

УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи
УДК 531.352, 531.355,
531.395, 532.5

ТРОНИН КОНСТАНТИН ГЕОРГИЕВИЧ

**МЕТОДЫ КОМПЬЮТЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ НЕКОТОРЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

01.04.02 — теоретическая физика
Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
А.В. Борисов

Ижевск—2005

Содержание

1. Вероятностные эффекты в динамике твердого тела	9
1.1. Задача о вращении твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов	9
1.2. Падение тяжелого твердого тела в идеальной жидкости. Вероятностные эффекты и притягивающие множества	15
1.3. Динамика саней Чаплыгина на наклонной плоскости	35
2. Уравнения Лиувилля. Адиабатический хаос	41
2.1. Гамильтоновы системы с полутора степенями свободы. Скачки адиабатического инварианта и адиабатический хаос	41
2.2. Динамика твердого тела с медленно меняющимися параметрами	44
2.3. Расщепление сепаратрис и условия адиабатического хаоса	48
3. Численные методы в динамике вихрей и задачах рассеяния	55
3.1. Введение.	55
3.2. Уравнения движения и первые интегралы для вихрей на сфере.	55
3.3. Хореографии в движении трех и четырех вихрей на сфере	56
3.4. Хореографии n одинаковых вихрей	60
3.5. Возмущенное движение частиц жидкости в системе двух вихрей с противоположными интенсивностями	66
3.6. Задача о трех притягивающих центрах	69
4. Заключение	75

Введение

Во времена формирования и разработки общих принципов динамики твердого тела, в так называемый классический период, первостепенным по важности считалось нахождение случаев, фиксируемых ограничениями на параметры и начальные условия, явной разрешимости задачи в квадратурах; в современной терминологии — интегрируемых случаев.

Случаи интегрируемости обычно связывают с именами их первооткрывателей. Среди них — известные западные математики и механики — Г. Кирхгоф, А. Клебш, П. Аппель, Ф. Брун, В. Вольтерра, крупные достижения принадлежат русским ученым — А. М. Ляпунову, В. А. Стеклову, Н. Е. Жуковскому, С. А. Чаплыгину. В этом смысле динамику твердого тела можно рассматривать, как область наиболее богатую содержательными задачами, составляющими «золотой фонд» современной динамики.

В классический период кроме нахождения первых интегралов особенно ценилось также получение явного решения в различных классах функций, в основном эллиптических. Особых успехов здесь добились С. В. Ковалевская, В. Вольтерра, Г. Альфан, и их техника до сих пор во многом является непревзойденной.

В первой половине XX века интерес к поиску интегрируемых случаев несколько упал. Во многом это связано с пониманием широкими слоями математиков результатов А. Пуанкаре о неинтегрируемости типичной гамильтоновой динамической системы [1]. В сознании математиков это обесценило многие результаты классиков и привело к разработке новых методов теории возмущений.

Основные уравнения динамики твердого тела в общем случае также являются неинтегрируемыми, а значит обладающими сложным непредсказуемым поведением, изучение которого составляет предмет новой области исследований, называемой детерминированным хаосом. Систематически эффекты неинтегрируемости в динамике твердого тела обсуждаются в монографии В. В. Козлова [2]. Важное значение этой монографии состоит также в том, что в отличие от стремления классиков к получению явного решения, позволяющего мало что сказать о действительном движении системы, в ней поставлен вопрос о качественном анализе интегрируемых динамических систем.

Новый этап в развитии динамики твердого тела наступил с появлением компьютерной техники. В некотором смысле, даже в анализе интегрируемой ситуации, для которой, в принципе, возможна полная классификация всех решений, компьютер открыл целую эпоху. Если ранее в исследовании интегрируемых систем преобладали аналитические методы, позволяющие получить явные квадратуры и геометрические интерпретации, то сочетание идей топологического анализа (бифуркационных диаграмм), теории устойчивости, метода фазовых сечений и непосредственной компьютерной визуализации «особо замечательных» решений способно вполне представить специфику интегрируемой ситуации и выделить наиболее характерные особенности движения. С помощью такого исследования стало возможным получить ряд новых результатов даже для такой, казалось бы, полностью изученной области (например, для волчка Ковалевской, Горячева—Чаплыгина, решения Бобылева—Стеклова). Дело в том, что эти результаты очень сложно усмотреть в громоздких аналитических выражениях. Доказательство этих фактов, видимо, может быть также получено аналитически, но уже после их компьютерного обнаружения. Примером того насколько могут быть громоздкими и трудоемкими аналитические выражения могут служить формулы для долготы и широты паралакса Луны, которые получил Ш.Делоне. Каждая формула размещалась на 200 листах печатного издания, и на их вывод Ш.Делоне потратил двадцать лет своей жизни [3]. Следует также особо отметить возможность анализа движения в абсолютном пространстве, при численном решении уравнений движения, который ранее практически вообще не производился.

Некоторые любопытные движения, имеющиеся у интегрируемых волчков, возможно, способны вызвать конкретные идеи по их практическому применению. Можно напомнить, что, например, открытый более столетия назад волчок Ковалевской до сих пор не нашел своего применения, именно потому, что о его движении, несмотря на полное решение в эллиптических функциях, было, практически, ничего не известно.

Компьютерные исследования заставляют во многом «произвести ревизию» и понять истинный смысл аналитических исследований. Если некоторые аналитические результаты — типа разделения переменных оказываются очень полезными для изучения бифуркаций и классических решений, то их дальнейшее «развитие» до получения явных квадратур (через θ -функции)

является практически бесполезным.

Относительно ценности результатов классиков в динамике твердого тела ряд сомнений был высказан еще в 70-х годах прошлого столетия [1]. Эпоха веры в безграничные возможности вычислительной техники породила убеждение, что все эти результаты являются бесполезными, и достаточно мощный компьютер способен спрогнозировать движение на любом интервале времени с достаточной точностью. Однако факт экспоненциально быстрого разбегания траекторий (связанный с неустойчивостью в целых областях фазового пространства) в типичных динамических системах, являющихся интегрируемыми, сделал такой компьютерный счет на достаточно больших интервалах времени не имеющим физического смысла, так как начальные условия для конкретных (прикладных) систем всегда известны с некоторой погрешностью.

Кажется, что вполне надеяться на численные методы можно только в интегрируемой ситуации, в которой такого разбегания не происходит. Тем не менее, оказывается, что консервативные системы даже в стохастической ситуации сохраняют многие элементы интегрируемой динамики. При небольшом возмущении интегрируемой задачи продолжают существовать невырожденные периодические орбиты, не разрушается большинство условно-периодических движений.

При дальнейшем увеличении возмущения, как с периодическими орбитами, так и с инвариантными торами, происходят различного рода бифуркации, имеющие некоторые общие закономерности. Они определяют изменение всей структуры фазового потока, сочетающего в себе зоны с регулярным и хаотическим поведением, и задают сценарии перехода к хаосу. В динамике твердого тела эти исследования, невозможные без высокоточного компьютерного моделирования, стали проводиться лишь в конце XX века.

Оглядываясь назад, всю историю развития динамики твердого тела можно разделить на три этапа:

1. обнаружение и исследование частных интегрируемых случаев
2. качественный анализ уравнений движения
3. сочетание качественный анализ + компьютерное моделирование

По результатам работы на защиту вынесены следующие положения

1. Найдены значения параметров, при которых начинает проявляться вероятностное поведение динамических систем.
2. Построены диаграммы асимптотического хаоса начальных условий динамических систем.
3. Проведено численно-аналитическое исследование уравнений Стеклова-Чаплыгина.
4. Получен вид хореографий трех и четырех вихрей на сфере.
5. Показана неинтегрируемость в общем случае задачи трех неподвижных тяготеющих центров.

Объекты и общая методика исследований. В настоящей работе с помощью численных методов проводится анализ решений некоторых задач, поставленных еще классиками динамики твердого тела. Выбранные задачи представляют собой динамические системы изменяющиеся во времени. Рассмотрены некоторые динамические системы с диссипацией и с медленно периодически изменяющимися параметрами. Для систем первого типа характерно наличие решений, к которым со временем эти системы приходят. И хотя различными аналитическими методами можно получить асимптотические решения этих систем, оказывается, что эволюция подобных систем содержит элементы случайного поведения.

Для динамики систем второго типа характерно случайное изменение адиабатического инварианта (АИ), когда динамическая система эволюционирует таким образом, что вдали от ее сепаратрис адиабатический инвариант остается постоянным. При переходе через сепаратрису эволюция системы может развиваться по двум сценариям: а) малое изменение АИ порядка малой величины возмущения системы $\sim \varepsilon$, б) с резким изменением АИ на случайную величину ~ 1 . В результате многократного перехода динамической системы через сепаратрису значение АИ испытывает диффузию и его эволюция принимает случайный характер.

Кроме задач динамики твердого тела в работе рассмотрена динамика точечных вихрей на сфере, затронут вопрос о хаотизации рассеяния точечны-

ми вихрями частиц жидкости и рассмотрено движение точечного тела в поле трех неподвижных центров.

Эволюция всех систем исследовалась стандартными численными методами, обеспечивающими необходимую точность вычислений.

Научная новизна. В диссертационной работе

- численно построены картины асимптотического хаоса начальных условий некоторых задач динамики твердого тела;
- установлены численные значения параметров, при которых наблюдается вероятностное поведение динамических систем;
- получены условия образования абсолютных хореографий вихрей на сфере;
- установлена неинтегрируемость динамической системы, описывающей движение точечного тела на плоскости в поле трех тяготеющих центров при отрицательной энергии.

Практическая ценность Все полученные результаты могут быть использованы в аналитических исследованиях соответствующих динамических систем.

Результаты первой и второй глав могут быть использованы в некоторых областях прикладной механики изучающих движение твердых тел в жидкости, динамику твердого тела в условиях медленно меняющихся параметров.

Результаты третьей главы имеют ценность для прикладной метеорологии и океанологии. Также результаты третьей главы могут быть использованы в задачах стохастического рассеяния на системе вихрей. Установленный факт неинтегрируемости и приведенный примеры возможных движений могут служить начальными данными в аналитическом исследовании небесномеханических систем.

В первой главе рассматриваются вероятностные эффекты в динамике твердого тела. Одна часть главы посвящается численному анализу задачи о вращении твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов. Исследуются возможные типы движения твердого тела в зависимости от величины возмущающих моментов, исходя из которых подбираются условия для исследования асимптотического поведения при больших временах. Показано, что в изученной системе возможно

два асимптотических движения, к которым приходит система через некоторое время по тому или иному пути, в зависимости от начальных условий и величины возмущающего момента. Также показано, что определенность к какой именно асимптотике придет тело исчезает при достаточно малой величине возмущающих моментов.

Во второй и третьей частях главы наряду с качественными аналитическими оценками асимптотического движения численно исследуется динамика падения тяжелого твердого тела в идеальной жидкости и динамика саней Чаплыгина на наклонной плоскости. Исследуется новое явление для этого типа задач – асимптотический хаос, когда при вполне конкретных начальных условиях нет определенности в том, к какому асимптотическому движению в итоге придет система. На примере плоскопараллельного движения и движения тела, обладающего тремя плоскостями симметрии, строятся асимптотические диаграммы, отображающие исход эволюции движения твердого тела.

Во **второй главе** На примере уравнений Лиувилля, описывающих движение твердого тела с медленно периодически меняющимися параметрами, показана бо́льшая эффективность использования численных методов по сравнению с аналитическими применительно к исследованию динамики этого типа систем. Наглядно показано, что практически идентичные по начальным условиям траектории могут эволюционировать по совершенно различным путям уже через период малого возмущения.

Первая часть **третьей главы** посвящена численному исследованию некоторых вопросов вихревой динамики. В частности, исследуются решения, получившие название хореографии, в задачах движения вихрей на сфере, и рассеяние частиц жидкости на системе двух вихрей. Получен вид и уравнения для хореографий на сфере, а также обсуждаются возможные случаи возникновения особых видов хореографий, получивших название *бэкиболы*, *танцующие вихри* и *твисторы*. Для задачи рассеяния построена диаграмма рассеяния, отображающая отклонение частицы жидкости от первоначального движения в момент прохождения через рассеивающую области. Во второй части третьей главы численно исследуется задача движения точечного тела в системе трех тяготеющих центров при отрицательной энергии. Показано, что задача в такой постановке в общем случае не интегрируема.

1. Вероятностные эффекты в динамике твердого тела

1.1. Задача о вращении твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов

Введение. В работе [4] рассмотрена (качественно) эволюция вращения несимметричного твердого тела под действием двух малых возмущающих моментов: постоянного в связанных с телом осях и диссипативного. В подвижной системе координат с началом в центре масс тела, оси которой направлены по главным центральным осям инерции уравнения для этой задачи имеют вид

$$\begin{aligned}A\dot{p} + (C - B)qr &= \varepsilon(M_1 - N_1p) \\B\dot{q} + (A - C)pr &= \varepsilon(M_2 - N_2q) \\C\dot{r} + (B - A)qp &= \varepsilon(M_3 - N_3r),\end{aligned}\tag{1}$$

в которых p, q, r – проекции вектора угловой скорости на координатные оси, A, B, C – главные моменты инерции тела. В правой части (1) стоят компоненты возмущающего момента: ε – малый положительный параметр, $M_i \neq 0$, $N_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ – постоянные. В [4] рассмотрен случай $A > B > C, M_1 > 0, M_3 > 0$.

Невозмущенная система (1) представляет собой задачу Эйлера-Пуансо и обладает двумя интегралами

$$E = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad G^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2.\tag{2}$$

Для действительных значений p, q, r область возможных движений $V = \{(E, G^2) : 2CE \leq G^2 \leq 2AE, E > 0\}$ на плоскости E, G^2 ограничена углом, сторонам которого соответствуют вращения вокруг осей наибольшего (луч S_1) и наименьшего (луч S_3) моментов инерции (рис. 1). Лучу $S_2 = \{G^2 = 2BE, E > 0\}$ соответствует вращение вокруг оси среднего момента инерции. Уравнение $G^2 = 2BE$ определяет в пространстве угловых скоростей две пересекающиеся плоскости, которые разбивают все пространство на четыре области. Две из них через отображение (2) проецируются на часть V , лежащую выше S_2 – V_1 , другие две – на часть, лежащую ниже S_2 (V_3). Области V_1 и V_3 соответствуют вращению вокруг оси наибольшего и наименьшего момента инерции. Одно значение G^2 определяет два возможных направления вращения твердого тела, отличающихся друг от друга только

знаком. Поэтому каждая из областей, на самом деле, состоит из двух частей $V_{\pm 1}$ и $V_{\pm 3}$.

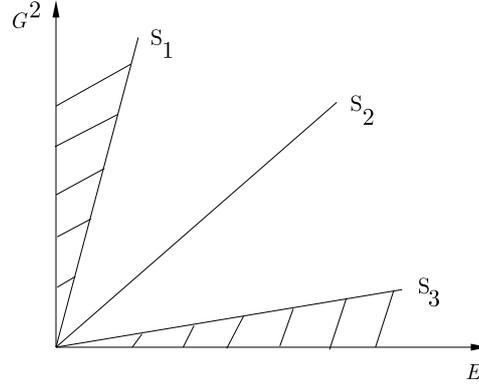


Рис. 1.

В процессе эволюции системы (1) точки фазовой траектории переходят из одной области в другую. В работах, например [4, 5, 6], показано, что такие переходы при $\varepsilon \rightarrow 0$ необходимо рассматривать как вероятностные.

В настоящей работе проводится численное исследование эволюции вращения твердого тела под одновременным действием постоянного и диссипативного возмущающих моментов.

Дифференциальные уравнения. Перепишем уравнения (1) через компоненты вектора кинетического момента

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}\mathbf{M} - \varepsilon (\mathbf{B}\mathbf{M} + \mathbf{K}), \quad (3)$$

где $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3)$ – постоянные матрицы, $a_i = 1/I_i$, I_i – главные моменты инерции, $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$ – произвольный постоянный вектор, ε – малый параметр (также будем считать, что $a_1 < a_2 < a_3$). Интегралы (2) перепишутся

$$E = \frac{1}{2} (\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}), \quad G^2 = \mathbf{M}^2. \quad (4)$$

Систему (3) удобно исследовать в переменных Андуайе-Депри L, G, l, g , связь которых с кинетическим моментом определяется соотношениями

$$M_1 = \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \quad M_2 = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \quad M_3 = L, \quad G^2 = M^2. \quad (5)$$

На рис. 2 приведены траектории системы (3) на плоскости $(L/G, l)$ для $\varepsilon = 0, \varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.01, \varepsilon = 0.001$, на котором отчетливо проявляется наличие двух асимптотически устойчивых точек (обозначены цифрами 1 и 2), к которым в конечном итоге приходит система (3).

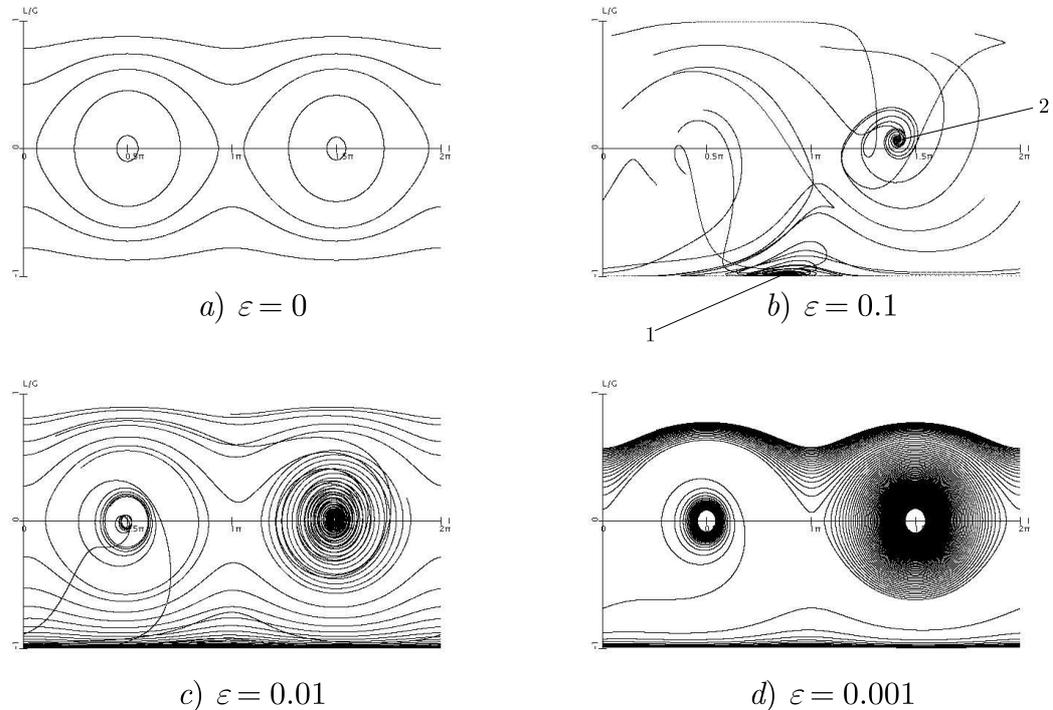


Рис. 2. Траектории системы (3) при значениях параметров: $E = 1$; $A = \text{diag}(\frac{1}{3}, 1, 1.5)$; $B = \text{diag}(1, 1, 1)$; $K = (1, 1, 1)$ и $\varepsilon = 0(a); 0.1(b); 0.01(c); 0.001(d)$.

При постоянных параметрах траектория движения определяется соотношением между малым параметром ε и энергией невозмущенной системы (4). Соотношение этих параметров также определяет к какой из асимптотических точек придет траектория (рис. 3).

Изменение постоянного момента изменяет положение асимптотических точек (рис. 4). Матрица диссипативного момента (\mathbf{B}) определяет характер асимптотического поведения системы: энергия либо асимптотически стремится к постоянному значению, либо растет пропорционально G^2 .

Из рис. 2 видно (и это в общем-то понятно из вида уравнений (3)), что при уменьшении параметра ε возмущенная система длительное время движется вдоль невозмущенной траектории. При этом определенность в том, к какой асимптотике придет система исчезает. Для заданных параметров $E =$

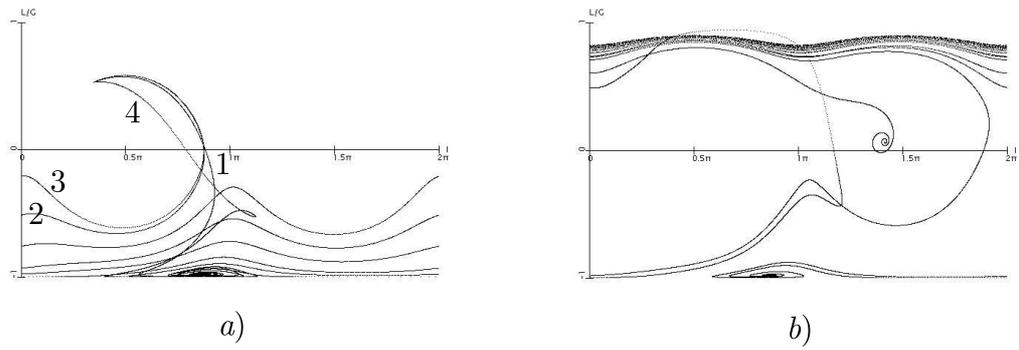


Рис. 3. Траектории движения системы (3) для $\varepsilon = 0.1$ при различных энергиях и постоянных других параметрах: a, b – различные начальные условия

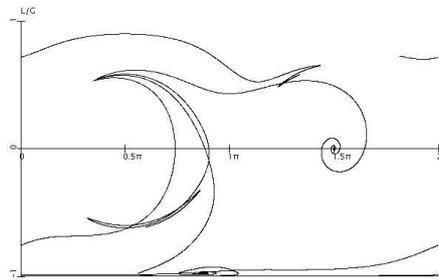


Рис. 4. Изменение траектории системы (3) при изменении компонент вектора постоянного возмущающего момента

$= 1$; $\mathbf{A} = \text{diag}(1/3, 1, 1.5)$; $\mathbf{B} = \text{diag}(1, 1, 1)$; $\mathbf{K} = (1, 1, 1)$ в зависимости от начальных условий возможно два асимптотических движения (см. рис. 5). Одному из них, который изображен в виде областей черного цвета, соответствует вращение вокруг оси наибольшего главного момента инерции, второму асимптотическому движению соответствует вращение вокруг оси наименьшего главного момента инерции. На рис. 6 изображены две различные траектории, приводящие к различным асимптотикам, а также – асимптотическое поведение компонент вектора кинетического момента. Согласно приведенным данным, с учетом знаков M_1 и M_3 , первая асимптотика (изображенная черным цветом) принадлежит области V_{-1} , а вторая асимптотика – области V_{-3} .

Для $\varepsilon = 0.01$ асимптотики разделены регулярными границами. При уменьшении возмущения ($\varepsilon = 0.001$) границы асимптотик все еще остаются регулярными, но при этом видно, что их распределение на плоскости на-

чальных условий приближается к случайному. Вероятности того или иного исхода могут быть легко определены как отношение площади, занимаемой каждой из асимптотик, к общей площади плоскости начальных условий.

В работе [4] описание возмущенного движения твердого тела базируется на методе усреднения интегралов (4) вдоль невозмущенной системы, предложенный же в настоящей работе метод позволяет (численно) описать движение твердого тела при произвольных параметрах полностью и точно.

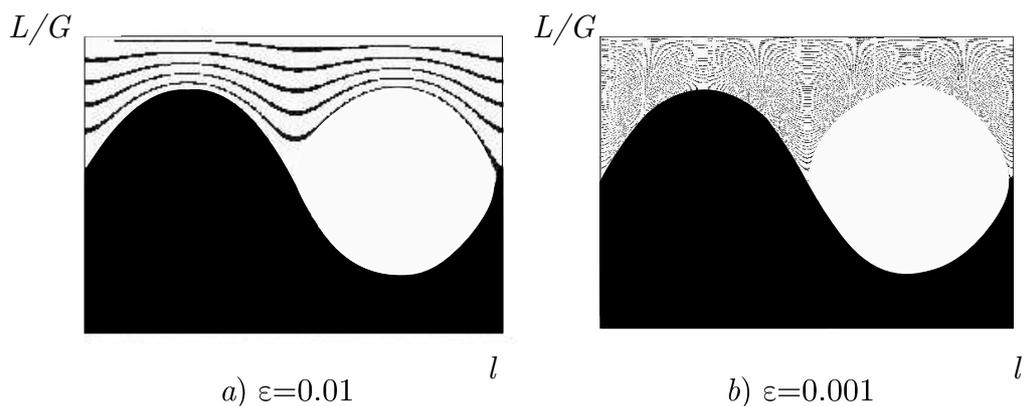


Рис. 5.

Таким образом, численные методы исследования вероятностных эффектов в динамике твердого тела существенно дополняют результаты аналитических исследований.

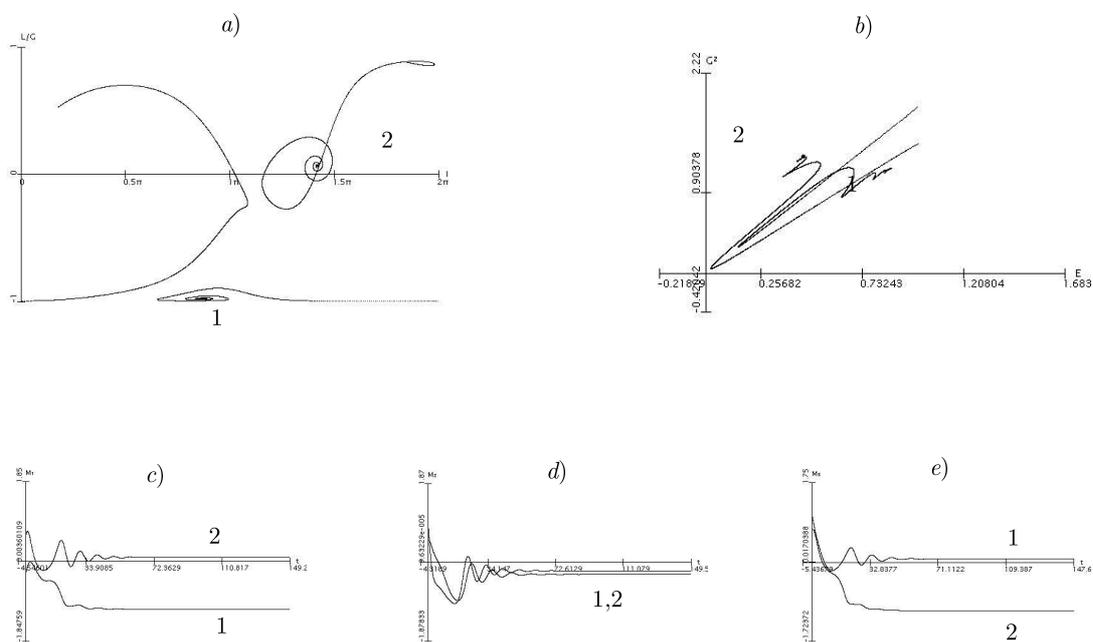


Рис. 6. Траектория системы (3) в плоскостях $(L/G, l)$ (а) и (E, G^2) (б) и изменение компонентов вектора кинетического момента M_1, M_2, M_3 (с-е).

1.2. Падение тяжелого твердого тела в идеальной жидкости. Вероятностные эффекты и притягивающие множества

Введение. Задача о падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости обобщает классическую задачу Кирхгофа, описывающую движение тела в жидкости по инерции. Общие уравнения движения тела в жидкости под действием внешнего силового поля записываются в виде:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \mathbf{p} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{K}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \mathbf{F}, \quad (6)$$

где \mathbf{F} и \mathbf{K} — суммарные сила и момент, приложенные к телу. Если внешние силы имеют потенциальный характер, то уравнения (6), дополненные уравнениями для направляющих косинусов и координат фиксированной точки в теле, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \mathbf{p} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{p} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} - \frac{\partial H}{\partial x_1} \boldsymbol{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial x_2} \boldsymbol{\beta} - \frac{\partial H}{\partial x_3} \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \\ \dot{x}_1 &= \left(\boldsymbol{\alpha}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right), \quad \dot{x}_2 = \left(\boldsymbol{\beta}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right), \quad \dot{x}_3 = \left(\boldsymbol{\gamma}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где векторы \mathbf{p} , \mathbf{M} , $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ представляют собой проекции импульсивной силы, импульсивного момента и неподвижных ортов на оси, связанные с телом, а x_1 , x_2 , x_3 — проекции на неподвижные оси радиуса-вектора начала подвижной системы координат. Гамильтониан системы имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\mathbf{B}\mathbf{M}, \mathbf{p}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}\mathbf{p}, \mathbf{p}) + U, \\ U &= \mu(x_3 + (\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma})), \quad \mu = \mu_{\text{т}} - \mu_{\text{ж}}, \quad \mathbf{r} = \frac{\mu_{\text{т}}\mathbf{r}_{\text{т}} - \mu_{\text{ж}}\mathbf{r}_{\text{ж}}}{\mu_{\text{т}} - \mu_{\text{ж}}}, \end{aligned} \quad (8)$$

здесь \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} — симметричные матрицы, определяемые геометрией тела и его инерционными свойствами, $\mu_{\text{т}}$, $\mu_{\text{ж}}$ — вес тела и вытесненной жидкости, а $\mathbf{r}_{\text{т}}$, $\mathbf{r}_{\text{ж}}$ — радиусы-векторы центра масс и центра давления в подвижных осях.

Уравнения (7) имеют три интеграла движения (один из которых явно содержит время):

$$(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}) = P_1, \quad (\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = P_2, \quad (\mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma}) + \mu t = P_3.$$

Это означает, что импульс системы тело+жидкость представляется в форме

$$\mathbf{p} = P_1 \boldsymbol{\alpha} + P_2 \boldsymbol{\beta} + (P_3 - \mu t) \boldsymbol{\gamma}, \quad (9)$$

т. е. вектор $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ представляет собой проекции начального импульса (по Чаплыгину — толчка) на неподвижные оси.

Выбором начала отсчета времени (при $\mu_{\text{т}} \neq \mu_{\text{ж}}$) и поворотом неподвижных осей можно добиться $P_2 = P_3 = 0$. Тогда уравнения, описывающие движение тяжелого твердого тела в безграничном объеме безвихревой несжимаемой жидкости при наличии начального толчка P_1 вдоль горизонтальной оси могут быть представлены в виде уравнений Пуанкаре-Четаева на алгебре $SO(3) \oplus_S \mathbb{R}^9 = \{\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\mathbf{B}\mathbf{M}, P_1 \boldsymbol{\alpha} - \mu t \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}(P_1 \boldsymbol{\alpha} - \mu t \boldsymbol{\gamma}), P_1 \boldsymbol{\alpha} - \mu t \boldsymbol{\gamma}) + \mu(r, \boldsymbol{\gamma}); \quad (11)$$

$\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$, а матрицы \mathbf{B} , \mathbf{C} являются симметричными, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ — радиус-вектор центра масс, μ — вес тела. Рассмотрим два частных случая уравнений (11), при которых: 1) тело совершает плоскопараллельное движение и 2) тело обладает тремя плоскостями симметрии.

Частный случай плоскопараллельного движения тела был рассмотрен С. А. Чаплыгиным. В связи с этим уравнение (см. (12)) в работах [8, 9, 11] называется уравнением Чаплыгина. Это уравнение (вместе с другими интересными результатами) было получено С. А. Чаплыгиным в 1890 г. в своем студенческом сочинении, однако он воздержался от его публикации. Видимо, это было связано с тем, что он не смог явно проинтегрировать это уравнение. Позднее С. А. Чаплыгин все же опубликовал эту работу в первом прижизненном собрании сочинений (1933 г., [14]).

Частный случай уравнения (12), который соответствует уравновешенному телу ($x = y = 0$) (см. (13)) был также получен независимо Д. Н. Горячевым (1893 г.) [7] и В. А. Стекловым (1894 г.) [13, 12]. Последний отметил простейшие свойства решений этого уравнения. В частности

В. А. Стеклов показал, что при падении тела амплитуда его колебаний относительно горизонтальной оси убывает, а частота колебаний растет. Этот вывод В. А. Стеклов сделал в дополнении к своей книге [13], в которой при анализе асимптотического поведения тела им был допущен ряд погрешностей. Задача Стеклова об асимптотическом описании поведения решений уравнения [13, 12] была решена В. В. Козловым [8], который показал, что тело при почти всех начальных условиях стремится к равноускоренному падению широкой стороной вверх и колеблется вокруг горизонтальной оси с возрастающей частотой порядка t и уменьшающейся амплитудой порядка $1/\sqrt{t}$.

Рассмотрим два частных случая: 1) плоскопараллельное движение и 2) движение тела, обладающего тремя плоскостями симметрии.

1. Плоскопараллельное движение. Плоскопараллельное движение твердого тела задается инвариантными соотношениями $M_1 = M_2 = 0$, $\alpha_3 = \gamma_3 = 0$. Можно показать, что необходимым условием существования подобных движений является динамическая симметрия тела относительно рассматриваемой (инвариантной) плоскости, что приводит к соотношениям

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{12} = 0, \quad c_{13} = c_{23} = 0.$$

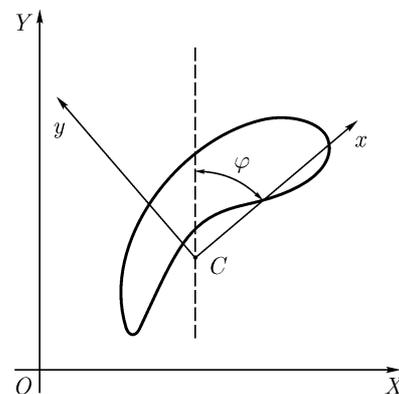


Рис. 7.

Кроме того, можно показать, что сдвигом и поворотом осей, связанных с телом, можно добиться $\mathbf{B} = 0$, а матрицу \mathbf{C} сделать диагональной. Пусть угол поворота подвижных осей относительно неподвижных отсчитывается, как показано на рис. 7, тогда для неподвижных ортов имеем

$$\alpha_1 = \sin \varphi, \quad \alpha_2 = -\cos \varphi, \quad \gamma_1 = \cos \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \varphi.$$

Для угла поворота получим неавтономное уравнение второго порядка

$$a_3 \ddot{\varphi} = (c_1 - c_3) (\mu^2 t^2 \sin \varphi \cos \varphi + P_1 \mu t \cos 2\varphi - P_1^2 \sin \varphi \cos \varphi) + \mu(x \sin \varphi - y \cos \varphi), \quad (12)$$

где c_1 , c_3 , a_3 — соответствующие элементы диагональных матриц а $\mathbf{r} = (x, y, 0)$.

Для уравновешенного тела ($x = y = 0$) без начального толчка ($P_1 = 0$) получим замечательное по своей простоте уравнение

$$\ddot{\varphi} = kt^2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad k = \frac{\mu^2(c_1 - c_3)}{a_3}. \quad (13)$$

Качественный анализ плоскопараллельного движения. Выше было показано, что при специальном выборе подвижных осей (при котором кинетическая энергия диагональна) угол поворота тела относительно вертикали (рис. 7) описывается уравнением (12), а движение начала подвижной системы C описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Cp}) = P_1(c_1 \sin^2 \varphi + c_2 \cos^2 \varphi) - \mu t(c_1 - c_2) \sin \varphi \cos \varphi, \\ \dot{Y} &= (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{Cp}) = P_1(c_1 - c_2) \sin \varphi \cos \varphi - \mu t(c_1 \cos^2 \varphi + c_2 \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение (12) соответствует *неавтономной* гамильтоновой системе с одной степенью свободы. Наиболее подробно подобные системы изучены в случае, когда гамильтониан является периодической функцией времени. В общем случае они демонстрируют хаотическое поведение. В то же время, как будет показано ниже, в данной системе зависимость угла $\varphi(t)$ носит асимптотический характер.

Рассмотрим сначала «простейший» случай, когда уравновешенное тело ($x = y = 0$) падает без начального толчка ($P_1 = 0$). Тогда после замены $2\varphi = \theta$ уравнение (12) принимает вид

$$\ddot{\theta} = kt^2 \sin \theta, \quad k = \frac{\mu^2(c_1 - c_2)}{a_3}. \quad (15)$$

В дальнейшем будем полагать, что $c_1 > c_2$, т. е. $k > 0$, а $0 \leq \theta < 2\pi$.

а) Стационарные (равновесные) решения. Малые колебания. Дво-якоасимптотические решения. Уравнение (15) имеет простейшие «равновесные» решения типа $\theta(t) = \text{const}$:

$$1) \theta = 0, \quad 2) \theta = \pi. \quad (16)$$

Первое решение соответствует падению узкой стороной вниз ($X = X_0, Y = Y_0 - \mu c_1 t^2 / 2$), а второе — широкой ($X = X_0, Y = Y_0 - \mu c_2 t^2 / 2$). Действительно, поскольку присоединенная масса $c_1^{-1} < c_2^{-1}$, то угол $\varphi = \pi n$, когда ось Ox вертикальна, и $\varphi = \pi/2 + \pi n$, когда вертикальна ось Oy .

Линеаризуя уравнение (15) вблизи неподвижных точек (16), получим

$$\begin{aligned} 1) \quad & \ddot{\xi} = kt^2\xi, & \theta = \xi, \\ 2) \quad & \ddot{\xi} = -kt^2\xi, & \theta = \pi - \xi. \end{aligned}$$

Общее решение этих уравнений выражается через функции Бесселя

$$\begin{aligned} 1) \quad \xi(t) &= \sqrt{t} \left(C_1 I_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) + C_2 K_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) \right), \\ 2) \quad \xi(t) &= \sqrt{t} \left(C_1 J_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) + C_2 Y_{1/4} \left(\sqrt{kt^2/2} \right) \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ — функции Бесселя второго рода, а $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ — функции Бесселя первого рода. Таким образом, в линейном приближении первое решение является неустойчивым, а второе (асимптотически) устойчивым. Действительно, используя асимптотики функций Бесселя J_ν , Y_ν при больших значениях аргумента находим

$$\xi(t) = \frac{A \sin \left(\sqrt{kt^2/2} + \alpha_0 \right)}{\sqrt{t}} + O(t^{-5/2}), \quad A = \text{const.}$$

Следовательно, амплитуда колебаний убывает как $t^{-1/2}$, а их частота неограниченно растет как t .

Как показано в [8], вариационными методами можно доказать, что существуют два решения $\theta(t)$, $\theta(t_0) = \theta_0$, асимптотические к неустойчивому положению равновесия ($\theta = 0$), приближающиеся к нему с разных сторон. Кроме того, вследствие инвариантности уравнения (15) относительно замены $t \rightarrow -t$, имеется решение $\theta_*(t)$ с начальными данными $\theta_*(0) = \pi$, для которого [8]

$$\theta_*(t) + \theta_*(-t) = 2\pi, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \theta_*(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_*(t) = 2\pi.$$

Таким образом, решение $\theta_*(t)$ — двоякоасимптотическое (имеется также аналогичное двоякоасимптотическое решение, обходящее окружность $\theta \bmod 2\pi$ в другом направлении). При этом тело совершает один полуоборот, его траектория, описываемая уравнениями (14), изображена на рис. 8а. Заметим, что верхняя точка траектории является точкой возврата: вблизи нее уравнение кривой имеет вид $Y = \lambda X^{2/3}$, $\lambda = \text{const}$). На рис. 8б показано изменение угла φ для данного двоякоасимптотического решения.

Существование двоякоасимптотических траекторий с произвольным количеством полуоборотов доказано в работе [15].

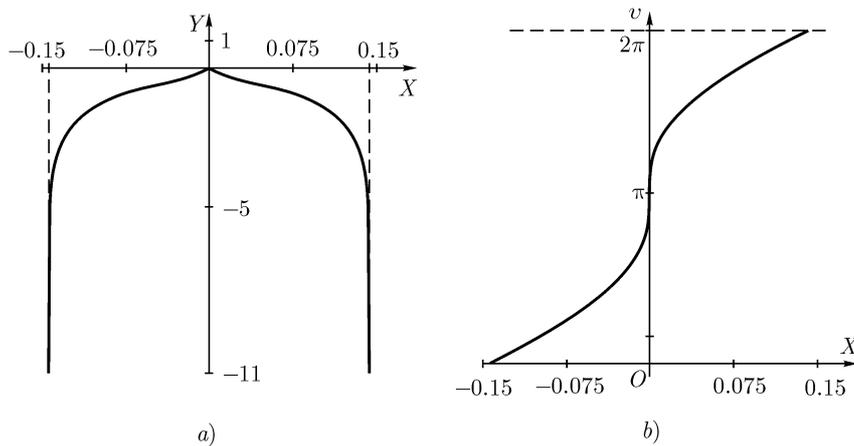


Рис. 8. Траектория тела и угол φ в зависимости от координаты x для двоякоасимптотического решения при $k = 1$, $a_3/\mu = 0.1$ ($P_1 = 0$).

б) Асимптотическое поведение решений уравнения Чаплыгина. Докажем теперь строго, что все решения (15) при $t \rightarrow \infty$ стремятся либо к $\theta = 0$, либо к $\theta = \pi$.

Теорема 1 [8] *Для любого решения $\theta(t)$ уравнения (15)*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0, \quad \text{либо} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \pi.$$

Доказательство. Выполним замену времени $\frac{1}{2}t^2 = \tau$, так что уравнение (15) примет вид

$$\theta'' + \frac{1}{2\tau}\theta' - k \sin \theta = 0, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \theta', \quad (18)$$

т. е. мы получили уравнение, описывающее плоский маятник с «диссипацией, убывающей со временем».

Рассмотрим функцию $\mathcal{E}(\theta, \theta')$ — энергию «невозмущенной системы»:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\theta')^2 + k \cos \theta. \quad (19)$$

Ее производная вдоль решений системы (18) отрицательна:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = -\frac{(\theta')^2}{2\tau} \leq 0.$$

Интегрируя это равенство, находим

$$\mathcal{E}(\tau) = \mathcal{E}_0 - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{(\theta'(s))^2}{2s} ds.$$

Отсюда вследствие ограниченности снизу функции (19) заключаем, что для всех начальных условий, несовпадающих с неподвижными точками $\theta = 0$, $\theta' = 0$ уравнения (18), справедливо

$$1^\circ. \text{ Существует } \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\tau) = \mathcal{E}_*.$$

$$2^\circ. \text{ Интеграл } I = \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{(\theta')^2}{2\tau} d\tau \text{ сходится.}$$

Теперь покажем, что \mathcal{E}_* совпадает с критическим значением функции \mathcal{E} , т. е. $\mathcal{E}_* = \pm k$.

Предположим обратное и рассмотрим сначала случай $\mathcal{E}_* > k$. Ясно, что при достаточно больших τ согласно (18) и (19) система движется вблизи фазовой кривой плоского маятника, соответствующей вращательному движению и следовательно $\frac{1}{2}(\theta')^2 \geq \varkappa > 0$, $\varkappa = \text{const}$ (т. е. кинетическая энергия отделена от нуля). Следовательно интеграл 2° расходится (как $\ln \tau$), что противоречит 2° .

Рассмотрим теперь случай $-k < \mathcal{E}_* < k$; при достаточно больших τ на фазовой плоскости (θ, θ') точка движется вблизи замкнутой кривой «невозмущенной системы», описываемой уравнением $\mathcal{E}_* = \frac{1}{2}(\theta')^2 + k \cos \theta$. (При этом, очевидно, что вследствие $\mathcal{E} > \mathcal{E}_*$ она остается всегда снаружи.) Кроме того время, затрачиваемое на обход половины этой кривой $\Delta\tau = \tau_{n+1} - \tau_n$ (отсчитываемое между двумя последовательными моментами, при которых $\theta' = 0$), приблизительно равно половине периода невозмущенного движения плоского маятника и заведомо не превосходит целого периода:

$$\Delta\tau \leq T = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2d\theta}{\sqrt{2(\mathcal{E}_* - k \cos \theta)}}, \quad (20)$$

где θ_i — корни уравнения $\mathcal{E}_* - k \cos \theta = 0$. Существует положительная постоянная \varkappa (зависящая только от \mathcal{E}_* и не зависящая от τ_n, τ_{n+1}) такая, что

$$\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \frac{(\theta'(\tau))^2}{2\tau} d\tau \geq \frac{\varkappa}{\tau_{n+1}}. \quad (21)$$

С помощью (20) получим также неравенство $\tau_{n+1} \leq nT + \tau_1$, $\tau_1 \geq \tau_0$. Таким образом, в итоге

$$I \geq \int_{\tau_1}^{\infty} \frac{(\theta')^2}{2\tau} d\tau \geq \varkappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nT + \tau_1}.$$

Но этот ряд, и следовательно интеграл, либо расходится, т. е. $\mathcal{E}_* = k$ либо $\mathcal{E}_* = -k$. ■

Существует гипотеза, принадлежащая В. В. Козлову [8], что для почти всех решений уравнения (15) $\mathcal{E}_* = -k$.

Это аналогично тому, что мера траекторий, которые при $t \rightarrow \pm\infty$ стремятся к неустойчивому равновесному состоянию $\theta = 0, 2\pi$, равна нулю.

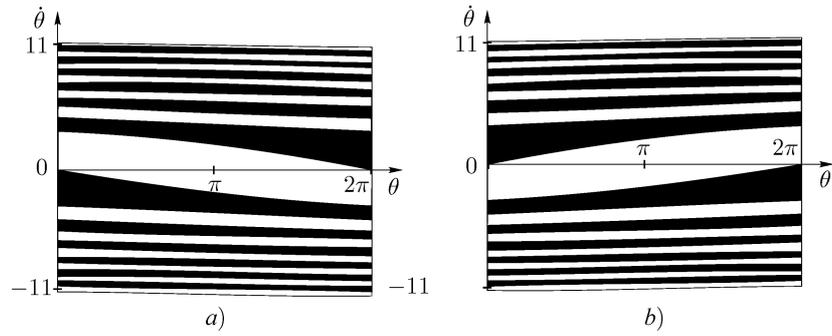


Рис. 9. Области на фазовой плоскости, соответствующие начальным условиям при $t_0 = 0$, при которых тело совершает одно и тоже количество полуоборотов: а) при изменении t от 0 до $+\infty$ и б) при изменении t от $-\infty$ до 0 в случае б) ($k = 1$)

в) Численный анализ. Опираясь на теорему 1 можно выполнить численный анализ уравнения (13) [16]. Для этого на фазовой плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ (точнее цилиндре $\theta \bmod 2\pi, \dot{\theta} \in (-\infty, +\infty)$) в начальный момент времени $t = t_0$ построим области, в пределах которых тело совершает одно и то же количество полуоборотов при $t \rightarrow +\infty$ (либо при $t \rightarrow -\infty$), прежде чем «притянется» к решению $\theta = \pi$. Как видно на рис. 9а, эти области располагаются регулярно, причем их ширина уменьшается при увеличении $|\dot{\theta}|$, так что при больших начальных $|\dot{\theta}|$ можно говорить лишь о вероятности того, что тело при $t \rightarrow +\infty$ будет падать «верхней» или «нижней» стороной. Границы областей заполнены начальными условиями, соответствующими движениям, асимптотически приближающимся к неустойчивым положениям равновесия $\theta = 0, 2\pi$. Аналогично можно построить области, соответствующие одинаковому количеству полуоборотов для $t \rightarrow -\infty$ (рис. 9б), причем области для $t \rightarrow +\infty$ и для $t \rightarrow -\infty$ оказываются зеркальным отражением относительно прямой $\theta = \pi$. При наложении этих областей их границы пересекаются в точках, расположенных на прямой $\theta = \pi$. Им соответствуют двоякоасимптотические решения уравнения (15) с различным количеством полуоборотов тела.

На цилиндре $\dot{\theta}, \theta \bmod 2\pi$ все границы областей склеиваются в одну гладкую кривую, аналогичную винтовой линии, шаг которой уменьшается при увеличении $|\dot{\theta}|$. По одну сторону от этой линии лежат области с четным числом полуоборотов, а по другую — с нечетным.

Таким образом, численные расчеты подтверждают гипотезу о том, что

почти для всех решений $\theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \pi$, причем в трехмерном пространстве t, θ, θ' , решения, асимптотически приближающиеся к неустойчивому равновесию $\theta = \pi$, заполняют двумерные поверхности. Кроме того имеется также счетное множество двоякоасимптотических решений, отличающихся количеством полуоборотов, совершаемых при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$.

На рис. 10 приведены траектории тела, совершающего двоякоасимптотическое движение с одним и тремя полуоборотами.

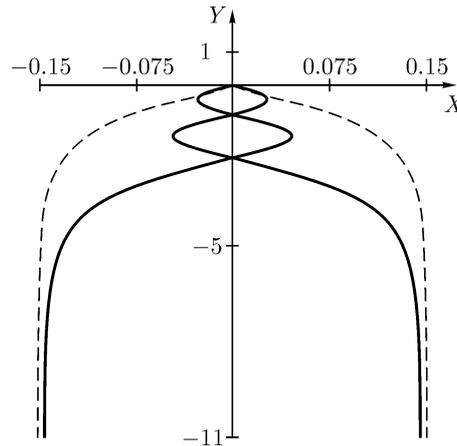


Рис. 10. Траектория тела в случае двоякоасимптотических решений с одним (пунктир) и тремя (сплошная линия) полуоборотами при $k =, a_3/\mu = 0.1$.

г) Траектория тела. Подставляя в уравнения (14) асимптотическое разложение для малых колебаний (17), после интегрирования получим асимптотическое представление для траектории движения в форме

$$X(t) = A \frac{\cos(\sqrt{k}t^2/2 + \theta_0)}{\sqrt{t}} + O(t^{-3/2}), \quad Y(t) = -\mu c_2 t^2 + O(t^{-1/2}),$$

где A, θ_0 — некоторые постоянные. Следовательно, траектория движения при больших временах близка к синусоиде с постоянным шагом $\Delta y = \pi \mu c_2 / \sqrt{k}$ и убывающей амплитудой [8]. (Шаг ΔY вычисляется между двумя последовательными нулями функции $X(t)$.) Характерная траектория показана на рис. 11.

д) Общий случай ($P_1 \neq 0$) Укажем теперь основные качественные особенности поведения системы (12), (14) в общем случае ($P_1 \neq 0$). Здесь мы приводим лишь основные идеи доказательств, которые можно выполнить по аналогии с предыдущим разделом.

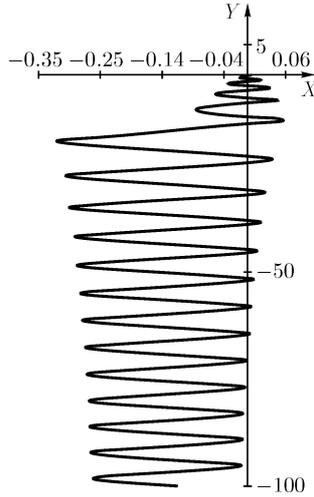


Рис. 11. Характерный вид траектории тела, падающего без начального толчка

Если $P_1 \neq 0$, то стационарных решений, аналогичных (16), уже не существует. В то же время теорема об асимптотическом поведении решений остается справедлива и в общем случае.

Справедливо следующее утверждение, обобщающее теорему 1.

Теорема 2 [8] *Для любого решения $\varphi(t)$ уравнения (12):*

$$1. \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \pi n \quad \text{либо} \quad 2. \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство также основано на замене $\frac{1}{2}t^2 = \tau$ и рассмотрении функции

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\varphi')^2 + \frac{1}{2}k^2 \cos \varphi + \frac{F(\varphi)}{\sqrt{2\tau}} + \frac{G(\varphi)}{2\tau}, \quad k = \frac{\mu^2(c_1 - c_2)}{a_3},$$

$$F(\varphi) = \frac{P_1\mu(c_1 - c_2)}{2a_3} \sin 2\varphi, \quad G(\varphi) = \frac{P_1^2(c_1 - c_2)}{2a_3} \sin^2 \varphi + \frac{\mu}{a_3}(x \sin \varphi + y \cos \varphi).$$

Ее производная вдоль решений системы удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} + \frac{F(\varphi)}{(2\tau)^{3/2}} + \frac{G(\varphi)}{2\tau^2} = -\frac{(\varphi')^2/2}{\tau}.$$

Вследствие ограниченности функций $F(\varphi)$, $G(\varphi)$ заключаем, что $\mathcal{E}(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{E}_*$, $\mathcal{E}_* = \text{const}$

и интеграл $\int_{\tau_0}^{\infty} \frac{(\varphi')^2/2}{\tau} d\tau$ сходится. Модифицируя соответствующим образом доказательство теоремы предыдущего раздела, можно показать, что \mathcal{E}_* — критическое значение функции $\frac{1}{2}(\varphi)^2 + \frac{1}{2}k^2 \cos^2 \varphi$.

По-видимому, также почти все решения уравнения стремятся к одному из решений $\varphi(t) = \frac{\pi}{2} + \pi n$ (т. е. тело стремится к падению широкой стороной вниз). Это подтверждается численными экспериментами.

Тем не менее, также существуют решения, стремящиеся к неустойчивому положению $\varphi = 0$. Как показано в [8], они могут быть получены в виде формального степенного ряда

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_1}{t} + \frac{\varphi_2}{t^2} + \frac{\varphi_3}{t^3} + \dots, \quad (22)$$

где $\varphi_1 = \frac{P_1}{\mu}$, а остальные φ_k находятся по индукции. Не смотря на то, что ряд (22) расходится, имеется решение $\varphi_a(t)$, для которого он является асимптотическим:

$$\varphi_a(t) - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k}{t^k} = O(t^{-n-1}).$$

Аналогично можно указать асимптотические степенные ряды, соответствующие решениям, стремящимся к $\varphi = \pi/2$.

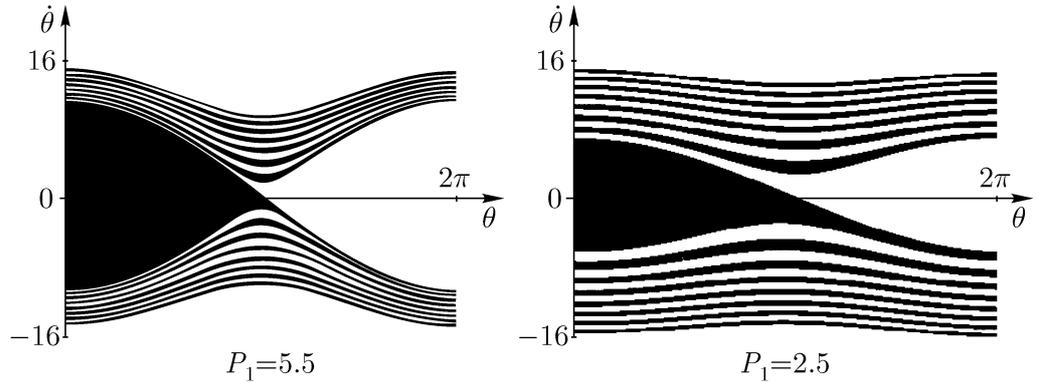


Рис. 12.

Аналогично можно выполнить компьютерный анализ, рассматривая в начальный момент времени $t = t_0$ на фазовой плоскости области, которым соответствуют одинаковые количества полуоборотов, прежде чем траектория притянется к решению $\varphi = \frac{\pi}{2}$ при $t \rightarrow +\infty$. Границы этих областей заполнены асимптотическими решениями. На рис. 12 четному количеству полуоборотов соответствуют области черного цвета, нечетному - белого. Как и в случае $P_1 = 0$ области, соответствующие различному количеству полуоборотов при $t_0 = 0$ и $t \rightarrow -\infty$, оказываются симметричным отражением

областей для $t_0 = 0$ и $t \rightarrow +\infty$ относительно прямой $\varphi = \pi/2$. Точки пересечения границ областей при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$ соответствуют двоякоасимптотическим решениям.

Характерный вид общей траектории тела, брошенного под углом к горизонту, приведен на рис. 13. На рис. 14 приведены траектории в случае двоякоасимптотических движений с одним и тремя полуоборотами тела.

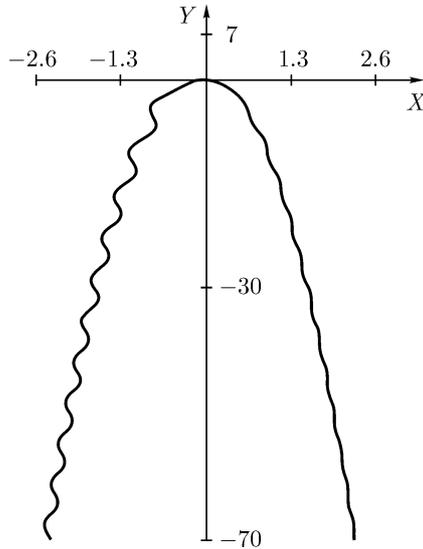


Рис. 13. Характерный вид траектории твердого тела, брошенного под углом к горизонту

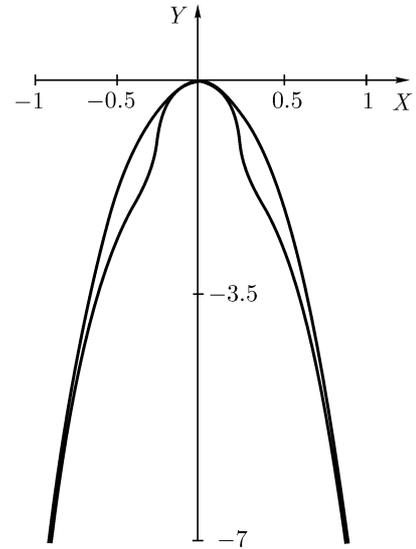


Рис. 14. Траектории тела для двоякоасимптотических движений с одним (верхняя кривая) и тремя полуоборотами

Как показано в [8], в общем случае асимптотически траектория тела представляет собой параболу:

$$X(t) = -P_1 t + o(t), \quad Y(t) = -\frac{\mu t^2}{2c_3} + o(t^2).$$

Тело, обладающее тремя плоскостями симметрии Как и выше (для плоскопараллельного движения), прежде чем изучать общую систему (10), (11), рассмотрим подробно частный случай движения без начального толчка ($P_1 = 0$) при дополнительных ограничениях

$$\mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{r} = 0. \quad (23)$$

При этом получается неавтономная гамильтонова система (на $e(3)$) для \mathbf{M} , $\boldsymbol{\gamma}$ с гамильтонианом

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + \frac{1}{2}\mu^2 t^2 (\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (24)$$

(В общем случае можно считать \mathbf{A} диагональной, а \mathbf{C} — произвольной симметричной.)

Стационарные (равновесные) решения и нормальные колебания. Уравнения движения системы (24) имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}\mathbf{M} + \mu^2 t^2 \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{A}\mathbf{M} \quad (25)$$

и допускают простейшие решения вида

$$\mathbf{M} = 0, \quad \boldsymbol{\gamma} = \pm \boldsymbol{\xi}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (26)$$

где $\boldsymbol{\xi}_i$ — собственные векторы матрицы \mathbf{C} (для вырожденной \mathbf{C} собственных векторов $\boldsymbol{\xi}_i$ бесконечно много).

Линеаризуя систему (25) вблизи решения (26), линейными преобразованиями координат можно привести уравнения движения к виду «нормальных колебаний»

$$\ddot{x}_k + t^2 \omega_k x_k = 0, \quad k = 1, 2, \quad (27)$$

где x_k — подходящие локальные координаты вблизи неподвижных точек $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\xi}_i$. Решения системы (27) выражаются через функции Бесселя (см. (17)). Можно показать, что если \mathbf{C} не вырождена (все собственные числа различны), то локальному минимуму функции $V(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma})$ соответствует (асимптотически) устойчивое решение системы (27), асимптотика которого при больших t имеет вид (17). Всем остальным собственным векторам соответствуют неустойчивые (уже в линейном приближении) решения.

Асимптотическое поведение решений. Покажем теперь, что аналогично плоскопараллельному случаю, при произвольных начальных условиях вектор $\boldsymbol{\gamma}$ стремится к одному из собственных векторов матрицы \mathbf{C} . Сформулированное ниже утверждение является наиболее общим вариантом из теорем 1, 2 об асимптотическом поведении твердого тела.

Теорема 3 [10] Для любого решения $\gamma(t)$ уравнений (25)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\gamma(t)) = \mathcal{E}_c,$$

где $V(\gamma) = \frac{1}{2}(\gamma, \mathbf{C}\gamma)$, \mathcal{E}_c — критическое значение функции $V(\gamma)$.

Доказательство. Здесь приведены лишь ключевые этапы доказательства. Выполним замену времени и переменных по формулам

$$\frac{1}{2}t^2 = \tau, \quad t\mathbf{M} = \mathbf{m}.$$

В этом случае получим уравнения движения в форме

$$\frac{d\mathbf{m}}{d\tau} = -\frac{1}{2\tau}\mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{A}\mathbf{m} + \mu^2\gamma \times \mathbf{C}\gamma, \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma \times \mathbf{A}\mathbf{m}. \quad (28)$$

Несложно показать, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{2\tau}$, т. е. фактически система (28) описывает уравнения Кирхгофа с диссипацией, убывающей со временем. Рассмотрим энергию «невозмущенной» системы

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m}) + \frac{1}{2}\mu^2(\gamma, \mathbf{C}\gamma). \quad (29)$$

Вычисляя производную \mathcal{E} вдоль решений (28), находим

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = -\frac{(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{m})}{2\tau}.$$

Отсюда также заключаем, что

$$1^\circ. \mathcal{E} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{E}_* = \text{const};$$

$$2^\circ. \text{интеграл } I = \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{(\mathbf{m}(\tau), \mathbf{A}\mathbf{m}(\tau))}{2\tau} d\tau \text{ сходится.}$$

Теперь осталось показать, что $\mathcal{E}_* = \mathcal{E}_c$, где \mathcal{E}_c — критическое значение функции (29) и, следовательно, функции $V(\gamma)$. Предыдущее доказательство (теорема 1) существенно опиралось на тот факт, что «невозмущенная» система — это гамильтонова система с одной степенью свободы и требует модификации.

Обозначим через $K(\tau) = \frac{1}{2}(\mathbf{m}(\tau), \mathbf{A}\mathbf{m}(\tau))$ кинетическую энергию невозмущенной системы. Покажем, что если $\mathcal{E}_* \neq \mathcal{E}_c$, то для функции $K(\tau)$ существуют положительные постоянные ε, T_1, T_2 такие, что

$$1) \text{ если } K(\tau_*) < \varepsilon, \text{ то } \exists \Delta\tau_1 \leq T_1 \ K(\tau_* + \Delta\tau_1) \geq \varepsilon;$$

$$2) \text{ если } K(\tau_*) = \varepsilon \text{ и } K'(\tau_*) > 0, \text{ то } \forall \Delta\tau_2 \geq T_2 \ K(\tau_* + \Delta\tau_2) \geq \varepsilon.$$

Т. е. система достаточно быстро покидает области, где $K(\tau)$ близка к нулю, и проводит достаточное долгое время в областях, где $K(\tau)$ отделена от нуля (см. рис. 15). Покажем, что это противоречит свойству 2°.

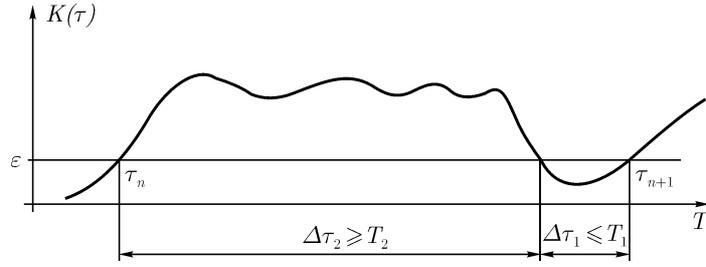


Рис. 15

Действительно, оценим снизу интеграл

$$I_n = \int_{\tau_0}^{\tau_n} \frac{K(\tau)}{\tau} d\tau,$$

где τ_n — последовательные моменты пересечения прямой $K(\tau) = \varepsilon$ в направлении возрастания $K(\tau)$, см. рис. 15. Сделаем это в два этапа, во-первых, ограничим I_n снизу интегралом, верхняя граница которого увеличивается с ростом n , а этот интеграл в свою очередь ограничим снизу частичной суммой расходящегося ряда.

Так как $\tau_n = \tau_{n-1} + \Delta\tau_1 + \Delta\tau_2 \geq \tau_{n-1} + T_2 \geq nT_2 + \tau_0$, получим

$$I_n \geq \int_{\tau_0}^{\tau_0 + nT_2} \frac{K(\tau)}{\tau} d\tau.$$

На основании свойств 1, 2 заключаем, что наименьшее значение интеграла, стоящего в правой части, получается, если мы все интервалы времени, в течение которых $K(\tau) \leq \varepsilon$ расположены ближе всего к началу отсчета τ_0 и разделены наименьшим возможным промежутком $\Delta\tau_1 = T_2$ и заведомо больше следующей суммы:

$$I_n \geq \int_{\tau_0}^{\tau_0 + nT_2} \frac{K(\tau)}{\tau} d\tau \geq \sum_{k=1}^{\bar{n}} \int_{\tau_0 + kT_1 + (k-1)T_2}^{\tau_0 + kT_1 + kT_2} \frac{\varepsilon}{\tau} d\tau \geq \sum_{k=1}^{\bar{n}} \frac{\varepsilon \cdot T_2}{\tau_0 + k(T_1 + T_2)},$$

где $\bar{n} = \min(k, k(T_1 + T_2) \geq nT_2)$. Но последняя сумма при $\bar{n} \rightarrow \infty$ расходится.

Для обоснования свойств 1), 2) выберем достаточно большое время, так что $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}_*$, и выберем ε достаточно малым, так что в окрестности $K(\tau) \leq \varepsilon$ векторное поле имеет вид

$$\dot{\mathbf{m}} = \mu^2 \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma} + O(\varepsilon^2), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (30)$$

Поскольку \mathcal{E}_* отстоит от \mathcal{E}_c , то вблизи поверхности векторное поле (30) достаточно велико (т. е. $|\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}|$ не малая величина). Отсюда можно получить оценки для T_1 и T_2 , если воспользоваться условиями

$\Delta m = \sqrt{\varepsilon} \sim |\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}| \cdot T_1$, т. е. за время, через которое система покидает окрестность $K(\tau) \leq \varepsilon$;

$\Delta\gamma \sim 1 \sim \sqrt{\varepsilon}T_2$, т. е. за время T_2 векторное поле (30) изменяется настолько, чтобы точка вернулась в окрестность $K(\tau) \leq \varepsilon$.

Т. е. $T_1 = O(\varepsilon^{1/2})$, $T_2 = O(\varepsilon^{-1/2})$.

Тем самым показано, что условие $\mathcal{E}_* \neq \mathcal{E}_c$ противоречит сходимости интеграла. ■

Для падения произвольного тела, обладающего тремя плоскостями симметрии, также существует гипотеза, принадлежащая В. В. Козлову, что *для почти всех решений γ уравнений (25) $\mathcal{E}_* = \mathcal{E}_c^{\min}$* . Таким образом, тело при $t \rightarrow \infty$ почти всегда стремится занять в пространстве такое положение, что ось, соответствующая максимальной присоединенной массе, становится вертикальной.

Компьютерный анализ. Сформулированная выше теорема приводит к естественному вопросу: как в пространстве начальных условий устроены области, соответствующие различным асимптотическим режимам при $t \rightarrow \pm\infty$ (т. е. бассейны притяжения). Выберем $t_0 = 0$, параметризуем совместно четырехмерный уровень интегралов

$$(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = c = \text{const}, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1$$

переменными Андуайе (L, G, l, g) и зафиксируем поверхность начальных условий при $t_0 = 0$ уравнениями

$$g = g_0, \quad E = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) = \text{const}.$$

В зависимости от того, какой стороной падает при $t \rightarrow \infty$ тело, будем окрашивать точку на этой поверхности в соответствующий цвет. Типичная картина приведена на рисунках 16, 17.

Видно, что тело падает таким образом, что ось, соответствующая наибольшей присоединенной массе, вертикальна, либо одной широкой стороной вниз, либо другой, что подтверждает сформулированную выше гипотезу. При этом граница этих областей в общем случае устроена фрактально: при увеличении рисунок поверхности повторяется на все более мелких масштабах (т. е. обладает фрактальными свойствами).

Таким образом, если использовать аналогично с интегрируемыми и неинтегрируемыми (регулярными и хаотическими) системами, можно плоскопараллельный случай назвать интегрируемым, а общий случай системы (24), (25) неинтегрируемым. Действительно, в плоскопараллельном случае

границы областей, соответствующих различным расположениям тела, регулярны, а в системе (24), (25) — фрактальны. Ниже показано (см. рис. 18), что если система (25) имеет еще один дополнительный интеграл (интеграл Лагранжа), границы областей также становятся регулярными.

Фрактальная структура границ, разделяющих различные типы поведения при $t \rightarrow \infty$, тесно связана с вероятностными эффектами, возникающими при описании асимптотических движений. Действительно, при сложном распределении начальных условий, соответствующих различным типам асимптотического поведения, при конкретных (заданных) начальных условиях асимптотическое поведение становится непредсказуемым и можно говорить лишь о вероятностном описании. Это — своего рода асимптотический хаос, порожденный структурой начальных условий. Вероятностное описание было предложено А. И. Нейштадтом при изучении движения вокруг неподвижной точки твердого тела, находящегося под действием постоянного и линейного (по ω) диссипативных моментов [4]. Оказалось, что при малых величинах этих моментов динамика системы имеет вероятностный характер, в работе [4] получены явные формулы для вероятностей, осуществляющих эволюцию системы к одному из равномерных вращений. Непосредственное перенесение аналитических результатов [4] на систему (25), (28) связано с существенными трудностями, обусловленными большей размерностью этой системы и зависимостью «параметра диссипации» ε от времени: $\varepsilon \sim \frac{1}{T}$.

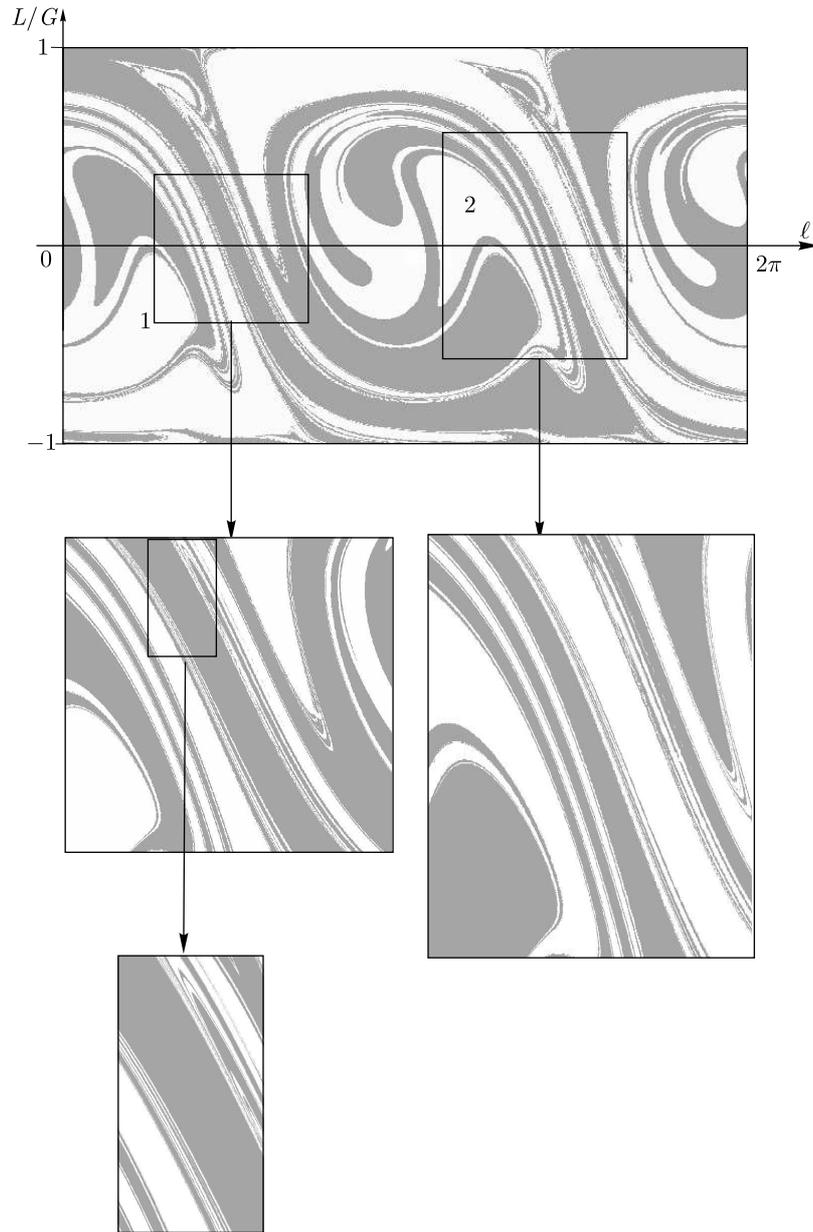
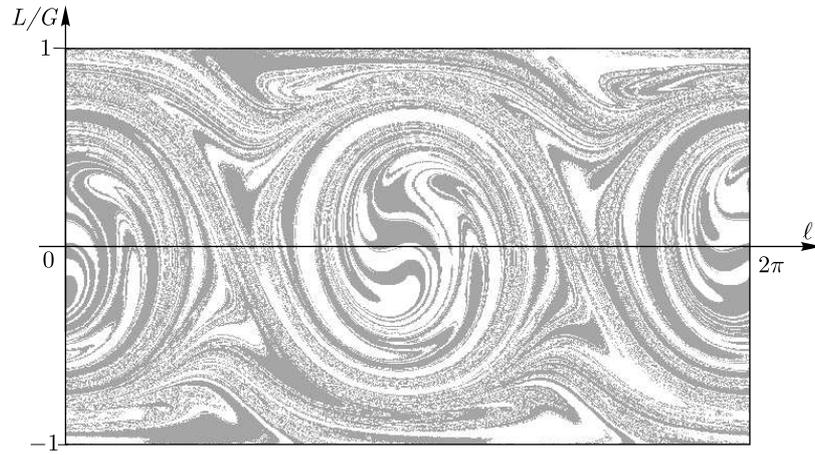
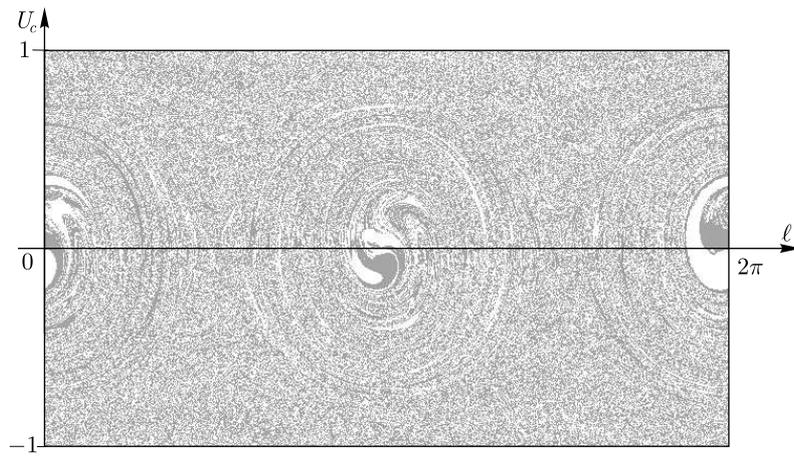


Рис. 16. Типичная картина областей, соответствующих двум различным предельным при $t \rightarrow +\infty$ положениям тела (в которых собственный вектор, отвечающий наибольшей присоединенной массе, вертикален — два цвета соответствуют двум его возможным направлениям). На четырехмерном уровне первых интегралов приведенная двумерная поверхность определяется уравнениями (24). Значения параметров системы: $\mathbf{A} = \text{diag}(1.8, 1.5, 2)$, $\mathbf{C} = \text{diag}(0.5, 2.9, 1.4)$, $\mu = 1$, $(\mathbf{M}, \gamma) = 1$, $E_0 = 7$

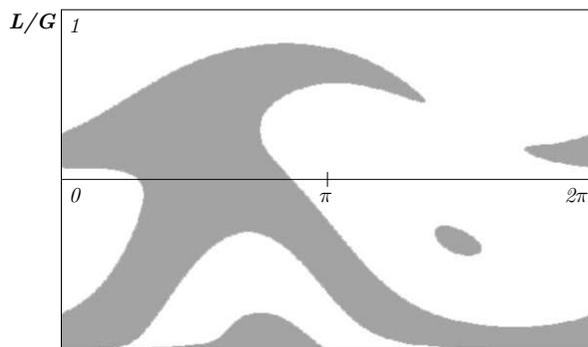


a) $E_0=20, t_0=0.6$

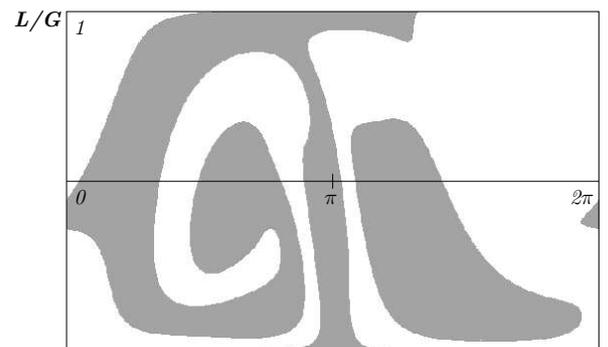


b) $E_0=70, t_0=0.3$

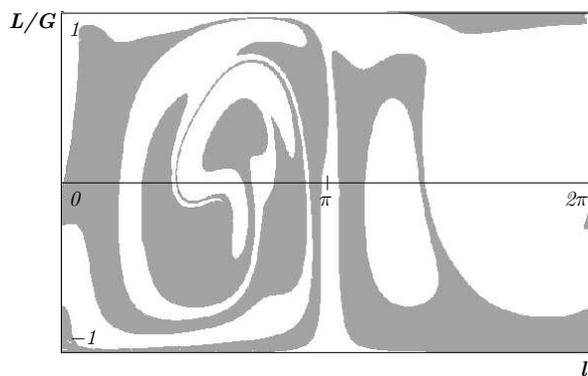
Рис. 17. Характерный вид разбиения поверхности начальных условий в соответствии с поведением системы при $t \rightarrow \infty$ при увеличении начальной энергии и начального момента t_0 . Значения параметров системы: $\mathbf{A} = \text{diag}(1.8, 1.5, 2)$, $\mathbf{C} = \text{diag}(0.5, 2.9, 1.4)$, $\mu = 1$, $(\mathbf{M}, \gamma) = 1$, $E_0 = 1$



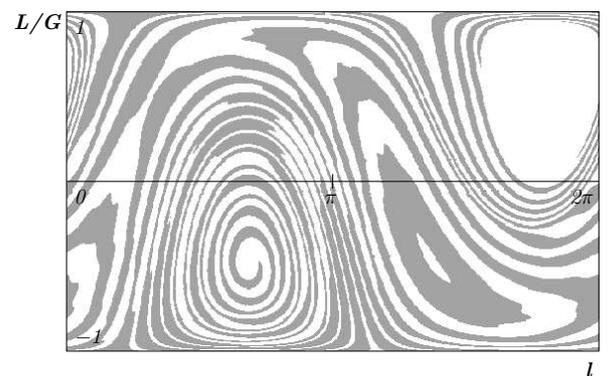
$P_1=0.5 \ E=7$



$P_1=1.5 \ E=7$



$P_1=2.5 \ E=7$



$P_1=1.5 \ E=70$

Рис. 18. Аналог случая Лагранжа, т. е. случай существования интеграла $M_3 = \text{const}$. Регулярная структура бассейна притяжения

1.3. Динамика саней Чаплыгина на наклонной плоскости

Введение. Задача о динамике саней Чаплыгина относится к классу интегрируемых задач неголономной механики. Интегрируемость уравнений этой задачи на горизонтальной плоскости Чаплыгин показал в своей работе [17].

Уравнения движения С. А. Чаплыгин в работе [17] рассмотрел движение твердого тела, опирающегося на плоскость двумя (абсолютно) гладкими ножками и острым колесиком (диском или лезвием), таким, что тело не может двигаться перпендикулярно плоскости колесика.

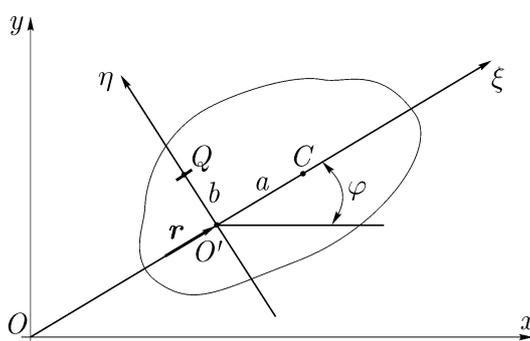


Рис. 19

Выберем две системы координат — неподвижную Oxy и жестко связанную с телом $O'\xi\eta$, начало отсчета которой O' расположено на пересечении прямой, проходящей через точку контакта колесика Q перпендикулярно его плоскости, с прямой, проходящей через центр масс C параллельно плоскости колесика (см. рис. 19).

Пусть ω — угловая скорость тела, а $(v_1, v_2) = \mathbf{v}$ — проекции скорости точки Q на подвижные оси, тогда уравнение связи (выражающее условие равенства нулю проекции скорости точки Q на ось $O'\eta$) имеет вид

$$v_2 = 0. \tag{31}$$

Уравнения движения представим в форме

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v_1} \right) &= \omega \frac{\partial T}{\partial v_2} - \frac{\partial U}{\partial x} \cos \varphi - \frac{\partial U}{\partial y} \sin \varphi, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v_2} \right) &= -\omega \frac{\partial T}{\partial v_1} + \frac{\partial U}{\partial x} \sin \varphi - \frac{\partial U}{\partial y} \cos \varphi + \lambda, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega} \right) &= \left(\frac{\partial T}{\partial v_1} v_2 - \frac{\partial T}{\partial v_2} v_1 \right) - \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \\ T &= \frac{m}{2} (v_1^2 + (v_2 + a\omega)^2) + \frac{1}{2} I \omega^2,\end{aligned}\tag{32}$$

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{x} = v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi, \quad \dot{y} = v_1 \sin \varphi + v_2 \cos \varphi,$$

где T, U — кинетическая (без учета связи) и потенциальная энергии тела, m, I — его масса и момент инерции относительно центра масс, $\mathbf{r} = (x, y)$ — координаты точки O' в неподвижной системе координат, φ — угол поворота подвижных осей (см. рис. 19), λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Исключая неопределенный множитель с помощью уравнения связи (31), получим замкнутую систему, описывающую движение саней Чаплыгина:

$$\begin{aligned}m\dot{v}_1 &= ma\omega^2 - \frac{\partial U}{\partial x} \cos \varphi - \frac{\partial U}{\partial y} \sin \varphi, \quad (I + ma^2)\dot{\omega} = -ma\omega v_1 - \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \\ \dot{\varphi} &= \omega, \quad \dot{x} = v_1 \cos \varphi, \quad \dot{y} = v_1 \sin \varphi.\end{aligned}\tag{33}$$

Уравнения (33) обладают интегралом энергии:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (mv_1^2 + (I + ma^2)\omega^2) + U(x, y, \varphi).\tag{34}$$

Рассмотрим частный случай системы (33).

Сани Чаплыгина на наклонной плоскости Направим ось Ox вдоль линии наибольшего ската, тогда

$$U = m\mu(x + a \cos \varphi), \quad \mu = g \sin \chi,\tag{35}$$

где χ — угол наклона плоскости к горизонту.

Если $a = 0$, то уравнение интегрируемо тривиально — имеется четыре интеграла, определяющие закон движения и траекторию:

$$\begin{aligned}\omega &= \text{const}, \quad v_1 + \frac{\mu}{\omega} \sin \varphi = \text{const}, \\ x - \frac{1}{\omega^2} \left(v_1 \omega \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin^2 \varphi \right) &= \text{const}, \\ y + \frac{1}{\omega^2} \left(v_1 \omega \cos \varphi + \frac{\mu}{2} \cos \varphi + \frac{\mu}{2} \cos \varphi \sin \varphi \right) &= \text{const}.\end{aligned}$$

То есть тело не соскальзывает вниз, но испытывает дрейф в горизонтальном направлении, а если тело отпущено без начального толчка ($v_1(0) = 0$), то оно движется по циклоиде [18].

Качественные закономерности движения саней Чаплыгина на наклонной плоскости методом усреднения изучены в [19], где используется каноническая гамильтонова форма уравнений, предложенная Чаплыгиным в [17] и содержащая квазикоординату.

Система (33) с потенциалом (35) имеет частные решения вида

$$\begin{aligned} 1) \quad & \varphi = 0, \quad y = \text{const}, \quad x = u_0 t - \frac{1}{2} \mu t^2, \\ 2) \quad & \varphi = \pi, \quad y = \text{const}, \quad x = -u_0 t - \frac{1}{2} \mu t^2, \end{aligned} \quad u_0 = u|_{t=0}, \quad (36)$$

которые соответствуют прямолинейному равноускоренному скольжению саней вдоль прямой наибольшего ската, так что при этом лезвие остается параллельным этой прямой. Уравнения движения не меняются при замене $a \rightarrow -a$, $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$, $u \rightarrow -u$, поэтому без ограничения общности положим $a > 0$ и исследуем подробнее устойчивость решений (36) (по части переменных). Выполним замену времени и соответствующую замену скоростей по формулам:

$$t dt = d\tau, \quad u = t\bar{u}, \quad \omega = t\bar{\omega}. \quad (37)$$

В новом времени получим неавтономную систему

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{d\tau} &= a\bar{\omega}^2 - \frac{1}{2\pi}(\bar{u} + \mu \cos \varphi), \quad \frac{d\bar{\omega}}{d\tau} = -\frac{\bar{u}\bar{\omega}}{aA^2} - \frac{1}{2\tau} \left(\bar{\omega} - \frac{\mu}{aA^2} \sin \varphi \right), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \bar{\omega}, \\ \frac{d\bar{x}}{d\tau} &= \bar{u} \cos \varphi, \quad \frac{d\bar{y}}{d\tau} = \bar{u} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (38)$$

Первые три уравнения образуют замкнутую систему; решениям (36) соответствуют неподвижные точки этой системы $\bar{u} = -\mu$, $\bar{\omega} = 0$, $\varphi = 0$ и $\bar{u} = \mu$, $\bar{\omega} = 0$, $\varphi = \pi$ соответственно. Линеаризуем (38) вблизи них:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\bar{u}}{d\tau} &= -\frac{1}{2\tau} \Delta\bar{u}, \quad \frac{d\Delta\bar{\omega}}{d\tau} = \left(\pm\nu^2 - \frac{1}{2\tau} \right) \Delta\bar{\omega} \pm \frac{\nu^2}{2\tau} \Delta\varphi, \\ \frac{d\Delta\varphi}{d\tau} &= \Delta\bar{\omega}, \quad \nu^2 = \frac{\mu}{aA^2}. \end{aligned} \quad (39)$$

где верхний знак соответствует первому решению, а нижний — второму. Решения этой системы соответственно имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta\bar{u} &= \frac{C}{\sqrt{\tau}}, \Delta\varphi = e^{-\nu^2\tau} \left(A + B\frac{\sqrt{\pi}}{\nu} \operatorname{erfi}(\nu\sqrt{\tau}) \right), \\ \Delta\bar{\omega} &= \frac{B}{\sqrt{\tau}} - \nu^2 e^{-\nu^2\tau} \left(A + B\frac{\sqrt{\pi}}{\nu} \operatorname{erfi}(\nu\sqrt{\tau}) \right), \\ \Delta\bar{u} &= \frac{C}{\sqrt{\tau}}, \Delta\varphi = e^{\nu^2\tau} \left(A + B\frac{\sqrt{\pi}}{\nu} \operatorname{erf}(\nu\sqrt{\tau}) \right), \\ \Delta\bar{\omega} &= \frac{B}{\sqrt{\tau}} + \nu^2 e^{-\nu^2\tau} \left(A + B\frac{\sqrt{\pi}}{\nu} \operatorname{erf}(\nu\sqrt{\tau}) \right),\end{aligned}$$

где A, B, C — постоянные интегрирования, а erf и erfi — вещественная и мнимая функции ошибок:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{erfi}(z) = -i \operatorname{erf}(iz) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt.$$

Можно показать, что $e^{-z^2} \operatorname{erfi}(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$, таким образом получаем, что неподвижная точка $\bar{u} = -\mu, \bar{\omega} = 0, \varphi = 0$ системы (38) неустойчива, а неподвижная точка $\bar{u} = \mu, \bar{\omega} = 0, \varphi = \pi$ асимптотически устойчива в линейном приближении. Как известно, из линейной асимптотической устойчивости следует устойчивость по Ляпунову.

Следовательно с учетом (36) и предположения $a > 0$ мы заключаем, что решение 1), при котором центр масс располагается выше точки контакта лезвия, неустойчиво, а решение 2), при котором центр масс находится ниже точки контакта лезвия, является устойчивым.

В работе [19] показано, что в первом приближении по углу наклона χ почти все решения стремятся к решениям второго типа (36). Как показывают численные исследования, это остается справедливым при произвольных углах наклона плоскости.

Гипотеза 1 Почти все решения системы (33), (35) стремятся к решению 2), соответствующему прямолинейному равномерному скольжению саней вдоль прямой наибольшего ската, при котором центр масс находится ниже точки контакта лезвия.

Для численной иллюстрации справедливости гипотезы будем задавать начальные условия на плоскости $(\varphi, \dot{\varphi} = \omega)$ и закрашивать ее различными оттенками серого цвета в зависимости, от количества полуоборотов совершенных телом, прежде чем асимптотически перейти к равномерному скольжению вдоль прямой наибольшего ската (при этом тело будет ориентироваться либо одной, либо другой стороной вдоль этой прямой). Результаты расчетов приведены на рис. 20*a, b, c*.

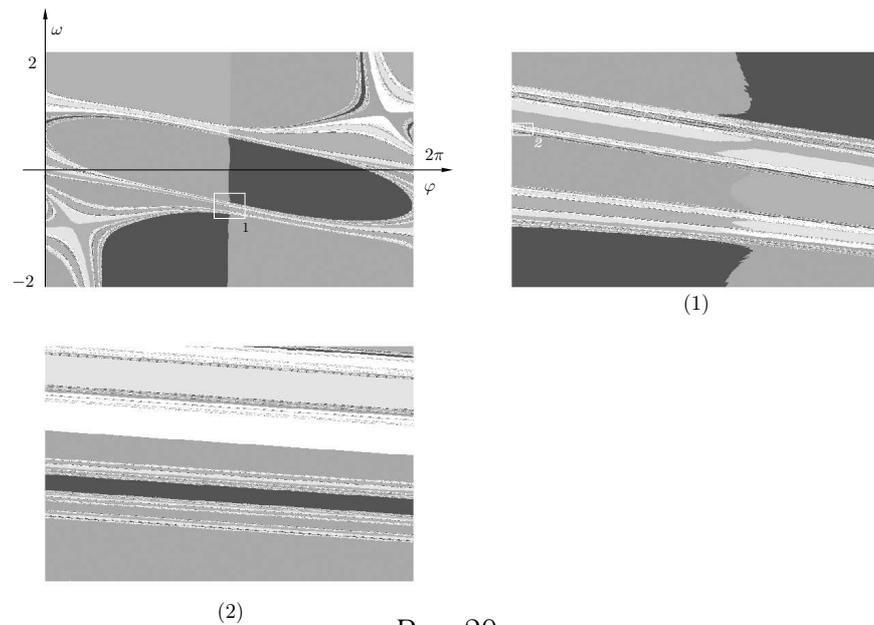
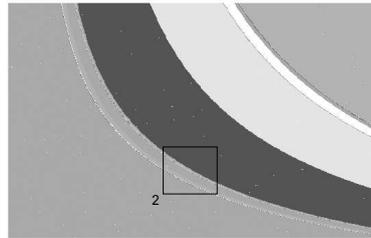
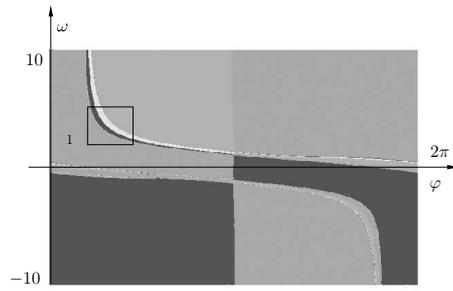


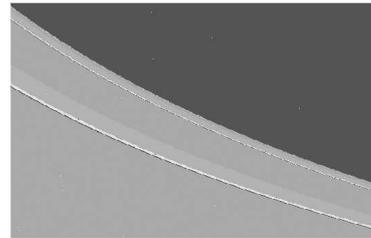
Рис. 20а

Рис. 21. $u_0 = 0, a = 1, \mu = 0.5, I = 10$.

Как видно, в зависимости от значений параметров (a, u_0, μ, t, I) , граница указанных областей может иметь сложный фрактальный характер, что соответствует вероятностному описанию системы. Здесь мы имеем дело с некоторым типом хаоса, который может быть назван асимптотическим и обусловленным неопределенностью поведения в зависимости от начальных условий.



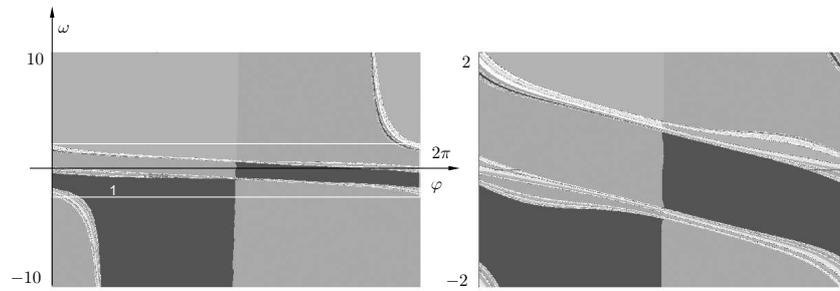
(1)



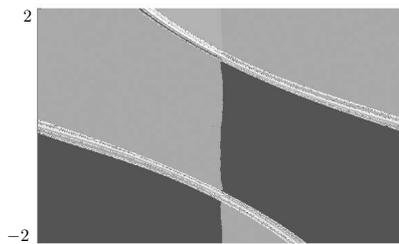
(2)

Рис. 21b

Рис. 22. $u_0 = 0, a = 0.5, \mu = 1, I = 3$.



$u_0=1, a=1, \mu=1, m=0.5, I=10$ 1)



$u_0=5, a=1, \mu=1, m=0.5, I=10$

Рис. 22с

2. Уравнения Лиувилля. Адиабатический хаос

Уравнения Лиувилля являются частным случаем уравнений

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) - (\mathbf{M}, \mathbf{K}),$$

описывающих свободное движение твердого тела с гироскопом. Ж. Лиувилль изучал уравнения для случая явной зависимости $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{K}(t)$. Он привел некоторые простые случаи интегрируемости этих уравнений. Если $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{K}(t)$ медленно меняются во времени, то систему можно разделить на медленную и быструю составляющие. В таких системах реализуются многочисленные переходы через сепаратрису, сопровождающиеся вероятностными эффектами (см. главу 1).

2.1. Гамильтоновы системы с полутора степенями свободы. Скачки адиабатического инварианта и адиабатический хаос

Рассмотрим неавтономную гамильтонову систему с одной степенью свободы и медленно меняющимся временем, т. е. явно зависящую от $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon \ll 1$. Отметим, что тем не менее все приведенные ниже рассуждения справедливы для автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, эволюцию которых можно разделить на медленную и быструю составляющую. Некоторые из таких систем рассмотрены в работах [20, 21].

Для системы с полутора степенями свободы

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (40)$$

мы предполагаем, что гамильтониан $H = H(p, q, \tau)$ является аналитической (гладкой) функцией переменных q, p, τ и периодически зависит от фазы q и медленного времени $\tau = \tau_0 + \varepsilon t$ ($0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, $0 \leq \tau_0 < 1$). Периодическая зависимость гамильтониана от времени позволяет определить «медленное» отображение Пуанкаре, как отображение за период $\tau \bmod 2\pi \left(t \bmod \frac{2\pi}{\varepsilon} \right)$. Предполагается также, что при каждом фиксированном значении параметра $\tau = \tau_0$, «замороженная» интегрируемая система с гамильтонианом $H = H(p, q, \tau_0)$ имеет сепаратрисы одного и того же (гомоили гетероклинического) типа. Уравнениями типа (40) описываются, например, маятник с медленно меняющейся длиной и некоторые физические про-

блемы, возникающие в теории плазмы [22, 23]. Для описания эволюции системы вдали от сепаратрис используют адиабатическое и улучшенное адиабатическое приближение, соответствующие двум первым шагам стандартной теории возмущений [24]. Если в системе (40) перейти к переменным действие-угол (I, φ) для каждого фиксированного τ_0 («замороженная» система), то уравнения движения примут вид

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \omega_0 + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}, \quad (41)$$

а гамильтониан можно представить в форме

$$H = H_0(I, \tau) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \tau).$$

Согласно теореме об усреднении в одночастотных системах [22] переменная действие (I) вдали от сепаратрис испытывает изменение порядка ε на временах $\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. является адиабатическим инвариантом (АИ) (согласно КАМ-теории это справедливо на произвольных временах при выполнении условий нелинейности).

Более точное описание поведения системы (41) может быть получено при выполнении следующего шага теории возмущений. Можно определить улучшенный адиабатический инвариант (УАИ) J в виде

$$J = I + \varepsilon u(p, q, \tau), \quad u = -\frac{1}{\omega_0} (H_1(p, q, \tau) - \langle H_1 \rangle),$$

где скобками $\langle \dots \rangle$ обозначено усреднение по φ . Уравнения движения для УАИ

$$\dot{J} = -\varepsilon^2 \frac{\partial H_2}{\partial J}. \quad (42)$$

Таким образом улучшенный адиабатический инвариант вдали от сепаратрис испытывает колебания порядка ε^2 .

Вблизи сепаратрисы адиабатическое описание системы уже не является корректным и нуждается в уточнении. В зависимости от начальных условий возможны два типа поведения адиабатического инварианта в области вблизи сепаратрисы.

В первом случае, соответствующем прохождению через резонанс, траектория проходит его, не застревая, а УАИ испытывает скачок порядка ε [24, 25], в то время как в областях вдали от сепаратрисы изменение УАИ

имеет величину порядка ε^2 . Как замечено в работе [26], если изменение УАИ согласовано с изменением фазы, в этом случае возможно появление периодических устойчивых траекторий. Мера островков устойчивости вблизи них при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет порядок единица, хотя и очень мала ($\sim 2\%$).

Во второй ситуации [22], соответствующей захвату в резонанс, точка, попавшая в окрестность сепаратрисы, начинает двигаться так, чтобы приблизительно сохранялась возникшая соизмеримость, что приводит к изменению УАИ на величину порядка 1 за времена порядка $\frac{1}{\varepsilon}$. Однако, как показано в [22], мера таких траекторий при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к нулю как $\sqrt{\varepsilon}$.

Здесь мы рассматриваем траектории, которые не захватываются в резонанс и не лежат в окрестности периодических траекторий вблизи сепаратрисы. Мера таких траекторий близка к полной и для них применимо вероятностное описание.

В работе [24] получены формулы для величины скачка УАИ ΔJ при переходе через сепаратрису. Величина скачка является функцией от случайной величины с заданным распределением. При многократном прохождении через сепаратрису изменения АИ носят характер блужданий со случайным шагом и возникает ненулевая вероятность обнаружить значение УАИ, отличающееся от начального на величину порядка единицы через $\sim \frac{1}{\varepsilon}$ шагов отображения Пуанкаре. Такого рода стохастические процессы в динамической системе обычно называют *адиабатическим хаосом*. Отметим, однако, что возникновение такого хаоса сопровождается также обычными эффектами — расщеплением сепаратрис и появлением квазислучайных колебаний [23, 27]. Для адиабатического хаоса характерно то, что *область хаоса не уменьшается при $\varepsilon \rightarrow 0$* в отличие от стандартной ситуации [22, 28].

Общие формулы для скачка адиабатического инварианта в гамильтоновых системах, а также их применение к различным задачам механики и физики приведены в [24, 25, 29, 30]. В п. 2.2 рассматривается система, сепаратрисы которой при фиксированных $\tau = \tau_0$ находятся в областях, заштрихованных на рис. 23. Если фазовый портрет «замороженной» системы остается симметричным относительно оси Op (рис. 24), то для траекторий, пересекающих сепаратрису величина скачка УАИ вычисляется по формуле

$$\Delta J = -\frac{\varepsilon \Theta(\tau^*) a}{2\pi} \ln 2 \sin \pi \xi + \mathcal{O} \left(\varepsilon^{3/2} \left(|\ln \varepsilon| + \frac{1}{1-\xi} \right) \right), \quad (43)$$

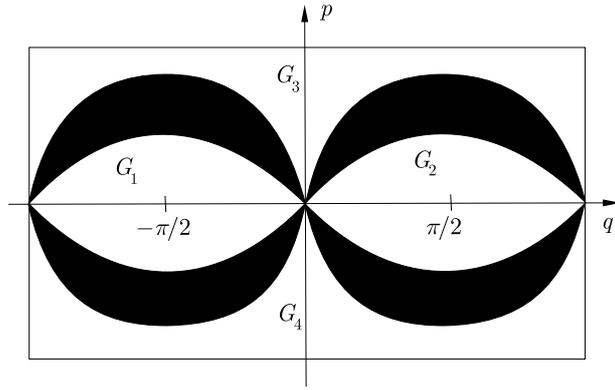


Рис. 23. Сепаратрисы системы (47) при $\delta = \delta_{min} = \frac{1}{4}$ и $\delta = \delta_{max} = \frac{3}{4}$.

где $\Theta(\tau) = \frac{dS}{dt}$ скорость изменения площади области, ограниченной одной из сепаратрис, τ^* — момент выхода на сепаратрису, который определяется из уравнения $I(\tau^*) = \frac{S(\tau^*)}{2\pi}$, $a = \left[-\det \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \right\| \right]^{-1/2}$. Значение $\xi \in (0, 1)$ при малом изменении ($\sim \varepsilon$) начальных условий изменяется на величину ~ 1 , поэтому ξ можно считать случайной величиной, распределение которой в силу гамильтоновости системы следует считать равномерным [24]. Для несимметричных областей формула (43) усложняется [24].

2.2. Динамика твердого тела с медленно меняющимися параметрами

Уравнения Лиувилля имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad H = \frac{1}{2}((\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) - (\mathbf{M}, \mathbf{K})), \quad (44)$$

где $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ — матрица с элементами $a_i = 1/I_i$ (I_i — главные моменты инерции), вектор $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$ описывает постоянный гиростатический момент в теле.

Напомним, что если \mathbf{A} , \mathbf{K} не зависят от времени, то получается система Жуковского–Вольтерра. В случае явной зависимости $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{K}(t)$ от времени уравнения (44) изучались Ж. Лиувиллем, который также заметил ряд простейших интегрируемых случаев. Более полное изучение интегрируемости и доказательство неинтегрируемости системы в случае периодической зависимости $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{K}(t)$ от времени методом расщепления сепаратрис выполнено в работе [32], в которой зависимость от времени не являлась мед-

ленной, а система мало отличалась от интегрируемой.

Здесь мы рассмотрим ситуацию, в которой \mathbf{A} и \mathbf{K} медленно меняются со временем с периодом $\frac{2\pi}{\varepsilon}$. Уравнения (44) можно записать в канонической форме на поверхности интеграла $M^2 = G^2$, если воспользоваться заменой переменных

$$M_1 = G\sqrt{1-p^2} \sin q, \quad M_2 = G\sqrt{1-p^2} \cos q, \quad M_3 = Gp. \quad (45)$$

Если, кроме того, нормировать время и параметры по формулам $dt' = (a_3 - a_1)dt$, $\delta = (a_2 - a_1)/(a_3 - a_1)$, $v_i = a_i K_i (a_3 - a_1)$, то получим каноническую систему с гамильтонианом (46)

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\delta(1-p^2) \cos^2 q - v_1\sqrt{1-p^2} \sin q - v_2\sqrt{1-p^2} \cos q - v_3p. \quad (46)$$

В случае отсутствия гиростатического момента $\mathbf{K} = 0$, гамильтониан (46) упрощается

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\delta(1-p^2) \cos^2 q, \quad \delta = \delta(\tau) = \delta(\tau_0 + \varepsilon t). \quad (47)$$

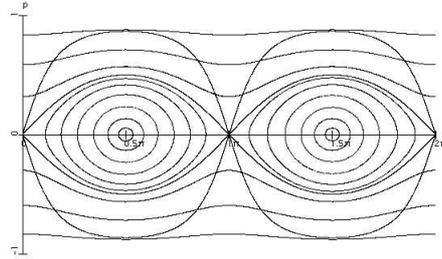


Рис. 24. Фазовый портрет «замороженной» системы (47) при $\tau = 0.5$.

Предположим, что в (47) параметр δ меняется по закону

$$\delta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos 2\pi\tau \right). \quad (48)$$

Для всякого $\tau = \tau_0$ фазовый портрет «замороженной» системы содержит симметричные сепаратрисы (рис. 24). Зависимость АИ от медленного времени τ приведена на рис. 25 (в силу симметрии переменные действия совпадают в областях G_1 и G_2 , и также в G_3 и G_4). Жирной линией указана кривая

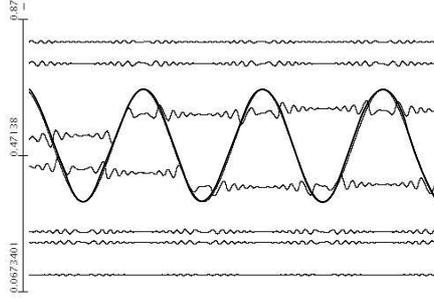


Рис. 25. Зависимость действия от времени для отдельных траекторий из различных областей. (Периодическая кривая соответствует действию для сепаратрисы «замороженной» системы.)

изменения АИ для сепаратрисы «замороженной» системы. Вдали от сепаратрисы движение регулярно, и, с точностью до ε , $I = \text{const}$, а области хаоса соответствует отрезок $[I_{min}, I_{max}]$ (в данном случае $I_{min} = 1/3$, $I_{max} = 2/3$). Для отображения Пуанкаре T через период $\tau \bmod 1$ в области, ограниченной кривыми $I = I_{min}$, $I = I_{max}$, можно наблюдать стохастическое поведение, а поведение АИ носит характер скачков со случайным шагом порядка ε .

Величина скачка УАИ при однократном пересечении сепаратрисы дается выражением

$$\Delta J = -\frac{1}{2\pi}\varepsilon a \Theta(\tau^*) \ln 2 \sin \pi \xi + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2} (|\ln \varepsilon| + (1 - \varepsilon)^{-1})), \quad (49)$$

где $\Theta(t) = \frac{2\delta'}{\sqrt{\delta(1-\delta)}}$ скорость роста площади под сепаратрисой для гамильтониана (47),

$$a = \frac{1}{\sqrt{\delta(1-\delta)}}.$$

Поскольку за один период по τ траектория пересекает сепаратрису дважды, причем во второй величина $\Theta(\tau^*)$ имеет то же значение с противоположным знаком, то суммарный скачок УАИ равен с точностью до ε

$$\Delta J = -\frac{\varepsilon a \Theta(\tau^*)}{2\pi} \ln \frac{\sin \pi \xi_1}{\sin \pi \xi_2} = -\varepsilon \frac{\delta'(\tau^*)}{2\pi(1-\delta)\delta} \ln \frac{\sin \pi \xi_1}{\sin \pi \xi_2}, \quad (50)$$

причем средние по случайным величинам ξ_1 и ξ_2 равны

$$\begin{aligned} \langle \Delta J \rangle &= 0, \\ \langle (\Delta J)^2 \rangle &= \varepsilon^2 \frac{a^2 \Theta^2(\tau^*)}{2\pi^2} \int_0^1 \ln^2(2 \sin \pi \xi) d\xi = \frac{a^2 \Theta^2(\tau^*)}{24}. \end{aligned} \quad (51)$$

Ниже приведем результаты численного исследования отображения Пуанкаре и скачков УАИ при условии ($\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{K} = 0$). Фазовые портреты для $\tau_0 = 0.5$ и различных ε , приведены на рис. 28 (a, b, c). Видно, что с

уменьшением ε область хаоса уменьшается, но остается ограниченной кривыми $I(p, q, \tau_0) = I_{min}$. Возникновение хаоса обусловлено случайным изменением УАИ в момент пересечения сепаратрисы. Изменение УАИ через промежуток времени $\sim 1/\varepsilon$ в зависимости от начальных условий приведено на рис. 26. На этом рисунке по оси x отложено начальное значение УАИ J_0 , по оси y скачок $\left(\frac{\Delta J}{\varepsilon}\right)^2$. При пересечении сепаратрисы, если не произошел захват в резонанс, то УАИ изменяется на величину порядка $\sim \varepsilon$. Этим моментам соответствуют невысокие пики на зависимости $\left(\frac{\Delta J}{\varepsilon}\right)^2 (J_0)$. Если траектория была захвачена в резонанс, тогда $\Delta J \sim 1$, и на зависимости $\left(\frac{\Delta J}{\varepsilon}\right)^2 (J_0)$ наблюдаются резкие максимумы. Ширина и высота максимума определяется параметрами и начальными условиями системы (47). В некоторых случаях для практически одинаковых в начальный момент траекторий величина УАИ может значительно отличаться после пересечения сепаратрисы (см. рис. 27).

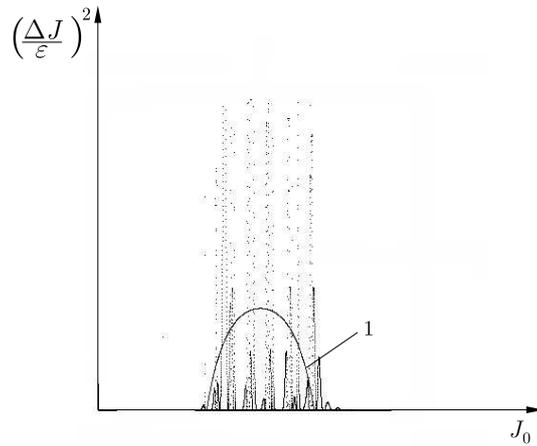


Рис. 26. Изменение УАИ через промежуток времени $\frac{1}{\varepsilon}$ в зависимости от начального значения J_0 , цифрой 1 обозначена аналитическая зависимость (51).

На рис. 26 также приведена аналитическая функция (51), которая отображает изменение УАИ, усредненное по φ ((41)) [24, 33]. Как видно, она является гладкой и не отражает в полной мере реальное поведение системы. В то же время использование численных методов позволяет детально исследовать эволюцию системы в зависимости от всего множества начальных условий при фиксированных параметрах. На рис. 29 приведен характерный

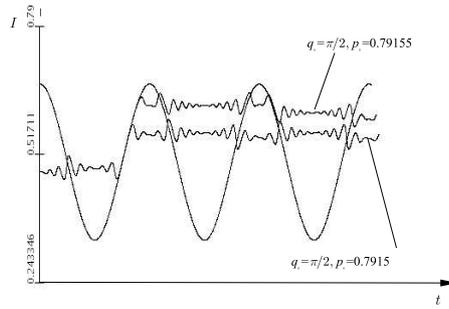


Рис. 27.

вид поверхности, описывающий изменение УАИ через промежуток времени $\sim 1/\varepsilon$ в зависимости от начального значения J_0 и начальной фазы φ_0 . Как видно, эта поверхность имеет очень сложный характер и не может быть описана аналитически. Можно также отметить, что в большинстве реальных физических систем даже малые значения ε , все-таки, достаточно велики чтобы можно было корректно использовать формулы (51). Приведенный здесь пример исследования скачков УАИ представляет собой один из возможных вариантов численного описания систем с медленно меняющимися параметрами. Другой вариант основан на анализе условий расщепления сепаратрис [21].

2.3. Расщепление сепаратрис и условия адиабатического хаоса

Рассмотрим случай, когда $K \neq 0$. Для простоты примем $K_1 = K_3 = 0$, $K_2 = K(\tau) = K(\varepsilon t)$. Фазовый портрет «замороженной» системы (интегрируемый случай Жуковского–Вольтерра) имеет вид, показанный на рис. 30. Для системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\delta(1 - p^2) \cos^2 q - v\sqrt{1 - p^2} \cos q \quad (52)$$

справедливы условия возникновения адиабатического хаоса, получающиеся из анализа скачков АИ и условий, полученных методом расщепления сепаратрис. На рис. 31 показан характерный фазовый портрет системы (52), аналогично предыдущему случаю хорошо различимы области хаоса, ограниченные кривыми $I(p, q, \tau_0) = I_{min}$ и $I(p, q, \tau_0) = I_{max}$.

Как показано в работах [23, 27, 34], необходимые условия расщепления сепаратрис отображения Пуанкаре системы (52) могут быть получены

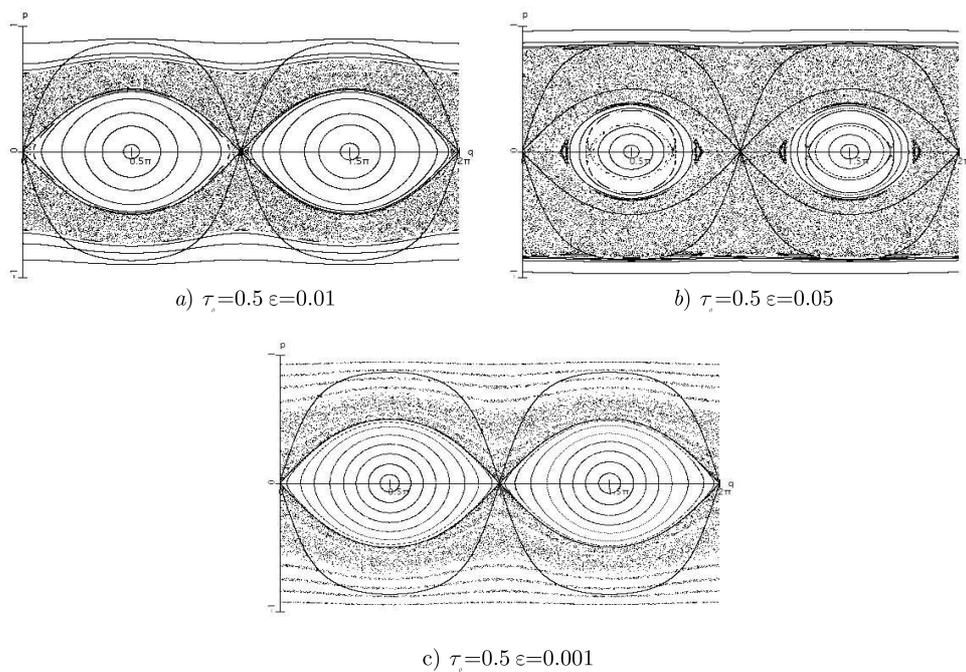


Рис. 28. Фазовый портрет для «медленного» отображения Пуанкаре системы (47) при $\varepsilon = 0.01$ (a), $\varepsilon = 0.05$ (b) и $\varepsilon = 0.001$ (c).

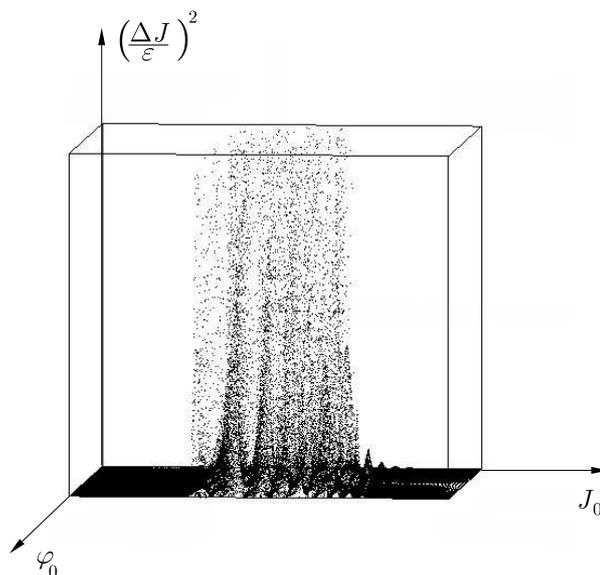


Рис. 29.

в первом порядке по ε из анализа «адиабатического» интеграла Пуанкаре—

Мельникова. Если уравнения движения системы (52) записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(p, q, \delta(z), v(z)), \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q, \delta(z), v(z)), \\ \dot{z} &= \varepsilon, \end{aligned} \quad (53)$$

где $\delta(z), v(z)$ — периодические функции с периодом $2\pi n$, то в расширенном фазовом пространстве отображение Пуанкаре задается сечением траекторий плоскостями $z = z_0 + 2\pi n, n \in Z$. Согласно результатам [27] в первом порядке по ε величина расщепления сепаратрис на плоскости сечения Пуанкаре одинакова вдоль почти всей сепаратрисы «замороженной» системы и зависит от параметра z_0 , определяющего сечение Пуанкаре. Эта величина пропорциональна адиабатической функции Пуанкаре–Мельникова

$$M_A(z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial H}{\partial z}(p_0(t, z_0), q_0(t, z_0), z_0) - \frac{\partial H}{\partial z}(P(z_0), Q(z_0), z_0) \right] dt, \quad (54)$$

где (p_0, q_0, z_0) — решение для сепаратрисы «замороженной» системы. Геометрический смысл функции (54) состоит в том, что [27, 34]

$$M_A(z) = \frac{dA}{dz(z)}, \quad (55)$$

где $A(z)$ — площадь под сепаратрисой «замороженной» системы. Для того, чтобы в первом порядке сепаратрисы не расщеплялись, необходимо, чтобы $A(z) = \text{const}$ для любого z .

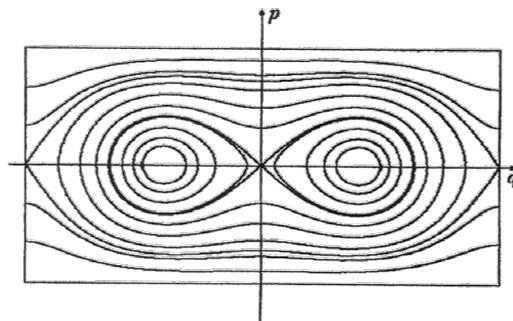


Рис. 30. Фазовый портрет «замороженной» системы (53) при $v = 0.1, \tau_0 = 0.5$

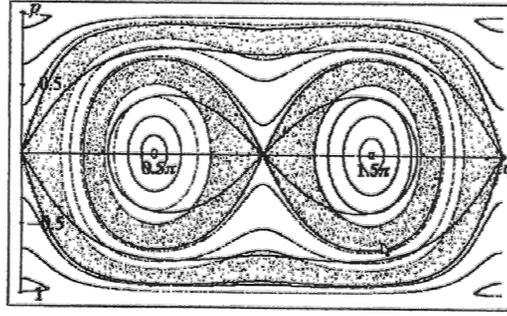


Рис. 31. Фазовый портрет «медленного» отображения Пуанкаре системы (53) при $v = 0.1$, $\delta = 0.5(1 + 0.3 \cos 2\pi\tau)$, $\varepsilon = 0.05$, $\tau = 0$.

Рассмотрим систему с гамильтонианом (52). В случае $K = 0$ ($v_1 = v_2 = v_3 = 0$) сепаратрисы «замороженной» системы имеют вид, показанный на рис. 23, а величина площади $A(z)$ легко вычисляется

$$A(z) = \int p(H(P(z), Q(z), z))dq = \arcsin \sqrt{\delta(z)}. \quad (56)$$

Требование $A(z) = \text{const}$ приводит к условию $\delta(z) = \text{const}$, определяющему обычный случай Эйлера—Пуансо. Вычисление интеграла (56) дает выражение

$$M_A(z) = \frac{\delta'(z)}{2\sqrt{\delta(1-\delta)}}, \quad (57)$$

которое показывает, что при медленно периодически меняющемся δ сепаратрисы возмущенной задачи всегда расщеплены и трансверсально пересекаются. Это приводит к аналитической неинтегрируемости возмущенной задачи, возникновению квазислучайных колебаний и стохастического слоя.

Картина расщепленных сепаратрис при различных значениях параметра $z_0 = \tau_0$ приведена на рис. 32, 33, 34, на которых видно, что почти вдоль всей длины сепаратрис расстояние между ними постоянно и зависит от z_0 , как это и предсказывается формулой (54).

В случае, когда $v_1 = v_3 = 0$, $v_2 = v$ ($0 < v < \delta < 1$) фазовый портрет «замороженной» системы имеет вид, показанный на рис. 30 (фазовый портрет системы Жуковского—Вольтерра). Заметим, что в данной ситуации условия расщепления разных пар сепаратрис не совпадают и в любом случае одна пара сепаратрис будет расщепляться. Вычисление площади $A(z)$

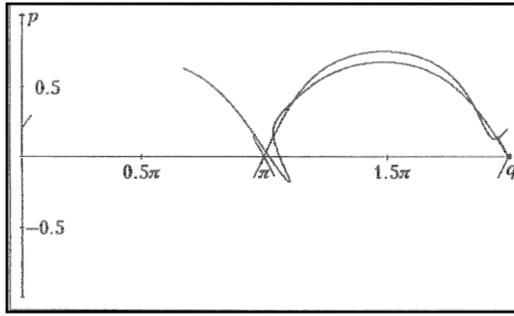


Рис. 32. Сепаратрисы системы (53) при $\tau_0 = -\frac{1}{4}$ ($\varepsilon = 0,05$)

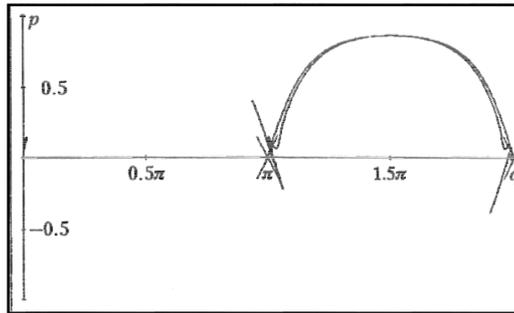


Рис. 33. Сепаратрисы системы (53) при $\tau_0 = 0$ ($\varepsilon = 0,05$)

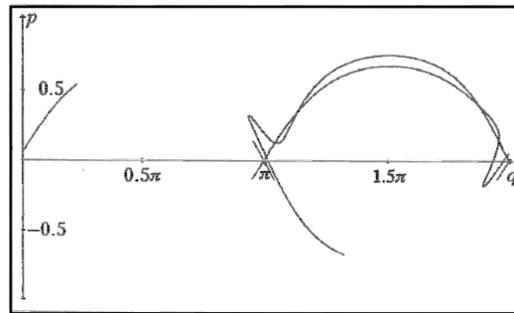


Рис. 34. Сепаратрисы системы (53) при $\tau_0 = \frac{1}{2}$ ($\varepsilon = 0,05$)

для одной пары сепаратрис приводит к выражению

$$A_1(z) = 4 \left[\arcsin b - \frac{v}{1-\delta} \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}}{a - \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}} \right| \right], \quad (58)$$

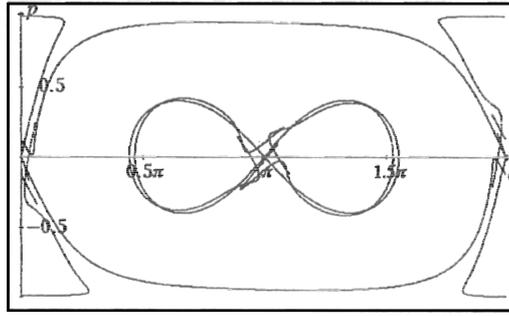


Рис. 35. Сепаратрисы системы (53) при $\tau_0 = \frac{1}{4}$ в случае соблюдения условия $A(z) = \text{const}$ ($\varepsilon = 0.05$)

где $b = \sqrt{\delta - v}$, $v = \frac{\delta}{1 - \delta}$. (Площадь для другой пары $A_2(z)$ получается из $A_1(z)$ заменой $v \rightarrow -v$). На рис. 35 приведены сепаратрисы возмущенной задачи при соблюдении условий $A_1(z) = \text{const}$; видно, что одна пара сепаратрис «не расщепляется» — для нее расстояние между сепаратрисами постоянно вдоль длины и пропорционально ε^2 , другая пара остается при этом расщепленной пропорционально ε . Картина хаоса при выполнении условий «нерасщепления» показана на рис. 36, где хорошо заметно, что стохастический слой вблизи «нерасщепленных» сепаратрис имеет толщину порядка ε . Заметим, что для «нерасщепляющихся» сепаратрис $\Theta \equiv 0$, поэтому формулы (43, 49) для скачка УАИ, приведенные выше, несправедливы. Сравним условия возникновения хаоса, полученные из анализа расщепления сепаратрис со сценарием развития адиабатического хаоса вследствие нерегулярных скачков АИ. Если сепаратрисы расщепляются, то в переменных I, τ поведение АИ изображено на рис. 37а, если $A_1(z) \equiv \text{const}$ — на рис. 37б. Эти рисунки показывают, что условие $A(z) \equiv \text{const}$ препятствует возникновению адиабатического хаоса в областях, лежащих вне ε -окрестности сепаратрисы. Хаос в этой окрестности имеет характерные масштабы порядка ε^2 .

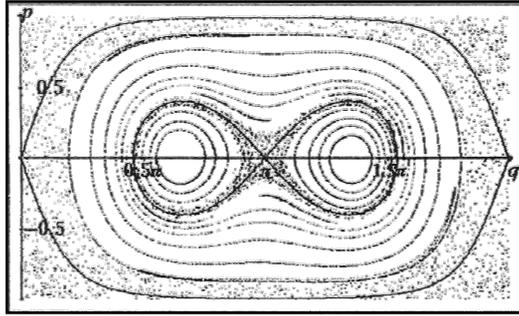


Рис. 36. Фазовый портрет «медленного» отображения Пуанкаре системы (53) при $A(z) = \text{const}$, $\tau_0 = \frac{1}{4}$, $\varepsilon = 0.05$

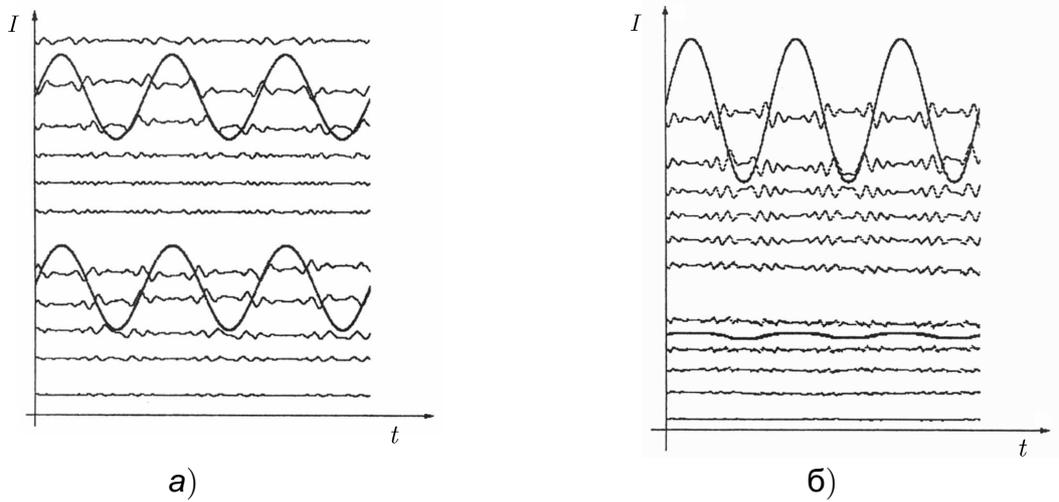


Рис. 37. Зависимость переменной I для различных траекторий системы (53) при: а) $v = 0.1$, $\delta = 0.5(1 + 0.3 \cos 2\pi\tau)$, б) $A_1(z) = 0.8$. Жирной линией указано действие для сепаратрис «замороженной» системы.

3. Численные методы в динамике вихрей и задачах рассеяния

3.1. Введение.

В работе указаны новые периодические решения трех и четырех одинаковых вихрей на сфере, соответствующие хореографиям вихрей на плоскости. Описаны различные способы получения хореографий произвольного числа вихрей на сфере, — наиболее интересные из них связаны с расщеплением статических симметричных конфигураций вихрей на сфере.

3.2. Уравнения движения и первые интегралы для вихрей на сфере.

Для n точечных вихрей двигающихся по сфере S^2 , со сферическими координатами (θ_i, φ_i) и интенсивностями Γ_i , уравнения могут быть записаны в гамильтоновой форме [35, 36, 37]

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_i}, \quad \dot{\varphi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (59)$$

где гамильтониан

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i < k}^n \Gamma_i \Gamma_k \ln M_{ik}, \quad M_{ik} = 4R^2 \sin^2 \frac{\gamma_{ik}}{2}, \quad (60)$$

а скобка Пуассона определена соотношением $\{\varphi_i, \cos \theta_k\} = \frac{\delta_{ik}}{R^2 \Gamma_i}$. Здесь R — радиус сферы, M_{ik} — взаимное расстояние, γ_{ik} — угол между векторами, соединяющими центр сферы с точечными вихрями i и k ,

$$\cos \gamma_{ik} = \cos \theta_i \cos \theta_k + \sin \theta_i \sin \theta_k \cos(\varphi_i - \varphi_k).$$

Помимо гамильтониана уравнения (59) имеют три независимых неинволютивных интеграла

$$\begin{aligned} F_1 &= R \sum_{i=1}^n \Gamma_i \sin \theta_i \cos \varphi_i, & F_2 &= R \sum_{i=1}^n \Gamma_i \sin \theta_i \sin \varphi_i, \\ F_3 &= R \sum_{i=1}^n \Gamma_i \cos \theta_i, \end{aligned} \quad (61)$$

которые являются компонентами вектора $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = \sum \Gamma_i \mathbf{r}_i$, где $(\mathbf{r}_i - \text{радиус векторы вихрей})$. Вектор \mathbf{F} называют *моментом завихренности*.

В задачах вихревой динамики важное значение имеет момент системы вихрей D , который выражается через компоненты F_i

$$D = \sum \Gamma_i \Gamma_j M_{ij} = \left(R \sum \Gamma_i \right)^2 - F_1^2 - F_2^2 - F_3^2. \quad (62)$$

В случае трех вихрей имеем полностью интегрируемую систему [36, 37]. Задача четырех вихрей в общем случае неинтегрируема [38].

3.3. Хореографии в движении трех и четырех вихрей на сфере

В работе [39] указан конструктивный алгоритм редукции системы (59) на две степени свободы с помощью интегралов (61). Таким образом, в задаче трех и четырех вихрей на сфере приведенная система имеет одну и две степени свободы, соответственно. При этом каждому периодическому решению приведенной системы соответствует двухчастотное движение вихрей на сфере. Можно показать (по аналогии с плоским случаем [37, 40]), что эти движения обладают следующими свойствами

Если $\gamma(t)$ — периодическое решение (периода T) приведенной системы, тогда

1° существует система координат, вращающаяся равномерно с некоторой угловой скоростью Ω_a вокруг центра завихренности, в которой каждый вихрь движется по некоторой замкнутой кривой $\xi_i(t)$;

2° Если частота Ω_a соизмерима с $\Omega_o = \frac{2\pi}{T}$ (т. е. $\frac{\Omega_a}{\Omega_o} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}$), то вихри в неподвижной системе координат также описывают замкнутые кривые;

3° если какие-либо из кривых $\xi_i(t)$ переводятся друг в друга поворотом вокруг центра завихренности на угол, соизмеримый с 2π , то имеется (вращающаяся) система координат, в которой соответствующие вихри движутся по одной и той же кривой.

Как показано в [37, 40] для случая плоскости, если все вихри имеют одинаковую интенсивность, то при некоторых ограничениях на значения интегралов энергии и момента, существует вращающаяся система координат, в которой все вихри движутся по одной и той же кривой. Такое движение называется связной относительной хореографией [40]. Ниже с помощью чис-

ленных методов мы покажем, что это справедливо и в случае движения вихрей на сфере. Соответствующие скорости вращения системы координат обладают следующими свойствами

1° существует счетное множество вращающихся систем координат, в которых вихри движутся по замкнутым кривым. Их скорости вращения связаны соотношением вида:

$$\Omega_m^{(k)} = \Omega_\alpha^{(0)} + \frac{p}{q} \frac{2\pi}{T}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad (63)$$

где $\Omega_\alpha^{(0)}$ — базовая частота вращения системы координат, в которой хореография замыкается за минимально возможное время T ;

2° для сохранения связности хореографий значения p и q должны удовлетворять соотношению

$$mp = knq, \quad (64)$$

где m, n, k — некоторые целые числа;

3° при постоянном значении момента D частоты $\Omega_m^{(k)}$ зависят от энергии системы E

Можно показать, что свойства 1° – 3° также справедливы для периодических решений приведенной системы с произвольным числом вихрей на сфере. Далее мы построим (численно) базовую частоту $\Omega_\alpha^{(0)}$ для периодических решений приведенной системы в задачах трех и четырех вихрей на сфере и укажем абсолютные хореографии, т.е. движения при которых вихри движутся по одной и той же кривой в неподвижной системе координат.

Хореографии в случае трех вихрей. При фиксированном D минимальной энергией E_T обладает томсоновская конфигурация, когда все вихри располагаются на одной широте в вершинах правильного треугольника, а максимальная энергия E_C соответствует случаю, когда все вихри располагаются на одном вращающемся меридиане — в коллинеарной конфигурации [37].

Для случая трех вихрей на сфере, имеющих общую энергию E , если при постоянном значении момента D выполнено условие $E_T < E < E_C$, то угловая скорость вращающейся системы, в которой относительная хореография замыкается за минимально возможное время T , и в которой она имеет самый простой вид, так же, как и другие частоты относительных хореографий,

определяется аналогично случаю на плоскости

$$\Omega_1^{(0)}(E) = \Omega_a(E) - \Omega_0(E), \quad \Omega_m^{(k)}(E) = \Omega_1^{(0)}(E) + \frac{3k}{m}\Omega_0(E), \quad (65)$$

где Ω_a, Ω_0 — частоты, определенные в свойствах 1° – 3° периодического решения $\gamma(t)$ приведенной системы. Абсолютные хореографии, при этом, задаются решениями

$$\Omega_m^{(k)}(E) = 0. \quad (66)$$

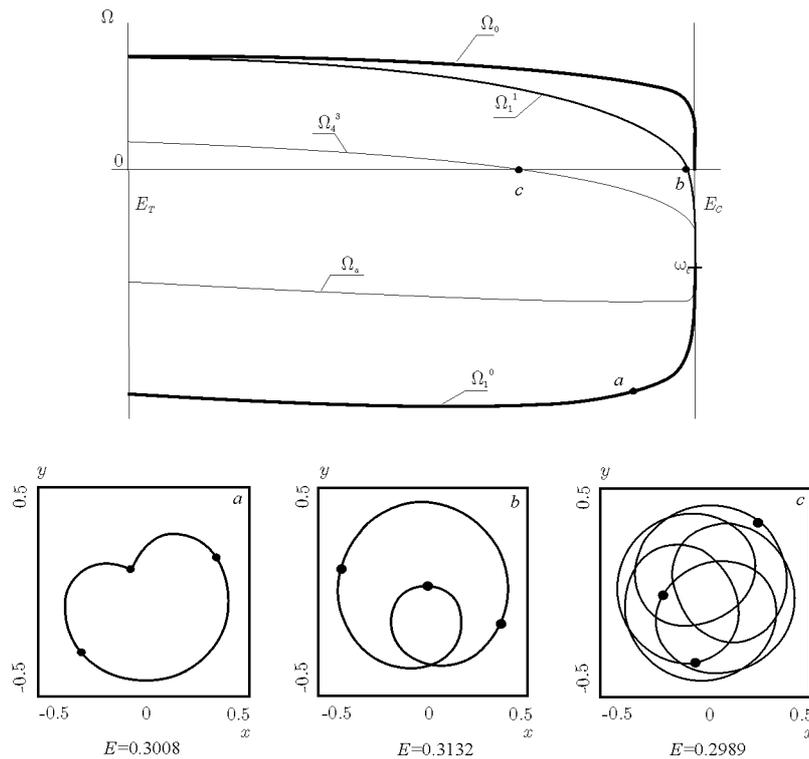


Рис. 38. Графики зависимости угловых скоростей $\Omega_1^{(1)}$ и $\Omega_4^{(3)}$ вращения относительных хореографий от энергии E . Точкам пересечения этих графиков с осью Ox соответствуют абсолютные хореографии трех вихрей, проекции которых на плоскость xy изображены ниже на рис. b и c. Толстыми линиями на рисунке изображены базовая угловая скорость $\Omega_1^{(0)}$, соответствующая наиболее простой относительной хореографии, изображенной на рис. a (при $E = 0.3008$), и частота $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ периодического решения системы (59).

На рис. 38 приведены зависимости от энергии E некоторых частот $\Omega_m^{(k)}$ относительных хореографий с отмеченными решениями (66). На рис. 38 также приведен вид хореографии для $\Omega_1^{(0)}(0.3008)$ (65).

Обобщение решений и хореографий в задаче четырех вихрей. Как было показано в [40], в задаче четырех вихрей на плоскости в окрестности томсоновского решения существует два невырожденных периодических решения приведенной системы. Одно из них соответствует решению Горячева [41], когда вихри в каждый момент времени движутся в вершинах параллелограмма, другое не имеет такой простой геометрической интерпретации. Тем не менее, оба решения определяют связанные относительные (и абсолютные) хореографии. В случае четырех вихрей на сфере также имеется пара аналогичных решений и им, также, соответствуют связанные хореографии. Одно из этих решений описывает движение, при котором вихри располагаются симметрично, относительно прямой, проходящей через диаметр сферы, и может быть исследовано аналитически. Второе решение допускает лишь численный анализ. Рассмотрим, сначала симметричный случай.

Частоты относительных хореографий в этом случае определяются аналогично задаче четырех вихрей на плоскости

$$\Omega_{2m}^{(k)}(E) = \Omega_2^{(0)}(E) + \frac{k}{m}\Omega_0(E), m — нечетное, k \in \mathbb{Z} \quad (67)$$

где $\Omega_2^{(0)}$ — частота, соответствующая наиболее простой связанной хореографии, которая замыкается за время $2T$, и при которой вихри дважды проходят одно и то же взаимное расположение. Частота $\Omega_2^{(0)}$ определяется через Ω_a и Ω_0

$$\Omega_2^{(0)} = \Omega_a + \frac{1}{2}\Omega_0 \quad (68)$$

Для второго решения наиболее простая связанная хореография соответствует движению вихрей по одной замкнутой кривой, проекция которой на плоскость изображена на рис. 39 (d). При этом за время T конфигурация вихрей повторяется один раз, соответственно частоту этой хореографии обозначим через $\Omega_1^{(0)}$, которая равна

$$\Omega_1^{(0)} = \Omega_a - \Omega_0. \quad (69)$$

Угловые скорости других относительных связанных хореографий определяются соотношением

$$\Omega_m^{(k)} = \Omega_1^{(0)} + \frac{4k}{m}\Omega_0, m — нечетное, k \in \mathbb{Z}. \quad (70)$$

Если в (70) перед k вместо 4 стоит множитель 2, то одна связная хореография разделяется на две, также связных хореографий, при этом каждую хореографию образуют два вихря.

На рис. 39 приведены частоты относительных хореографий в зависимости от энергии E для первого решения, соответствующего симметричному случаю. Как и в случае движения вихрей на плоскости частоты $\Omega_m^{(k)}$ могут быть получены во всем интервале энергий $E_T < E < E_C$. Для построения полных зависимостей $\Omega_m^{(k)}(E)$ второго решения требуется более высокая точность численных методов, а также модификация основных алгоритмов. Ввиду отсутствия полных данных, мы не будем приводить зависимости $\Omega_m^{(k)}(E)$ для второго решения, и ограничимся лишь некоторыми хореографиями, вид которых приведен на рис. 40 (d, e)

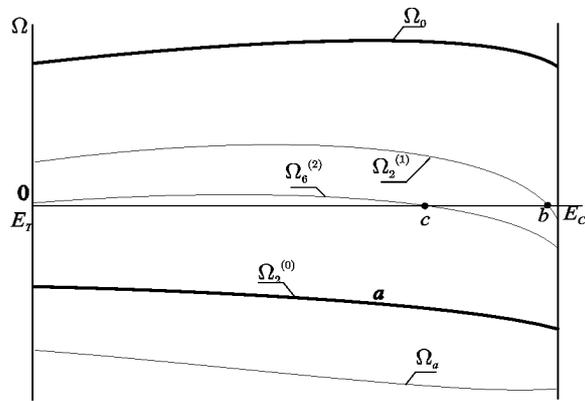


Рис. 39. Графики угловых скоростей вращения относительных хореографий четырех вихрей в зависимости от энергии E для симметричного случая. Точками b и c обозначены абсолютные хореографии, проекции которых на плоскость xy , изображены на рис. 40(b-c). Толстыми линиями изображены базовая угловая скорость $\Omega_2^{(0)}$, соответствующая наиболее простой относительной хореографии, проекция которой на плоскость xy , изображена на рис. а, и частота $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ периодического решения системы (59).

3.4. Хореографии n одинаковых вихрей

Пока не существует общего метода классификации всех возможных хореографий произвольного числа вихрей не только на сфере, но и на плоскости. В небесномеханической задаче n тел К. Симо произвел обширные компьютерные исследования и обнаружил различные классы симметричных и

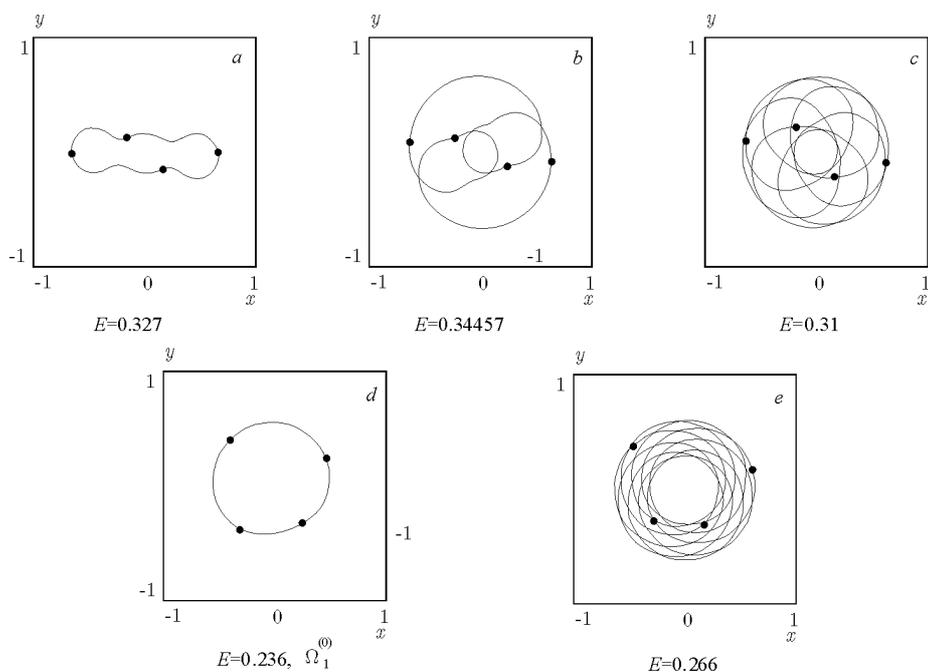


Рис. 40. (а-с) — хореографии к рис. (39); d — хореография базовой частоты $\Omega_1^{(0)}$ при $E = 0.236$ второго решения, e — абсолютная хореография второго решения при $E = 0.266$.

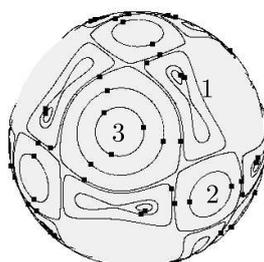


Рис. 41. Хореографии 12 одинаковых вихрей на сфере, получающиеся расщеплением тетраэдрической конфигурации при различных энергиях. Цифрами обозначено число вихрей, вращающихся вокруг одной из вершин образующихся правильных многогранников.

несимметричных хореографий для достаточно больших n . Его результаты представлены в виде анимации на сайте <http://www.maia.ub.es/dsg/index.html> (см. также [42]). Имея в виду также, что имеются не только абсолютные, но и относительные и многосвязные (когда m вихрей движутся по k замкнутым кривым, $m, k \in \mathbb{N}$), а также сопутствующие (сателлитные) хореографии, задача классификации в общем случае не представляется обозримой.

Тем не менее на сфере можно указать ряд весьма любопытных абсолютных многосвязных хореографий, допускающих различные дискретные симметрии. Они тесно связаны со статическими конфигурациями вихрей на сфере [36, 37, 43, 44]. Наиболее интересные из них образованы платоновыми телами и полигональными конфигурациями, в вершины которых помещены вихри одинаковой интенсивности. Как известно, это существование конфигураций обусловлено наличием дискретных групп симметрий, являющихся подгруппами непрерывной группы преобразований сферы $SO(3)$. Тривиальными относительно хореографиями являются стационарные конфигурации, которые также связаны с дискретными группами. Для сферы существуют аналоги томсоновских и коллинеарных конфигураций, которые наиболее изучены [37, 45]. В работе [46] показано, что для каждой дискретной группы и для каждой ее подгруппы существует некоторая стационарная конфигурация, для которой эта группа является группой симметрий, а ее подгруппа — стационарной подгруппой. Руководствуясь этой идеей, можно получить вложенные многоугольники, симметричные многогранники и пр. Количество вихрей в такой конфигурации равно отношению порядка группы к порядку ее стационарной подгруппы. Эти результаты, однако, трудно обозримо и представляют скорее некоторую ветвь алгебры, чем динамики.

Отметим также, что указанными симметричными статическими и стационарными конфигурациями не исчерпывается всё множество возможных конфигураций. Для случая плоскости известно [47, 48, 49], что при $n \geq 8$ существуют стационарные конфигурации, не обладающие ни одной симметрией. Такие конфигурации существуют, видимо, и для сферы, хотя соответствующее исследование, насколько нам известно, не проводилось.

Укажем здесь несколько простых путей получения абсолютных хореографий на сфере, основанных на использовании статических конфигураций — суперпозиции нескольких многоугольников, а также платоновых тел. Как правило эти хореографии являются многосвязными.

Первый из них, указанный в [50], связан с расщеплением указанных конфигураций, когда все вихри, например, находящиеся в вершинах платонова тела, расщепляются на $l \in \mathbb{N}$ равных (для всех вершин) вихрей, где l равно числу граней многогранника, сходящихся в соответствующей вершине. Для случая тетраэдра мы имеем четыре вершины и три грани. Таким об-

разом получается хореография из 12 одинаковых вихрей, каждые 3 из которых вращаются вблизи 4-х вершин тетраэдра (рис. 41). Интересно, что при изменении энергии получаются хореографии, при которых либо 2 вихря вращаются по замкнутой кривой около вершин октаэдра (их 6), либо по одному вихрю, вращающемуся вблизи вершин икосаэдра ($n = 12$). Таким образом имеются многосвязные хореографии, связанные с возмущениями вблизи платоновых тел.

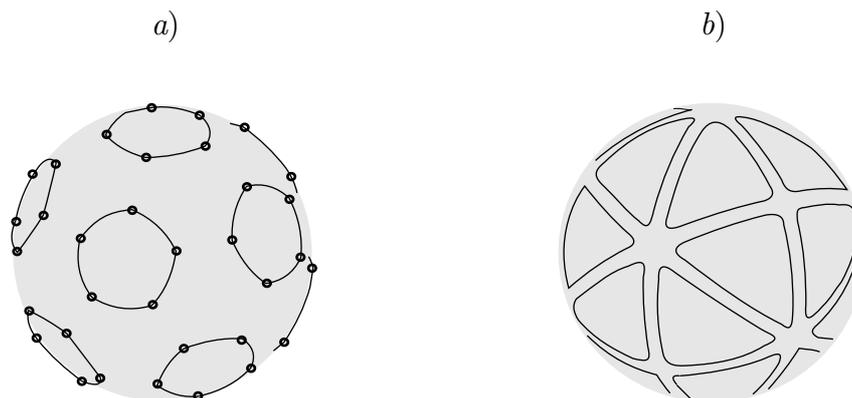


Рис. 42. а) бэкибол, б) танцующие вихри

Наиболее интересной хореографией, обсуждаемой в связи с указанным методом расщепления, является решение, называемое *бакиболом*, в котором 60 вихрей движутся вблизи вершин правильного икосаэдра (имеющего 12 вершин), по замкнутым кривым, содержащим по 5 вихрей (рис. 42 (а)). Другая хореография из 60 вихрей, также называемая бакиболом, образуется, когда около вершин додекаэдра (имеющего 20 вершин) движутся по одной кривой три одинаковых вихря (т. к. $60 = 12 \times 5 = 20 \times 3$). Напомним, что бакибол, или бакминстерфуллерен (обозначаемый C_{60}), является очень симметричной молекулой, в которой 60 атомов углерода размещены аналогично ячейкам футбольного мяча.

За открытие бакибола Smaley, Curl и Kroto в 1996 году была присуждена Нобелевская премия по химии. Это связано с необычной устойчивостью этой молекулы, тесно связанной с ее симметрией. Интересно, что в теории межатомного взаимодействия с логарифмическим гамильтонианом (аналогичным гамильтониану вихревой динамики), различные хореографии, возникающие из статических конфигурациях платоновых тел, объясняют явле-

ние кластеризации. Действительно, атомы в молекуле разбиваются на группы, которые совершают устойчивые движения по одной и той же траектории

Методом расщепления также можно получить класс любопытных решений, названных Т. Токиедой *танцующими вихрями* [51]. Эти периодические решения также имеют вид хореографий, а получаются, например, методом расщепления из платоновых тел. При этом, однако, каждая вершина расщепляется на n вихрей интенсивности Γ и на n вихрей интенсивности $-\Gamma$ (т. е. на вихревые пары). Указанные движения действительно очень привлекательны, отметим даже сходство терминологии, зародившейся в различных областях динамики (хореографии, танцующие вихри) и используемой для описания тождественных движений. Точнее, танцующие вихри являются лишь частным случаем хореографий. Танцующие вихри для случая тетраэдра приведены на рис. 42(b).

Хореографии типа танцующих вихрей можно получить, если каждую вершину правильного n -угольника с четным числом вершин, расположенную на экваторе, расщепить на пару одинаковых вихрей с противоположными знаками. Для случая $n = 2$ и $n = 6$ танцующие вихри, получающиеся таким образом, приведены на рис. 43.

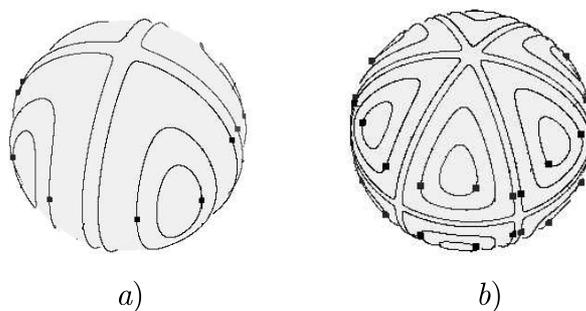


Рис. 43. Танцующие вихри для случая $n = 2$ (a) и $n = 6$ (b).

Укажем еще одну любопытную хореографию, указанную в [50] и названную *твистором*. Ее можно получить из двух равносторонних n -угольников, расположенных на равных широтах, долготы которых сдвинуты на π/n . Все вихри при этом имеют одинаковую интенсивность. В указанном периодическом решении вихри, принадлежащие одному многоугольнику, враща-

ются в одном направлении, а другому — в противоположном. Для случая $n = 2$ эти твисторные решения приведены на рис. 44 для различных значений энергии. Приведенные примеры не исчерпывают список различных классов танцующих вихрей (см. например [51]), который без труда может быть значительно расширен. В этом отношении интересна также работа [52].

Аналитические и численные исследования указанных классов периодических решений (существование, устойчивость, бифуркации и пр.) частично выполнены в работах [53, 54, 55], хотя полный анализ далек от завершения.

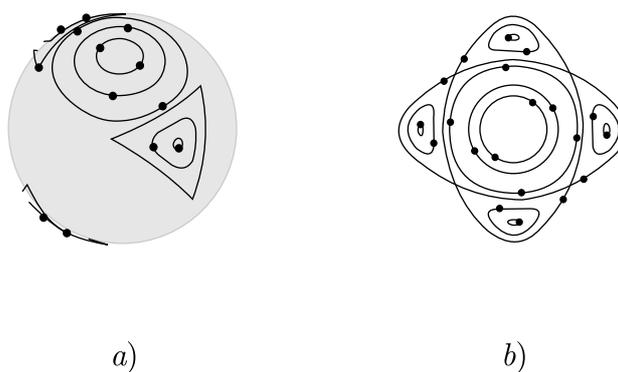


Рис. 44. Твисторные решения для случая $n = 2$ при различных энергиях: (а) — вид сбоку, (б) — вид сверху.

3.5. Возмущенное движение частиц жидкости в системе двух вихрей с противоположными интенсивностями

Уравнения движения Возмущенное движение частиц жидкости в системе двух вихрей описывается уравнениями

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (71)$$

с гамильтонианом

$$H = \Psi + \varepsilon\Phi,$$

где

$$\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{y}{2a} + \ln \left[\frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2} \right]^{1/2} \right)$$

гамильтониан невозмущенной системы двух вихрей, расположенных в точках с координатами $(0, \pm a)$ равномерно движущейся системы координат, и имеющих интенсивности $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma \neq 0$, $\Phi = -x \cos \lambda t$, $\lambda = \text{const}$, ε — малый параметр возмущения.

Рассеяние частицы жидкости При $\varepsilon = 0$ система (71) автономна и поэтому вполне интегрируема. Така эта система периодична по t , то будем следить за положениями частиц жидкости в моменты времени, кратные $2\pi/\lambda$. Совокупность перемещений частиц за время $2\pi/\lambda$ порождает отображение плоскости $R^2 = (x, y)$ на себя, которое называется отображением за период.

В [59] показано, что, если невозмущенная сепаратриса Λ_0 не лежит на прямой, то почти любое синусоидальное возмущение приводит к хаотизации течения вблизи Λ_0 . Аналогичный случай, при условии о непараллельности возмущающего поля и прямой, содержащей Λ_0 , справедлив и для прямолинейной сепаратрисы (там же).

Невозмущенное движение обладает стационарным полем скоростей с двумя особыми гиперболическими точками $(\pm \sqrt{3}a, 0)$, соединенные тремя парами сдвоенных сепаратрис. Для такого режима течения характерно симметричное расположение траектории движения частиц жидкости относительно осей системы координат. Это означает, что если в начальный момент времени частица жидкости имела координаты $(-x_0, y_0)$, причем координата x_0 расположена вдали от сепаратрис, то через некоторый промежу-

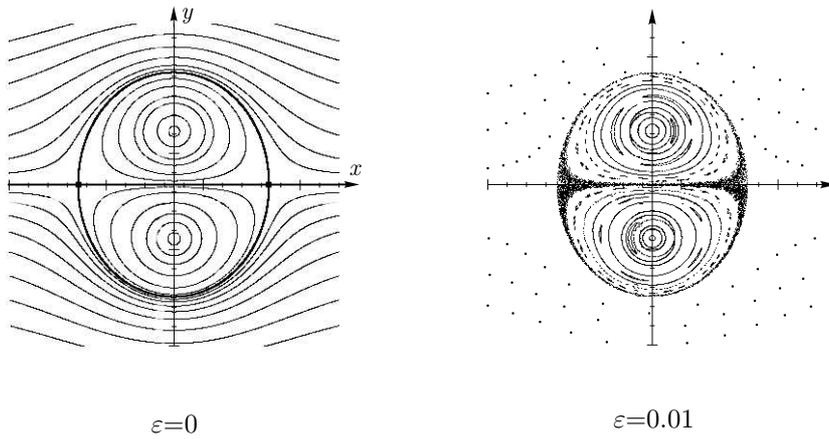


Рис. 45. Поле скоростей системы (71): а) стационарное, б) возмущенное ($\varepsilon = 0.01$)

ток времени эта частица придет в точку с координатами $x' = x_0$ и $y' = y_0$. Стационарное поле скоростей ($\varepsilon = 0$) изображено на рис. 45 а.

Такая детерминированность в движении жидкости исчезает при добавлении возмущения ($\varepsilon \neq 0$). При этом спелатрисы расщепляются и вблизи расщепленных сепаратрис образуются острова с хаотическим поведением траекторий частиц жидкости. Возмущенное поле скоростей ($\varepsilon = 0.01$) изображено на рис. 45 б.

Построим диаграмму рассеяния частицы жидкости на системе двух вихрей. Будем откладывать отклонение вертикальной координаты y' в точке $x = +x_0$, частицы, в зависимости от координаты y_0 в начальный момент в точке $x = -x_0$, т.е. построим зависимость

$$Y(Y_0) = y'(y_0|_{x=-x_0})|_{x=+x_0}.$$

Для невозмущенного случая зависимость $Y(Y_0)$ имеет вид прямой линии с углом наклона 45° (см. рис. 46 а). При наложении возмущения на прямой появляются периодически чередующиеся области максимума и минимума отклонения. По мере увеличения возмущения усиливается амплитуда и частота отклонения и при каком-то значении ε появляются области чередования максимумов и минимумов, близкие к хаотическим (см. рис. 46 б).

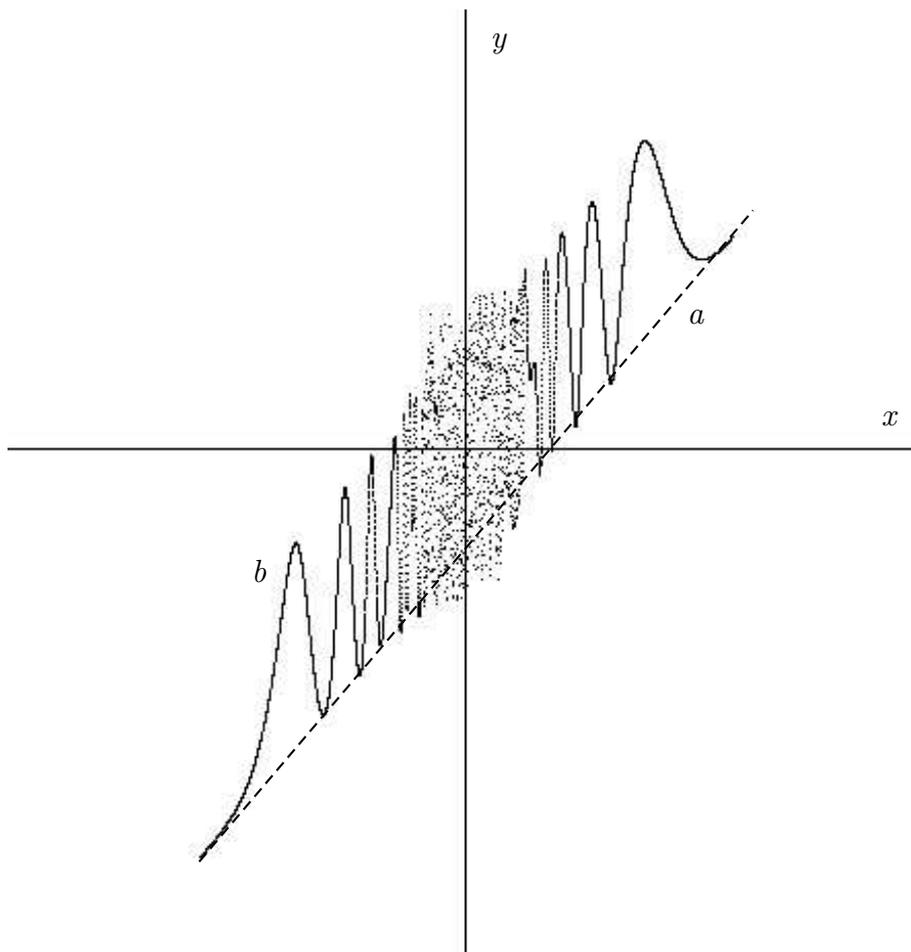


Рис. 46. Диаграмма рассеяния частицы жидкости на системе двух вихрей: а) $\varepsilon = 0$ б) $\varepsilon = 1$

3.6. Задача о трех притягивающих центрах

Введение В этом разделе приведены некоторые результаты численного исследования задачи о движении точечной массы в поле 3-х тяготеющих центров. Далее мы будем рассматривать только плоское движение точечной массы в поле трех центров, расположенных в той же плоскости. Приведем сначала основные результаты полученные для задачи двух центров.

Задача о движении точечной массы в гравитационном поле двух фиксированных тяготеющих центров впервые была сформулирована Эйлером в 18 веке, как промежуточный случай решения известной задачи о трех телах. В серии своих работ (Эйлер 1766a, 1766b и 1767) Эйлер проинтегрировал уравнения для двумерного случая, т.е. когда притягивающие центры и точечная масса находятся в одной плоскости. Почти век спустя Якоби (1842) показал, что потенциал полной трехмерной задачи разделяется в избыточных сферических координатах. Еще век спустя, Эрикссон и Хилл (1949) нашли точную форму третьего интеграла движения для полного трехмерного случая, в дополнение к известным интегралам энергии и углового момента относительно оси, проходящей через два тяготеющих центра. С этого момента задача двух центров стала рассматриваться, как пример разделяющегося потенциала, и была включена во многие учебники по теоретической механике.

В последствии задача о двух фиксированных центрах применялась для вычисления спутниковых траекторий в гравитационном поле Земли (Маршалл 1966, 1986), в квантомеханических расчетах молекулы положительного иона водорода, H_2^+ (Странд и Рейхард, 1979) и при расчетах ускорения электронов в момент столкновения атомов (Каллрат, 1993).

Депри (1962) систематизировал классификацию решений. Позднее, в 1979 году, Странд и Рейнхард провели классификацию подклассов решений. А в 1993 году Кантопулос рассчитал начальные условия и характеристические показатели для многих периодических траекторий.

В 2000 году Варвоглис построил фазовый портрет плоской задачи двух центров для случая, когда массы двух притягивающих тел одинаковы. Следуя Шарлье, Депри и Сранду и Ренхарду Варвоглис распределил возможные орбиты на три основных класса. В качестве критерия, по которому он выбирал к какому классу относится та или иная траектория, были значения

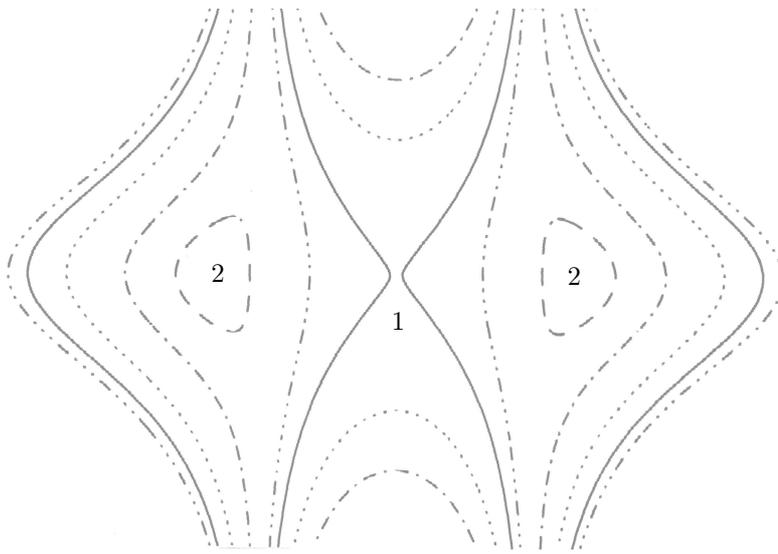


Рис. 47. Сечение Пуанкаре (x, P_x) задачи двух притягивающих центров: «1» — гиперболическая неподвижная точка, соответствующая нестабильной периодической траектории класса $P2$, «2» — параболические неподвижные точки, соответствующие двум стабильным периодическим траекториям класса $P1$, пунктирные линии — траектории класса $P1$, штрих-пунктирная линия — траектории класса $P2$, сплошные и штрих-три точки — траектории класса $P3$

двух интегралов движения и вид области возможного движения в конфигурационном пространстве.

К первому классу, $P1$, им были отнесены траектории, которые располагались внутри эллипса, который содержит оба притягивающих центра.

Ко второму классу, $P2$, им были отнесены траектории, которые располагались в просто-связанной области, содержащей оба притягивающих центра.

К третьему классу, $P3$, им были отнесены траектории, лежащие внутри двух разделенных областей, каждая из которых содержит притягивающий центр.

Согласно Варвоглису [56], для любых значений интеграла энергии, в задаче двух центров, всегда есть одна неустойчивая периодическая траектория, которая принадлежит к классу $P2$ и две устойчивых периодических траектории, принадлежащие к классу $P1$. На сечении (x, P_x) (см. рис. 47) эти траектории отображаются в виде одной гиперболической и двух эллиптических неподвижных точек, соответственно.

Задача $n > 2$ притягивающих центров была рассмотрена Болотиным в

1984 году [57], который доказал аналитически неинтегрируемость задачи при $E > 0$. В 2004 году Кнауф и Тайманов, опираясь на работы Болотина, аналитически показали, что при положительных энергиях $E > 0$ задача $n > 2$ притягивающих неподвижных центров является интегрируемой в гладком варианте [58]. Для отрицательных энергий задача трех центров никем до сих пор не рассматривалась.

Ниже приведены результаты численного исследования задачи трех тяготеющих центров для случая отрицательных энергий ($E < 0$), позволяющие сделать вывод об ее неинтегрируемости.

Уравнения движения. Система, описывающая движение точечного тела в поле трех тяготеющих центров является гамильтоновой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + U, \quad (72)$$

где $U = \sum_i \frac{\gamma_i}{|r_i|}$ — потенциальная энергия, $|r_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ — модуль расстояния от точечного тела до i -го тяготеющего центра, $\gamma_i < 0$ — гравитационный потенциал i -го центра.

Соответствующие уравнения движения

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}. \quad (73)$$

Отображение Пуанкаре. Отображение Пуанкаре для системы трех центров, расположенных в вершинах правильного треугольника: $(A, 0)$, $(-B, 0)$, $(0, C)$, $A = B = C = 0.5$, для разных значений E и γ_i , $\gamma_i = \gamma$ представлено на рис. 48- 50.

При больших отрицательных энергиях движение регулярное и точечное тело, в зависимости от начальных условий, движется вокруг одного из тяготеющих центров по эллиптической орбите (см. рис. 48). При смене центра, вокруг которого происходит движение, траектории не пересекаются, поэтому по классификации Варвоглиса, этот тип движения можно отнести к классу $P3$.

При увеличении энергии в сторону положительных значений тело начинает двигаться либо вокруг одного, либо вокруг двух, либо вокруг трех центров. При этом движение вокруг одного центра является регулярным, а

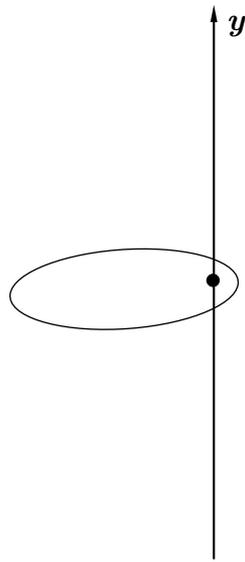
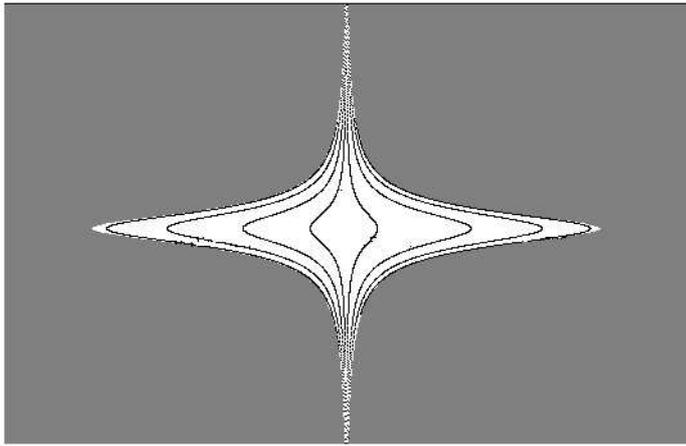


Рис. 48. Сечение Пуанкаре ($x = 0$) и вид характерных траекторий: $E = -0.5$, $\gamma = -0.01$

вокруг двух или трех - хаотическим (см. рис. 49). По классификации Варвоглиса, движение вокруг одного и двух центров можно, также, отнести к классу $P3$, а движение вокруг трех центров — к классу $P1$.

Если при неизменной энергии системы, в данном случае $E = -0.05$, увеличивать потенциальную энергию притяжения, то система испытывает переход из одного класса движения в другой (см. рис. 50), а именно из класса $P1$ в класс $P2$.

Таким образом, из полученных результатов можно сказать, что задача трех центров при отрицательных энергиях ($E < 0$) в общем случае является неинтегрируемой.

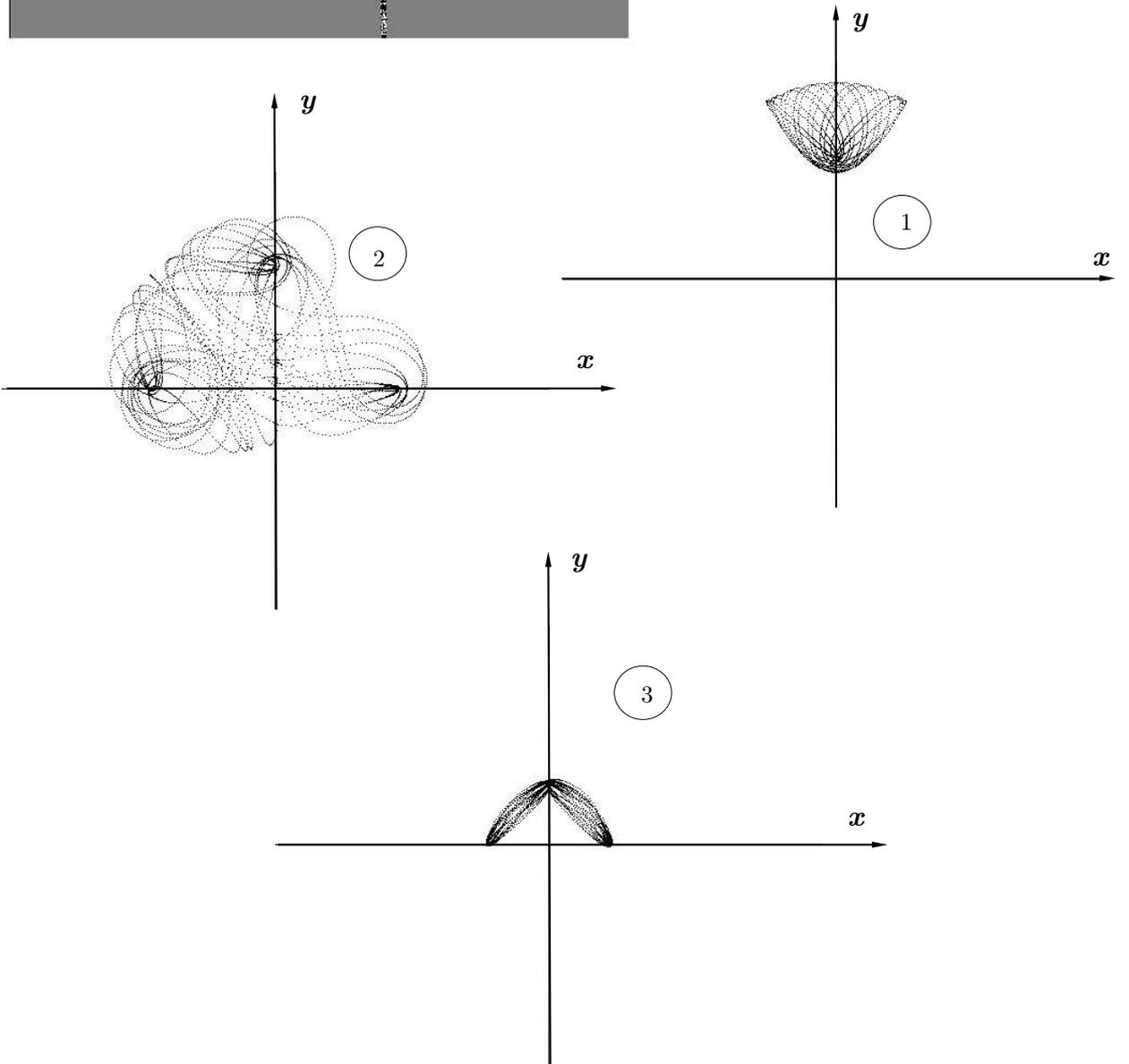
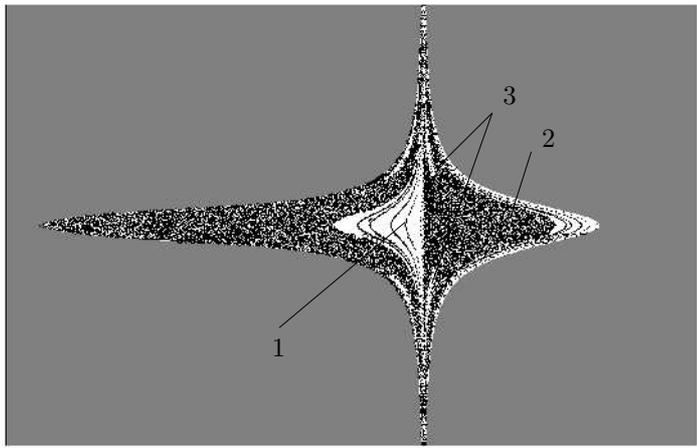


Рис. 49. Сечение Пуанкаре ($x = 0$) и вид характерных траекторий: $E = -0.05$, $\gamma = -0.01$

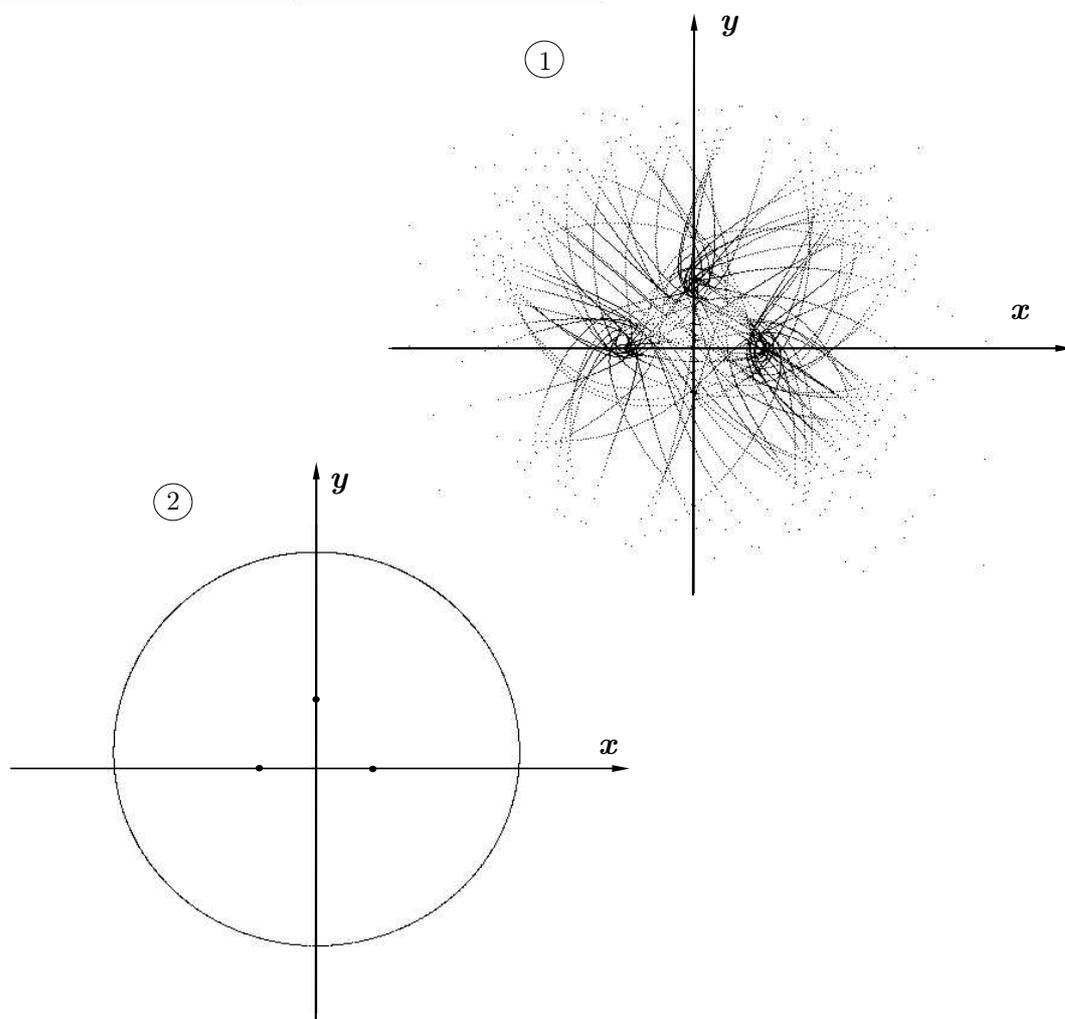
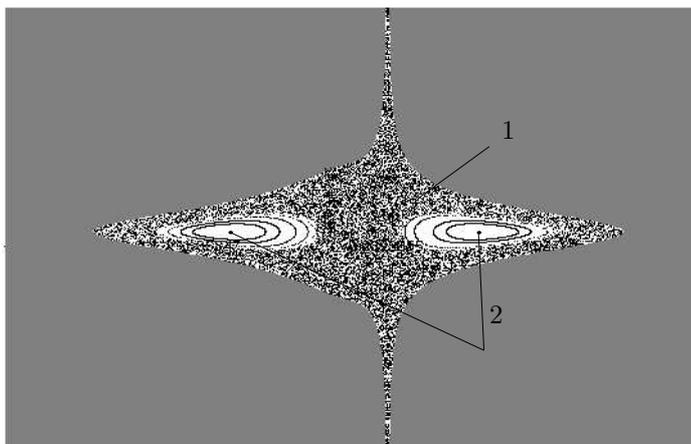


Рис. 50. Сечение Пуанкаре ($x = 0$) и вид характерных траекторий: $E = -0.05$, $\gamma = -0.05$

4. Заключение

1. Количественно описана задача о вращении тела вокруг центра масс под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов. Установлены численные значения параметров задачи, при которых начинают наблюдаться вероятностные эффекты.
2. Обнаружено новое явление для уравнений Стеклова-Чаплыгина, описывающих падение тяжелого твердого тела в идеальной жидкости - асимптотический хаос, когда при вполне конкретных (заданных) начальных условиях отсутствует определенность в асимптотическом поведении динамической системы. Установлены условия и значения параметров при которых возможно наблюдение этого явления.
3. Аналогичное явление обнаружено в поведении неголономной динамической системы, описывающей движение саней Чаплыгина. Установлено значение параметров задачи, при которых наблюдается асимптотический хаос.
4. Получено количественное описание движения одной из систем, проявляющих аддиабатический хаос, - системы уравнений Лиувилля. Показано, что для этой системы применение численных методов позволяет получить более полное представление об ее эволюции.
5. Найдены условия существования абсолютных хореографий в движении трех и четырех вихрей на сфере. Получены численные значения параметров, при которых наблюдается хаотическое рассеяние частиц жидкости на вихревой паре в периодически возмущенном потоке идеальной жидкости.
6. Показана неинтегрируемость и стохастическое поведение задачи трех неподвижных центров при отрицательных энергиях.

Список литературы

- [1] А. В. Борисов, И. С. Мамаев *Динамика твердого тела*, 2001, 384 с.
- [2] В. В. Козлов *Методы качественного анализа в динамике твердого тела*, 2000. 256 с.
- [3] G. Contopoulos *Order And Chaos in Dynamical Astronomy*, Springer, 2002, 624 p.
- [4] Нейштадт А. И. *Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов*. Изв. АН СССР, сер. мех. тв. тела, 1980, №6, с. 30–36.
- [5] Нейштадт А. И. *Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису*. Физика плазмы, 1986, т. 12, вып.8., с. 992.
- [6] Neistadt A. I. Probability phenomena due to separatrix crossing //Chaos. 1991. V.1 № 1. P. 42
- [7] Горячев Д. Н. *К вопросу о движении тяжелого тела в жидкости*, Изв. Импер. об-ва любителей естествознания при Московском Императорском Университете, 1893, т. 78 (н. 2), с. 59–61.
- [8] Козлов В. В. *О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости*. Изв. АН СССР, сер. мех. тв. тела, 1989, №5, с. 10–16.
- [9] Козлов В. В. *О полиномиальных интегралах динамических систем с полутора степенями свободы*. Мат. заметки, 1989, т. 45, №4, с. 46–52.

- [10] Козлов В. В. *Об устойчивости положений равновесия в нестационарном силовом поле*. Прикл. Мат. Мех., 1991, т. 55, №1, с. 12–19.
- [11] Рамоданов С. М. *Асимптотика решений уравнений Чаплыгина*, Вестн. МГУ, сер. мат. мех., 1995, № 3, с. 93–97.
- [12] Стеклов В. А. *Дополнения к сочинению «О движении твердого тела в жидкости»*, 1895, Харьков.
- [13] Стеклов В. А. *О движении твердого тела в жидкости*. Харьков, 1893, 234 с.
- [14] Чаплыгин С. А. *О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости*. Полн. собр. соч., т. 1, 1933, с. 133–150.
- [15] Bertolli M. L., Bolotin S. V. *Doubly asymptotic trajectories of Lagrangian systems in homogeneous force fields*, Ann. di Matem. pura ed. applicata, 1998 (IV), v. CLXXIV, p. 253–275.
- [16] Deryabin M. V. *On asymptotics of Chaplygin equation*. Reg. & Chaot. Dyn., 1998, V. 3, № 1, p. 93–97.
- [17] Чаплыгин С. А. *К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе*, Полн. собр. соч., М.-Л., 1948, т. 1, с. 15–25.
- [18] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. *Динамика неголономных систем*, М.: Наука, 1967, 519 с.

- [19] Мощук Н. К. *О движении саней Чаплыгина*, Прикл. Мат. Мех., 1987, т. 51, вып. 4., с. 546–551.
- [20] Нейштадт А. И. *Скачки адиабатического инварианта при переходах через сепаратрису и происхождение люка Кирквуда 3:1*. ДАН СССР, 1987, т. 295, № 1, с.47–50.
- [21] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Адиабатический хаос в динамике твердого тела*, Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т. 2, № 2, с. 30– 36.
- [22] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. *Математические аспекты классической и небесной механики*. УРСС, 2002, 414 с.
- [23] S. Wiggins. *Adiabatic chaos*. Phys. Lett. A, 1988, V.128, № 67. P. 339– 342
- [24] Нейштадт А И. *Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису*. Физика плазмы, 1986, т. 12, вып. 8, с. 992– 999.
- [25] Tennysonn J. L., Carry J. R., Escande D. F. *Change of the Adiabatic Invariant due to Separatrix Crossing*. Phys. Rev. Lett., 1986, V. 56, № 20, p.2117– 2120.
- [26] Neistadt A. I., Treshev D. V., Sidorenko V. V. *Stable periodic motions in the problem on passage through a separatrix*. Chaos, 1997. V.7(3), p.2–11.
- [27] Kaper T. J. Kovacic G. *A geometric criterion for adiabatic chaos*. J. Math. Phys., 1994, V. 35, № 3, p. 1202– 1218

- [28] Румер Ю. Б., Рывкин М. М. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1972, 400 с.
- [29] Нейштадт А. И. *Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису в системах с двумя степенями свободы*. ПММ, 1987, т. 51, вып. 5, с. 750–757.
- [30] Тимофеев А. В. *К вопросу о постоянстве адиабатического инварианта при изменении характера движения ЖЭТФ*, 1978, т. 75, Вып. 4, с. 1303–1308.
- [31] Жуковский Н. Е. *О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью*. Собр. соч. т. II, Гостехиздат, 1948.
- [32] Борисов А. В. *К задаче Лиувилля*. В сб. Численное моделирование в задачах механики, М.: МГУ, 1991, с. 110–118.
- [33] Neistadt A.I. *Probability phenomena die to separatrix crossing*. Chaos, 1991, V. 1, № 1, p.42–48.
- [34] Нейштадт А. И. *Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно меняющимся параметром*. ПММ, 1975, № 4, т. 39, с. 625.
- [35] Богомолов В. А. *Динамика завихренности на сфере*, Изв. АН СССР, Мех. жидк. и газа, 1977, № 6, с. 57–65.
- [36] Newton P. K. *The N-Vortex problem. Analytical Techniques*. Springer, 2001.

- [37] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Математические методы динамики вихревых структур* // В кн.: *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* / Под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева, М. А. Соколовского. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [38] Bagrets A. A., Bagrets D. A. *Nonintegrability of two problems in vortex dynamics* // *Chaos*. 1997. V. 7. № 3. P. 368–375.
- [39] A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev. *Reduction and Chaotic Behaviour of Point Vortices on a Plane and a Sphere*. Accepted for publication in the expanded volume of DCDS-B, devoted to the Fourth International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, Pomona, June 2004.
- [40] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. *Absolute and Relative Choreographies in the Problem of Point Vortices Moving on a Plane*, *Reg. & Chaot. Dyn.*, 2004, V. 9, № 2, p. 101–112.
- [41] Горячев Д. Н. *О некоторых случаях движения прямолинейных параллельных вихрей*. Москва: Унив. тип., 1898.
- [42] A. Chenciner, J. Gerver, R. Montgomery C. Simo *Simple Choreographic Motions of N bodies: A Preliminary Study*, // Springer. 2002. in *Geometry, Mechanics, and Dynamics*. volume dedicated to J. Marsden, P. 287-308.
- [43] Borisov A. V., Pavlov A. E. *Dynamics and Statics of vortices on a Plane and a Sphere*. I // *Reg. & Ch. Dynamics*. 1998. V. 3. № 1. P. 28–39.
- [44] Boatto S., Laskar J. *Point vortex cluster formation in the plane and*

- on the sphere. An energy bifurcation condition* // Chaos. 2003. V. 13. № 3. P. 824–835.
- [45] Lim C. C., Montaldi J., Roberts M. R. *Relative equilibria of point vortices on the sphere* // Physica D. 2001. 148. P. 97–135.
- [46] Montaldi J., Soulière A., Tokieda T. *Vortex dynamics on a cylinder* // SIAM J. Applied Dynamics Systems 2003. V. 2. № 3. P.417–430.
- [47] Glass K. *Equilibrium configurations for a system of N particles in the plane* // Physic Lett. 1997. A. V. 235. P. 591–596.
- [48] Aref H., Vainstein D. L. *Point vortices exhibit asymmetric equilibria* // Nature. 1998. V. 392. 23 April. P. 769–770.
- [49] Aref H., Newton P. K., Stremmer M., Tokieda T., Vainchtein D. L. *Vortex Crystals* // TAM Reports 2002.
http://www.tam.uiuc.edu/publications/tam_reports/2002/1008.pdf.
- [50] Soulière A., Tokieda T. *Periodic motions of vortices on surfaces with symmetry* // J. Fluid Mech. 2002. V. 460. P. 83–92.
- [51] Tokieda T. *Tourbillions dansants*, C. R. Acad. Sci. Paris, 2001, T. 333, Ser. I, p. 943–946.
- [52] Khushalani B. *The Families of Periodic Orbits Bifurcating from the Fixed Equilibria in a 48-Dimensional Systems*, Reg. & Chaot. Dyn., 2004, V. 9, № 2, p. 189–198.

- [53] Laurent-Polz F. *Point vortices on the sphere: a case with opposite vortices* // Nonlinearity. 2002. V. 15. № 1. P. 143–172.
- [54] Laurent-Polz F. *Relative periodic orbits in point vortex systems* // Nonlinearity. 2004. V. 17. № 6. P. 1989–2013.
- [55] Laurent-Polz F., Montaldi J., Roberts M. *Stability of Relative Equilibria of Point Vortices on the Sphere* // DS/0402430. <http://front.math.ucdavis.edu/math.DS/0402430>.
- [56] H. Varvoglis *The two centers problem revisited* 5th Alexander Von Humboldt Colloquium «New Developements in the Dynamics of Planetary Systems.»
- [57] Болотин С. В. *Неинтегрируемость задачи n -центров для $n > 2$* Вестник МГУ, сер. 1, математика и механика (1984), № 3, стр. 65-68.
- [58] A. Knauf, I. A. Taimanov *Integrability of the n -centre problem at high energies* arXiv:math.DS/0312429 v2 16 Jan 2004.
- [59] В. В. Козлов *О стохатизации плоскопараллельных течений идеальной жидкости* В сб. А. В. Борисов И. С. Мамаев «Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей».