и случай, когда оператор A не имеет полной системы собственных функций.

Доказательство. Рассмотрим полную ортонормированную систему функций $\{\tilde{\psi}_i\}_i$ в $\mathfrak{H}$ такую, что $\tilde{\psi}_i = \psi_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, которая представляет собой пополнение системы $\{\psi_i\}_i$ в пространстве $\mathfrak{H}$. Далее рассуждения практически повторяют доказательство теоремы из работы [4].

Необходимость. Предположим, что выполняется (2.15), и покажем справедливость условий а) и б).

Пусть φ — нетривиальное решение спектральной задачи

$$\mu\varphi = (A-K)\varphi, \quad \mu \in \sigma_p(A-K). \tag{2.16}$$

Разложим функцию φ по системе функций $\{\tilde{\psi}_i\}_i$ в ряд

$$\varphi = \sum_l \gamma_l \tilde{\psi}_l$$

и подействуем на нее операторами A и K:

$$K\varphi = \left(\sum_{j=1}^n \nu_j \psi_j\right) \big\langle \sum_l \gamma_l \tilde{\psi}_l, \sum_{k=1}^n \overline{\beta}_k \psi_k \big\rangle = \left(\sum_{j=1}^n \nu_j \psi_j\right) \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k \beta_k\right);$$

$$A\varphi = \sum_{j=1}^n \lambda_j \big\langle \sum_l \gamma_l \tilde{\psi}_l, \psi_j \big\rangle \psi_j = \sum_{j=1}^n \gamma_j \lambda_j \psi_j.$$

Подставляя полученные выражения в (2.16), получим уравнение

$$\sum_l \mu \gamma_l \tilde{\psi}_l = \sum_{j=1}^n \nu_j \sum_{k=1}^n \gamma_k \beta_k \psi_j,$$

из которого, в силу ортогональности систем $\{\tilde{\psi}_i\}_i$ и $\{\psi_i\}_i$, получаем систему

$$\gamma_l = 0, \quad \text{для всех } l \geqslant n,$$

$$\mu\gamma_j = \lambda_j \gamma_j - \nu_j \Delta, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.17}$$

где

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \gamma_k \beta_k. \tag{2.18}$$

Рассмотрим $\mu = \lambda_i$, $i \notin \{k_1, \ldots, k_m\}$. По условию (2.15) μ принадлежит спектру $\sigma_p(A-K)$, следовательно, система (2.17) должна иметь нетривиальное решение, и $\nu_i\Delta = 0$.

В том случае, когда $\Delta \neq 0$, выполнено $\nu_i = 0$, что влечет справедливость условия а).

В противном случае, когда $\Delta = 0$, в силу того, что Δ не зависит от i, для всех $j \neq i$ имеем $\gamma_j = 0$, следовательно, из (2.18) получаем $\Delta = \beta_i\gamma_i = 0$. Так как $\varphi \neq 0$, то $\gamma_i \neq 0$, и $\beta_i = 0$, что опять влечет выполнение условия а). Таким образом, необходимость условия а) показана.

Покажем теперь справедливость условия б). Для этого выберем μ такое, что $\mu \notin \{\lambda_i\} = \sigma_p(A)$. Из (2.17) выразим неизвестные γ_j:

$$\gamma_j = -\frac{\nu_j\Delta}{\mu-\lambda_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.19}$$

Подставляя полученное выражение для γ_j в (2.18), получим

$$\Delta = -\Delta\sum_{j=1}^{n}\frac{\nu_j\beta_j}{\mu-\lambda_j}. \tag{2.20}$$

Применяя требование условия а), получим

$$\left(1+\sum_{i=1}^{m}\frac{\nu_{k_i}\beta_{k_i}}{\mu-\lambda_{k_i}}\right)\Delta = 0. \tag{2.21}$$

Домножив полученное равенство на отличный от нуля множитель

$$\prod_{j=1}^{m}(\mu-\lambda_{k_j}),$$

и, обозначив

$$P(\mu) = \prod_{j=1}^{m}(\mu-\lambda_{k_j}) + \sum_{i=1}^{m}\nu_{k_i}\beta_{k_i}\prod_{j=1,j\neq i}^{m}(\mu-\lambda_{k_j}), \tag{2.22}$$

придем к уравнению

$$P(\mu)\Delta = 0. \tag{2.23}$$

Таким образом, при $\Delta \neq 0$ μ должно быть корнем многочлена $P(\mu)$. В случае же $\Delta = 0$, из (2.17) следует совпадение μ и λ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, что противоречит условию $\mu \notin \{\lambda_i\} = \sigma_p(A)$.

Пусть ξ — корень многочлена $P(\mu)$, не принадлежащий $\sigma_p(A)$. В этом случае справедливо уравнение (2.23), и из системы (2.17) возможно найти коэффициенты γ_j отличного от нуля решения φ спектральной задачи (2.16), являющегося собственной функцией оператора $A-K$. Следовательно, из предположения (2.15) получаем, что $\xi \in \Theta$.

Заметим, что λ_{k_j} не может быть корнем $P(\mu)$, так как в этом случае, $\nu_{k_j}\beta_{k_j} = 0$, что влечет, в силу равенств $\nu_{k_j} = \big\langle a, \psi_{k_j}\big\rangle$ и $\beta_{k_j} = \big\langle \psi_{k_j}, b\big\rangle$, для $\psi = \psi_{k_j}$, $\mu = \lambda_{k_j}$ справедливость

$$\mu\psi = A\psi - \big\langle \psi, b\big\rangle a, \tag{2.24}$$

либо

$$\overline{\mu}\psi = A^*\psi - \big\langle \psi, a\big\rangle b, \tag{2.25}$$

что противоречит предположению (2.15).

Таким образом, корень ξ многочлена $P(\mu)$ может принадлежать только множеству $\Theta \cup \big(\sigma_p(A) \setminus \Omega\big)$.

Допустим теперь, что существует κ_i такое, что $P(\kappa_i) \neq 0$, $\kappa_i \notin \sigma(A)$. Тогда из уравнения (2.23) получаем равенство $\Delta = 0$, что эквивалентно $\big\langle \varphi, b\big\rangle = 0$. Следовательно, $K\varphi = \big\langle \varphi, b\big\rangle a = 0$, и $(A - K)\varphi = A\varphi$, что противоречит равенству (2.15).

Достаточность. Заметим, что при выборе $\mu = \lambda_i$, $\psi = \psi_i$, где $i \notin \Lambda$, выполняется хотя бы одно из уравнений (2.24), (2.25). Отсюда следует включение $\big(\sigma_p(A) \setminus \Omega\big) \subset \sigma_p(A - K)$.

По условию теоремы $P(\kappa_i) = 0$, $\kappa_i \notin \sigma_p(A)$ для $i = 1, 2, \ldots, m$. Рассмотрим тогда однородную систему (2.19), (2.20) относительно неизвестных $\Delta, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Покажем существование отличного от тождественного решения этой системы. Предположим что $\Delta = 1$. Тогда, после проделанных выше преобразований, получаем, что система (2.19), (2.20) при выбранном Δ разрешима тогда, когда разрешимо уравнение (2.21). Домножая последнее на $\prod\limits_{j=1}^{m}(\mu - \lambda_{k_j})$, получаем уравнение 2.23), которое разрешимо для $\mu = \kappa_i$ по условию теоремы. Получая γ_i из (2.19) находим $\varphi \neq 0$. Таким образом, κ_i принадлежит $\sigma_p(A - K)$.

Из условия б) следует, что ν_{k_i} и β_{k_i} отличны от нуля, $i = 1, 2, \ldots, m$. Полагая $\mu = \lambda_{k_i}$ в системе (2.17), получаем равенство $\Delta = 0$, следовательно, $\gamma_j = 0$ для всех $j \neq k_i$. Отсюда имеем $\Delta = \beta_{k_i}\gamma_{k_i} = 0$, следовательно, $\gamma_{k_i} = 0$.

При $\mu = \lambda_{k_i}$ система (2.17) имеет только тривиальное решение. Следовательно, $\Omega \cap \sigma_p(A - K) = \emptyset$.

В том случае, когда $\mu \notin \big(\Theta \cup \sigma_p(A) \cup \Omega\big)$, из уравнения (2.23) следует равенство $\Delta = 0$, которое, как показано выше, влечет равенство нулю всех ν_l и β_l, $l = 1, 2, \ldots, n$.

Объединяя все рассмотренные выше условия, получаем справедливость (2.15). Теорема доказана. $\square$

В работе [5] дана оценка нормы возмущений такого вида:

$$\|K\| = \|a\| \cdot \|b\| = \Big(\sum_{j\geqslant 1} |\alpha_j|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{j\geqslant 1} |\beta_j|^2\Big)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j\geqslant 1} |\alpha_j \beta_j| = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_{k_i}\beta_{k_i}| = \sum_{i=1}^{m} |P(\lambda_{k_i})| / \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j}|.$$

Эта оценка достигается, например, при $\alpha_{k_i} = \beta_{k_i}$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим

$$\kappa_m = \inf \sum_{i=1}^{m} |P(\lambda_{k_i})| / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j}|, \qquad (2.26)$$

где inf берется по всем многочленам m со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого образуют подмножество множества $\Theta \cup (\sigma_p(A) \backslash \Omega)$, причем множество $\Theta \backslash \sigma_p(A)$ целиком лежит в множестве корней $P(\lambda)$ и выберем $P(\lambda) = \lambda^m$. Получим оценку сверху

$$\kappa_m \leqslant \tau_m = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} |\lambda_{k_i}|^m}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \big| |\lambda_{k_i}| - |\lambda_{k_j}| \big|}.$$

Исследуем зависимость спектра возмущенного оператора $\sigma_p(A - K)$ от погрешности возмущения K.

Согласно теореме 2.4 коэффициенты ν_{k_j}, β_{k_j}, $j \in \Lambda$ зависят от κ_i следующим образом:

$$\gamma_j \doteq \nu_{k_j} \beta_{k_j} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} (\lambda_{k_j} - \kappa_i)}{\prod\limits_{i=1, i \neq j}^{m} (\lambda_{k_j} - \lambda_{k_i})} \doteq f_j(\lambda, \kappa),$$

где λ — вектор $(\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m})^T$, κ — вектор $(\kappa_1, \ldots, \kappa_m)^T$.

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)^T$ — точные значения такие, что $\gamma = f(\lambda, \kappa)$, а $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_m)^T$ — приближенные, $\tilde{\gamma} = f(\lambda, \tilde{\kappa})$, где $f(\lambda, \kappa) = (f_1(\lambda, \kappa), \ldots, f_m(\lambda, \kappa)^T$. Тогда

$$\Delta\gamma = \tilde{\gamma} - \gamma = f(\lambda, \kappa) - f(\lambda, \tilde{\kappa})$$

и линейная часть

$$d\gamma = \frac{Df}{D\kappa} d\kappa,$$

где $\frac{Df}{D\kappa}$ — матрица Якоби преобразования f по переменным κ.

Используя

$$\frac{\partial f_j}{\partial \kappa_k} = -\frac{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{m} (\lambda_{k_j} - \kappa_i)}{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{m} (\lambda_{k_j} - \lambda_{k_i})},$$

найдем выражение для якобиана

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \kappa_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \kappa_1} \\ & \dots & \\ \frac{\partial f_1}{\partial \kappa_m} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \kappa_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{\prod\limits_{j=1}^{m} \prod\limits_{i=1, i\neq j}^{m} (\lambda_{k_j} - \lambda_{k_i})} \begin{vmatrix} \prod\limits_{i=1, i\neq 1}^{m} (\lambda_1 - \kappa_i) & \dots & \prod\limits_{i=1, i\neq 1}^{m} (\lambda_m - \kappa_i) \\ & \dots & \\ \prod\limits_{i=1, i\neq m}^{m} (\lambda_1 - \kappa_i) & \dots & \prod\limits_{i=1, i\neq m}^{m} (\lambda_m - \kappa_i) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^m \prod\limits_{j=1}^{m} \prod\limits_{i=1}^{m} (\lambda_{k_j} - \kappa_i)}{\prod\limits_{j=1}^{m} \prod\limits_{i=1, i\neq j}^{m} (\lambda_{k_j} - \lambda_{k_i})} \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \kappa_1} & \dots & \frac{1}{\lambda_m - \kappa_1} \\ & \dots & \\ \frac{1}{\lambda_1 - \kappa_m} & \dots & \frac{1}{\lambda_m - \kappa_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^m \prod\limits_{j=1}^{m}\prod\limits_{i=1}^{m}(\lambda_{k_j} - \kappa_i)}{\prod\limits_{j=1}^{m}\prod\limits_{i=1, i\neq j}^{m}(\lambda_{k_j} - \lambda_{k_i})} \frac{(-1)^{m-1}\prod\limits_{i=1}^{m-1}\prod\limits_{j=i+1}^{m}(\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j})(\kappa_i - \kappa_j)}{\prod\limits_{j=1}^{m}\prod\limits_{j=1}^{m}(\lambda_{k_i} - \kappa_j)} =$$

$$= -\frac{\prod\limits_{i=1}^{m-1}\prod\limits_{j=i+1}^{m}(\kappa_i - \kappa_j)}{\prod\limits_{i=2}^{m}\prod\limits_{j=1}^{i-1}(\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j})}.$$

Таким образом, при $\kappa_i \neq \kappa_j$ для $i, j = \overline{1, m}$ якобиан J отличен от нуля, и линейная часть $\Delta\kappa$ может быть найдена

$$d\kappa = \left(\frac{Df}{D\kappa}\right)^{-1} d\gamma.$$

2.5. Оператор с кратным спектром

С точки зрения классической физики случаи появления систем с кратным спектром чрезвычайно редки, являясь не правилом, а скорее исключением. Это объясняется тем, что кратный спектр возникает тогда, когда системы или их части идеально идентичны. Малейшие различия в свойствах «расщепляют» кратные собственные значения, делая их простыми.

Совершенно иная ситуация в случае квантовой механики атомов и молекул. Частицы, например электроны, тождественны друг другу, отличаясь только спином, принимающим всего два значения. Поэтому в данной области случаи кратного спектра — обычное явление, и их рассмотрение довольно важно.

В качестве примера можно привести спектр трехмерного оператора Гамильтона для атома водорода [29].

Уравнение для радиальных волновых функций в сферических координатах имеет вид:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}R + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)R = 0.$$

Энергия атома E является спектральным параметром. Выражение для дискретного спектра имеет вид:

$$E = -\frac{1}{2n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Целое число n называется главным квантовым числом. Однако при одном значении n возможны различные значения азимутального квантового числа l. При заданном главном квантовом числе n азимутальное квантовое число l может принимать значения $0, 1, \dots, n-1$. Это означает, что при фиксированном n трехмерное уравнение Шредингера имеет n разных волновых функций в качестве решения с одним значением энергии E.

Таким образом, даже для простейших квантовомеханических объектов имеет место кратный спектр.

Рассмотрим самосопряженный оператор A, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, имеющий ортонормированную систему собственных функций $\{\varphi_{i,j}\}$.

Пусть λ_i — собственные значения оператора A геометрической кратности m_i, причем перенумеруем собственные значения λ_i в порядке возрастания кратностей, то есть потребуем выполнения $1 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \ldots$. В данном случае для оператора A имеет место спектральное разложение

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_i \langle \cdot, \varphi_{i,j} \rangle \varphi_{i,j}. \tag{2.27}$$

Пусть задано некоторое $\Omega = \{\lambda_{l_1}, \ldots, \lambda_{l_m}\}$ — непустое подмножество спектра $\sigma(A)$. Необходимо, возмущая оператор A конечномерным возмущением минимального ранга K, перевести все собственные значения λ_{l_k} оператора A из множества Ω в произвольное множество $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$, являющееся подмножеством спектра $\sigma(A - K)$, комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Другими словами, необходимо построить оператор K минимального ранга такой, что выполнено равенство

$$\sigma_p(A - K) = \Theta \cup (\sigma_p(A) \setminus \Omega), \tag{2.28}$$

где $\sigma_p(\cdot)$ — точечный спектр оператора, Ω — непустое подмножество собственных значений A, Θ — подмножество точек спектра возмущенного оператора $A - K$, не пересекающееся с Ω, в которое переводятся точки из Ω.

Согласно теореме 2.2(стр. 45) минимальный ранг конечномерного возмущения K, переводящего Ω в Θ, совпадает с максимальной геометрической кратностью собственных чисел из Ω

$$\min_{\sigma_p(A-K)=\Theta\cup(\sigma_p(A)\setminus\Omega)} \operatorname{rank} K = \max_{\lambda\in\Omega} \dim\ker(A-\lambda I),$$

где I — тождественный оператор в $\mathfrak{H}$. Таким образом, ранг оператора K должен равняться $\operatorname{rank} K = m_m$, m_m — наибольшая кратность удаляемых собственных чисел из Ω.

Возмущение K будем формировать в виде

$$K = \sum_{s=1}^{m} \langle\cdot, b_s\rangle a_s, \quad a_s \in \mathfrak{H}, \quad b_s \in \mathfrak{H}, \tag{2.29}$$

где

$$a_s = \sum_{i=1+l_{s-1}}^{\infty} \sum_{j=1+m_{l_{s-1}}}^{\min(m_{l_s}, m_i)} \nu_{ij}\varphi_{i,j}, \tag{2.30}$$

$$b_s = \sum_{i=1+l_{s-1}}^{\infty} \sum_{j=1+m_{l_{s-1}}}^{\min(m_{l_s}, m_i)} \overline{\beta}_{ij}\varphi_{i,j}, \tag{2.31}$$

$\{\nu_{i'j'}\}, \{\beta_{i'j'}\}, i' = \overline{1,\infty}, j' = \overline{1, m_{i'}}$ — квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел, причем будем полагать $l_0 = 0$, $m_0 = 0$.

Приводимая теорема дает описание всех операторов такого вида, обеспечивающих выполнение соотношения (2.28).

Теорема 2.5. *Для того чтобы можно было перевести заданное подмножество $\Omega = \{\lambda_{l_1}, \ldots, \lambda_{l_m}\}$ изолированных собственных значений оператора (2.27) в произвольно заданное подмножество $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$, $\Omega \cap \Theta = \emptyset$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с помощью возмущения вида (2.29), необходимо и достаточно существования двух квадратично суммируемых последовательностей $\{\nu_{ij}\}, \{\beta_{ij}\}, i = \overline{1,\infty}, j = \overline{1, m_i}$ таких, что выполнены следующие условия:*

a) $\nu_{ij}\beta_{ij} = 0$ для всех индексов i, не принадлежащих множеству индексов удаляемых собственных чисел $\Lambda = \{l_1, \ldots, l_m\}$;

б) $\nu_{l_i j}\beta_{l_i j} = \dfrac{P(\lambda_{l_i})}{\prod\limits_{k=1,k\neq i}^{m}(\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k})}$, *где* $P(\mu)=\prod\limits_{k=1}^{m}(\mu-\theta_k)$ *— многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из* Θ.

Доказательство.

Рассмотрим систему собственных функций $\{\varphi_{i,j}\}$ оператора A в следующем виде:

$$
\begin{array}{l|l|l|l|}
 & s=1 & & \\
\lambda_1 & \varphi_{1,1}\ldots\varphi_{1,m_1} & & \\
 & \ldots & s=2 & \\
\lambda_{l_1} & \varphi_{l_1,1}\ldots\varphi_{l_1,m_1}\ldots\varphi_{l_1,m_{l_1}} & & \\
 & \ldots & & s=m \\
\lambda_{l_2} & \varphi_{l_2,1}\ldots\varphi_{l_2,m_1}\ldots\varphi_{l_2,m_{l_1}} & \ldots\varphi_{l_2,m_{l_2}} & \\
 & \ldots & & \\
\lambda_{l_m} & \varphi_{l_m,1}\ldots\varphi_{l_m,m_1}\ldots\varphi_{l_m,m_{l_1}} & \ldots\varphi_{l_m,m_{l_2}} & \ldots\varphi_{l_m,m_{l_m}} \\
 & \ldots & &
\end{array}
$$

Рис. 2.4. Система собственных функций A

и введем функцию

$$k_0(j) = \arg\min_{\substack{k \\ m_k\geqslant j}}(m_k - j).$$

Смысл данной функции заключается в нахождении наименьшего индекса k собственных чисел λ_k, для которого существует собственная функция $\varphi_{k,j}$.

Представим теперь, изменив порядок суммирования в (2.27), оператор A:

$$A = \sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1+m_{l_{s-1}}}^{m_{l_s}}\sum_{i=k_0(j)}^{\infty}\lambda_i\langle\cdot,\varphi_{i,j}\rangle\varphi_{i,j}. \tag{2.32}$$

Здесь суммирование идет по блокам s, как представлено на рис. 2.4. И для всех $s = 1, \ldots, m$, $j = 1 + m_{l_{s-1}}, \ldots, m_{l_s}$ операторы

$$A_1(j) = \sum_{i=k_0(j)}^{\infty} \lambda_i \langle \cdot, \varphi_{i,j} \rangle \varphi_{i,j}$$

имеют только простой спектр. Таким образом, получим представление оператора A в виде суммы операторов с простым спектром $\sigma_p(A_1(j)) \subset \sigma_p(A)$:

$$A = \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1+m_{l_{s-1}}}^{m_{l_s}} A_1(j). \tag{2.33}$$

Отсюда следует, что для того чтобы перевести собственные значения оператора A из множества Ω в множество Θ, необходимо и достаточно, в силу ортогональности системы собственных функций $\{\varphi_{i,j}\}$, чтобы возмущение K для всех $j = 1, 2, \ldots, m_m$ переводило спектр операторов $A_1(j)$ в множество $\Theta \cup (\sigma_p(A_1(j)) \setminus \Omega)$, являющееся подмножеством $\Theta \cup (\sigma_p(A) \setminus \Omega)$.

Рассмотрим оператор

$$\tilde{K} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1+m_{l_{s-1}}}^{m_{l_s}} K_1(j) \tag{2.34}$$

такой, что возмущение $K_1(j)$ переводит спектр $\sigma_p(A_1(j))$ в $\Theta \cup (\sigma_p(A_1(j)) \setminus \Omega$ и имеет вид

$$K_1(j) = \langle \cdot, \tilde{b}_j \rangle \tilde{a}_j,$$

где $\tilde{a}_j = \sum\limits_{i=k_0(j)}^{\infty} \tilde{\nu}_{ij} \varphi_{i,j}$, $\tilde{b}_j = \sum\limits_{i=k_0(j)}^{\infty} \overline{\tilde{\beta}}_{ij} \varphi_{i,j}$.

Отсюда по теореме 2.4(стр. 47) для того, чтобы выполнялось включение $\sigma_p(A_1(j) - K_1(j)) \subset \Theta \cup (\sigma(A_1(j)) \setminus \Omega$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $s = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1 + m_{l_{s-1}}, \ldots, m_{l_s}$ существовали две квадратично суммируемые последовательности $\{\tilde{\nu}_{ij}\}_{i=k_0(j)}^{\infty}$ и $\{\tilde{\beta}_{ij}\}_{i=k_0(j)}^{\infty}$ такие, что

а') $\tilde{\nu}_{ij} \tilde{\beta}_{ij} = 0$ для всех индексов i, не принадлежащих множеству индексов удаляемых собственных чисел $\Lambda = \{l_1, \ldots, l_m\}$;

б') $\tilde{\nu}_{l_i j}\tilde{\beta}_{l_i j} = \dfrac{P_j(\lambda_{l_i})}{\prod\limits_{\substack{k \\ l_k \geqslant k_0(j)}} (\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k})}$, где $P_j(\mu) = \prod\limits_{k=k_1(j)}^{m} (\mu - \theta_k)$ — многочлен степени $m - k_1(j) + 1$ со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из Θ, $k_1(j)$ — наименьший индекс k такой, что $l_k \geqslant k_0(j)$.

Однако для всех индексов i таких, что λ_{l_i} принадлежит множеству $\sigma_p(A_1(j))$, то есть для всех $i \geqslant k_1(j)$, значения

$$\frac{P_j(\lambda_{l_i})}{\prod\limits_{\substack{k \\ l_k \geqslant k_0(j)}} (\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k})} \text{ и } \frac{P(\lambda_{l_i})}{\prod\limits_{k=1, k \neq i}^{m} (\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k})}$$

совпадают. При выборе $\nu_{ij} = \tilde{\nu}_{ij}$, $\beta_{ij} = \tilde{\beta}_{ij}$ из эквивалентности операторов $\tilde{K}$ и K следует справедливость условий а) и б) и справедливость теоремы.

Покажем равенство операторов $\tilde{K}$ и K.

Для этого подставим выражения для $K_1(j)$, $\tilde{a}_j$ и $\tilde{b}_j$ в (2.34)

$$\tilde{K} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1+m_{l_{s-1}}}^{m_{l_s}} K_1(j) =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1+m_{l_{s-1}}}^{m_{l_s}} \langle \cdot, \sum_{i'=k_0(j)}^{\infty} \overline{\tilde{\beta}}_{i'j} \varphi_{i',j} \rangle \sum_{i=k_0(j)}^{\infty} \tilde{\nu}_{ij} \varphi_{i,j}.$$

Поменяв переменные суммирования, получим

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1+m_{l_{s-1}}}^{m_{l_s}} \langle \cdot, \sum_{i'=k_0(j)}^{\infty} \overline{\tilde{\beta}}_{i'j} \varphi_{i',j} \rangle \sum_{i=k_0(j)}^{\infty} \tilde{\nu}_{ij} \varphi_{i,j} =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1+l_{s-1}}^{\infty} \langle \cdot, \sum_{j'=1+m_{l_{s-1}}}^{\min(m_{l_s}, m_i)} \beta_{ij'} \varphi_{ij'} \rangle \sum_{j=1+m_{l_{s-1}}}^{\min(m_{l_s}, m_i)} \nu_{ij} \varphi_{ij} =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \langle \cdot, b_s \rangle a_s = K.$$

Последнее равенство доказывает теорему. □

Как и в параграфе 2.4 оценим норму возмущения. Представим оператор K в виде суммы операторов с простым спектром $K_1(j)$, как это сделано в (2.34). Тогда

$$\|K\| = \left\| \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1+m_{l_{s-1}}}^{m_{l_s}} K_1(j) \right\|,$$

где $K_1(j) = \langle\cdot, b_j\rangle a_j$, $a_j = \sum\limits_{i=k_0(j)}^{\infty} \nu_{ij}\varphi_{i,j}$, $b_j = \sum\limits_{i=k_0(j)}^{\infty} \overline{\beta}_{ij}\varphi_{i,j}$.

В силу оценки (2.26) и взаимной ортогональности образов операторов $K_1(j)$ справедливо

$$\|K\| \geqslant \max_{1\leqslant j\leqslant m_{l_m}} \|K_1(j)\| \geqslant$$
$$\geqslant \max_{1\leqslant j\leqslant m_{l_m}} \sum_{i=k_0(j)}^{m} |P(\lambda_{l_i})| / \prod_{\substack{k=k_0(j)\\ k\neq i}}^{m} |\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k}| =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} |P(\lambda_{l_i})| / \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{m} |\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k}|. \tag{2.35}$$

Эта нижняя оценка достигается, например, при $\nu_{k_ij} = \beta_{k_ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m_i}$. Таким образом, равенство

$$\kappa_m = \inf \sum_{i=1}^{m} |P(\lambda_{l_i})| / \prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{m} |\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k}|, \tag{2.36}$$

где κ_m — точная нижняя грань норм K, справедливо и для операторов с кратным спектром.

Отсюда получаем справедливость оценки

$$\kappa_m \leqslant \tau_m = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} |\lambda_{k_i}|^m}{\prod\limits_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{m} \big||\lambda_{l_i}| - |\lambda_{l_k}|\big|}.$$

2.6. Построение возмущений

Построим для примера, рассмотренного в 1.2.1, конечномерное возмущение единичного ранга.

В этом примере рассматривался спектр оператора Гамильтона

$$H = -\frac{\hbar}{2m}\Delta + U(r),$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, m — масса частицы, $U(r)$ — потенциал силового поля в точке r, с потенциалом следующего вида:

$$U(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ +\infty, & x < 0 \end{cases}.$$

Вообще говоря, изменение функции потенциала $U(r)$, как это было сделано в 1.2.1, представляет собой бесконечномерное возмущение оператора Гамильтона. Теперь требуется изменить спектр H, используя конечномерное возмущение K.

Таким образом, задача управления спектром оператора H заключается в поиске конечномерного оператора K единичного ранга, и решении задачи

$$(H - K)\psi = E\psi.$$

Исходный спектр невозмущенного оператора H, как было показано в 1.2.1, содержит собственное значение $\overset{\circ}{E}_2 = 7.0$. Будем искать такое возмущение K, которое «переводит» точку $\overset{\circ}{E}_2$ в ноль.

Для этого возмущение K можно представить в виде

$$K\psi = \overset{\circ}{E}_2\psi_2(x)\int_{-\infty}^{\infty}\psi(s)\psi_2(s)\,ds. \tag{2.37}$$

Действительно, возмущение такого вида сохраняет все собственные значения $\overset{\circ}{E}_j$, $j \neq 2$ в спектре $\sigma(H-K)$

$$(H-K)\psi_j(x) = \overset{\circ}{E}_j\psi_j(x) - \overset{\circ}{E}_2\psi_2(x)\int_{-\infty}^{\infty}\psi_j(s)\psi_2(s)\,ds =$$

$$= \overset{\circ}{E}_j\psi_j(x).$$

Более того, сохраняется вид собственных функций $\psi_j(x)$, $j \neq 2$.

В силу нормировки собственных функций $\psi_j(x)$ такой, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_j^2(x)\,dx = 1,$$

в спектре появляется собственное значение $E = 0$, соответствующее собственной функции $\psi_2(x)$

$$(H-K)\psi_2(x) = \overset{\circ}{E}_2\psi_2(x) - \overset{\circ}{E}_2\psi_2(x)\int_{-\infty}^{\infty}\psi_2(s)\psi_2(s)\,ds =$$

$$= 0 \cdot \psi_2(x).$$

Докажем, что возмущение вида (2.37) «удаляет» собственное значение $\overset{\circ}{E}_2$ из спектра возмущенного оператора $H-K$.

Пусть найдется такая функция $\psi(x) \not\equiv 0$, $\psi(x) \neq \psi_k(x)$ для всех k, что выполнено равенство

$$(H-K)\psi(x) = H\psi(x) - \overset{\circ}{E}_2\psi_2(x)\int_{-\infty}^{\infty}\psi(s)\psi_2(s)\,ds = \overset{\circ}{E}_2\psi(x). \qquad (2.38)$$

Представим функцию $\psi(x)$ в виде разложения в ряд по полной ортогональной системе функций $\{\psi_k\}$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\psi_k(x)$$

и подставим в равенство (2.38)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \overset{\circ}{E}_k \alpha_k \psi_k(x) - \overset{\circ}{E}_2 \alpha_2 \psi_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \overset{\circ}{E}_2 \alpha_k \psi_k(x).$$

Умножая последнее равенство на $\psi_j(x)$ и интегрируя, приходим к системе равенств:

$$\overset{\circ}{E}_j \alpha_j = \overset{\circ}{E}_2 \alpha_j, \quad j \neq 2;$$

$$\overset{\circ}{E}_2 \alpha_2 - \overset{\circ}{E}_2 \alpha_2 = \overset{\circ}{E}_2 \alpha_2, \quad j = 2.$$

Так как все $\overset{\circ}{E}_j$ отличны от 0, то все $\alpha_j = 0$. Пришли к противоречию с условием $\psi(x) \not\equiv 0$, что доказывает отсутствие $\overset{\circ}{E}_2$ в спектре $\sigma(H - K)$.

Иная ситуация возникает тогда, когда необходимо «удалить» два или более собственных значения применением возмущения с рангом, равным единице.

Рассмотрим задачу «удаления» из спектра $\sigma(H)$ собственных значений $\overset{\circ}{E}_2$, $\overset{\circ}{E}_4$. Возмущение K следует искать в виде

$$K\psi(x) = a(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) b(s)\, ds,$$

$$a(x) = \nu_2 \psi_2(x) + \nu_4 \psi_4(x), \quad b(x) = \beta_2 \psi_2(x) + \beta_4 \psi_4(x).$$

Действительно, значение $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)(\beta_2 \psi_2(s) + \beta_4 \psi_4(s))\, ds$ при $\psi = \psi_j$, $j \notin \{2, 4\}$ равно 0. Следовательно, $E_j = \overset{\circ}{E}_j$ для всех j отличных от 2 и 4. Более того, соответствующие этим собственным значениям собственные функции останутся прежними.

Коэффициенты $\nu_2, \nu_4, \beta_2, \beta_4$ выберем таким образом, чтобы в спектре возмущенного оператора $\sigma(H-K)$ появилось нулевое собственное значение

$$(H - K)\psi = H\psi - a(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) b(s)\, ds = 0. \tag{2.39}$$

Собственную функцию $\psi(x)$ представим в виде

$$\psi(x) = \alpha\psi_2(x) + \beta\psi_4(x). \tag{2.40}$$

Подставляя (2.40), $a(x)$ и $b(x)$ в уравнение (2.39), получим:

$$\alpha\mathring{E}_2\psi_2(x) + \beta\mathring{E}_4\psi_4(x) + a(x)\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha\psi_2(s) + \beta\psi_4(s))b(s)\,ds =$$

$$= (\alpha(\mathring{E}_2 + \nu_2\beta_2) + \beta(\nu_2\beta_4))\psi_2(x) + (\alpha(\nu_4\beta_2) + \beta(\mathring{E}_4 + \nu_4\beta_4))\psi_4(x) = 0.$$

Отсюда, в силу ортогональности ψ_2 и ψ_4, имеем систему уравнений относительно α и β

$$\begin{cases} \alpha(\mathring{E}_2 + \nu_2\beta_2) + \beta(\nu_2\beta_4) & = 0, \\ \alpha(\nu_4\beta_2) + \beta(\mathring{E}_4 + \nu_4\beta_4) & = 0. \end{cases}$$

Необходимо найти нетривиальное решение данной системы, которое существует в случае равенства нулю определителя её матрицы

$$(\mathring{E}_2 + \nu_2\beta_2)(\mathring{E}_4 + \nu_4\beta_4) - \nu_4\beta_2\nu_2\beta_4 = 0.$$

Для выполнения последнего равенства выберем $\nu_2 = \nu_4 = 1$, $\beta_2 = -2\mathring{E}_2$, $\beta_4 = \mathring{E}_4$.

Таким образом, возмущение K имеет вид:

$$K\psi(x) = (\psi_2 + \psi_4)(x)\int_{-\infty}^{\infty}\psi(s)(-2\mathring{E}_2\psi_2 + \mathring{E}_4\psi_4)(s)\,ds.$$

Проверим, что $\mathring{E}_2$ не является собственным значением оператора $H-K$.

Будем искать функцию

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \psi_k(x)$$

такую, что выполнено равенство

$$(H - K)\psi(x) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \overset{\circ}{E}_k \psi_k(x) - (\psi_2 + \psi_4)(x)(-2\overset{\circ}{E}_2\gamma_2 + \overset{\circ}{E}_4\gamma_4) = \sum_{k=1}^{\infty} \overset{\circ}{E}_2 \gamma_k \psi_k(x).$$

В силу ортогональности системы функций $\{\psi_k\}$ приходим к системе уравнений относительно γ_k

$$\begin{cases} \gamma_k \overset{\circ}{E}_k = \gamma_k \overset{\circ}{E}_2, & k \notin \{2, 4\}, \\ 2\overset{\circ}{E}_2\gamma_2 - \overset{\circ}{E}_4\gamma_4 = 0, & k = 2, \\ 2\overset{\circ}{E}_2\gamma_2 - \overset{\circ}{E}_2\gamma_4 = 0, & k = 4. \end{cases} \tag{2.41}$$

Так как $\overset{\circ}{E}_i \neq \overset{\circ}{E}_j$ для всех $i \neq j$, система (2.41) имеет единственное решение $\gamma_k = 0$ для всех k. Таким образом, $\overset{\circ}{E}_2$ не является собственным значением $H - K$. Аналогично показывается, что $\overset{\circ}{E}_4$ также не является собственным значением $H - K$.

Как и ранее, будем рассматривать задачу «удаления» из спектра $\sigma(H)$ собственных значений $\overset{\circ}{E}_2$, $\overset{\circ}{E}_4$. Выберем

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k \psi_k(x),$$

$$b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \psi_k(x),$$

где $\{\nu_k\}$, $\{\beta_k\}$ — квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел, удовлетворяющие условиям теоремы.

Выберем $\{\nu_k\}$ таким образом, чтобы $\nu_2 = \nu_4 = 1$, а β_2 и β_4 из условия б) теоремы, все остальные ν_k и β_k примем равными нулю. Выберем $P(\mu) = \mu^2$ и получим выражения

$$\beta_2 = \frac{\overset{\circ}{E}_2^{\,2}}{\overset{\circ}{E}_2 - \overset{\circ}{E}_4}, \quad \beta_4 = \frac{\overset{\circ}{E}_4^{\,2}}{\overset{\circ}{E}_4 - \overset{\circ}{E}_2}.$$

Аналогично предыдущему случаю доказывается отсутствие в спектре $\sigma(H-K)$ собственных значений $\overset{\circ}{E}_2$ и $\overset{\circ}{E}_4$. Согласно теореме, в спектре $\sigma(H-K)$ должен присутствовать ноль.

Выберем $\psi = \gamma_2\psi_2 + \gamma_4\psi_4$ и подставим вместе с $a(x)$ и $b(x)$ в уравнение

$$(H-K)\psi = 0.$$

В результате получим

$$\big(\gamma_2\overset{\circ}{E}_2\psi_2(x) + \gamma_4\overset{\circ}{E}_4\psi_4(x)\big) - \big(\psi_2(x) + \psi_4(x)\big)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big(\gamma_2\psi_2(s) + \gamma_4\psi_4(s)\big)\overline{\left(\frac{\overset{\circ}{E}_2^{\,2}}{\overset{\circ}{E}_2 - \overset{\circ}{E}_4}\psi_2(s) + \frac{\overset{\circ}{E}_4^{\,2}}{\overset{\circ}{E}_4 - \overset{\circ}{E}_2}\psi_4(s)\right)}\, ds = 0,$$

где $\overline{(\cdot)}$ означает комплексное сопряжение.

После преобразований и взятия интеграла имеем:

$$(H-K)\psi = \big(\gamma_2\overset{\circ}{E}_2\psi_2(x) + \gamma_4\overset{\circ}{E}_4\psi_4(x)\big) -$$

$$\left(\gamma_2\overline{\frac{\overset{\circ}{E}_2^{\,2}}{\overset{\circ}{E}_2 - \overset{\circ}{E}_4}} + \gamma_4\overline{\frac{\overset{\circ}{E}_4^{\,2}}{\overset{\circ}{E}_4 - \overset{\circ}{E}_2}}\right)\big(\psi_2(x) + \psi_4(x)\big) = 0.$$

Используя то, что $\overset{\circ}{E}_2$ и $\overset{\circ}{E}_4$ вещественные, и в силу ортогональности

$\{\psi_k\}$, приходим к системе уравнений относительно γ_2 и γ_4:

$$\begin{cases} \left(\overset{\circ}{E}_2 - \frac{\overset{\circ}{E}_2{}^2}{\overset{\circ}{E}_2 - \overset{\circ}{E}_4}\right)\gamma_2 - \left(\frac{\overset{\circ}{E}_4{}^2}{\overset{\circ}{E}_4 - \overset{\circ}{E}_2}\right)\gamma_4 & = 0, \\ \left(-\frac{\overset{\circ}{E}_2{}^2}{\overset{\circ}{E}_2 - \overset{\circ}{E}_4}\right)\gamma_2 + \left(\overset{\circ}{E}_4 - \frac{\overset{\circ}{E}_4{}^2}{\overset{\circ}{E}_4 - \overset{\circ}{E}_2}\right)\gamma_4 & = 0. \end{cases}$$

Решениями этой системы являются комплексные числа $\gamma_2 = \frac{c\overset{\circ}{E}_4}{\overset{\circ}{E}_2}$, $\gamma_4 = c$ для любых комплексных c.

Таким образом, точка $E = 0$ принадлежит спектру $\sigma(H - K)$.

Замечание. Вообще говоря, все рассуждения относительно оператора K и собственных значений $\sigma(H - K)$ проводились безотносительно вида H и $\sigma(H)$. Единственным условием на оператор H является простота и дискретность спектра $\sigma(H)$.

ГЛАВА 3

«УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ ОПЕРАТОРА МОНОДРОМИИ»

3.1. Неавтономная система

В предыдущей главе изучалось управление спектром постоянного оператора A в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, который имеет дискретный спектр в заданном множестве Ω. Управление спектром такого оператора эквивалентно, как отмечалось во введении, управлению асимптотическими показателями решений (см. также [32, 33]) системы

$$\dot{x} = Ax,$$

где оператор A не зависит от времени t, $x(t)$ для каждого $t \in \mathbb{R}$ — элемент пространства $\mathfrak{B}$.

Большой интерес представляют также задачи управления асимптотическими характеристиками решений систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{3.1}$$

где оператор $A(t)$ не является постоянным.

Пусть задана управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + u(t), \tag{3.2}$$

где управление $u(t)$ для каждого t принадлежит $\mathfrak{B}$ и строится по принципу обратной связи

$$u(t) = -K(t)x(t). \tag{3.3}$$

Пусть система (3.2) приводима, то есть существуют преобразование Ляпунова

$$y = L(t)x, \quad y \in \mathfrak{B},\ L(t) : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}, \tag{3.4}$$

и не зависящий от времени оператор $B \in [\mathfrak{B}]$ такие, что (3.2) асимптотически эквивалентна системе

$$\dot{y} = By + v(t), \quad v(t) \in \mathfrak{B}. \tag{3.5}$$

Потребуем, чтобы оператор B имел компактную резольвенту $R_B(\lambda) = (B - \lambda I)^{-1}$, и управление $v(t)$ формировалось в виде $v(t) = -Sy$.

Лемма 3.1.1. *Для произвольных оператора $B \in [\mathfrak{B}]$ и преобразования Ляпунова $L(t) \in [\mathfrak{B}]$ система (3.1) с оператором*

$$A(t) = L^{-1}(t)BL(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t) \tag{3.6}$$

приводима к системе

$$\dot{y} = By. \tag{3.7}$$

Доказательство. Подставим выражение (3.4) в систему (3.1) и, проведя преобразования, получим

$$\dot{L}(t)x + L(t)\dot{x} = BL(t)x,$$

$$\dot{x} = L^{-1}(t)BL(t)x - L^{-1}(t)\dot{L}(t)x,$$

$$\dot{x} = (L^{-1}(t)BL(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t))x.$$

Отсюда следует справедливость леммы. □

Тогда из теоремы 2.2(стр. 45) следует утверждение:

Теорема 3.1. *Для системы (3.2) такой, что существуют B и $L(t)$, для которых выполнено (3.6), и произвольного Ω такого, что пересечение множества характеристических показателей $\chi(A(t))$ решений (3.1) с Ω пусто или состоит лишь из конечного числа точек, с управлением*

$$u(t) = -L^{-1}(t)SL(t)x,$$

где S — возмущение, переводящее точки спектра $\sigma_p(B) \cap \Omega$ в произвольное заданное множество Θ ($\Theta \cap \Omega = \emptyset$, пересечение $\Omega \cap \chi(A-K)$ пусто.

Доказательство. В силу леммы 3.1.1 характеристические показатели систем (3.1) и (3.7) совпадают.

Проведя преобразования, аналогичные доказательству леммы 3.1.1, для систем (3.2) и (3.5),

$$\dot{L}(t)x + L(t)\dot{x} = BL(t)x + v(t),$$

$$\dot{x} = (L^{-1}(t)BL(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t))x + L^{-1}(t)v(t),$$

получаем равенство

$$u(t) = -L^{-1}(t)SL(t)x.$$

По лемме 5 [34, с. 201] каждому характеристическому показателю $\chi(B) \cap \Omega$ соответствует собственное значение из $\sigma_p(B)$. Выберем возмущение S, согласно теореме 2.2(стр. 45), такое, что оно «переводит» $\sigma_p(B) \cap \Omega$ в Θ.

Отсюда система (3.2) с таким управлением $u(t)$ не имеет характеристических показателей решений в Ω и $\chi(A-K) \cap \Theta \neq \emptyset$, что доказывает теорему. □

3.2. Конечномерная система с периодической матрицей

Ранее была рассмотрена задача минимизации ранга возмущения системы с постоянной матрицей. Для этого случая была доказана теорема двойственности. Более общим является случай системы с матрицей, зависящей от времени. При этом, в частности, если матрица является периодической по времени, то задача поиска возмущения минимального ранга может быть сведена к аналогичной задаче для случая системы с постоянной матрицей. Ниже приводится изложение результатов обобщения теоремы двойственности на случай периодических систем, полученное в работе [9].

Пусть в линейной системе

$$\dot{x} = A(t)x + u(t), \tag{3.8}$$

где $A(t)$ есть ω-периодическая матрица с комплекснозначными локально суммируемыми элементами, управление $u(t)$ формируется по методу обратной связи

$$u(t) = -B(t)F(t)^{-1}x(t), \tag{3.9}$$

где $F(t) = X(t)\exp(-tK)$, $K = \frac{1}{\omega}\ln X(\omega)$, $X(t)$ — матрицант невозмущенной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{3.10}$$

а $B(t)$ есть ω-периодическая матрица с комплекснозначными локально суммируемыми элементами.

При подстановке (3.9) в (3.8) получим однородную систему

$$\dot{x} = [A(t) - B(t)F(t)^{-1}]x \tag{3.11}$$

с ω-периодической матрицей. Свойства решений системы (3.11) будут определять свойства системы (3.8) с обратной связью.

Пусть E — единичная матрица порядка n, $\mathbb{C}^n$ – пространство n-мерных векторов с комплексными компонентами. Ранг функциональной матрицы $B(t)$ определим как размерность образа отображения $(\Gamma z)(t) = B(t)z,\ z \in \mathbb{C}^n,\ t \in [0, \omega]$. Обозначим $\ker(X(\omega) - \rho E) = \{z \in \mathbb{C}^n : X(\omega)z = \rho x\}$. Матрица $X(\omega)$ называется матрицей монодромии, а ее собственные значения — мультипликаторами системы (3.10). Совокупность мультипликаторов называется спектром уравнения (3.10).

Лемма 3.2.1. *Если возмущенная система (3.11) не имеет мультипликаторов из заданного множества Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то*

$$\operatorname{rank}\ B \geqslant \max_{\rho \in \Omega} \dim \ker(X(\omega) - \rho E). \tag{3.12}$$

Доказательство. Пусть $\rho \in \Omega$ и $z_1, \ldots, z_m$ — базис подпространства $\ker(X(\omega) - \rho E)$. Допустим, что для некоторых скаляров $c_1, \ldots, c_m$ при почти всех $t \in [0, \omega]$ линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{m} c_k B(t) z_k = B(t)z = 0$, где $z = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k z_k$. Отсюда для $x(t) = X(t)z = F(t)\exp(tK)z = \rho^{\frac{t}{\omega}} F(t)z$ имеем $B(t)F(t)^{-1}x(t) = 0$ и, значит, $\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)F(t)^{-1}]x(t)$. Кроме того, $x(\omega) = X(\omega)z = \rho z = \rho x(0)$. По условию леммы 3.2.1 в множестве Ω нет мультипликаторов системы (3.11). Следовательно, $x(0) = z = 0$ и в силу линейной независимости $z_1, \ldots, z_m$ все $c_k = 0, k = \overline{1, m}$. Это означает, что матричный оператор $B(t)$ переводит линейно независимую систему векторов $z_1, \ldots, z_m, m = \dim\ker(X(\omega) - \rho E)$, в линейно независимую на $[0, \omega]$ систему вектор-функций $B(t)z_1, \ldots, B(t)z_m$. Отсюда следует (3.12). Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.2.2. *Для любого комплексного λ*

$$\ker(K - \lambda E) = \ker(X(\omega) - \exp(\lambda\omega)E). \tag{3.13}$$

Доказательство. Пусть $f(\lambda) = \exp(\omega\lambda)$. Так как производная $\dot{f}(\lambda)$

не равна нулю на спектре матрицы K, то в силу теоремы 9 [35, с. 158] при переходе от матрицы K к матрице $f(K) = \exp(\omega K) = X(\omega)$ элементарные делители не «расщепляются», то есть, если матрица K имеет элементарный делитель $(\lambda - \lambda_j)^{m_j}$, то матрица монодромии $X(\omega)$ имеет элементарный делитель $(\lambda - \exp(\lambda_j \omega))^{m_j}$ и все элементарные делители этой матрицы могут быть получены подобным образом. Отсюда видно, что число α жордановых клеток в каноническом представлении матрицы K, отвечающих λ_j, равно числу β жордановых клеток в каноническом представлении матрицы $X(\omega)$, отвечающих $\exp(\lambda_j \omega)$ (при определении матрицы $K = \frac{1}{\omega} \ln X(\omega)$ мы берем главное значение логарифма и, значит, $\lambda_k - \lambda_j \neq \frac{2\pi i}{\omega} l$ при $\lambda_k \neq \lambda_j$, где l целое). Так как $\alpha = \dim \ker(K - \lambda_j E)$ и $\beta = \dim \ker(X(\omega) - \exp(\lambda\omega)E)$, то подпространства в (3.13) имеют одинаковую размерность.

Пусть $Kz = \lambda z$. Тогда $X(\omega)z = \exp(\omega K)z = \exp(\lambda\omega)z$. Следовательно, $\ker(K - \lambda E) \subset \ker(X(\omega) - \exp(\lambda\omega)E)$. Так как размерности подпространств совпадают, то имеет место (3.13). Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.2.3. *Пусть*

$$B(t) = F(t)S, \tag{3.14}$$

где S — произвольная постоянная $n \times n$-матрица. Тогда $Y(t) = F(t)\exp(t(K - S))$ является матрицантом возмущенной системы (3.11) и $Y(\omega) = \exp(\omega(K - S))$ — матрицей монодромии этой системы.

Доказательство. Для $F(t) = X(t)\exp(-tK)$ имеем

$$\begin{gathered}\dot F(t) = \dot X(t)\exp(-tK) - X(t)K\exp(-tK) = \\ = A(t)X(t)\exp(-tK) - X(t)\exp(-tK)K = \\ = A(t)F(t) - F(t)K = \\ = [A(t) - B(t)F(t)^{-1}]F(t) - F(t)(K - S).\end{gathered}$$

Так как $Y(t) = F(t)\exp(t(K - S))$, то с учетом найденного представления для производной $\dot{F}(t)$ получим

$$\begin{aligned}
&\dot{Y}(t) = \dot{F}(t)\exp(t(K-S)) + F(t)(K-S)\exp(t(K-S)) = \\
&= \{[A(t) - B(t)F(t)^{-1}]F(t) - F(t)(K-S)\}\exp(t(K-S)) + \\
&\qquad\qquad\qquad +F(t)(K-S)\exp(t(K-S)) = \\
&= [A(t) - B(t)F(t)^{-1}]F(t)\exp(t(K-S)) = \\
&= [A(t) - B(t)F(t)^{-1}]Y(t).
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.2.4. *Пусть Λ — произвольное собственное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда*

$$\max_{\lambda\in\Lambda}\dim\ker(K-\lambda E) = \min\operatorname{rank} S, \tag{3.15}$$

где минимум берется по всем матрицам S порядка n, для которых в множестве Λ нет собственных значений матрицы $K-S$.

Эта лемма составляет утверждение теоремы двойственности работы [3].

Теорема 3.2. *Пусть Ω — произвольное собственное подмножество $\mathbb{C}$. Тогда*

$$\max_{\rho\in\Omega}\dim\ker(X(\omega)-\rho E) = \min\operatorname{rank} B,$$

где минимум берется по всем ω-периодическим $n\times n$-матрицам $B(t)$ с комплекснозначными локально суммируемыми компонентами, для которых возмущенная система (3.11) не имеет мультипликаторов из Ω.

Доказательство. В силу леммы 3.2.1 достаточно показать, что в (3.12) оценка снизу достигается. Выберем максимально широкое множество Λ так, что $\Omega = \{\rho : \rho = \exp(\omega\lambda), \lambda\in\Lambda\}$. В силу (3.13) и (3.15)

$$\begin{aligned}
&\max_{\rho\in\Omega}\dim\ker(X(\omega)-\rho E) = \\
&= \max_{\lambda\in\Lambda}\dim\ker(K-\lambda E) = \min\operatorname{rank} S,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

где минимум берется по всем матрицам S порядка n, для которых в множестве Λ нет собственных значений матрицы $K-S$. Для матрицы минимального ранга $S = S_0$ в (3.16) по формуле (3.14) построим ω-периодическую матрицу $B(t)$, такую, что для матрицы монодромии возмущенной системы (3.11) будем иметь $Y(\omega) = \exp(\omega(K - S_0))$. Так как в множестве Λ нет собственных значений матрицы $K - S_0$, то в множестве Ω не может быть собственных значений матрицы $Y(\omega)$. В силу (3.14) $B(t) = F(t)S_0$. Ранг функциональной матрицы $B(t)$ равен величине

$$\operatorname{rank} S_0 = \max_{\rho\in\Omega} \dim\ker(X(\omega) - \rho E).$$

Это доказывает, что равенство (3.12) достигается. Теорема доказана. $\square$

3.3. Ранг возмущения

Для математического представления физических или технических объектов очень часто используются системы дифференциальных уравнений. Во многих случаях уравнения с самого начала являются линейными или могут быть линеаризованы.

Важной характеристикой динамической системы, механической или какой-либо иной, являются частоты ее собственных колебаний. В математических моделях этих систем частотам собственных колебаний соответствуют собственные значения дифференциального оператора системы. Знание спектра системы позволяет предсказать ее реакцию на произвольное внешнее воздействие.

Очень часто требуется не просто наблюдать за системой, а некоторым образом управлять ею, то есть, например, внося возмущение в исходную систему, придавать ее спектру нужные свойства.

Пусть $\mathfrak{B}$ — банахово пространство. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + u(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.17}$$

где при каждом t линейный оператор $A(t)$, действующий из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}$, компактен, а $x(t)$ и $u(t)$ являются элементами $\mathfrak{B}$. Кроме того, пусть $A(t)$ — ω-периодический по времени t, сильно измеримый и интегрируемый по Бохнеру на отрезке $[0, \omega]$ оператор.

Однородную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{3.18}$$

которая может быть получена из (3.24) при $u(t) \equiv 0$, будем называть невозмущенной.

Из компактности оператора $A(t)$ при каждом t по теореме 1.2 [33, с. 285] для оператора Коши $X(t)$ невозмущенной системы (3.18) следует существование представления Флоке

$$X(t) = F(t)\exp(tQ) \tag{3.19}$$

в виде произведения периодической дифференцируемой оператор-функции $F(t)$, имеющей ограниченный обратный оператор $F^{-1}(t)$, на операторную экспоненту $\exp(tQ)$ с постоянным оператором Q, и для оператора монодромии $X(\omega)$ системы (3.18) следует существование $\ln X(\omega)$.

Исходя из представления Флоке (3.19) оператора Коши системы (3.18), возмущение $u(t)$ будем формировать в виде

$$u(t) = -K(t)x(t) = -B(t)F^{-1}(t)x(t).$$

Пусть спектр оператора монодромии $X(\omega)$ системы (3.18) пересекается с некоторым «запрещенным» множеством Ω. Требуется добавлением возмущения $u(t)$ преобразовать исходную систему (3.18) таким образом, чтобы «запрещенное» множество Ω не пересекалась со спектром оператора монодромии возмущенной системы. Потребуем также, чтобы возмущение, привносимое в систему, имело минимально возможный ранг, понимаемый в следующем смысле.

Определение 3.3.1. *Если оператор B из множества $[\mathfrak{B}]$, то его рангом назовем число $\operatorname{rank} B = \dim\{Bz | z \in \mathfrak{B}\}$.*

Данная задача носит экстремальный характер и может быть записана в виде

$$\begin{gathered} \operatorname{rank} B \to \min, \\ \sigma(X(\omega)) \cap \Omega = \emptyset. \end{gathered} \tag{3.20}$$

Обозначим $\ker(X(\omega) - \rho I) = \{x \in \mathfrak{B} : X(\omega)x = \rho x\}$, где I — тождественный оператор в пространстве $\mathfrak{B}$.

Справедливы следующие леммы.

Лемма 3.3.1. *Для любого комплексного λ из спектра $\sigma(Q)$ существует число* $\exp(\omega\lambda)$ *из спектра* $\sigma(X(\omega))$, $\ker(Q-\lambda I) \subset \ker(X(\omega)-\exp(\omega\lambda)I)$.

Доказательство. Данная лемма является прямым следствием теоремы об отображении спектра для полугруппы (см. лемму 5 [34, с. 201]). □

Лемма 3.3.2. *Если спектр оператора монодромии возмущенной системы (3.17) не пересекается с заданным множеством Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не содержащим единицы, то*

$$\operatorname{rank} B \geqslant \max_{\rho\in\Omega} \dim\ker(X(\omega)-\rho I). \tag{3.21}$$

Доказательство. Пусть комплексное ρ принадлежит «запрещенному» множеству Ω. По теореме С. М. Никольского [36, с. 233] оператор

$$X(\omega)-\rho I = \exp(\omega Q)-\rho I = (1-\rho)I + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\omega Q)^k}{k!},$$

состоящий при $\rho \neq 1$ из суммы непрерывно обратимого и вполне непрерывного операторов, является фредгольмовым. Следовательно, $\ker(X(\omega)-\rho I)$ имеет конечную размерность.

Пусть $z_1,\ldots,z_m$ — базис подпространства $\ker(X(\omega)-\rho I)$.

Допустим, что для некоторых скаляров $c_1,\ldots,c_m$ при почти всех $t\in[0,\omega]$ линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{m} c_k B(t) z_k = B(t)z = 0$, где $z = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k z_k$. Отсюда для $x(t) = X(t)z = F(t)\exp(tK)z = \rho^{\frac{t}{\omega}}F(t)z$ имеем $B(t)F^{-1}(t)x(t) = 0$, и, значит, x — решение возмущенной системы (3.17), $\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)F^{-1}(t)]x(t)$. По условию леммы Ω не пересекается со спектром оператора монодромии системы (3.18). Следовательно, $x(\omega) = z = 0$ и в силу линейной независимости $z_1,\ldots,z_m$ все $c_k = 0$, $k=\overline{1,m}$. Это означает, что оператор $B(t)$ переводит линейно независимую систему

$z_1, \ldots, z_m$, $m = \dim\ker(X(\omega) - \rho I)$ в линейно независимую на $[0, \omega]$ систему $B(t)z_1, \ldots, B(t)z_m$. Отсюда следует (3.21). $\square$

Лемма 3.3.3. *Пусть*

$$B(t) = F(t)S,$$

где S — произвольный, не зависящий от времени оператор из $[\mathfrak{B}]$. Тогда $Y(t) = F(t)\exp(t(Q - S))$ будет «матрицантом» возмущенной системы (3.17) и $Y(\omega) = \exp(\omega(Q - S))$ — оператором монодромии этой системы.

Доказательство. Для $F(t) = X(t)\exp(-tQ)$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{F}(t) = \dot{X}(t)\exp(-tQ) - X(t)Q\exp(-tQ) = \\ = A(t)X(t)\exp(-tQ) - X(t)\exp(-tQ)Q = \\ = A(t)F(t) - F(t)Q = \\ = [A(t) - B(t)F(t)^{-1}]F(t) - F(t)(Q - S). \end{aligned}$$

Для $Y(t) = F(t)\exp(t(Q - S))$ получим

$$\begin{aligned} &\dot{Y}(t) = \dot{F}(t)\exp(t(Q - S)) + F(t)(Q - S)\exp(t(A - S)) = \\ &= \{[A(t) - B(t)F^{-1}(t)]F(t) - F(t)(Q - S)\}\exp(t(Q - S)) + \\ &\qquad\qquad + F(t)(Q - S)\exp(t(Q - S)) = \\ &= [A(t) - B(t)F^{-1}(t)]F(t)\exp(t(Q - S)) = \\ &= [A(t) - B(t)F^{-1}(t)]Y(t). \end{aligned}$$

$\square$

Лемма 3.3.4. *Пусть Λ — произвольное собственное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не содержащее нуля. Тогда*

$$\max_{\lambda\in\Lambda}\dim\ker(Q - \lambda I) = \min \operatorname{rank} S, \tag{3.22}$$

где минимум берется по $S \in [\mathfrak{B}]$ таким, что спектр оператора $Q - S$ не пересекается с Λ.

Эта лемма составляет утверждение теоремы двойственности для банаховых пространств [4].

Теорема 3.3. *Пусть Ω — произвольное подмножество $\mathbb{C}$ такое, что его замыкание $\overline{\Omega}$ не содержит единицу. Тогда*

$$\max_{\rho\in\Omega}\dim\ker(X(\omega)-\rho I)=\min\operatorname{rank}B,$$

где минимум берется по всем ω-периодическим операторам $B(t)$, для которых спектр оператора монодромии возмущенной системы (3.17) не пересекается с множеством Ω.

Доказательство. В силу леммы 3.3.2 достаточно показать, что в (3.21) оценка снизу достигается. Выберем максимально широкое множество Λ так, что $\Omega=\{\rho:\rho=\exp(\omega\lambda),\lambda\in\Lambda\}$. В силу леммы 3.3.1 и (3.22)

$$\begin{gathered}\max_{\rho\in\Omega}\dim\ker(X(\omega)-\rho I)\geqslant\\ \geqslant\max_{\lambda\in\Lambda}\dim\ker(Q-\lambda I)=\min\operatorname{rank}S,\end{gathered}\tag{3.23}$$

где минимум берется по всем S таким, что спектр $Q-S$ не пересекается с Λ. Для возмущения минимального ранга, независящего от времени, $S=S_0$ по лемме 3.3.3 построим ω-периодический $B(t)$ такой, что для оператора монодромии возмущенной системы (3.17) будем иметь $Y(\omega)=\exp(\omega(Q-S_0))$. Так как Λ не пересекается со спектром $A-S_0$, то Ω не пересекается со спектром $Y(\omega)$. Так как $B(t)=F(t)S_0$, то ранг оператора $B(t)$ равен величине $\operatorname{rank}S_0$, для которой выполняется неравенство

$$\operatorname{rank}S_0\leqslant\max_{\rho\in\Omega}\dim\ker(X(\omega)-\rho I).$$

При условии леммы 3.3.2 это неравенство обращается в равенство

$$\operatorname{rank}B(t)=\max_{\rho\in\Omega}\dim\ker(X(\omega)-\rho I).$$

$\square$

Применив теорему 2.3(стр. 45), получим следующие утверждение.

Теорема 3.4. *Пусть* Ω *— замкнутое подмножество комплексной плоскости и* Q *— ограниченный оператор, определенный на всем пространстве* $\mathfrak{B}$, *либо* Ω *— компактное подмножество и* Q *— замкнутый оператор. Тогда всякий конечномерный оператор* $\tilde{K}(t) = F(t)\tilde{S}F^{-1}(t)$ *такой, что* $\operatorname{rank}\tilde{S} = \operatorname{rank} S$, $\|S - \tilde{S}\| < \min_{\lambda\in\Omega} \|R(\lambda; Q - S)\|^{-1}$, *также будет решением задачи (3.20).*

3.4. Вид возмущения

Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + u(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.24}$$

где при каждом t линейный оператор $A(t)$, действующий из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$, компактен, а $x(t)$ и $u(t)$ являются элементами $\mathfrak{H}$. Кроме того, пусть $A(t)$ — ω-периодический по времени t, сильно измеримый и интегрируемый по Бохнеру на отрезке $[0, \omega]$ оператор.

Однородную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{3.25}$$

которая может быть получена из (3.24) при $u(t) \equiv 0$, будем называть невозмущенной.

Из компактности оператора $A(t)$ при каждом t по теореме 1.2 [33, с. 285] для оператора Коши $X(t)$ невозмущенной системы (3.25) следует существование представления Флоке

$$X(t) = F(t)\exp(tQ) \tag{3.26}$$

в виде произведения периодической дифференцируемой оператор-функции $F(t)$, имеющей ограниченный обратный оператор $F^{-1}(t)$, на операторную экспоненту $\exp(tQ)$ с постоянным оператором Q, и для оператора монодромии $X(\omega)$ системы (3.25) следует существование $\ln X(\omega)$. Будем полагать, что Q — нормальный оператор.

Следуя [9, 10], возмущение $u(t)$ будем формировать в виде линейной обратной связи:

$$u(t) = -K(t)x(t) = -B(t)F^{-1}(t)x(t), \tag{3.27}$$

где $B(t)$ — некоторый ω-периодический по времени t оператор.

Такой вид возмущения $u(t)$ приводит (3.24) к однородной системе

$$\dot{x} = \left[A(t) - B(t)F^{-1}(t)\right] x \tag{3.28}$$

с ω-периодическим оператором $A(t) - B(t)F^{-1}(t)$.

3.4.1. Одноранговое возмущение Пусть в спектре $\sigma\big(X(\omega)\big)$ оператора монодромии $X(\omega)$ системы (3.25) задано $\Omega = \{\rho_{k_1}, \ldots, \rho_{k_l}\}$ — подмножество собственных значений, не содержащее единицы, такое, что любое собственное значение ρ из Ω имеет единичную геометрическую кратность. И пусть, кроме того, задано множество $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_l\}$ такое, что $\Theta \cap \Omega = \emptyset$.

Будем искать такое возмущение $u(t)$, чтобы спектр оператора монодромии $Y(\omega)$ возмущенной системы (3.28) не содержал элементов заданного множества Ω и содержал все элементы Θ.

Как следует из теоремы 3.3(стр. 82), этого возможно достичь при минимальном ранге $B(t)$, равном единице, однако эта теорема не описывает вида такого возмущений.

Определение 3.4.1. *Под* рангом оператор-функции $B(t)$ *будем понимать размерность её образа*

$$\operatorname{rank} B(\cdot) \doteq \dim\{B(t)z | z \in \mathfrak{H},\ t \in [0,\omega]\}.$$

Обозначим также

$$\ker(X(\omega)-\rho I)\doteq\{x\in\mathfrak{H} : X(\omega)x=\rho x\},$$

где I — тождественный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$.

Для дальнейших рассуждений сформулируем несколько простых лемм, доказательства которых могут быть найдены в параграфе 3.3 и работе [10].

Лемма 3.4.1. *Операторы* $X(\omega)-I$ *и* $\ln X(\omega)$ *компактны.*

Лемма 3.4.2. *Для любого комплексного* λ *из спектра* $\sigma(Q)$ *найдется* $\exp(\omega\lambda)$ *из спектра* $\sigma\big(X(\omega)\big)$ *такое, что* $\ker(Q-\lambda I)\subset\ker(X(\omega)-\exp(\omega\lambda)I)$.

Данная лемма раскрывает одно из свойств оператора Q в представлении Флоке (3.26).

Лемма 3.4.3. *Пусть*

$$B(t)=F(t)S, \tag{3.29}$$

где S *— произвольный, не зависящий от времени оператор из* $[\mathfrak{H}]$.
Тогда $Y(t)=F(t)\exp(t(Q-S))$ *является оператором Коши возмущенной системы (3.24) и* $Y(\omega)=\exp(\omega(Q-S))$ *— оператором монодромии этой системы.*

Эта лемма указывает конструкцию оператор-функции $B(t)$.

Так как в силу леммы 3.4.1 оператор $Q=\frac{1}{\omega}\ln X(\omega)$ компактен, то найдется полная система ортонормированных собственных функций φ_1, φ_2, ... таких, что

$$Q=\sum_{k\geqslant 1}\mu_k(\,\cdot\,,\varphi_k)\varphi_k,$$

где (x,φ_k) — скалярное произведение x и φ_k в $\mathfrak{H}$.

Пусть $\Lambda=\{\mu_{k_1},\dots,\mu_{k_l}\}$ — подмножество спектра $\sigma(Q)$. Будем возмущать оператор Q добавкой $S=a(x,b)$ $(a,b\in\mathfrak{H})$ таким образом, чтобы

$\sigma(Q-S) = \Upsilon \cup \sigma(Q) \setminus \Lambda$, где $\Upsilon = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_l\}$ — заданное множество такое, что $\Upsilon \cap \Lambda = \emptyset$. Возмущение S переводит собственные значения Q из множества Λ в Υ. Таким образом, возмущенный оператор $Q - S$ не имеет собственных значений из Λ, и элементы Υ являются его собственными значениями.

Следующая лемма указывает конструкцию возмущений S такого типа.

Лемма 3.4.4. *Возмущение* $S = a(x, b)$, *где* $a = \sum\limits_{j\geqslant 1} \alpha_j\varphi_j$, $b = \sum\limits_{j\geqslant 1} \overline{\beta}_j\varphi_j$, *переводит множество* Λ *в* Υ, *если и только если найдутся две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел* $\{\alpha_i\}$ *и* $\{\beta_i\}$ *такие, что:*

а) $\alpha_j\beta_j = 0$ *для индексов* j, *не принадлежащих* $\{k_1, \ldots, k_l\}$;

б) $\alpha_{k_i}\beta_{k_i} = \frac{P(\mu_{k_i})}{\prod_{j=1, j\neq i}^{l}(\mu_{k_i} - \mu_{k_j})}$, $i = \overline{1, n}$, *где* $P(\lambda)$ — *некоторый многочлен степени* l *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого образуют подмножество* $\Upsilon \cup (\sigma(Q) \setminus \Lambda)$, *причем множество* $\Upsilon \setminus \sigma(Q)$ *целиком лежит в множестве корней* $P(\lambda)$.

Эта лемма является переформулировкой теоремы 2.4(стр. 47) применительно к данной задаче.

Теорема 3.5. *Пусть* $\Omega = \{\rho_{k_1}, \ldots, \rho_{k_l}\}$ — *заданное подмножество спектра* $\sigma\big(X(\omega)\big)$, $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_l\}$ — *заданное множество такое, что* $\Omega \cap \Theta = \emptyset$. *Тогда возмущение вида* $u(t) = -F(t)SF^{-1}(t)x(t)$ *для уравнения (3.25) переводит* Ω *в* Θ, *где вид* S *определен леммой 3.4.4.*

Доказательство. Рассмотрим постоянный оператор Q из представления Флоке (3.26) и выберем максимально широкое множество Λ так, что $\Omega = \{\rho : \rho = \exp(\omega\lambda), \lambda \in \Lambda\}$. По лемме 3.4.2 множество Λ является подмножеством спектра $\sigma(Q)$. Оператор Q по предположению имеет полную систему ортонормированных собственных функций. Тогда лемма 3.4.4 определяет вид возмущения S, переводящего Λ в Υ.

Для $u(t) = F(t)SF^{-1}(t)x(t)$ по лемме 3.4.3 оператор $Y(\omega) = \exp(\omega(Q - S))$ является оператором монодромии возмущенной системы. Причем если

$\rho \in \sigma\big(Y(\omega)\big) \cap \Omega$, то найдется $\lambda \in \sigma(Q - S) \cap \Lambda$, что противоречит выбору возмущения S. В том случае, если $\rho \in \sigma\big(Y(\omega)\big) \setminus \Omega$, $\rho \neq 1$, то соответствующее λ будет принадлежать $\sigma(Q - S) \setminus \Lambda$, $\lambda \neq 0$ в силу теоремы об отображении спектра (см., напр.: [34, с. 201]). Подмножеству Υ спектра $(Q - S)$ соответствует подмножество Θ в $\sigma\big(Y(\omega)\big)$. □

Для нахождения возмущения $u(t)$ необходимо рассмотреть представление Флоке (3.26) и для оператора Q построить возмущение S, переводящее Λ в Υ. Работа [5] указывает конструктивный способ построения такого возмущения. Далее, используя $F(t)$, для S сформируем возмущение $u(t) = F(t)SF^{-1}(t)x(t)$.

3.4.2. Возмущение для случая кратного спектра Рассмотрим случай, когда собственные числа $\rho \in \Omega$ имеют геометрическую кратность, большую единицы.

Пусть множество Ω состоит из λ_i — собственные значения оператора Q геометрической кратности m_i, причем $1 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \ldots$. В данном случае для оператора Q имеет место спектральное разложение

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_i \langle \cdot, \varphi_{i,j} \rangle \varphi_{i,j}. \tag{3.30}$$

Лемма 3.4.5. *Для того чтобы можно было перевести заданное подмножество $\Omega = \{\lambda_{l_1}, \ldots, \lambda_{l_m}\}$ изолированных собственных значений оператора (3.30) в произвольно заданное подмножество $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$, $\Omega \cap \Theta = \emptyset$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с помощью возмущения*

$$K = \sum_{s=1}^{m} \langle \cdot, b_s \rangle a_s, \quad a_s \in \mathfrak{H}, \quad b_s \in \mathfrak{H},$$

где

$$a_s = \sum_{i=1+l_{s-1}}^{\infty} \sum_{j=1+m_{l_{s-1}}}^{\min(m_{l_s},m_i)} \nu_{ij}\varphi_{i,j},$$

$$b_s = \sum_{i=1+l_{s-1}}^{\infty} \sum_{j=1+m_{l_{s-1}}}^{\min(m_{l_s},m_i)} \overline{\beta}_{ij}\varphi_{i,j},$$

причем будем полагать $l_0 = 0$, $m_0 = 0$, *необходимо и достаточно существования двух квадратично суммируемых последовательностей* $\{\nu_{ij}\}, \{\beta_{ij}\}, i = \overline{1,\infty}, j = \overline{1,m_i}$ *таких, что выполнены следующие условия:*
а) $\nu_{ij}\beta_{ij} = 0$ *для всех индексов* i, *не принадлежащих множеству индексов удаляемых собственных чисел* $\Lambda = \{l_1, \ldots, l_m\}$;
б) $\nu_{l_ij}\beta_{l_ij} = \dfrac{P(\lambda_{l_i})}{\prod\limits_{k=1,k\neq i}^{m}(\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k})}$, *где* $P(\mu) = \prod\limits_{k=1}^{m}(\mu - \theta_k)$ *— многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из* Θ.

В этом случае справедлива аналогичная теореме 3.5

Теорема 3.6. *Пусть* $\Omega = \{\rho_{k_1}, \ldots, \rho_{k_l}\}$ *— заданное подмножество спектра* $\sigma(X(\omega))$. *Тогда возмущение вида* $u(t) = -F(t)SF^{-1}(t)x(t)$ *для уравнения (3.25) переводит* Ω *в заданное множество* Θ, *где вид* S *определен леммой 3.4.5.*

Доказательство этой теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 3.5.

Как и в случае простого спектра, необходимо для оператора Q построить возмущение S такое, что в спектре $\sigma(Q - S)$ отсутствуют элементы множества Λ и $\Upsilon \subset \sigma(Q - S)$. Для этого можно воспользоваться теоремой

2.5(стр. 57). При этом возмущение $u(t)$ будет иметь вид:

$$u(t) = F(t)SF^{-1}(t)x(t).$$

3.4.3. Оценка нормы возмущения Для изучения асимптотического поведения решения может оказаться полезной оценка нормы возмущения $K(t)$ при $t = \omega$.

Используя представление возмущения $K(\omega)$ в виде

$$K(\omega) = F(\omega)SF^{-1}(\omega),$$

возможно оценить норму этого возмущения. Для нормы оператора S справедлива оценка (см. (2.35, с. 61))

$$\|S\| \geqslant \sum_{i=1}^{l} \frac{|P(\lambda_{k_i})|}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}} |\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j}|}.$$

Отсюда следует, что

$$\|K(\omega)\| \geqslant \sum_{i=1}^{l} \frac{|P(\exp(\omega\lambda_{k_i}))|}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}} |\exp(\omega\lambda_{k_i}) - \exp(\omega\lambda_{k_j})|}.$$

Для нормы $K(t)$ справедлива также следующая оценка:

$$\max_{t\in[0,\omega]} \|K(t)\| = \max_{t\in[0,\omega]} \|F(t)SF^{-1}(t)\| \geqslant \|F(\omega)SF^{-1}(\omega)\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \frac{|P(\exp(\omega\lambda_{k_i}))|}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}} |\exp(\omega\lambda_{k_i}) - \exp(\omega\lambda_{k_j})|}.$$

3.5. Управление спектром оператора монодромии уравнения в частных производных

Результаты предыдущих параграфов 3.3, 3.4 применимы в случае, когда ω-периодический оператор $A(t)$ компактен для всех $t \in \mathbb{R}$.

Однако часто приходится иметь дело со случаем, когда оператор $A(t)$ некомпактен. Ярким примером является оператор Лапласа Δ, используемый в уравнениях математический физики, описывающих процессы в сплошных средах, такие как процессы переноса, волновые процессы.

Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторое сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим уравнение

$$P_t u(t) + a(t) D u(t) = 0, \tag{3.31}$$

где $u(t)$ — для каждого $t \in \mathbb{R}$ является элементом $\mathfrak{H}$,
$P_t = \alpha \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial \cdot}{\partial t}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$,
$a(t)$ — ω-периодическая непрерывная функция,
D — линейный оператор из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$, имеющий компактную резольвенту $R(\lambda) = (D - \lambda I)^{-1}$.

Из компактности $R(\lambda)$ по следствию 4.4.2 [37, с. 227] следует дискретность спектра $\sigma(D) = \{\lambda_n\}$. Пусть оператор D имеет в $\mathfrak{H}$ полную ортонормированную систему собственных функций $\{\psi_n\}$ таких, что они являются решениями спектральной задачи

$$D\psi_n = \lambda_n \psi_n.$$

Представим уравнение (3.31) в виде нормальной системы уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{u} = w, \\ \dot{w} = -\frac{\beta}{\alpha} w - \frac{1}{\alpha} a(t) D u. \end{cases} \tag{3.32}$$

Решение $\big(u(t), w(t)\big)$ системы (3.32) может быть получено из начальных условий $\big(u(0), \dot{u}(0)\big)$ с помощью эволюционного оператора $X(t)$:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = X(t) \cdot \begin{pmatrix} u(0) \\ \dot{u}(0) \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 1.2 [33, с. 285] существует представление Флоке эволюционного оператора $X(t)$:

$$X(t) = F(t) \exp(tQ), \tag{3.33}$$

в виде произведения периодической дифференцируемой оператор-функции $F(t)$, имеющей ограниченный обратный оператор $F^{-1}(t)$, на операторную экспоненту $\exp(tQ)$ с постоянным оператором Q.

Для системы (3.32) оператор $X(t)$ имеет следующий вид:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t)(\cdot, \psi_n)\psi_n,$$

$$X_n(t) = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_n}{\alpha} \int_0^t (a(s) - \mu)\, ds & 0 \end{pmatrix} \cdot \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ -\frac{\lambda_n}{\alpha} \mu t & -\frac{\beta}{\alpha} t \end{pmatrix},$$

где (ξ, φ) — скалярное произведение элементов ξ, φ из $\mathfrak{H}$.

Отсюда получаем вид операторов $F(t)$, $\exp(tQ)$ и $F^{-1}(t)$:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_n}{\alpha} \int_0^t (a(s) - \mu)\, ds & 0 \end{pmatrix} (\cdot, \psi_n)\psi_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\lambda_n}{\alpha} \int_0^t (a(s)-\mu)\, ds & 1 \end{pmatrix} (\cdot, \psi_n)\psi_n,$$

$$\exp(tQ) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ -\frac{\lambda_n}{\alpha}\mu t & -\frac{\beta}{\alpha} t \end{pmatrix} (\cdot, \psi_n)\psi_n,$$

$$F^{-1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\lambda_n}{\alpha} \int_0^t (a(s)-\mu)\, ds & 0 \end{pmatrix} (\cdot, \psi_n)\psi_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\lambda_n}{\alpha} \int_0^t (a(s)-\mu)\, ds & 1 \end{pmatrix} (\cdot, \psi_n)\psi_n,$$

где $\mu = \int_0^{\omega} a(s)\, ds$.

Из вида оператора $\exp(tQ)$ получаем представление для операторов Q и $X(\omega)$:

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\lambda_n}{\alpha}\mu & -\frac{\beta}{\alpha} \end{pmatrix} (\cdot, \psi_n)\psi_n,$$

$$X(\omega) = \exp(\omega Q).$$

Тогда возмущение, переводящее заданное подмножество $\Omega = \{\rho_{k_1}, \ldots, \rho_{k_l}\}$ спектра $\sigma\big(X(\omega)\big)$ в заданное множество Θ, имеет вид

$$u(t) = -F(t) S F^{-1}(t) x(t),$$

где вид S определен теоремой 2.5(стр. 57).

3.6. Управление спектром оператора монодромии уравнения теплопроводности

Рассмотрим простейшую однородную задачу распространения тепла в тонком стержне. Система уравнений, описывающая данный процесс, имеет следующий вид (см., напр.: [38, 39]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2(t)\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x}, \tag{3.34}$$

$$v(t,0) = v(t,l) = 0, \tag{3.35}$$

$$v(0,x) = \varphi(x), \tag{3.36}$$

где $\varphi(x)$ — начальное распределение температуры, $a(t)$ — коэффициент температуропроводности, $v(t,x)$ — классическое решение данной задачи.

Решение $v(t,x)$ задачи (3.34)–(3.36) представимо в виде

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-b_n^2 \int_0^t a^2(\tau)\,d\tau) \sin b_n x,$$

где A_n — коэффициенты разложения функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе синусов

$$v(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin b_n x,$$

а $b_n = \frac{\pi n}{l}$ — решения λ задачи о собственных значениях (см., напр.: [38, с. 198])

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Рассмотрим задачу (3.34)–(3.36) как однородную начальную задачу в гильбертовом пространстве H квадратично суммируемых на $[0,l]$ функций, со скалярным произведением $(\varphi, \psi) = \int\limits_0^l \varphi(s)\overline{\psi}(s)\, ds$:

$$\dot{v}(t) = a^2(t)Bv(t), \tag{3.37}$$

$$v(0) = \varphi,$$

где B — оператор Лапласа $\frac{d^2}{dx^2}$ в пространстве H, областью определения которого является класс дважды дифференцируемых функций $h(\cdot)$ таких, что $h(0) = h(l) = 0$, φ и $v(t)$ для всех $t \in [0, +\infty)$ принадлежат области опеделения B.

В данном случае решение $v(t)$ представимо в виде

$$v(t) = V(t, 0)v(0),$$

где $V(t, s)$ — оператор Коши уравнения (3.37).

Оператор $V(t, 0)$ представим в виде разложения в ряд

$$V(t) \doteq V(t, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-b_n^2 \int_0^t a^2(\tau)\, d\tau) \frac{(\cdot, \sin b_n x)}{(\sin b_n x, \sin b_n x)} \sin b_n x. \tag{3.38}$$

С учетом выражения для скалярного произведения $V(t, 0)$ представим в интегральной форме:

$$V(t, 0)\psi = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp(-b_n^2 \int_0^t a^2(\tau)\, d\tau) \int_0^l \psi(s) \sin b_n s\, ds \right) \sin b_n x,$$

где

$$(\sin b_k x, \sin b_k x) = \int_0^l \sin^2 b_k s\, ds = \frac{l}{2}$$

для всех целых k.

Таким образом, оператор монодромии $V(\omega) = V(\omega, 0)$ уравнения (3.37) имеет вид

$$V(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-b_n^2 \omega \mu) \frac{(\cdot, \sin b_n x)}{(\sin b_n x, \sin b_n x)} \sin b_n x,$$

где $\mu = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^{\omega} a^2(\tau)\, d\tau$ — среднее значение периодической функции $a^2(t)$ на отрезке $[0, \omega]$.

Для $V(\omega)$ справедливо также соответствующее интегральное представление:

$$V(\omega)\psi = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp(-b_n^2 \omega \mu) \int_0^l \psi(s) \sin b_n s\, ds \right) \sin b_n x.$$

Отсюда очевидно, что спектр оператора монодромии $V(\omega)$ дискретен, состоит из изолированных собственных значений и имеет вид

$$\sigma(V(\omega)) = \left\{ \exp(-b_n^2 \omega \mu) \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \exp(-b_n^2 \int_0^{\omega} a^2(\tau)\, d\tau) \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Справедливо представление Флоке оператора Коши уравнения (3.37) (см., напр.: [33]):

$$V(t) = F(t) \exp(tQ),$$

где Q — постоянный по t оператор, $F(t)$ — периодическая дифференцируемая оператор-функция, имеющая ограниченный обратный оператор $F^{-1}(t)$.

Из вида (3.38) оператора $V(t)$ может быть получен вид оператора $F(t)$ и $\exp(tQ)$. Для этого необходимо выделить периодическую оператор-функцию $F(t)$ такую, что $F(0) = F(\omega) = I$, где I — тождественный оператор в пространстве H. Для этого достаточно множитель

$$\exp(-b_n^2 \int_0^t a^2(\tau)\, d\tau)$$

представить как произведение

$$\exp(-b_n^2\int_0^t a^2(\tau)\,d\tau) = \exp(-b_n^2\int_0^t (a^2(\tau)-\mu)\,d\tau)\cdot\exp(-b_n^2 t\mu).$$

В этом произведении первый сомножитель представляет собой ω-периодическую по t функцию и соответствует $F(t)$ в представлении Флоке, а второй соответствует оператору $\exp(tQ)$. Отсюда получаем, что

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\exp(-b_n^2\int_0^t (a^2(\tau)-\mu)\,d\tau)\frac{(\cdot,\sin b_n x)}{(\sin b_n x,\sin b_n x)}\sin b_n x,$$

$$F(t)\psi = \\ = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\exp(-b_n^2\int_0^t (a^2(\tau)-\mu)\,d\tau)\int_0^l \psi(s)\sin b_n s\,ds\right)\sin b_n x;$$

$$\exp(tQ) = \sum_{n=1}^{\infty}\exp(-b_n^2\mu t)\frac{(\cdot,\sin b_n x)}{(\sin b_n x,\sin b_n x)}\sin b_n x,$$

$$\exp(tQ)\psi = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\exp(-b_n^2\mu t)\int_0^l \psi(s)\sin b_n s\,ds\right)\sin b_n x.$$

Обратный к $F(t)$ оператор может быть представлен следующим образом:

$$F^{-1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\exp(b_n^2\int_0^t (a^2(\tau)-\mu)\,d\tau)\frac{(\cdot,\sin b_n x)}{(\sin b_n x,\sin b_n x)}\sin b_n x,$$

$$F^{-1}(t)\psi = \\ = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\exp(b_n^2\int_0^t (a^2(\tau)-\mu)\,d\tau)\int_0^l \psi(s)\sin b_n s\,ds\right)\sin b_n x.$$

Тогда возмущение, переводящее $\Omega = \{\rho_{k_1},\ldots,\rho_{k_l}\}$ — заданное подмножество спектра $\sigma\big(V(\omega)\big)$ в единицу имеет вид

$$u(t) = -F(t)SF^{-1}(t)x(t).$$

Пример Пусть для задачи (3.34)–(3.35)

$$l = \pi, \quad a(t) = 2 + \sin(2\pi t).$$

В этом случае период $\omega = 1$, числа $b_n = n$ и оператор Коши уравнения (3.37) имеет вид

$$V(t) = V(t,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \int_0^t a^2(\tau)\,d\tau) \frac{(\cdot, \sin nx)}{(\sin nx, \sin_n x)} \sin nx,$$

$$V(t,0)\psi = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp(-n^2 \int_0^t a^2(\tau)\,d\tau) \int_0^l \psi(s) \sin ns\,ds \right) \sin nx,$$

причем

$$\int_0^t a^2(\tau)\,d\tau = \frac{1}{8\pi}\big(36\pi t + 32\sin^2(\pi t) - \sin(4\pi t)\big).$$

Отсюда операторы $F(t)$ и $\exp(tQ)$ имеют вид

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \int_0^t \left(a^2(\tau) - \frac{9}{2}\right)\,d\tau) \frac{(\cdot, \sin nx)}{(\sin nx, \sin nx)} \sin nx,$$

$$F(t)\psi =$$
$$= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp\left(-n^2 \int_0^t \left(a^2(\tau) - \frac{9}{2}\right)\,d\tau\right) \int_0^l \psi(s) \sin ns\,ds \right) \sin nx;$$

$$\exp(tQ) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\frac{9}{2}n^2 t) \frac{(\cdot, \sin nx)}{(\sin nx, \sin nx)} \sin nx,$$

$$\exp(tQ)\psi = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp(-\frac{9}{2}n^2 t) \int_0^l \psi(s) \sin ns\,ds \right) \sin nx.$$

Тогда спектр оператора монодромии имеет вид

$$\sigma(V(\pi)) = \big\{\exp(-n^2\mu)\big\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\exp(-\frac{9}{2}n^2)\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Возьмем в качестве множества «удаляемых» собственных значений оператора $V(\omega)$ следующее множество:

$$\Omega = \left\{\exp(-\frac{9}{2}), \exp(-18)\right\}.$$

Множество Λ из теоремы 3.5(стр. 87) в этом случае принимает вид

$$\Lambda = \left\{-\frac{9}{2}, -18\right\}.$$

Оператор S будем искать в виде

$$S = (\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x) \cdot \big(\cdot, (\beta_1 \sin x + \beta_2 \sin 2x)\big),$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — квадратично суммируемые последовательности такие, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad \beta_1 = \frac{3}{2}, \quad \beta_2 = -24,$$

все остальные $\alpha_n = \beta_n = 0$ для всех $n \neq 1, 2$.

В результате получаем

$$K(t) = -\frac{3}{2}\left(-(\cdot, \sin x) + 16 \exp(3 \int_0^t \left(a^2(\tau) - \frac{9}{2}\right)\, d\tau)(\cdot, \sin 2x)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sin x + \exp(-3 \int_0^t \left(a^2(\tau) - \frac{9}{2}\right)\, d\tau) \sin 2x\right).$$

Возмущение $u(t)$ для задачи (3.34)–(3.35) имеет вид

$$u(t) = -K(t)x(t) =$$

$$-\frac{3}{2}\left(-\int_0^\pi x(s) \sin s\, ds + \right.$$
$$\left. +16 \exp\left(3 \int_0^t \left(a^2(\tau) - \frac{9}{2}\right)\, d\tau\right) \int_0^\pi x(s) \sin 2s\, ds\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\sin x + \exp\left(-3 \int_0^t \left(a^2(\tau) - \frac{9}{2}\right)\, d\tau\right) \sin 2x\right).$$

Таким образом, возмущение такого вида преобразует спектр оператора $V(\omega)$ так, что в спектре оператора монодромии возмущенного уравнения теплопроводности отсутствуют элементы из множества Ω.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Математическая теория оптимального управления // Итоги науки и техники. Мат. анализ. М. 1979. Т. 16. С. 55–97.
2. Исламов Г. Г. Экстремальные возмущения линейных операторов: Дис. … докт. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 1993.
3. Исламов Г. Г. Об управлении спектром динамической системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1299–1302.
4. Исламов Г. Г. Экстремальные возмущения замкнутых операторов // Изв. вузов. Математика. 1989. № 1. С. 35–41.
5. Исламов Г. Г. Свойства одноранговых возмущений // Изв. вузов. Математика. 1989. № 4. С. 29–35.
6. Клочков М. А. Управление дискретным спектром дифференциальных операторов возмущениями минимального ранга: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Ижевск, 2004.
7. Сивков Д. А. Управление спектром периодических систем возмущениями минимального ранга // Известия Ин-та матем. и информ./ УдГУ. Ижевск. 2005. Вып. 3(33). С. 3–94.
8. Попова С. Н. Управление асимптотическими инвариантами линейных систем: Дис. … докт. физ.-мат. наук. Ижевск, 2004.
9. Исламов Г. Г. Об одном свойстве мультипликаторов линейных периодических систем // Изв. вузов. Математика. 1999. № 2. С. 57–59.
10. Сивков Д. А. Управление спектром оператора монодромии периодической системы с компактной оператор-функцией возмущениями минимального ранга // Вестн. Удм. ун-та. 2002. Сер. Математика. № 1. С. 92–95.

11. Сивков Д. А. Об управлении спектром оператора монодромии одноранговым возмущением // Вестн. Удм. ун-та. 2005. Сер. Математика. № 1. С. 167–176.

12. Abraham P. B., Moses H. F. Changes in potentials due to changes in the point spectrum: Anharmonic oscillators with exact solutions // Phys. Rev. 1980. Vol. A 22(4). P. 1333–1340.

13. Захарьев Б. Н., Сузько А. А. Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. М.:Энергоатомиздат, 1985. 224 с.

14. Захарьев Б. Н., Чабанов В. М. Качественная теория управления спектрами, рассеянием, распадами // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1994. Т. 25, № 6. С. 1561–1597.

15. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 1. С. 1687–1696.

16. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. II // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 1. С. 1949–1957.

17. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. III // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 2. С. 228–238.

18. Попова С. Н., Тонков Е. Л. К вопросу о равномерной согласованности линейных систем // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 4. С. 723–724.

19. Тонков Е. Л. Задачи управления показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 10. С. 1682–1686.

20. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 2. С. 226–235.

21. Ланкастер П. Теория матриц. М.:Наука, 1978. 280 с.

22. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.:Наука, 1968. 475 с.

23. Тонков Е. Л. Динамическая система сдвигов и вопросы равномерной управляемости линейной системы // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 290–294.

24. Былов Б. Ф., Изобов Н. А. Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1794–1803.

25. Попова С. Н. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 1. С. 41–46.

26. Попова С. Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 12. С. 1627–1636.

27. Изобов Н. А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Мат. анализ. М. 1974. Т. 12. С. 71–146.

28. Brunovsky P. Controllability and linear closed-loop controls in linear periodic systems // Journal of Differential Equations. 1969. Vol. 6. P. 296–313.

29. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.:Физматгиз, 1963. 704 с.

30. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.:Наука, 1971. 431 с.

31. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.:Мир, 1972.

32. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.:Наука, 1967. 472 с.

33. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.:Наука, 1970. 534 с.

34. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: Т.4. Анализ операторов. М.:Мир, 1978. 428 с.

35. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.:Наука, 1967. 576 с.

36. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.:Наука, 1980. 496 с.

37. Балакришнан А. В. Прикладной функциональный анализ. М.:Наука, 1980. 384 с.

38. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.:Наука, 1966. 724 с.

39. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.:Наука, 1976. 528 с.

Приложение А

Возмущение потенциала в уравнении Шредингера

```
«Graphics‘Graphics‘
«Graphics‘Legend‘
```

Определение потенциала U[x_]:=Which[$x < 0, 0, x \geq 0, x^2$];

ψ0 = 0;

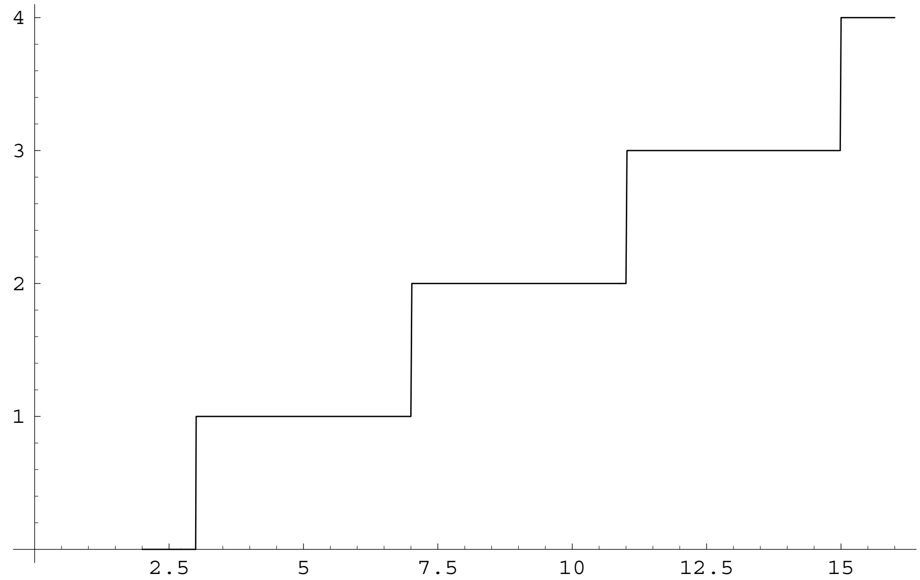
ψ1 = 1;

$\varepsilon = 10^{-3}$;

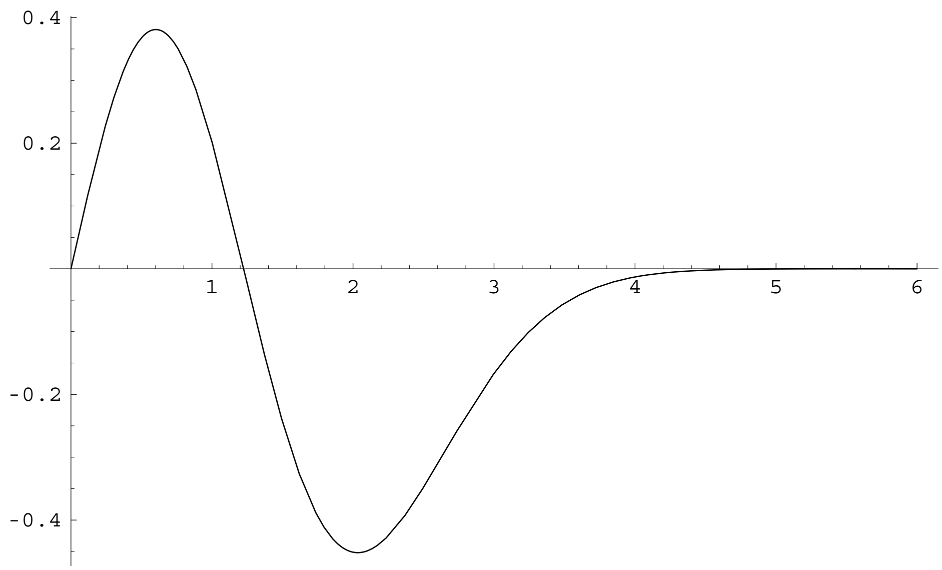
x1 = 6;

grid = Table[$N[i\varepsilon]$, {i, 1, Round[x1/ε]}];

Нахождение решений и энергетических уровней ψ[x_, e_]:=
CompoundExpression[
solution = NDSolve[{ψt1′[τ] == ψt2[τ], ψt2′[τ]
== −($e - U[\tau]$$\psi$t1[$\tau$], ψt1[0] == ψ0, ψt2[0] == ψ1}, {ψt1, ψt2},
{τ, 0, x1}];
First[ψt1[x]/.solution]]
dψ[x_, e_]:=CompoundExpression[If[ValueQ[solution],
Null, ψ[0, e]], First[ψt2[x]/.solution]];
mapped[e_]:=Chop[ψ[grid, e], 10^{-10}];
ZerosNum[e_]:=CompoundExpression[mapped1 = mapped[e];
Length[Select[Table[If[mapped1[[i + 1]] ∗ mapped1[[i + 2]] ≤ 0, 1, 0],
{i, 0, Length[grid] − 3}], # == 1&]]];
p1 = Plot[ZerosNum[e], {e, 2, 16}];



$\texttt{Plot}[\psi[x, 7.000], \{x, 0, 6\}];$



$\texttt{i1} = N[\int_0^6 (\psi[x, 7.000])^2 dx];$

$\psi\texttt{norm}[\texttt{x\_}, \texttt{e\_}] \texttt{:=} \psi[x, e]/\sqrt{\texttt{i1}};$

Поиск возмущения потенциала $\texttt{sewpoint} = \varepsilon;$

$\texttt{x11} = 4.000;$

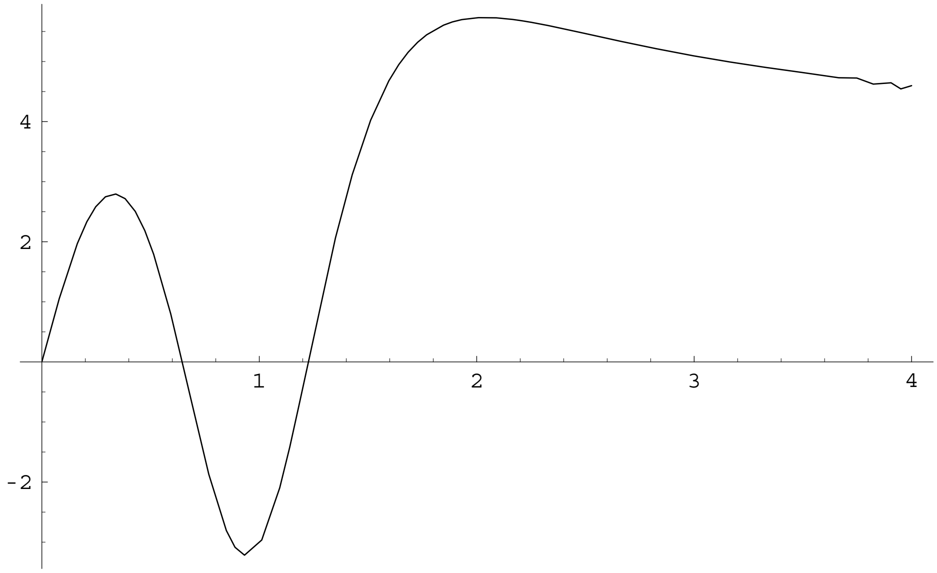
$\texttt{grid} = \texttt{Table}[N[i\varepsilon], \{i, 1, \texttt{Round}[\texttt{x11}/\varepsilon]\}];$

$\nu[\texttt{x\_}] \texttt{:=} \psi\texttt{norm}[x, 7.000];$

$V[\texttt{x\_}, \texttt{e\_}] \texttt{:=} 2N[\frac{\nu[x]^4}{(1 - \int_0^x \nu[\rho]^2 d\rho)^2} + \frac{2\nu[x]\nu'[x]}{1 - \int_0^x \nu[\rho]^2 d\rho}];$

$\texttt{Vsew}[\texttt{x\_}, \texttt{e\_}] \texttt{:=} 2N[\frac{\nu[x]^4}{(1 - \int_0^x \nu[\rho]^2 d\rho)^2} + \frac{2\nu[x]\nu'[x]}{1 - \int_0^x \nu[\rho]^2 d\rho}];$

$\texttt{Plot}[V[x, 7.000], \{x, \varepsilon, 4\}, \texttt{PlotDivision} \to 2.];$



Udist[h_]:=Which[$h < 0, 0, h \geq 0, h^2 + V[h, 7.000]$];

Udistappsew = FunctionInterpolation[Udist[h],

{h, sewpoint − ε, x11}, InterpolationPrecision → 0.00001];

Udistapp[x_]:=Udistappsew[x];

Udistappsew[0.1]

Udist[0.1]

Udistapp[0.1]

1.84624

1.30541

1.84624

U1 = ShowLegend[Plot[{$U[x]$, Udist[x], 3, 7, 11, 15}, {x, ε, x11},

PlotStyle → {AbsoluteDashing[{10, 5}], RGBColor[0, 0, 0],

RGBColor[0, 0, 0], AbsoluteDashing[{10, 5}],

RGBColor[0, 0, 0], RGBColor[0, 0, 0]}, PlotDivision → 3.,

DisplayFunction → Identity],

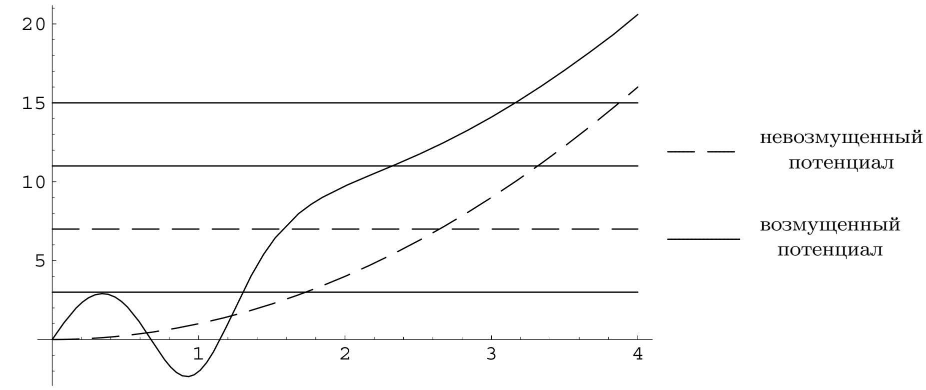
{{{Plot[0, {y, 0, x11}, PlotStyle->AbsoluteDashing[{10, 5}],

Axes → None, DisplayFunction->Identity], Leg1},

{Plot[0, {y, 0, x11}, PlotStyle → RGBColor[0, 0, 0],

Axes → None, DisplayFunction->Identity], Leg2}},

LegendPosition → {1, −0.3}, LegendShadow → None}];



Поиск возмущенных решений и энергетических уровней

$\psi\texttt{dist}[\texttt{x\_},\texttt{e\_}]\texttt{:=}$

$\texttt{CompoundExpression}[$

$\texttt{solution} = \texttt{NDSolve}[\{\psi\texttt{t1}'[\tau] == \psi\texttt{t2}[\tau], \psi\texttt{t2}'[\tau] ==$

$-(e - \texttt{Udistapp}[\tau])\psi\texttt{t1}[\tau], \psi\texttt{t1}[\varepsilon] == 0, \psi\texttt{t2}[\varepsilon] == 1\},$

$\{\psi\texttt{t1}, \psi\texttt{t2}\}, \{\tau, \varepsilon, \texttt{x11}\}]; \texttt{First}[\psi\texttt{t1}[x]\texttt{/.solution}]]$

$\texttt{mappeddist}[\texttt{e\_}]\texttt{:=Chop}[\psi\texttt{dist}[\texttt{grid}, e], 10^{-10}];$

$\texttt{ZerosNumdist}[\texttt{e\_}]\texttt{:=CompoundExpression}[\texttt{mapped1} = \texttt{mappeddist}[e];$

$\texttt{Length}[\texttt{Select}[\texttt{Table}[\texttt{If}[\texttt{mapped1}[[i+1]] * \texttt{mapped1}[[i+2]] \le 0, 1, 0],$

$\{i, 0, \texttt{Length}[\texttt{grid}] - 3\}], \# == 1\&]]];$

$\texttt{Plot}[\texttt{ZerosNumdist}[e], \{e, 2, 20\}];$